

## **ВЛИЯНИЕ ФАЗОВОГО СДВИГА ИМПУЛЬСОВ ДВИГАТЕЛЬНЫХ ЕДИНИЦ НА СТРУКТУРУ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОМИОСИГНАЛА**

**А. М. Шайдук, С. А. Останин**

**ГОУ ВПО «Алтайский государственный университет», г. Барнаул**

Получена 27 мая 2011 г.

**Аннотация.** Проанализирована структура спектра электромиографического сигнала, представляющего собой сумму сдвинутых относительно друг друга по фазе периодически следующих импульсов. Аналитически установлена связь между статистическими свойствами случайной разности фаз и видом спектра мощности сигнала. Приведены результаты численного эксперимента.

**Ключевые слова:** спектральный анализ хаотических сигналов, математическое моделирование.

**Abstract.** The structure of the spectrum of the electromyographic signal is the sum of shifted relative to each other on stage from time to time following the pulse. The connection between the statistical properties of the random phase difference and a view of the power spectrum of the signal is found analytically. Results of numerical experiment are given.

**Key words:** spectral analysis of random signals, mathematical modeling.

Спектральные методы являются эффективным средством анализа периодических сигналов. Существуют такие сигналы, например интерференционные электромиограммы, которые изменяются во времени хаотически, хотя представляют собой аддитивную смесь периодических или квазипериодических последовательностей моноимпульсов электрического потенциала действия мышечных структур (двигательных единиц). С точки зрения диагностики состояния нервно-мышечной системы, интерес представляет проблема оценки статистических характеристик параметров таких последовательностей по спектру. Целью данной работы было установление

влияния фазового сдвига импульсов двигательных единиц на структуру спектра электромиосигнала.

Пусть зависимость напряжения от времени для потенциала отдельной двигательной единицы (ПДОДЕ) есть функция  $f(t)$ . Вид этой функции обычно устанавливается экспериментально инвазивными методами. Электромиографический сигнал одной двигательной единицы  $U(t)$ , снимаемый на кожном методом, представляет собой сумму отдельных потенциалов действия, сдвинутыми друг относительно друга на время  $\tau_n$

$$U_1(t) = \sum_{n=1}^N f(t - \tau_n), \quad (1)$$

где  $N$  – полное число отдельных импульсов ПДОДЕ, генерируемое за время регистрации электромиограммы.

При измерении на кожном методом регистрируемый сигнал создается обычно не одной двигательной единицей. Двигательные единицы, расположенные рядом с электродами, создают на последних некоторое напряжение такого же типа, как и сигнал (1), поскольку управляются одним нервным волокном. Однако, в силу различных причин, полный регистрируемый сигнал будет являться суперпозицией сигналов типа (1), случайно сдвинутых относительно друг друга по оси времени на некоторую величину  $\Delta t_k$ , где индекс  $k$  есть условный номер двигательной единицы.

В случае одинакового вклада некоторого количества  $K$  двигательных единиц, регистрируемый сигнал принимает вид

$$U(t) = \sum_{k=1}^K U_1(t - \Delta t_k) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N f(t - \tau_n - \Delta t_k). \quad (2)$$

В [2] показано, что из свойств преобразования Фурье следует мультипликативность спектра сигнала, генерируемого одной двигательной единицей. В [3] показано, что и в случае сигнала типа (2), в котором учитывается генерация сигналов многими двигательными единицами, мультипликативность спектра сохраняется и добавляется новый множитель, описывающий влияние

интерференции сигналов от множества двигательных единиц. Комплексная спектральная функция  $A(\omega)$  сигнала (2) есть

$$A(\omega) = A_0(\omega) \cdot A_1(\omega) \cdot A_2(\omega), \quad (3)$$

где

$$A_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt, \quad (4)$$

$$A_1(\omega) = \sum_{n=1}^N e^{-i\omega\tau_n}, \quad (5)$$

$$A_2(\omega) = \sum_{k=1}^K e^{-i\omega\Delta t_k}. \quad (6)$$

Измеряемая обычно спектральная мощность сигнала  $S(\omega)$  является вещественной функцией и определяется как

$$S(\omega) = |A(\omega)|^2 = |A_0(\omega)|^2 |A_1(\omega)|^2 |A_2(\omega)|^2 = S_0(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega). \quad (7)$$

Рассмотрим здесь, как влияет на наблюдаемый спектр случайный сдвиг фаз между различными двигательными единицами. Это влияние целиком описывается функцией  $S_2(\omega) = |A_2(\omega)|^2$ .

Для вычисления выражения (6) необходимо знать явный вид последовательности  $\Delta t_k$ . Поскольку эта последовательность формируется случайно, необходимо определить тип статистики, которой подчиняется величина  $\Delta t_k$ .

Вероятность  $dW(\Delta t_k)$  получить значение  $\Delta t_k$  в интервале  $d(\Delta t_k)$  определяется плотностью вероятности  $p(\Delta t_k)$ :  $dW(\Delta t_k) = p(\Delta t_k)d(\Delta t_k)$ . Если требуется вычислить спектральную функцию (6) одной реализации, необходимо задать плотность вероятности  $p(\Delta t)$  и провести численное моделирование суммы (6), используя соответствующий генератор случайных чисел.

На рисунке 1 приведен результат моделирования компоненты спектра мощности  $S_2(\omega) = |A_2(\omega)|^2$  для равномерного распределения величины  $\Delta t_k$  на отрезке  $-T_0/2 < \Delta t_k < T_0/2$ , т.е плотность вероятности

$$p(\Delta t_k) = \begin{cases} 1/T_0, & |\Delta t_k| < T_0/2; \\ 0, & |\Delta t_k| > T_0/2. \end{cases} \quad (8)$$

Из рисунка 1 видно, что на частоте  $\nu = 1/T_0$  функция  $S_2(\omega)$  обращается в ноль. Это приведет к возникновению характерного провала в полном спектре  $S(\omega)$  электромиосигнала. Заметим, однако, что этот результат справедлив для конкретной реализации.

На рисунке 2 приведен результат численного моделирования  $S_2(\omega)$  для гауссовского распределения плотности вероятности  $p(\Delta t)$  со стандартным отклонением  $\sigma = T_0/2$ , т.е.

$$p(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9)$$

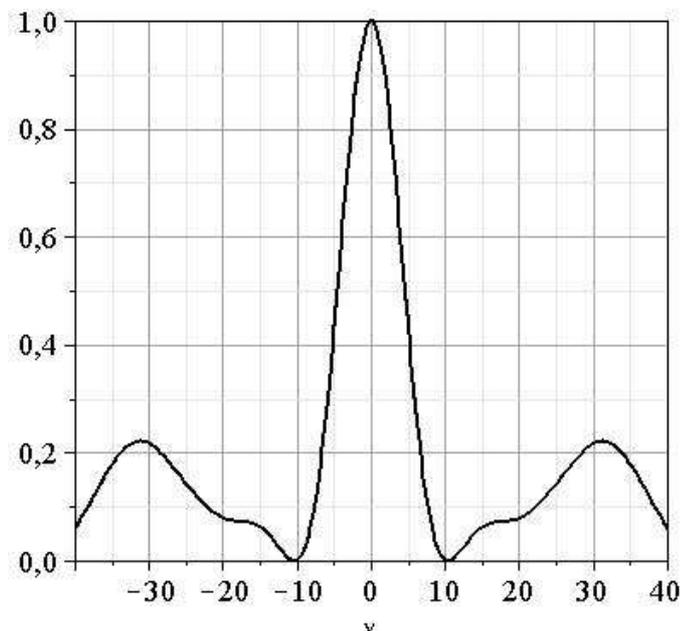


Рис. 1. Реализация спектральной плотности  $S_2(\omega)$ , обусловленной случайным сдвигом фаз. Равномерное распределение  $0,05 \text{ с} < \Delta t_k < 0,05 \text{ с}$ , число двигательных единиц  $K = 20$ .

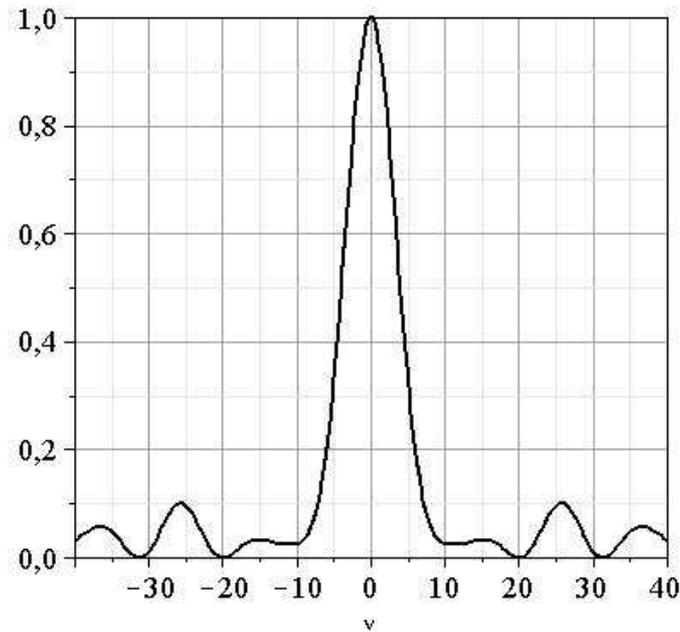


Рис. 2. Реализация спектральной плотности  $S_2(\omega)$ , обусловленной случайным сдвигом фаз. Гауссовское распределение со стандартным отклонением 0,05 с, число двигательных единиц  $K = 20$ .

В этой реализации на частоте  $\nu = 1/T_0$  в полном спектре  $S(\omega)$  минимума наблюдаться не будет, но появляются минимумы на приблизительно удвоенной частоте.

Вычислим теперь спектр мощности  $\langle S_2(\omega) \rangle$  усредненный по бесконечному числу реализаций:

$$\langle S_2(\omega) \rangle = \langle |A_2(\omega)|^2 \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K e^{-i\omega(\Delta t_k - \Delta t_l)} \right\rangle. \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой среднее от суммы  $K^2$  слагаемых типа  $I_{kl} = \exp(-i\omega(\Delta t_k - \Delta t_l))$ . Среднее от суммы равно сумме средних, поэтому достаточно найти среднее слагаемого  $I_{kl}$ .

$$\langle I_{kl} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\Delta t_k - \Delta t_l)} p(\Delta t_k) p(\Delta t_l) d(\Delta t_k) d(\Delta t_l). \quad (11)$$

При  $k = l$  в силу нормировки плотности вероятности  $\langle I_{kl} \rangle = 1$ . Если  $k \neq l$ , то

$$\langle I_{kl} \rangle = A_p(\omega)A_p^*(\omega), \quad (12)$$

где

$$A_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta t)e^{-i\omega(\Delta t)}d(\Delta t) \quad (13)$$

спектральная функция плотности вероятности распределения величины  $\Delta t$ .

Таким образом, спектр мощности  $\langle S(\omega) \rangle$  полностью определяется спектром мощности плотности вероятности  $p(\Delta t)$ . Теперь, выполняя суммирование в (10) с учетом (12), получаем окончательно

$$\langle S_2(\omega) \rangle = K^2 \left( \frac{1}{K} + \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \cdot A_p(\omega)A_p^*(\omega) \right). \quad (14)$$

Для получения количественных оценок необходимо использовать какой-либо явный тип плотности вероятности. Пусть, например, используется равномерное распределение (8). В этом случае

$$A_p(\omega) = \frac{2}{\omega T_0} \sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right),$$

и средний по реализациям спектр мощности  $\langle S(\omega) \rangle$  есть

$$\langle S_2(\omega) \rangle = K^2 \left( \frac{1}{K} + \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \cdot \frac{4}{\omega^2 T_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) \right). \quad (15)$$

На рисунке 3 приведен нормированный на  $K$  спектр мощности  $\langle S_2(\omega) \rangle$  для равномерного распределения величины случайного сдвига фаз. Теперь этот множитель  $\langle S_2(\omega) \rangle$  не обращается в ноль и спектральные линии в спектре полного сигнала исчезнуть не могут. Будут наблюдаться характерные провалы на нескольких первых частотах  $\nu = n/T_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Минимальное значение множителя  $\langle S_2(\omega) \rangle$  есть  $K$ , т.е. спектральная мощность полного сигнала просто пропорциональна числу участвующих в его формировании двигательных единиц. Интерференционные эффекты наблюдаются лишь в диапазоне частот вблизи нуля  $|\Delta\nu| < 1/T_0$

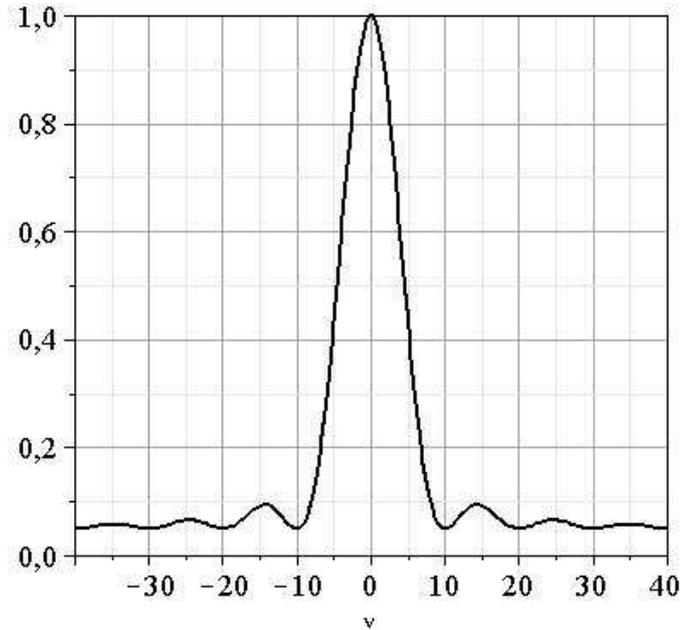


Рис. 3. Средний спектр мощности  $\langle S_2(\omega) \rangle$ , обусловленный случайным сдвигом фаз. Равномерное распределение  $0,05 \text{ с} < \Delta t_k < 0,05 \text{ с}$ , число двигательных единиц  $K = 20$ .

Если случайный сдвиг фаз подчиняется нормальному распределению типа (9) со стандартным отклонением  $\sigma$ , то

$$A_p(\omega) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}\right),$$

и усреднение по реализациям дает

$$\langle S_2(\omega) \rangle = K^2 \left( \frac{1}{K} + \left(1 - \frac{1}{K}\right) \cdot \exp(-\sigma^2 \omega^2) \right). \quad (16)$$

Этот спектр мощности (нормированный на  $K^2$ ) приведен на рисунке 4.

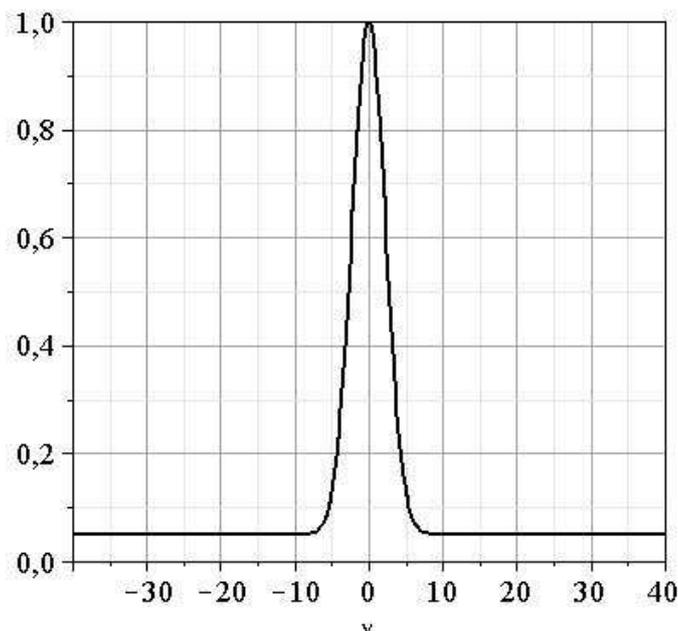


Рис. 4. Средний спектр мощности  $\langle S_2(\omega) \rangle$ , обусловленный случайным сдвигом фаз. Гауссовское распределение со стандартным отклонением 0,05 с, число двигательных единиц  $K = 20$ .

При таком типе статистики усреднение по реализациям приводит к исчезновению характерных «провалов» в полном спектре мощности, хотя в отдельных реализациях они могут появляться. Интерференционные эффекты от сложения сигналов от разных двигательных единиц в спектре проявляются лишь в диапазоне частот близи нуля. Диапазон частот определяется стандартным отклонением  $|\Delta\nu| < 1/\sigma$ . Если величина дисперсии сравнима с характерным периодом следования импульсов в одной двигательной единице, то интерференционные эффекты могут совсем не проявляться в усредненном по реализациям полном спектре мощности. Спектральная мощность сигнала в этом случае практически на всех частотах будет пропорциональна количеству участвующих в его формировании двигательных единиц.

## Литература

1. Физиология человека / Под ред. Г.И. Косицкого. – М.: Медицина, 1985. – 544 с.
2. Рангайян Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход / Пер. с англ. под ред. А.П. Немирко. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2007. – 440 с.
3. Шайдук А.М., Останин С.А. Моделирование электромиографического сигнала средствами LabVIEW. Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул: Изд.-во АлтГУ – Ч.1(65), 2010. – С. 195 – 201.