УДК 539.3; 537.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ КОМПОЗИТОВ

А. А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2016 г.

Аннотация. Разработаны математические двухуровневые структурные модели электромагнитоупругости композитов с учетом связанностей деформационных, электрических и магнитных полей. Представлены результаты прогнозирования 21-й независимой константы эффективных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитоупругих свойств однонаправленного волокнистого композита PVF/феррит на основе решения связанной краевой задачи электромагнитоупругости; использованы новые решения для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды.

Ключевые слова*:* пьезокомпозит, краевая задача электромагнитоупругости, эффективные свойства.

Abstract. Mathematical two-level structural models of electromagnetoelasticity of composites taking into account coherences of deformation, electric and magnetic fields are developed. Results of prediction of the 21 independent constant of effective transversal-isotropic piezoelectromagnetoelastic properties of the unidirectional fibrous composite PVF/ferrite are presented on the basis of the solution of the boundary-value problem of electromagnetoelasticity; new decisions for singular components of the second derivative Green functions for homogeneous transversal-isotropic piezoelectromagnetoelastic medium are used.

Key words: piezocomposite, boundary-value problem of electromagnetoelasticity, effective properties.

Введение

Разработка новых пьезоактивных пироэлектромагнитных материалов и создание устройств на их основе - активно развивающееся направление материаловедения [1, 2]; композиты находят применение в тех случаях, когда традиционные материалы: кристаллы, керамики, сплавы не обеспечивают необходимого комплекса физико-механических характеристик. Поведение и свойства пьезокомпозитов обуславливаются сложным взаимодействием посредством взаимосвязанных деформационных, электрических и магнитных полей большого числа образующих структуру материала элементов [3-7]. Возможность оптимизации и управления структурой композитов открывает путь создания новых пьезоматериалов с наперед заданными свойствами. В результате взаимодействия на микроуровне пьезоактивных элементов структуры на макроуровне композита возникают качественно новые эффекты по сравнению с однородными материалами, в частности, проявляются эффекты магнитоэлектрической, пироэлектрической и пиромагнитной связанностей, отсутствующие у входящих в композит однородных фаз [8-11].

Цель работы – изучение эффекта электромагнитной связанности и комплексный анализ эффективных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитоупругих свойств однонаправленного волокнистого композита PVF/феррит с различными полидисперсными структурами [4, 7, 11].

1. Микро и макроуровни

Рассматриваем двухфазные пьезоактивные среды в представительной области $\mathbf{V}$, определяющие соотношения для фаз $f=\overline{1,2}$ [1, 2, 5]

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=C_{ijmn}^{(f)}\varepsilon_{mn}-e_{nij}^{(f)}\hat{E}_n-h_{nij}^{(f)}\hat{H}_n-\beta_{ij}^{(f)}\Theta,\\ \hat{D}_i=e_{imn}^{(f)}\varepsilon_{mn}+\lambda_{in}^{(f)}\hat{E}_n+\pi_i^{(f)}\Theta,\\ \hat{B}_i=h_{imn}^{(f)}\varepsilon_{mn}+\mu_{in}^{(f)}\hat{H}_n+\vartheta_i^{(f)}\Theta,\end{gathered}\tag{1}$$

связывают напряжения $\boldsymbol{\sigma}$, индукции электрического $\hat{\mathbf{D}}$ и магнитного $\hat{\mathbf{B}}$ полей с деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}$, напряженностями электрического $\hat{\mathbf{E}}$ и магнитного $\hat{\mathbf{H}}$ полей, температурой однородного внешнего нагрева Θ через считающиеся известными для каждой фазы f тензоры упругих свойств $\mathbf{C}_f$, пьезоэлектрических $\mathbf{e}_f$ и пьезомагнитных $\mathbf{h}_f$ свойств, диэлектрических $\boldsymbol{\lambda}_f$ и магнитных $\boldsymbol{\mu}_f$ проницаемостей, температурных коэффициентов $\boldsymbol{\beta}_f$, пироэлектрических $\boldsymbol{\pi}_f$ и пиромагнитных ϑ_f постоянных. Выполняются условия идеального контакта на межфазных поверхностях: непрерывность векторов перемещений, напряжений, индукций электрического и магнитного полей.

Тензоры $\mathbf{C}^*$, …, ϑ^* эффективных свойств входят в определяющие соотношения на макроуровне композита

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijmn}^*\varepsilon_{mn}^* - e_{nij}^*\widehat{E}_n^* - h_{nij}^*\widehat{H}_n^* - \beta_{ij}^*\Theta,$$

$$\widehat{D}_i^* = e_{imn}^*\varepsilon_{mn}^* + \lambda_{in}^*\widehat{E}_n^* + \chi_{in}^*\widehat{H}_n^* + \pi_i^*\Theta, \tag{2}$$

$$\widehat{B}_i^* = h_{imn}^*\varepsilon_{mn}^* + \mu_{in}^*\widehat{H}_n^* + \kappa_{in}^*\widehat{E}_n^* + \vartheta_i^*\Theta$$

и связывают осредненные или макроскопические значения напряжений $\boldsymbol{\sigma}^* = <\boldsymbol{\sigma}>$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^* = <\boldsymbol{\varepsilon}>$, индукций $\widehat{\mathbf{D}}^* = <\widehat{\mathbf{D}}>$, $\widehat{\mathbf{B}}^* = <\widehat{\mathbf{B}}>$, напряженностей $\widehat{\mathbf{E}}^* = <\widehat{\mathbf{E}}>$, $\widehat{\mathbf{H}}^* = <\widehat{\mathbf{H}}>$ электрического и магнитного полей соответственно; $<\ldots>$ - оператор осреднения по области $\mathbf{V}$ структурных полей.

Ненулевые компоненты рассматриваемых трансверсально-изотропных тензоров $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\pi}$ и ϑ на структурном (1) и на макроуровне (2) композита можно наглядно представить в матричной форме записи

$$\left\| c_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{matrix} \right\|,$$

$$\|e_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \|\lambda_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix},$$

$$\|h_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{14} & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \|\mu_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{Vmatrix},$$

$$\|\kappa_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ -\kappa_{12} & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{Vmatrix}, \quad \|\chi_{ij}\| \equiv \|\kappa_{ij}\|^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \kappa_{11} & -\kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{12} & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{Vmatrix},$$

$$\|\beta_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{Vmatrix}, \quad \{\pi_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\vartheta_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix},$$

где $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$, тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями: $11 \to 1$, $22 \to 2$, $33 \to 3$, 23 и $32 \to 4$, 13 и $31 \to 5$, 12 и $21 \to 6$.

2. Обобщенное сингулярное приближение

Решение для тензоров эффективных упругих свойств $\mathbf{C}^*$, диэлектрической $\boldsymbol{\lambda}^*$ и магнитной $\boldsymbol{\mu}^*$ проницаемостей, пьезомеханических свойств $\mathbf{e}^*$ и $\mathbf{h}^*$, коэффициентов электромагнитной связи $\boldsymbol{\chi}^*$, $\boldsymbol{\kappa}^*$ и температурных напряжений $\boldsymbol{\beta}^*$, вектора эффективных пироэлектрических $\boldsymbol{\pi}^*$ и пиромагнитных ϑ^* постоянных в определяющих соотношениях (2) на макроуровне композита в обобщенном сингулярном приближении [6, 7, 9]

$$C^*_{ijmn} = < C_{ijmn} > + v_1(1 - v_1)(\overline{C}_{ijdb} \overline{A}^s_{dbmn} - \overline{e}_{pij} \overline{F}^{(1)s}_{pmn} - \overline{h}_{pij} \overline{F}^{(2)s}_{pmn}),$$

$$\lambda^*_{kn} = < \lambda_{kn} > + v_1(1 - v_1)(\overline{\lambda}_{kp} \overline{H}^{(1)s}_{pn} + \overline{e}_{kpq} \overline{B}^s_{pqn}),$$

$$\mu^*_{kn} = < \mu_{kn} > + v_1(1 - v_1)(\overline{\mu}_{kp} \overline{M}^{(2)s}_{pn} + \overline{h}_{kpq} \overline{D}^s_{pqn}),$$

$$e^*_{nij} = < e_{nij} > + v_1(1 - v_1)(\overline{e}_{pij} \overline{H}^{(1)s}_{pn} + \overline{h}_{pij} \overline{H}^{(2)s}_{pn} - \overline{C}_{ijpq} \overline{B}^s_{pqn}),$$

$$h^*_{nij} = < h_{nij} > + v_1(1 - v_1)(\overline{e}_{pij} \overline{M}^{(1)s}_{pn} + \overline{h}_{pij} \overline{M}^{(2)s}_{pn} - \overline{C}_{ijpq} \overline{D}^s_{pqn}), \quad (3)$$

$$\chi^*_{kn} = v_1(1-v_1)(\bar{\lambda}_{kp}\bar{M}^{(1)s}_{pn} + \bar{e}_{kpq}\bar{D}^s_{pqn}),$$

$$\kappa^*_{kn} = v_1(1-v_1)(\bar{\mu}_{kp}\bar{H}^{(2)s}_{pn} + \bar{h}_{kpq}\bar{B}^s_{pqn}),$$

$$\beta^*_{ij} = <\beta_{ij}> + v_1(1-v_1)(-\bar{C}_{ijdb}\bar{T}^s_{db} + \bar{e}_{pij}\bar{T}^{(1)s}_p + \bar{h}_{pij}\bar{T}^{(2)s}_p),$$

$$\pi^*_i = <\pi_i> + v_1(1-v_1)(\bar{\lambda}_{ip}\bar{T}^{(1)s}_p + \bar{e}_{ipq}\bar{T}^s_{pq}),$$

$$\vartheta^*_i = <\vartheta_i> + v_1(1-v_1)(\bar{\mu}_{ip}\bar{T}^{(2)s}_p + \bar{h}_{ipq}\bar{T}^s_{pq})$$

получим через поправки к соответствующим осредненным по области $\mathbf{V}$ значениям: $<\mathbf{C}>$, …, $<\vartheta>$, тензоры разностей: $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$, $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$,…, $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$; v_1 - относительное объемное содержание 1-й фазы в $\mathbf{V}$; например, $<\mathbf{C}> = v_1\mathbf{C}_1 + v_2\mathbf{C}_2$, где $v_2 = 1 - v_1$. Компоненты тензоров $\bar{\mathbf{A}}^s$, $\bar{\mathbf{B}}^s$, …, $\bar{\mathbf{T}}^{(2)s}$ в (3) находим из решения систем алгебраических уравнений [7]

$$\begin{cases} a^{(1,1)}_{ikdb}\bar{A}^s_{dbmn} + a^{(1,2)}_{ikd}\bar{F}^{(1)s}_{dmn} + a^{(1,3)}_{ikd}\bar{F}^{(2)s}_{dmn} = b^{(1)}_{ikmn} \\ a^{(2,1)}_{kdb}\bar{A}^s_{dbmn} + a^{(2,2)}_{kd}\bar{F}^{(1)s}_{dmn} + a^{(2,3)}_{kd}\bar{F}^{(2)s}_{dmn} = b^{(2)}_{kmn} \\ a^{(3,1)}_{kdb}\bar{A}^s_{dbmn} + a^{(3,2)}_{kd}\bar{F}^{(1)s}_{dmn} + a^{(3,3)}_{kd}\bar{F}^{(2)s}_{dmn} = b^{(3)}_{kmn} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} a^{(1,1)}_{ikdb}\bar{B}^s_{dbn} + a^{(1,2)}_{ikd}\bar{H}^{(1)s}_{dn} + a^{(1,3)}_{ikd}\bar{H}^{(2)s}_{dn} = c^{(1)}_{ikn} \\ a^{(2,1)}_{kdb}\bar{B}^s_{dbn} + a^{(2,2)}_{kd}\bar{H}^{(1)s}_{dn} + a^{(2,3)}_{kd}\bar{H}^{(2)s}_{dn} = c^{(2)}_{kn} \\ a^{(3,1)}_{kdb}\bar{B}^s_{dbn} + a^{(3,2)}_{kd}\bar{H}^{(1)s}_{dn} + a^{(3,3)}_{kd}\bar{H}^{(2)s}_{dn} = c^{(3)}_{kn} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a^{(1,1)}_{ikdb}\bar{D}^s_{dbn} + a^{(1,2)}_{ikd}\bar{M}^{(1)s}_{dn} + a^{(1,3)}_{ikd}\bar{M}^{(2)s}_{dn} = d^{(1)}_{ikn} \\ a^{(2,1)}_{kdb}\bar{D}^s_{dbn} + a^{(2,2)}_{kd}\bar{M}^{(1)s}_{dn} + a^{(2,3)}_{kd}\bar{M}^{(2)s}_{dn} = d^{(2)}_{kn} \\ a^{(3,1)}_{kdb}\bar{D}^s_{dbn} + a^{(3,2)}_{kd}\bar{M}^{(1)s}_{dn} + a^{(3,3)}_{kd}\bar{M}^{(2)s}_{dn} = d^{(3)}_{kn} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} a^{(1,1)}_{ikdb}\bar{T}^s_{db} + a^{(1,2)}_{ikd}\bar{T}^{(1)s}_{d} + a^{(1,3)}_{ikd}\bar{T}^{(2)s}_{d} = f^{(1)}_{ik} \\ a^{(2,1)}_{kdb}\bar{T}^s_{db} + a^{(2,2)}_{kd}\bar{T}^{(1)s}_{d} + a^{(2,3)}_{kd}\bar{T}^{(2)s}_{d} = f^{(2)}_{k} \\ a^{(3,1)}_{kdb}\bar{T}^s_{db} + a^{(3,2)}_{kd}\bar{T}^{(1)s}_{d} + a^{(3,3)}_{kd}\bar{T}^{(2)s}_{d} = f^{(3)}_{k} \end{cases} \tag{7}$$

где коэффициенты

$$a^{(1,1)}_{ikdb} = I_{ikdb} - U^s_{(ik)js}(\tilde{C}_{jsdb} + (1-2v_1)\bar{C}_{jsdb}) -$$

$$-U^{(1)s}_{(ik)s}(\tilde{e}_{sdb} + (1-2v_1)\bar{e}_{sdb}) - U^{(2)s}_{(ik)s}(\tilde{h}_{sdb} + (1-2v_1)\bar{h}_{sdb}),$$

$$a^{(1,2)}_{ikd} = U^s_{(ik)js}(\tilde{e}_{djs} + (1-2v_1)\bar{e}_{djs}) - U^{(1)s}_{(ik)s}(\tilde{\lambda}_{sd} + (1-2v_1)\bar{\lambda}_{sd}),$$

$$a^{(1,3)}_{ikd} = U^s_{(ik)js}(\tilde{h}_{djs} + (1-2v_1)\bar{h}_{djs}) - U^{(2)s}_{(ik)s}(\tilde{\mu}_{sd} + (1-2v_1)\bar{\mu}_{sd}),$$

$$a_{kdb}^{(2,1)} = -\Phi_{kjs}^{s}(\tilde{C}_{jsdb} + (1-2\nu_1)\bar{C}_{jsdb}) -$$

$$-\Phi_{ks}^{(1)s}(\tilde{e}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{sdb}) - \Phi_{ks}^{(2)s}(\tilde{h}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{sdb}), \tag{8}$$

$$a_{kd}^{(2,2)} = -\delta_{kd} + \Phi_{kjs}^{s}(\tilde{e}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{djs}) - \Phi_{ks}^{(1)s}(\tilde{\lambda}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{sd}),$$

$$a_{kd}^{(2,3)} = \Phi_{kjs}^{s}(\tilde{h}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{djs}) - \Phi_{ks}^{(2)s}(\tilde{\mu}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{sd}),$$

$$a_{kdb}^{(3,1)} = -\Psi_{kjs}^{s}(\tilde{C}_{jsdb} + (1-2\nu_1)\bar{C}_{jsdb}) -$$

$$-\Psi_{ks}^{(1)s}(\tilde{e}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{sdb}) - \Psi_{ks}^{(2)s}(\tilde{h}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{sdb}),$$

$$a_{kd}^{(3,2)} = \Psi_{kjs}^{s}(\tilde{e}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{djs}) - \Psi_{ks}^{(1)s}(\tilde{\lambda}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{sd}),$$

$$a_{kd}^{(3,3)} = -\delta_{kd} + \Psi_{kjs}^{s}(\tilde{h}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{djs}) - \Psi_{ks}^{(2)s}(\tilde{\mu}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{sd})$$

правые части для 1-й системы уравнений (4)

$$b_{ikmn}^{(1)} = U_{(ik)js}^{s}\bar{C}_{jsmn} + U_{(ik)s}^{(1)s}\bar{e}_{smn} + U_{(ik)s}^{(2)s}\bar{h}_{smn},$$

$$b_{kmn}^{(2)} = \Phi_{kjs}^{s}\bar{C}_{jsmn} + \Phi_{ks}^{(1)s}\bar{e}_{smn} + \Phi_{ks}^{(2)s}\bar{h}_{smn}, \tag{9}$$

$$b_{kmn}^{(3)} = \Psi_{kjs}^{s}\bar{C}_{jsmn} + \Psi_{ks}^{(1)s}\bar{e}_{smn} + \Psi_{ks}^{(2)s}\bar{h}_{smn},$$

для 2-й и 3-й систем (5), (6)

$$c_{ikn}^{(1)} = -U_{(ik)js}^{s}\bar{e}_{njs} + U_{(ik)s}^{(1)s}\bar{\lambda}_{sn},$$

$$c_{kn}^{(2)} = -\Phi_{kjs}^{s}\bar{e}_{njs} + \Phi_{ks}^{(1)s}\bar{\lambda}_{sn}, \tag{10}$$

$$c_{kn}^{(3)} = -\Psi_{kjs}^{s}\bar{e}_{njs} + \Psi_{ks}^{(1)s}\bar{\lambda}_{sn},$$

$$d_{ikn}^{(1)} = -U_{(ik)js}^{s}\bar{h}_{njs} + U_{(ik)s}^{(2)s}\bar{\mu}_{sn},$$

$$d_{kn}^{(2)} = -\Phi_{kjs}^{s}\bar{h}_{njs} + \Phi_{ks}^{(2)s}\bar{\mu}_{sn}, \tag{11}$$

$$d_{kn}^{(3)} = -\Psi_{kjs}^{s}\bar{h}_{njs} + \Psi_{ks}^{(2)s}\bar{\mu}_{sn},$$

и для 4-й системы (7)

$$f_{ik}^{(1)} = -U_{(ik)js}^{s}\bar{\beta}_{js} + U_{(ik)s}^{(1)s}\bar{\pi}_{s} + U_{(ik)s}^{(2)s}\bar{\vartheta}_{s},$$

$$f_{k}^{(2)} = -\Phi_{kjs}^{s}\bar{\beta}_{js} + \Phi_{ks}^{(1)s}\bar{\pi}_{s} + \Phi_{ks}^{(2)s}\bar{\vartheta}_{s}, \tag{12}$$

$$f_{k}^{(3)} = -\Psi_{kjs}^{s}\bar{\beta}_{js} + \Psi_{ks}^{(1)s}\bar{\pi}_{s} + \Psi_{ks}^{(2)s}\bar{\vartheta}_{s};$$

в (8) – (12) нижние индексы в круглых скобках (ik) обозначают [6] выделение симметричной составляющей по этой паре индексов, тензоры разностей

$$\tilde{\mathbf{C}} = <\mathbf{C}> - \mathbf{C}^{\bullet},\ \tilde{\mathbf{e}} = <\mathbf{e}> - \mathbf{e}^{\bullet}, \ldots,\ \tilde{\boldsymbol{\mu}} = <\boldsymbol{\mu}> - \boldsymbol{\mu}^{\bullet}. \qquad (13)$$

В формулы (8) - (12) входит новое решение для матрицы тензоров сингулярных составляющих $\mathbf{G}^s$ вторых производных функций Грина $\mathbf{G}$

$$\nabla\nabla\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1), \qquad (14)$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} & U_i^{(2)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} \\ \Psi_k & \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{G}^s = \begin{Vmatrix} U_{imjn}^s & U_{imn}^{s(1)} & U_{imn}^{s(2)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} & \Phi_{mn}^{s(2)} \\ \Psi_{imn}^s & \Psi_{mn}^{s(1)} & \Psi_{mn}^{s(2)} \end{Vmatrix}$$

для однородной анизотропной пьезоэлектромагнитной «среды сравнения» [6], свойства которой заданы через тензоры: $\mathbf{C}^{\bullet}$, $\mathbf{e}^{\bullet}$, $\mathbf{h}^{\bullet}$, $\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}$, $\boldsymbol{\mu}^{\bullet}$ (13), функция Грина $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho})$, $\delta(\boldsymbol{\rho})$ - дельта-функция Дирака, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, в точке $\mathbf{r}_1$ действует единичная объемная сила, или электрический или магнитный источник, ∇ - оператор дифференцирования по координатам вектора $\mathbf{r}$. Компоненты матрицы $\mathbf{G}^s$ в (14) вычисляются по формулам

$$U_{imjn}^s = [\overline{U}_{ij}]_{mn},\ U_{imn}^{s(1)} = [\overline{U}_i^{(1)}]_{mn},\ U_{imn}^{s(2)} = [\overline{U}_i^{(2)}]_{mn};\ \Phi_{mjn}^s = [\overline{\Phi}_j]_{mn},$$

$$\Phi_{mn}^{s(1)} = [\overline{\Phi}^{(1)}]_{mn},\ \Phi_{mn}^{s(2)} = [\overline{\Phi}^{(2)}]_{mn};\ \Psi_{mjn}^s = [\overline{\Psi}_j]_{mn},\ \Psi_{mn}^{s(1)} = [\overline{\Psi}^{(1)}]_{mn},\ \Psi_{mn}^{s(2)} = [\overline{\Psi}^{(2)}]_{mn},$$

где оператор

$$[\ldots]_{mn} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \ldots \kappa_m \kappa_n \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

действует на компоненты тензоров

$$\overline{U}_{ij} = \left(\Lambda_{ij} + \frac{h_i^{(1)} h_j^{(1)}}{\lambda^{(1)}} + \frac{h_i^{(2)} h_j^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\right)^{-1},\ \overline{U}_i^{(1)} = \overline{U}_{ij}\frac{h_j^{(1)}}{\lambda^{(1)}},\ \overline{U}_i^{(2)} = \overline{U}_{ij}\frac{h_j^{(2)}}{\lambda^{(2)}},$$

$$\overline{\Phi}_j = \frac{h_i^{(1)}}{\lambda^{(1)}}\overline{U}_{ij},\ \overline{\Psi}_j = \frac{h_i^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\overline{U}_{ij},\ \overline{\Phi}^{(1)} = (h_i^{(1)}\overline{U}_i^{(1)} - 1)\frac{1}{\lambda^{(1)}},\ \overline{\Psi}^{(1)} = h_i^{(2)}\overline{U}_i^{(1)}\frac{1}{\lambda^{(2)}},$$

$$\overline{\Phi}^{(2)} = h_i^{(1)}\overline{U}_i^{(2)}\frac{1}{\lambda^{(1)}},\ \overline{\Psi}^{(2)} = (h_i^{(2)}\overline{U}_i^{(2)} - 1)\frac{1}{\lambda^{(2)}},$$

в которых использованы обозначения

$$\Lambda_{ij} = C^{\bullet}_{imjn}\kappa_m\kappa_n,$$

$$h^{(1)}_i = e^{\bullet}_{min}\kappa_m\kappa_n,\ h^{(2)}_i = h^{\bullet}_{min}\kappa_m\kappa_n,$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{\bullet}_{mn}\kappa_m\kappa_n,\ \lambda^{(2)} = \mu^{\bullet}_{mn}\kappa_m\kappa_n, \tag{15}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{a_1}\sin\theta\cos\phi,\ \kappa_2 = \frac{1}{a_2}\sin\theta\sin\phi,\ \kappa_3 = \frac{1}{a_3}\cos\theta,$$

ϕ и θ - полярные углы в сферической системе координат, поверхность эллипсоидального «зерна неоднородности» [6] задана равенством

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i\ / a_i\ )^2 = 1 \tag{16}$$

через значения главных полуосей a_i в (9), $x_i = r_{(1)i} - r_i$ – координаты вектора $\mathbf{x}$.

3. Волокнистый композит PVF/феррит

На рис.1 представлены результаты расчета эффективных коэффициентов электромагнитной связанности κ^*_{11}, κ^*_{33} и κ^*_{12} (3) трансверсально-изотропного волокнистого пьезоэлектромагнетика: пьезоэлектрическая матрица PVF [5, 12] с однонаправленными вдоль оси r_3 ферритовыми [5] волокнами ($a_1 = a_2$, $a_3 \to \infty$, (16) с объемной долей v_1 . Расчет (рис.1) проведен в обобщенном сингулярном приближении (3) – (16) для четырех различных случаев выбора свойств среды сравнения (13), (15): в первом случае ($\triangle$), свойства среды сравнения приравнены свойствам 1-й фазы

$$\mathbf{C}^{\bullet} = \mathbf{C}_1,\ \mathbf{e}^{\bullet} = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{h}^{\bullet} = \mathbf{h}_1,\ \boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = \boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\mu}^{\bullet} = \boldsymbol{\mu}_1, \tag{17}$$

во втором случае ($\square$) – свойствам 2-й фазы

$$\mathbf{C}^{\bullet} = \mathbf{C}_2,\ \mathbf{e}^{\bullet} = \mathbf{e}_2,\ \mathbf{h}^{\bullet} = \mathbf{h}_2,\ \boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = \boldsymbol{\lambda}_2,\ \boldsymbol{\mu}^{\bullet} = \boldsymbol{\mu}_2, \tag{18}$$

в третьем случае ($\circ$) – осредненным по области $\mathbf{V}$ композита значениям

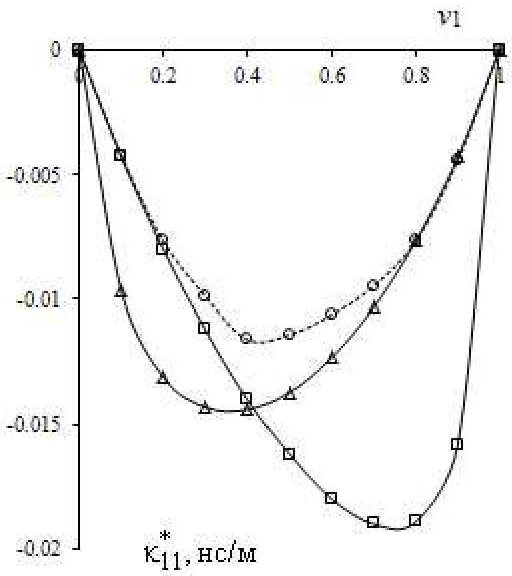
$$\mathbf{C}^{\bullet} = <\mathbf{C}>,\ \mathbf{e}^{\bullet} = <\mathbf{e}>,\ \mathbf{h}^{\bullet} = <\mathbf{h}>,\ \boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = <\boldsymbol{\lambda}>,\ \boldsymbol{\mu}^{\bullet} = <\boldsymbol{\mu}>, \tag{19}$$

и в четвертом случае ($\diamond$) – искомым эффективным свойствам композита («схема самосогласования» [6])

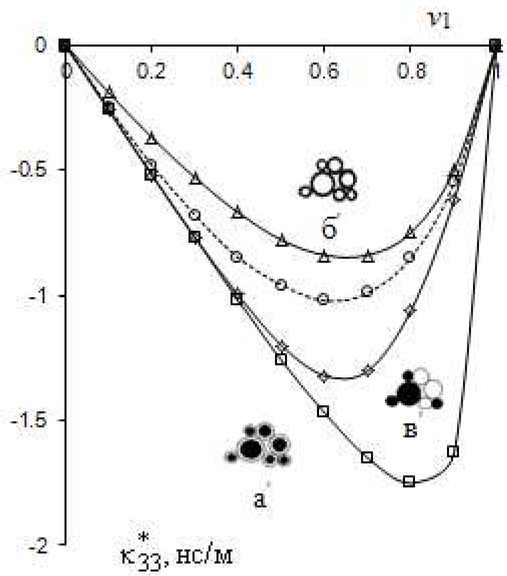
$$\mathbf{C}^{\bullet}=\mathbf{C}^{*},\ \mathbf{e}^{\bullet}=\mathbf{e}^{*},\ \mathbf{h}^{\bullet}=\mathbf{h}^{*},\ \boldsymbol{\lambda}^{\bullet}=\boldsymbol{\lambda}^{*},\ \boldsymbol{\mu}^{\bullet}=\boldsymbol{\mu}^{*}, \tag{20}$$

решения (○), (◇) инвариантны к инверсии свойств фаз.

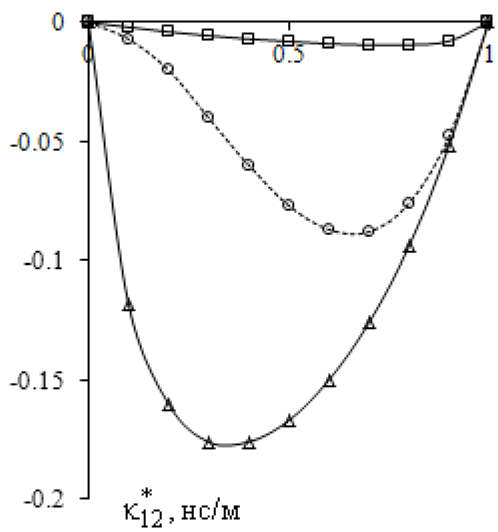
Результаты расчета (□) и (△) для эффективных констант κ_{11}^{*}, κ_{33}^{*} (рис.1,а,б) в обобщенном сингулярном приближении в *точности* совпали с аналитическими решениями [8] для полидисперсных структур (рис.1,а', рис.1,б'); решение (◇) по схеме самосогласования для κ_{33}^{*} в *точности* совпало с аналитическим решением [11] для полидисперсной структуры на рис.1,в'. Решения (○), (◇) при «малых» степенях наполнения v_1 близки к решению (□) для матричной по 2-й фазе структуре (рис.1,а') и при «больших» v_1 - к решению (△) для матричной по 1-й фазе структуре (рис.1,б'). Отметим, что решение κ_{33}^{*} (△) также в *точности* совпало с решением асимптотического метода осреднения [8] для идеальной периодической волокнистой структуры. Дополнительно на рис.2 – рис.5 представлены результаты расчета в обобщенном сингулярном приближении эффективных констант: модулей Юнга E_1^{*}, E_3^{*}, коэффициентов Пуассона ν_{12}^{*}, ν_{13}^{*}, модулей сдвига G_{12}^{*}, G_{13}^{*}, объемного модуля плоской деформации k_{12}^{*} (рис.2), электромеханических e_{311}^{*}, e_{333}^{*}, e_{113}^{*} (рис.3) и магнитомеханических h_{311}^{*}, h_{333}^{*}, h_{113}^{*}, h_{123}^{*} (рис.4) констант, диэлектрических λ_{11}^{*}, λ_{33}^{*} и магнитных μ_{11}^{*}, μ_{33}^{*} проницаемостей (рис.5) волокнистого пьезоэлектромагнетика в зависимости от объемной доли феррита.



а

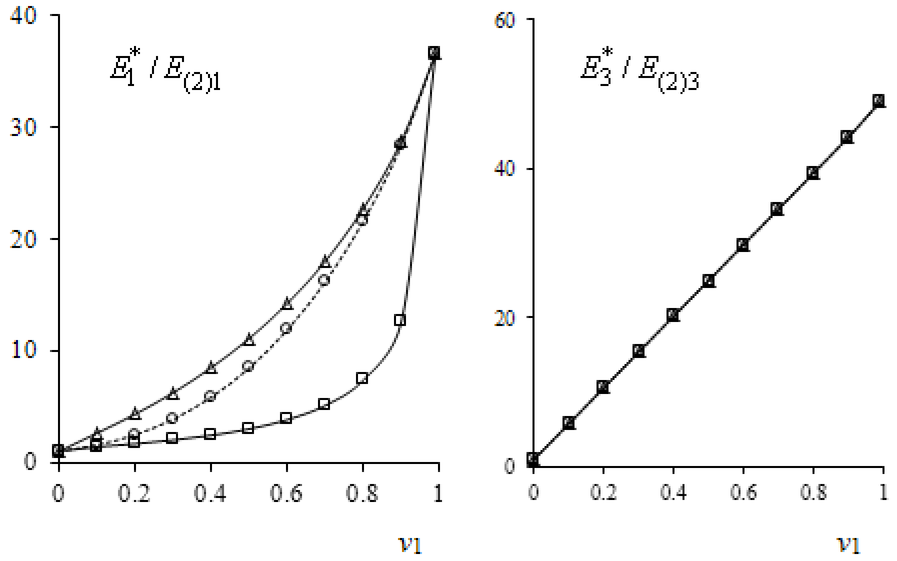


б

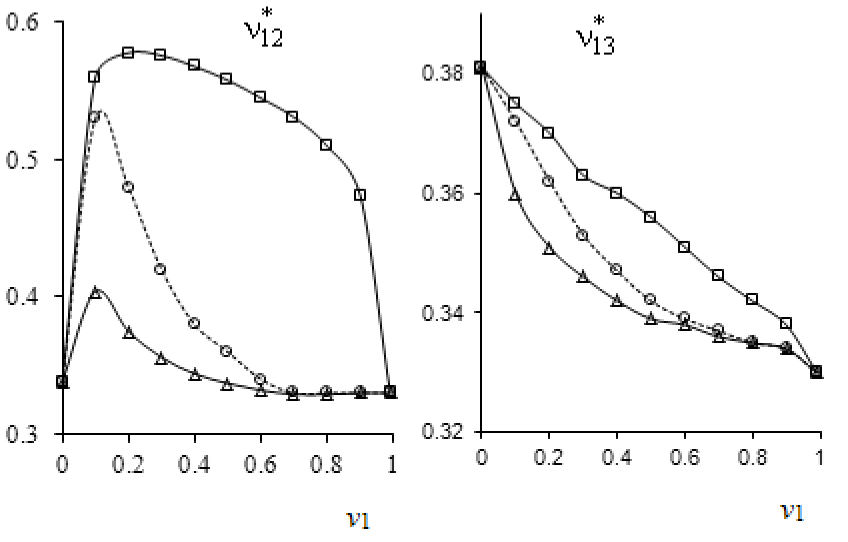


в

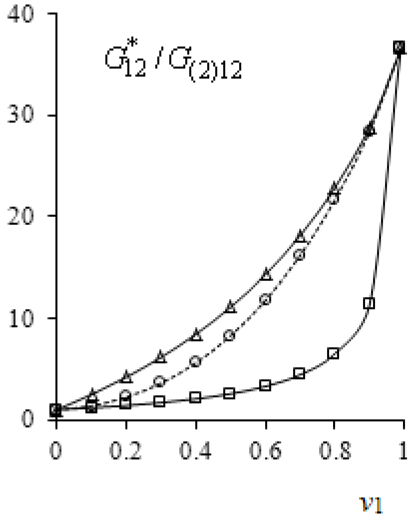
Рис.1 Эффективные коэффициенты электромагнитной связанности κ^*_{11} (а), κ^*_{33} (б) и κ^*_{12} (в) волокнистого пьезоэлектромагнетика с объемной доли феррита v_1


$E_1^* / E_{(2)1}$
0
10
20
30
40
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ν_1
$E_3^* / E_{(2)3}$
0
20
40
60
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ν_1

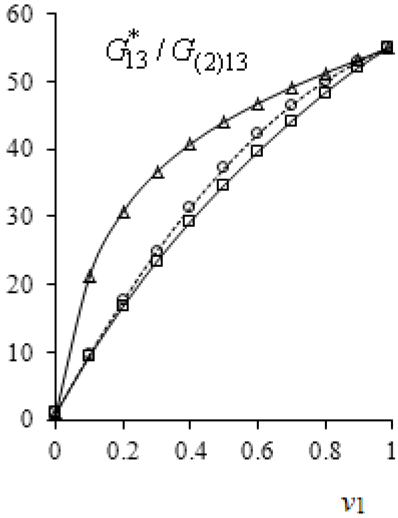
а б


ν_{12}^*
0.3
0.4
0.5
0.6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ν_1
ν_{13}^*
0.32
0.34
0.36
0.38
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ν_1

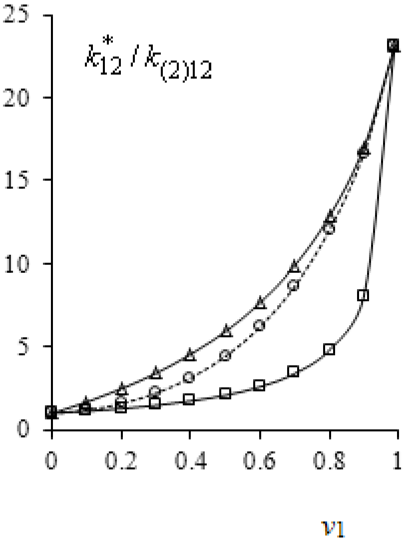
в г



д

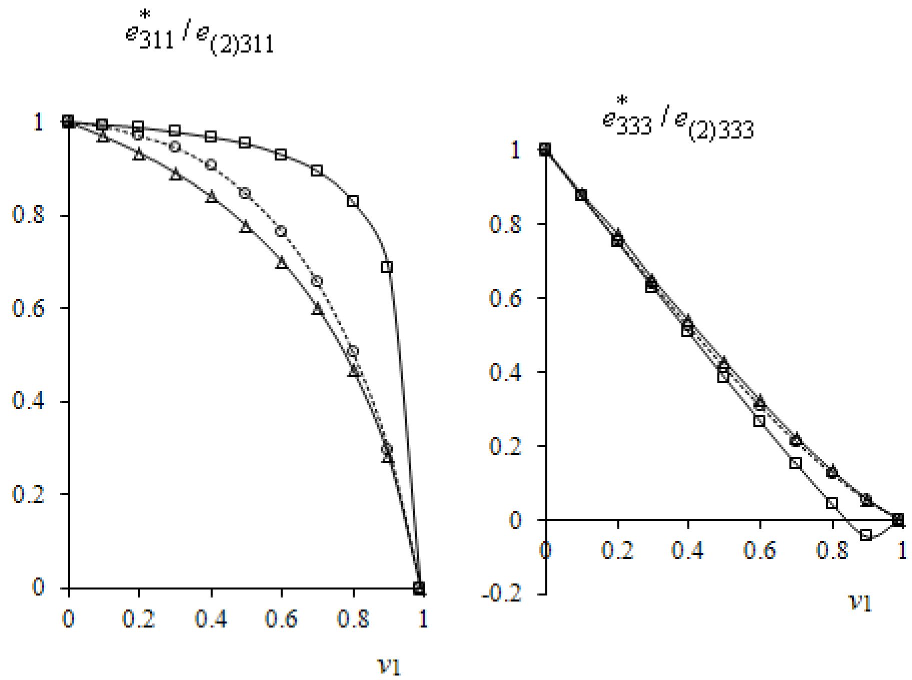


е

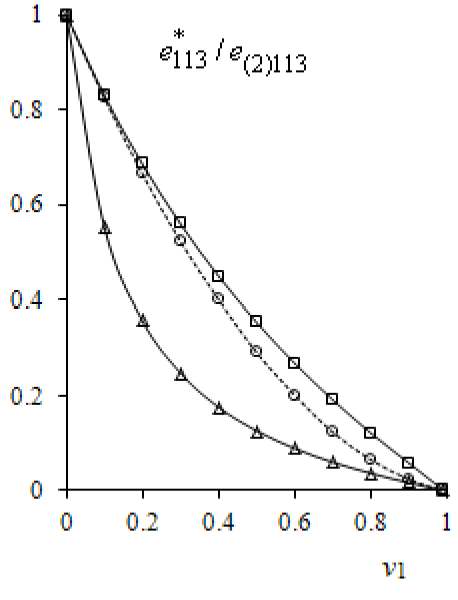


ж

Рис.2 Эффективные модули упругости: модули Юнга E_1^* (а), E_3^* (б), коэффициенты Пуассона ν_{12}^* (в), ν_{13}^* (г), модули сдвига G_{12}^* (д), G_{13}^* (е), объемный модуль плоской деформации k_{12}^* (ж) пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1



а б



в

Рис.3 Эффективные электромеханические константы e^*_{311} (а), e^*_{333} (б), e^*_{113} (в) пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1

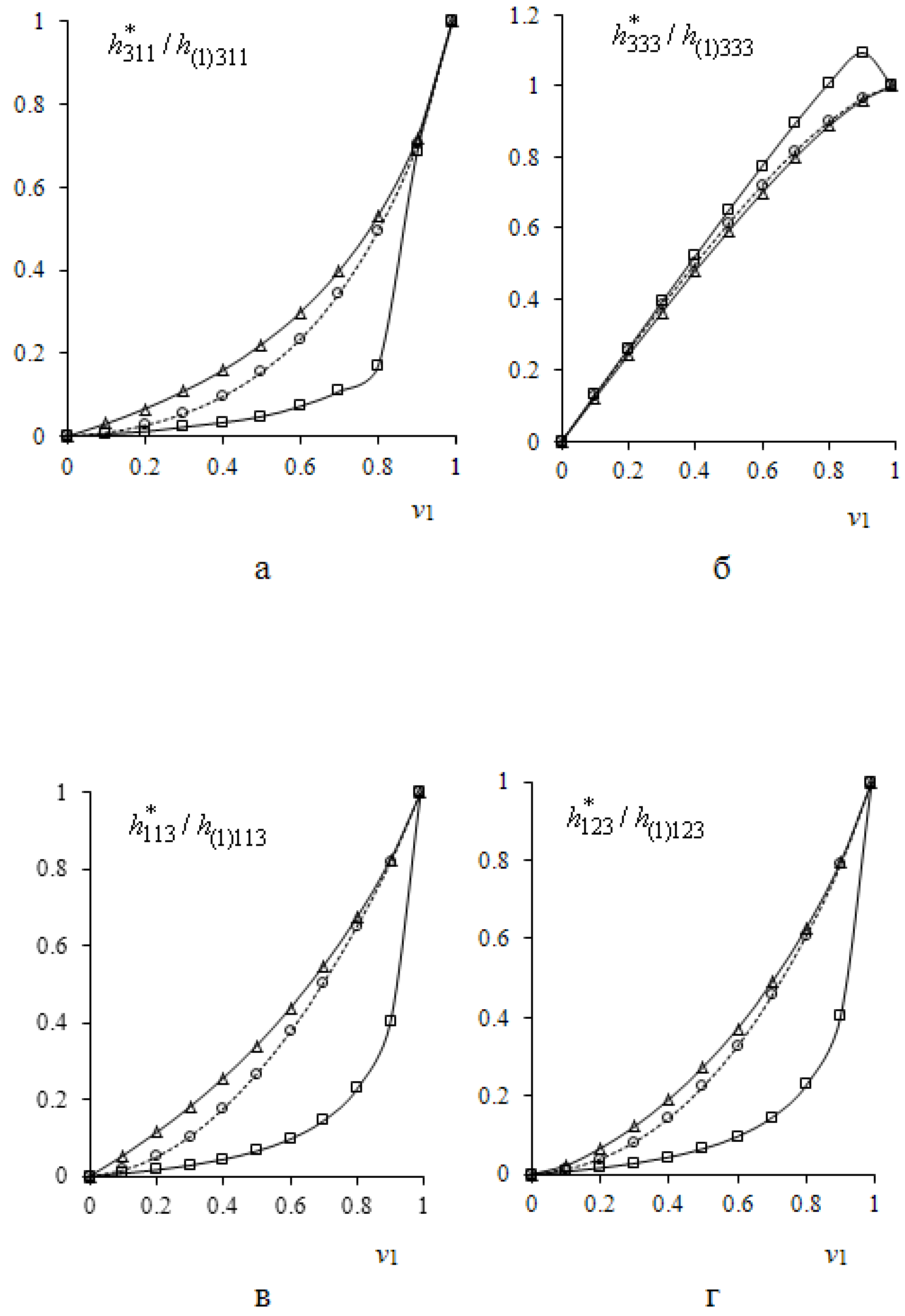


Рис.4 Эффективные магнитомеханические константы h^*_{311} (а), h^*_{333} (б), h^*_{113} (в), h^*_{123} (г) пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1

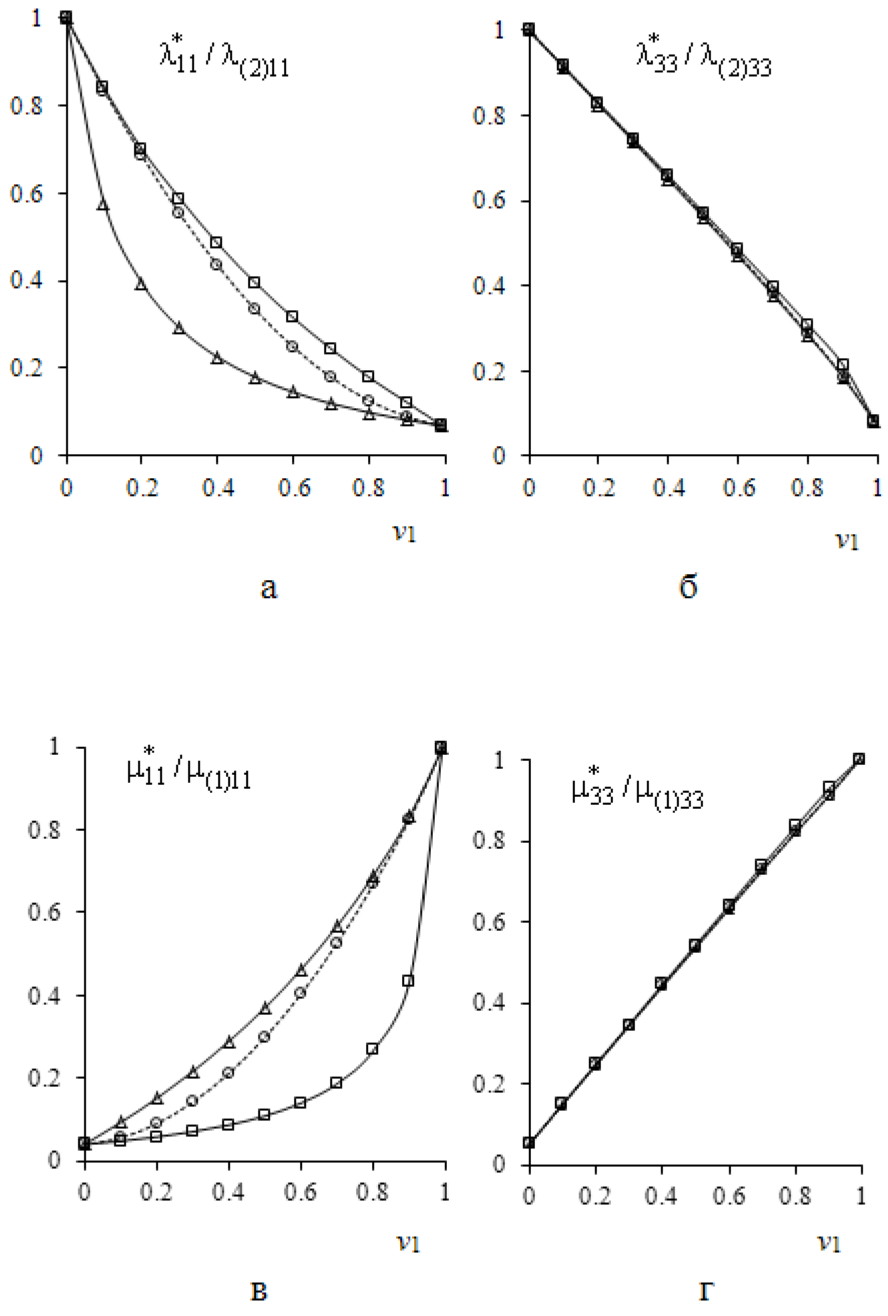


Рис.5 Эффективные диэлектрические λ^*_{11} (а), λ^*_{33} (б) и магнитных μ^*_{11} (в), μ^*_{33} (г) проницаемости пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1

Заключение

Разработаны новые математические двухуровневые структурные модели электромагнитоупругости композитов с учетом связанностей деформационных, электрических и магнитных полей. Получены решения связанных краевых задач электромагнитоупругости в обобщенном сингулярном приближении статистической механики композитов на основе новых решений для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности. Представлены результаты прогнозирования 21-й независимой константы эффективных трансверсально-изотропных упругих и пьезоэлектромагнитных свойств однонаправленного волокнистого композита: пьезоэлектрика PVF с ферритовыми волокнами в обобщенном сингулярном приближении решения связанной краевой задачи электромагнитоупругости. Выявлен существенно немонотонный характер изменения эффективных коэффициентов электромагнитной связанности композита PVF/феррит от величины наполнения волокнами; определены значения объемных долей волокон, при которых эти коэффициенты принимают экстремальные значения. Для частных случаев проведены сравнения с известными аналитическими решениями асимптотического метода осреднения [8] для идеальной периодической волокнистой структуры, решениями на составных ячейках и на основе «схемы самосогласования» для различных полидисперсных структур (рис.1, а' - в') [4, 11].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-96004 р_урал_а.

Литература

1. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. - М.: Изд-во иностр. лит., 1952. - 448 с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. - 471 с.
3. Волков С.Д. Статистическая механика композитных материалов / С.Д. Волков, В.П. Ставров. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.

5. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. - М.: Наука, 1976. - 399 с.
7. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов. - Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. - 480 с.
8. Гетман И.П. О магнитоэлектрическом эффекте в пьезокомпозитах // ДАН СССР. - 1991. - Т. 317. - № 2. – С. 341-343
9. Паньков А.А. Влияние разупорядоченности и инверсии фаз на электромагнитную связанность пьезокомпозита с квазипериодической структурой // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. - №1; URL: http://jre.cplire.ru/jre/jan14/12/text.pdf
10. Паньков А.А. Диэлектрическая релаксация в волокнистом композите полиэтилен/феррит // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. - №2; URL: http://jre.cplire.ru/jre/feb14/1/text.pdf
11. Pan’kov A.A. Self-consistent solutions for electromagnetic coupling coefficients of fibrous piezocomposite // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. - 2014. - Vol. 5. - No 1. - P.77-88
12. Sessler G.M. Piezoelectricity in polyvinylidenefluoride // J. Acoust. Soc. Amer.. – 1981. – Vol. 70. – No 6. - P.1596-1608