

УДК 47.05.17

О ВЛИЯНИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЯ ЗАДЕРЖЕК СИГНАЛОВ В МНОГОПОЗИЦИОННЫХ ПРИЕМНЫХ СИСТЕМАХ

Ю. А. Земский

Учреждение Российской академии наук Институт динамики геосфер РАН

Получена 16 мая 2011 г.

Аннотация. Описано влияние когерентных и некогерентных ошибок при измерении задержек сигналов одного источника несколькими приемными устройствами многопозиционных систем. Приводятся теоретические описания возможных ошибок при измерении задержек сигналов и результаты математического моделирования, показывающие зависимость случайных и когерентных составляющих этих ошибок. Эти ошибки могут быть учтены при разработке и конструировании приемных многопозиционных систем.

Ключевые слова: дисперсия, время задержки, многопозиционный приемный модуль, отношение сигнал/шум.

Abstract. The influence of coherent and incoherent faults of measurement of the signal delays of one source by several receiving devices of multiposition systems is described in the article. The theoretical descriptions of possible faults in measurement of signal delays and the results of the mathematical simulation, which show the dependence of random and coherent components of these errors are also given in the article. These errors can be taken into account in development and construction of receiving multiposition systems.

Keywords: the dispersion, delay time, multiposition, the receiving module, ratio signal-to-noise.

При измерении задержек сигналов одного источника несколькими приемными устройствами многопозиционных систем могут возникать различные ошибки, которые необходимо учитывать при разработке и конструировании этих систем.

Рассмотрим приемную систему, состоящую из трех приемных модулей, взаимное положение которых определено векторами \vec{r}_{12} , \vec{r}_{23} и \vec{r}_{31} (рис. 1). При этом предполагается, что фронт распространения принимаемой электромагнитной волны плоский [1].

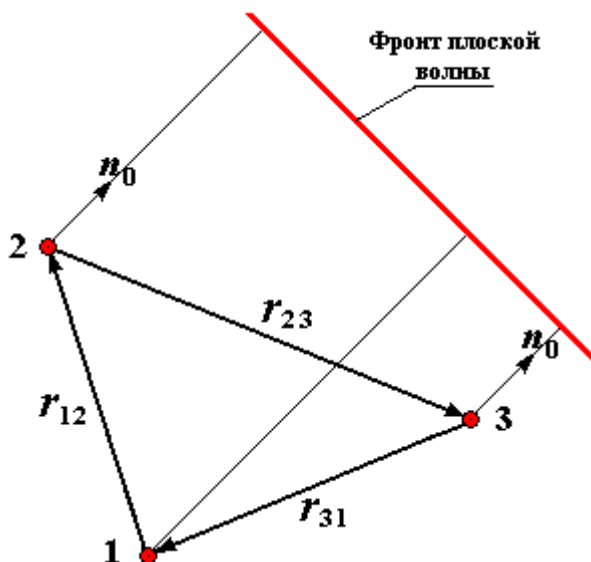


Рис.1. Схема расположения трех приемных модулей.

Задержка прихода волнового сигнала в точку 1 по отношению к точке 2 будет равна: $\tau_{12} = \frac{(\vec{r}_{12} \cdot \vec{n}_0)}{c}$, где \vec{n}_0 – единичный вектор направления прихода плоского фронта волны, $(\vec{r}_{12} \cdot \vec{n}_0)$ – скалярное произведение векторов, c – скорость распространения волнового сигнала.

Аналогично определяются задержки: $\tau_{23} = \frac{(\vec{r}_{23} \cdot \vec{n}_0)}{c}$ и $\tau_{31} = \frac{(\vec{r}_{31} \cdot \vec{n}_0)}{c}$.

Как видно из рис. 1, направления векторов, определяющих геометрию приемной системы, выбраны так, что:

$$\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31} = 0 \quad (1)$$

Подставляя значения времени задержки, получим очевидное соотношение:

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = \frac{1}{c} ((\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31}) \cdot \vec{n}_0) = 0 \quad (2)$$

С выхода приемных модулей на систему обработки информации поступают три сигнала: S_1 , S_2 и S_3 , имеющих следующий вид:

$$S_1 = S(t) + n_1(t), \quad S_2 = S(t - \tau_1) + n_2(t), \quad S_3 = S(t - \tau_2) + n_3(t), \quad (3)$$

где: S – сигнал удаленного источника; τ_1 и τ_2 – задержки этого сигнала; n_1 , n_2 и n_3 – помехи.

Далее, для различных пар сигналов на временном интервале $T = t_2 - t_1$ производится вычисление трех корреляционных интегралов [2] C_{12} , C_{23} и C_{31} :

$$C_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} S_1(t) \cdot S_2(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [S(t) + n_1(t)] \cdot [S(t - \tau_1 - \tau) + n_2(t - \tau)] dt, \quad (4)$$

$$C_{23}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} S_2(t) \cdot S_3(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [S(t - \tau_1) + n_2(t)] \cdot [S(t - \tau_2 - \tau) + n_3(t - \tau)] dt, \quad (5)$$

$$C_{31}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} S_3(t) \cdot S_1(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [S(t - \tau_2) + n_3(t)] \cdot [S(t - \tau) + n_1(t - \tau)] dt, \quad (6)$$

Исходя из полученных соотношений, поиск времени задержек между сигналами заключается в определении τ_{ij} соответствующих максимальным значениям C_{ij} , т.е. фактически в решении уравнений $\frac{dC_{ij}}{d\tau} = 0$.

Все дальнейшие вычисления построены при следующих допущениях:

1. Дисперсии помех гораздо меньше дисперсии сигнала: $\sigma_n^2 \ll \sigma_s^2$.
2. Функции сигнала (S) и помех (n_1 , n_2 и n_3) дифференцируемы на временном интервале $[0, T]$.

3. Величина сигнала равна нулю на границах временного интервала интегрирования $S(t_1) = S(t_2) = 0$, т.е. фактически рассматривается импульсный сигнал неопределенной длительности.

4. Величины задержек между сигналами гораздо меньше временного интервала интегрирования T .

Произведя перемножение под интегралами (4) - 6) и используя допущение о том, что дисперсии помех гораздо меньше дисперсии сигнала, каждый корреляционный интеграл (C_{ij}) можно приближенно представить в виде трех функций, например:

$$C_{12}(\tau) \cong \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S(t - \tau_1 - \tau) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t - \tau_1 - \tau) \cdot n_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_2(t - \tau) dt \quad (7)$$

Чтобы не загромождать выкладок, здесь и далее перед интегралами опущены множители $\frac{1}{T}$.

Максимального значения C_{12} достигает при $\tau = -\tau_1 + \chi$, где $(-\tau_1)$ - истинная величина задержки, а, ввиду малости помехи, χ будет соответственно малой ошибкой измерения. Сделав в (7) замену переменной $\tau = -\tau_1 + \chi$ получим:

$$C_{12}(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S(t - \chi) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t - \chi) \cdot n_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_2(t + \tau_1 - \chi) dt = Q_1(\chi) + Q_2(\chi) + Q_3(\chi), \quad (8)$$

где $Q_1(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S(t - \chi) dt$, $Q_2(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t - \chi) \cdot n_1(t) dt$ и

$$Q_3(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_2(t + \tau_1 - \chi) dt.$$

Если разложить $C_{12}(\chi)$ в ряд Тейлора по малым значениям χ и решить уравнение по поиску τ_{12} , соответствующих максимальным значениям C_{12} , т.е.

$\frac{dC_{12}}{d\chi} = 0$, то можно в явном виде получить выражение для ошибки нахождения

задержки $\chi = \delta\tau_{12}$. Для $Q_1(\chi)$ это разложение имеет вид:

$$Q_1(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S(t - \chi) dt \cong Q_1(0) + Q_1'(0) \cdot \chi + \frac{1}{2} Q_1''(0) \cdot \chi^2, \quad (9)$$

где: $Q_1(0) = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt$; $Q_1'(0) = -\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S'(t) dt$; $Q_1''(0) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt$.

Можно показать, что значение первой производной $\left. \frac{dQ_1}{d\chi} \right|_{\chi=0} = Q_1'(0) = 0$:

$$Q_1'(0) = -\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S'(t) dt = -\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot dS(t) = -S^2(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S'(t) dt = -Q_1'(0), \quad \text{т.е.}$$

$$Q_1'(0) = 0.$$

Здесь применяются следующие математические операции: сначала $S'(t)$ заносится под знак дифференциала, а затем производится интегрирование по частям и используется допущение 3 ($S(t_1) = S(t_2) = 0$). Таким образом, для $Q_1(\chi)$ имеем приближенное выражение:

$$Q_1(\chi) \cong Q_1(0) + \frac{1}{2} Q_1''(0) \cdot \chi^2 \quad (10)$$

Аналогично получают разложения в ряд по малым χ для $Q_2(\chi)$ и $Q_3(\chi)$:

$$Q_2(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t - \chi) \cdot n_1(t) dt \cong Q_2(0) + Q_2'(0) \cdot \chi, \quad (11)$$

где: $Q_2(0) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_1(t) dt$ и $Q_2'(0) = -\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_1(t) dt$.

$$Q_3(\chi) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_2(t + \tau_1 - \chi) dt \cong Q_3(0) + Q_3'(0) \cdot \chi, \quad (12)$$

где: $Q_3(0) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_2(t + \tau_1) dt$ и $Q_3'(0) = \int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_2(t + \tau_1) dt$.

Объединив полученные выражения (10) - (12) для разложения $C_{12}(\chi)$ по малым χ имеем:

$$C_{12}(\chi) = Q_1(\chi) + Q_2(\chi) + Q_3(\chi) \cong [Q_1(0) + Q_2(0) + Q_3(0)] + [Q_2'(0) + Q_3'(0)] \cdot \chi + \frac{1}{2} Q_1''(0) \cdot \chi^2 \quad (13)$$

Приравняв нулю производную по χ (13) и решив получившееся уравнение, получим значение ошибки измерения задержки $\delta\tau_{12}$:

$$\frac{dC_{12}}{d\chi} = Q_1''(0) \cdot \chi + Q_2'(0) + Q_3'(0) = 0, \text{ откуда: } \chi = -\frac{Q_2'(0) + Q_3'(0)}{Q_1''(0)} = \delta\tau_{12}.$$

Таким образом, выражение для $\delta\tau_{12}$ имеет вид:

$$\delta\tau_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt} - \frac{\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_2(t + \tau_1) dt}{\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt} = \delta_1 - \delta_2. \quad (14)$$

Аналогичным образом, из корреляционного интеграла (5) для C_{23} , можно найти выражение для определения ошибки измерения задержки $\delta\tau_{23}$. Для этого сначала также необходимо ввести новую переменную χ , используя преобразование: $\tau = \tau_1 - \tau_2 + \chi$, и привести C_{23} к виду:

$$C_{23}(\chi) \cong \int_{t_1}^{t_2} S(t - \tau_1) \cdot S(t - \tau_1 - \chi) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t - \tau_1 - \chi) \cdot n_2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t - \tau_1) \cdot n_3(t - \tau_1 - \tau_2 - \chi) dt. \quad (15)$$

Затем, используя допущение 4, в (15) производим замену переменной интегрирования $t - \tau_1 \Rightarrow t$:

$$C_{23}(\chi) \cong \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S(t - \chi) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t - \chi) \cdot n_2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot n_3(t - \tau_2 - \chi) dt.$$

Проделав все необходимые вычисления, для $\delta\tau_{23}$ получим выражение:

$$\delta\tau_{23} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_2(t + \tau_1) dt}{\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt} - \frac{\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_3(t + \tau_2) dt}{\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt} = \delta_2 - \delta_3 \quad (16)$$

И, наконец, приведем выражение для определения ошибки измерения задержки $\delta\tau_{31}$, которое можно получить из корреляционного интеграла (6) для C_{31} :

$$\delta\tau_{31} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_3(t + \tau_2) dt}{\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt} - \frac{\int_{t_1}^{t_2} S'(t) \cdot n_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot S''(t) dt} = \delta_3 - \delta_1 \quad (17)$$

Таким образом, используя (1), (2), а также сравнивая выражения (14), (16) и (17), для приемной системы из трех приемных модулей получаем три простых соотношения:

1. Для суммы векторов, соединяющих точки размещения модулей:
 $\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31} = 0$.
2. Для алгебраической суммы задержек сигналов: $\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0$.
3. Для ошибок измерения задержек сигналов при малых отношениях шум/сигнал: $\delta\tau_{12} + \delta\tau_{23} + \delta\tau_{31} = 0$, где: $\delta\tau_{12} = \delta_1 - \delta_2$; $\delta\tau_{23} = \delta_2 - \delta_3$; $\delta\tau_{31} = \delta_3 - \delta_1$.

Далее проведем статистическое моделирование корреляционного метода измерения задержек прихода сигнала при помехах, сравнимых с сигналом по дисперсии.

В качестве сигналов и помех использовались подвергнутые полосовой фильтрации псевдослучайные последовательности с нормальным распределением размером 16384 выборки. При отношениях шум/сигнал (σ_n / σ_s) в интервале от 0,1 до 1,5 были получены оценки задержек $\tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \delta\tau_{ij}$, где τ_{ij} – истинная величина задержек и $\delta\tau_{ij}$ – ошибка измерения. Ансамбль испытаний составлял 1000 измерений, что обеспечило не хуже чем 3% точность получаемых оценок [4].

В процессе моделирования вычислялись:

1. Коэффициенты корреляции ошибок измерения задержек между сигналами: $C(\delta\tau_{12}, \delta\tau_{23})$, $C(\delta\tau_{23}, \delta\tau_{31})$ и $C(\delta\tau_{31}, \delta\tau_{12})$.

2. Дисперсия суммы ошибок измерения задержек: $\sigma^2(\delta\tau_{12} + \delta\tau_{23} + \delta\tau_{31})$, в виде безразмерной величины:

$$R = \frac{\sqrt{3} \sigma(\delta\tau_{12} + \delta\tau_{23} + \delta\tau_{31})}{\sigma(\delta\tau_{12}) + \sigma(\delta\tau_{23}) + \sigma(\delta\tau_{31})}, \quad (18)$$

Такой вид коэффициента R выбран из следующего: если $\delta\tau_{12}$, $\delta\tau_{23}$ и $\delta\tau_{31}$ будут независимыми случайными величинами с дисперсиями равными σ_τ^2 , то в этом случае величина R должна быть порядка единицы.

Полученные результаты моделирования приведены на графиках (рис. 2, рис. 3).

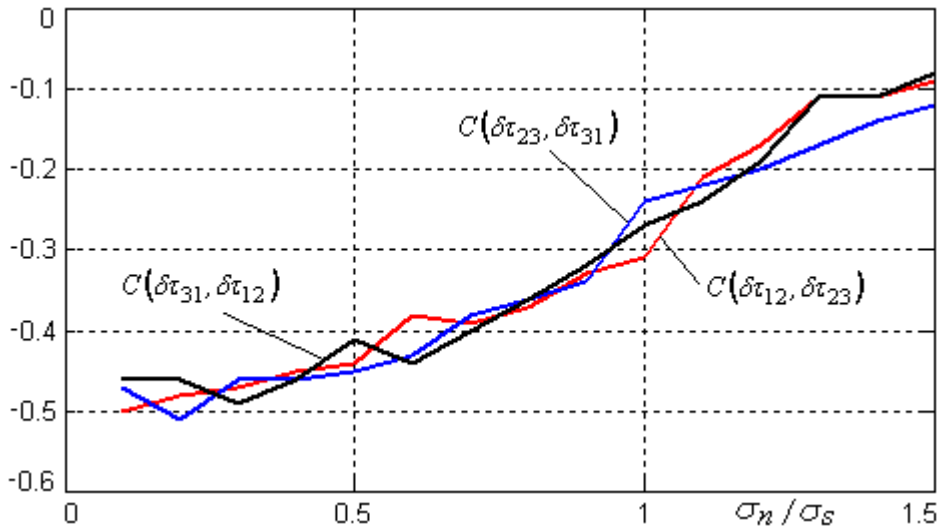


Рис. 2. Коэффициенты корреляции между ошибками измерения задержек сигналов.

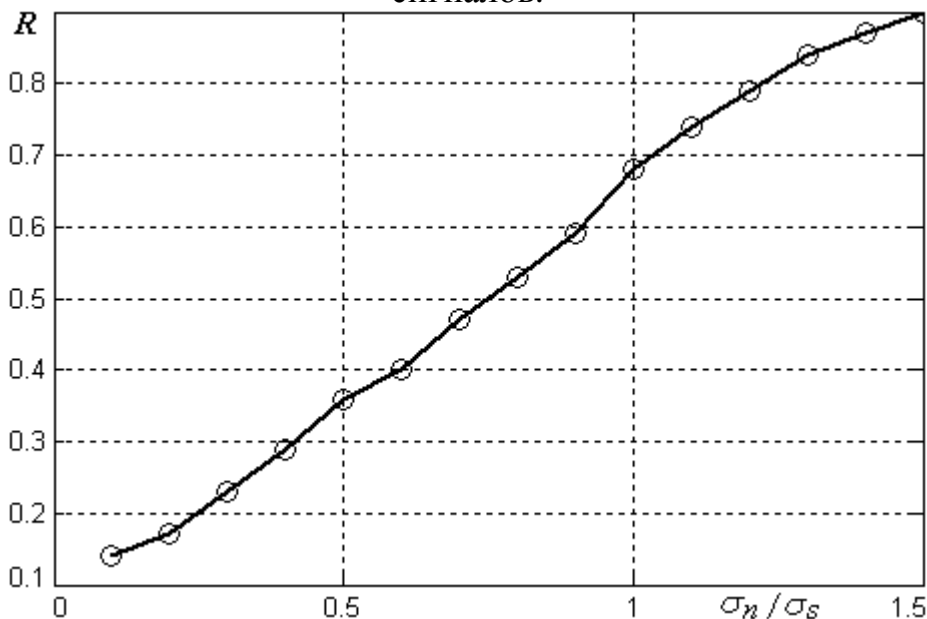


Рис. 3. Зависимость безразмерного коэффициента R от отношения шум/сигнал.

Анализируя полученные результаты, следует отметить значительный уровень отрицательной корреляции между ошибками измерения задержек $\delta\tau_{ij}$ в диапазоне отношений σ_N / σ_S от 0,1 до 1,0, что говорит о существенной статистической связи между этими величинами в указанном диапазоне.

Кроме этого, если бы $\delta\tau_{12}$, $\delta\tau_{23}$ и $\delta\tau_{31}$ были независимы, то коэффициент R , как отмечалось выше, должен быть равен порядка единицы, а фактически в этом диапазоне σ_n / σ_s величина R не превышала 0,7.

Необходимо отметить, что приведенные выше результаты моделирования практически не зависят (в пределах точности проведенных расчетов) от величин относительных задержек между сигналами.

Полученные данные подтверждают соотношения для ошибок, возникающих при измерении задержек корреляционным способом, и позволяют предложить следующие формулы для этих ошибок:

$$\delta\tau_{12} = \delta_1 - \delta_2 + \varepsilon_{12}, \quad \delta\tau_{23} = \delta_2 - \delta_3 + \varepsilon_{23}, \quad \delta\tau_{31} = \delta_3 - \delta_1 + \varepsilon_{31} \quad (19)$$

где δ_1 , δ_2 , δ_3 и ε_{12} , ε_{23} , ε_{31} являются независимыми случайными величинами, причем δ_i можно назвать “когерентной”, а ε_{ij} случайной компонентой ошибок измерения задержек.

Дисперсии δ_i и ε_{ij} можно определить из значений коэффициента R . Действительно, если подставить формулы (19) в выражение (18) для R то получим:

$$R = \frac{\sqrt{3} \sigma(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31})}{\sigma(\delta\tau_{12}) + \sigma(\delta\tau_{23}) + \sigma(\delta\tau_{31})}. \quad (20)$$

Считая, что $\sigma(\delta\tau_{12}) = \sigma(\delta\tau_{23}) = \sigma(\delta\tau_{31}) = \sigma_\tau$ и $\sigma(\varepsilon_{12}) = \sigma(\varepsilon_{23}) = \sigma(\varepsilon_{31}) = \sigma_\varepsilon$, из (20) несложно получить следующее простое соотношение:

$$\frac{\sigma(\varepsilon)}{\sigma_\tau} = R. \quad (21)$$

Напомним, что σ_τ^2 является дисперсией полной ошибки измерения задержек между сигналами. Значения $\sigma_\varepsilon / \sigma_\tau$ представлены на графике (рис. 4) в виде кривой синего цвета.

Теперь, используя любую из формул (19), например первую, запишем: $\sigma^2(\delta\tau_{12}) = \sigma^2(\delta_1) + \sigma^2(\delta_2) + \sigma^2(\varepsilon_{12})$. Положив $\sigma(\delta_1) = \sigma(\delta_2) = \sigma_\delta$ и $\sigma(\delta\tau_{12}) = \sigma_\tau$, будем иметь: $\sigma_\tau^2 = 2\sigma_\delta^2 + \sigma_\varepsilon^2$. Подставив в это выражение значение для σ_ε (21), получим:

$$\frac{\sigma_\delta}{\sigma_\tau} = \sqrt{\frac{1-R^2}{2}}. \quad (22)$$

Значения $\sigma_\delta / \sigma_\tau$ представлены в виде кривой красного цвета на рис. 4. Здесь же приведена пунктиром кривая $\sqrt{2}\sigma_\delta / \sigma_\tau$, т.е. сигма величин $\delta_i - \delta_j$ ($i \neq j$). Из этих графиков видно, что практически до значений шум/сигнал равных единице, дисперсии “когерентных” компонент ошибки преобладают над случайными. При этом, чем меньше соотношение уровня помехи к уровню сигнала, тем больше влияние когерентных компонент ошибки измерения сигнала.

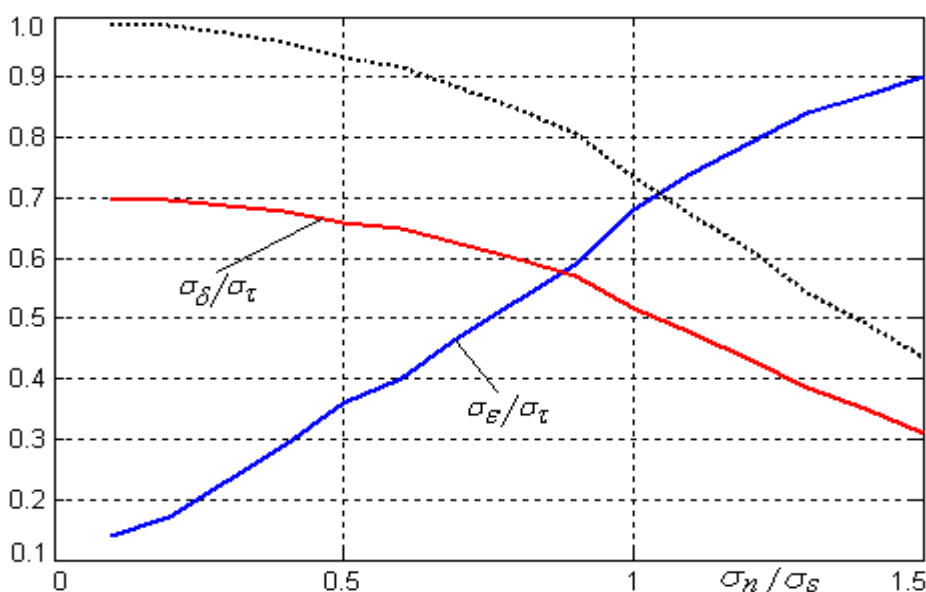


Рис. 4. Зависимости дисперсий случайной (σ_ε) и “когерентной” (σ_δ) составляющих ошибки измерения задержки между сигналами.

Таким образом, проведенные расчеты по ошибкам измерения задержек между сигналами в многопозиционных приемных системах показали, что ошибки измерений не являются случайными величинами. Отмечен значительный уровень отрицательной корреляции между ошибками измерения задержек $\delta\tau_{ij}$ в диапазоне отношений σ_N / σ_S от 0,1 до 1,0, что говорит о существенной статистической связи между этими величинами в указанном диапазоне. Коэффициенты корреляции между ошибками измерения задержек сигналов находятся в диапазоне от 0,1 до 0,7 и зависят от отношения дисперсии помех к дисперсии сигнала. Чем больше это отношение, тем меньше коэффициент корреляции.

Кроме того, при отношениях шум/сигнал (σ_n / σ_s) в интервале от 0,1 до 0,8 когерентная составляющая ошибки измерения задержки между сигналами выше случайной составляющей.

Приведенные выше результаты моделирования практически не зависят (в пределах точности проведенных расчетов) от величин относительных задержек между сигналами.

Полученные результаты могут оказаться полезными при расчетах приемных систем, например многопозиционных интерферометрических систем с числом приемных модулей $N > 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала. – М.: Советское радио, 1970.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В трех книгах. Книга вторая. - М.: Советское радио, 1975.
3. Вологдин Э.И. Повышение точности преобразования временных интервалов в цифровой код методом корреляционного усреднения. // Автометрия. - СО АН СССР, 1969, № 2.
4. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973.