

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.4>  
УДК 537.874; 537.624

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ.

### ЧАСТЬ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ФОРМИРОВАНИЕ УПРОЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

А. П. Иванов<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, В. И. Щеглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 9 марта 2021 г.

**Аннотация.** Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Приведено краткое описание двух реальных физических систем, допускающих возбуждение хаотических колебаний, обладающих нестационарным запаздыванием. Первая система представляет собой нормально намагниченную ферритовую пластину, обладающую магнитоупругими свойствами. Вторая система представляет собой электродинамический волноводный резонатор с намагниченным по нормали ферритовым диском. При поступающей мощности выше определенного порога в обеих системах колебания приобретают хаотический характер. Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй – линейным. Для такой модели приведена система двух дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде степенного ряда по двум переменным. Первое уравнение содержит слагаемые кубической нелинейности, линейной и нелинейной связи со вторым уравнением. Второе уравнение содержит

слагаемое линейной связи с первым уравнением. Возбуждение колебаний осуществляется путем подачи на первый осциллятор внешней силы синусоидального характера. Показано, что в такой системе при достаточном уровне внешнего сигнала возникают высокоамплитудные хаотические колебания. Начало возбуждения таких колебаний происходит скачком по прошествии определенного времени запаздывания относительно начала воздействия возбуждающей силы. Ввиду сложности исходной системы, в качестве главной задачи настоящей работы поставлено выделение из полной системы максимально упрощенного ядра, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Такое выделение выполнено путем исключения второстепенных слагаемых обоих уравнений. В качестве первого шага упрощения рассмотрена возможность исключения внешнего возбуждения системы. При этом возбуждение колебаний осуществляется путем задания начального смещения или начальной скорости одного из осцилляторов. Для обеспечения незатухающих колебаний диссипативные слагаемые в обоих уравнениях положены равными нулю. Показано, что при надлежащем выборе начального смещения характер колебаний каждого из осцилляторов полностью подобен таковому для системы с внешним возбуждением. Выполнено сравнение зависимостей времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения и начального смещения. Показано, что в обоих случаях зависимости, в основном, являются геометрически подобными и описываются законом обратной пропорциональности. Исследован характер колебаний системы по обе стороны от интервала реализации запаздывания. Установлено, что в обоих случаях, как внешнего возбуждения, так и начального смещения, характер колебаний по обе стороны от интервала реализации запаздывания остается одинаковым. В результате проделанного сравнения сделан промежуточный вывод об эквивалентности возбуждения колебаний системы из двух осцилляторов как внешним воздействием, так и заданием начального смещения. Отмечено, что причиной эквивалентности является тождество динамического потенциала в

обоих случаях. С целью установления возможности дальнейшего упрощения системы связанных уравнений рассмотрена роль соотношения собственных частот того и другого осцилляторов. Показано, что возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием при надлежащем уровне начального смещения реализуется в непрерывном диапазоне соотношений частот осцилляторов вплоть до пяти относительных единиц. Установлено, что зависимость порогового уровня начального смещения от отношения частоты второго осциллятора к частоте первого является непрерывной и имеет четко выраженный возрастающий квадратичный характер. Исследована зависимость времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Показано, что при любой величине такого соотношения время запаздывания при увеличении начального смещения, начиная с определенного критического значения, спадает по закону обратной пропорциональности. Критическое значение смещения по мере увеличения соотношения частот также увеличивается. С целью исследования возможности дальнейшего упрощения системы рассмотрена роль слагаемого первого уравнения, отражающего линейную связь первого осциллятора со вторым. Показано, что исключение линейной связи при малой кратности частот приводит к уменьшению критического значения смещения, а при большой сохраняет прежним. Во всех этих случаях высокоамплитудный хаос сохраняется, а его запаздывание может достигать весьма больших значений. С целью дальнейшего упрощения системы рассмотрена роль собственной частоты первого осциллятора. Рассмотрены зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора и различных значениях частоты второго осциллятора. Показано, что в этом случае критическое значение смещения уменьшается тем сильнее, чем частота второго осциллятора ниже. Во всех случаях при исключении слагаемого, соответствующего частоте первого осциллятора, общий характер высокоамплитудного хаоса и соответствующего запаздывания сохраняется. В ходе проверки установлено, что исключение других слагаемых из первого

уравнения нарушает возможность реализации высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Исключение потенциального слагаемого из второго уравнения нарушает его колебательный характер, так что также не является допустимым. Таким образом, на данном этапе рассмотрения дальнейшее упрощение системы признано нецелесообразным. В результате проделанного рассмотрения, из исходной полной системы уравнений для двух осцилляторов выделено ядро, ответственное за возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Уравнение для смещения первого осциллятора содержит вторую производную по времени, слагаемые кубической нелинейности и нелинейной связи со вторым осциллятором. Уравнение для смещения второго осциллятора содержит вторую производную по времени, потенциальное слагаемое, соответствующее частоте второго осциллятора и слагаемое линейной связи второго осциллятора с первым. При этом возбуждение системы может быть осуществлено путем задания начального смещения или начальной скорости любого из осцилляторов.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, связанные осцилляторы, хаотические колебания.

**Abstract.** The effect of non-stationary delay excitation of large-amplitude chaotic vibrations in the system of two connected nonlinear and linear oscillators is investigated. The short description of two real physical systems which allow the excitation of chaotic vibrations having non-stationary delay is described. The first system consist of normal magnetized ferrite plate having magnetoelastic properties. The second system consist of electro-dynamic resonator with normal magnetized ferrite disc. When the input power exceeds the threshold level the vibrations in both systems acquire chaotic character. It is shown that the vibrations in both systems may be described on the basis of the same model consist of two connected oscillators. The first of these oscillators is nonlinear and the second is linear. For this model the system of two second order differential equations is proposed. The nonlinear properties in these equations are described by the expansion of power row by two variable quantities. The first equation contains the cube nonlinearity and linear and

nonlinear connection with second equation. The second equation contains only linear connection with first equation. The excitation of vibrations is realized by the switching the external sinusoidal force on the first oscillator. It is shown that in this system by sufficient level of external signal it is excited the chaotic vibrations having large amplitude. The beginning of this vibrations excitation is occurred by jump after the some delay time after the beginning of excitation force action. By the reason of very high complexity of initial system the main task of this paper is the signing out of whole system the maximum simplify core which preserves the properties of high-amplitude chaotic vibrations with corresponding delay time. This signing is carried out by exclusion of secondary components of both equations. As the first step of simplification it is investigated the possibility of exclusion of external excitation of system. In this case the excitation of vibrations is realized by assignment of initial displacement or initial velocity of anyone oscillator. For the realization of non-subside vibrations the dissipative components in both equations are equated to zero. It is shown that by proper choice of initial displacement the character of vibrations every oscillators as a whole is similar to its for the system with external excitation. The comparison of dependencies of delay time from the level of external excitation and initial displacement is executed. It is shown that in both cases the dependencies on the whole are in geometry similar and are described by the law of inverse proportion. The character of vibrations in both sides away the interval of delay realization is investigated. It is shown that in both cases of external excitation and initial displacement the character of vibrations remains the same. As a result of executed comparison it is made the intermediate conclusion about equivalency of excitation system from two oscillators also as external excitation so as initial displacement. It is established that the reason of equivalency is the identity of dynamic potential in both cases. With the purpose of determination of possibility to further simplification of connected equation system it is investigated the role of correlation between own frequencies both oscillators. It is shown that the excitation of high-amplitude chaos with corresponding delay by proper level of initial displacement is realized in continuous diapason of correlation both oscillators right

until five relative units. It is established that the dependence of threshold level of initial displacement from ratio of frequency of second oscillator to the frequency of first oscillator is continuous and has clear determined increase quadratic character. The dependence of delay time from initial displacement by different correlations of both frequencies is investigated. It is shown that over anyone values of this correlation the delay time by increasing of initial displacement beginning from appointed critical meaning decreases by the law of inverse proportion. The critical meaning of displacement along the increasing of frequency correlation is also increased. With the purpose of determination of possibility to further simplification of system it is investigated the role of item of first equation which determines the linear connection of first oscillator with second oscillator. It is shown that the exclusion of linear connection by small correlation ratio of frequencies determines the decreasing of critical meaning of displacement and by large ratio of frequencies maintains former. In all of these cases the high-amplitude chaos is remained and delay time may reach very large values. With the purpose of further simplification of system it is investigated the role of own frequency of first oscillator. The dependence of delay time from initial displacement by equality to zero of first oscillator frequency and different frequencies of second oscillator are investigated. It is shown that in this case the critical meaning of displacement decreases more when the frequency of second oscillator decreases. In all of these cases when the item which correspond to frequency of first oscillator is absent the general character of high-amplitude chaos and corresponding delay is conserved. In the course of examination it was established that the exclusion of other items from the first equation break the possibility of realization of high-amplitude chaos with corresponding delay. The exclusion of potential item from second equation break its vibration character so it is not admissible. So in present stage of investigation the further simplification of system is determined as inexpedient. As a result of carried out the investigation from initial whole system of equation for two oscillators it is selected the core which is responsible for excitation of high-amplitude chaos with corresponding delay. The equation for displacement of first oscillator contains the second derivative by time,

the item with cube nonlinearity and item of nonlinear connection of first oscillator with second oscillator. The equation for displacement of second oscillator contains the second derivative by time, the potential item which correspond to own frequency of second oscillator and item of linear connection of second oscillator with first oscillator. In this case the excitation of system may be realized by assignment of initial displacement or initial velocity of anyone oscillator.

**Key words:** nonlinear vibrations, connected oscillators, chaotic vibrations.

## Введение

Исследование нелинейных и нестационарных явлений представляет собой одну из важнейших задач современной физики [1-8]. Особенно широким разнообразием здесь отличаются явления, связанные с магнитными свойствами вещества. Диапазон проявления нелинейности в магнитных явлениях необычайно широк – от динамики доменных структур [9-13] до параметрического возбуждения обменных спиновых волн [14-17] и ударного изменения магнитного состояния вещества под действием мощного импульса света от фемтосекундного лазера [18-26].

В условиях ферромагнитного резонанса, кроме регулярных явлений типа умножения частоты, детектирования и параметрического усиления СВЧ сигнала [27-34], имеют место разнообразные явления автоколебательного и стохастического характера – автомодуляция за порогом возбуждения обменных волн [15], колебания шумового характера в системе – феррит-резонатор [35, 36], стохастическая неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в неоднородном поле типа «вала» [37-41].

Значительное разнообразие обеспечивает взаимодействие магнитных колебаний с упругими, в том числе возбуждение упругих колебаний в диапазоне СВЧ [42], упругая накачка спиновых волн [15], упругий резонанс в условиях параметрического возбуждения обменных волн [43], комбинационное рассеяние спиновых волн на упругих («спиновый эффект Мандельштама-Бриллюэна») [15, 44-47].

Другой круг явлений дает взаимодействие магнитных колебаний с электромагнитными в резонаторе [35, 36], где также наблюдаются автомодуляционные и стохастические явления.

Важнейшей практической задачей является возбуждение мощного гиперзвука [48-52] с помощью магнестрикционного преобразователя, работающего в режиме ферромагнитного резонанса. Дополнительные особенности дает использование двухслойной структуры, позволяющей реализовать комбинационные колебания [53, 54]. По сравнению с линейным режимом показана возможность увеличения мощности гиперзвука в 30 раз, а в двухслойной структуре – до 100 раз с одновременным расширением полосы преобразователя до пяти раз [48-54].

Кроме возбуждения мощного гиперзвука была показана возможность умножения и деления частоты, в том числе, в дробном отношении [30, 31, 34].

Сложность явлений и необходимость использования для их интерпретации громоздкого математического аппарата стимулирует поиск более простых моделей, позволяющих в основных чертах описать наблюдаемую физику.

Весьма удачной в этом плане явилась предложенная в работе [49] и получившая дальнейшее развитие в [50-52] модель двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. В этих работах, применительно к задаче о возбуждении мощного гиперзвука, рассматриваются сильно нелинейные колебания в магнитоупругой среде. В качестве главного элемента преобразователя используется нормально намагниченная ферритовая пластина, обладающая магнитоупругими свойствами. При этом роль одного из осцилляторов играет магнитная подсистема, в которой возбуждается ферромагнитный резонанс, а роль другого играет упругий резонатор, в котором возбуждаются упругие колебания по толщине ферритовой пластины.

Существенным недостатком предложенной модели является отсутствие прямого выражения параметров уравнений через параметры материала. Тем не



менее, предложенная модель позволила выявить и описать различные режимы автоколебаний.

Дальнейшее развитие модель получила в рамках линейного и особенно квадратичного приближений [55-59]. Для интерпретации наблюдаемых явлений была предложена модель динамического потенциала, отражающая потенциальную энергию колебаний намагниченности, меняющуюся под действием упругого возмущения [60]. Наличие двух осцилляторов потребовало введения отдельного потенциала для каждого осциллятора. Относительно связи была отмечена важность характера и степени взаимодействия колебаний обоих осцилляторов. Были рассмотрены различные режимы вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения, в том числе имеющие автоколебательный и хаотический характер. Важным моментом явилось получение явных аналитических выражений, связывающих параметры предложенной системы уравнений с параметрами материала – намагниченностью и коэффициентами упругости.

Были предложены различные варианты систем уравнений для связанных осцилляторов, отличающиеся степенью и характером принятых приближений, а также отмечена важность дальнейшей математической разработки решения таких систем, отражающих те или иные стороны наблюдаемых явлений.

В работе [61], применительно к задачам о возбуждении гиперзвука [48-54] и магнитных колебаний в электродинамическом резонаторе [35, 36], описаны колебания регулярного и хаотического характера в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи.

В работах [62-64] сообщается о проявлении нестационарного запаздывания возбуждения колебаний, имеющего место в режиме умножения частоты. Было показано, что развитие колебаний значительной амплитуды запаздывает относительно момента включения возбуждения на интервал времени, значительно превышающий времена релаксации обеих систем. Для интерпретации запаздывания была привлечена модель динамического потенциала [63-65]. Определенное количественное объяснение величина

запаздывания нашла на основе механизма биений между собственными колебаниями первого осциллятора и возбуждающим сигналом, так что время запаздывания соответствовало времени первого периода биений.

В ходе дальнейших исследований, продолженных авторами работ [62-65], было отмечено, что механизм биений не всегда достаточным образом отражает реальную картину запаздывания. Также оставалась неясной роль различных компонент системы уравнений, степени нелинейности и характера связи. Недостаточно рассматривалась роль релаксационных свойств и уровня возбуждения. Таким образом, ряд вопросов, касающихся явления запаздывания, оставался нерешенным.

Главной задачей настоящей работы является дальнейшая разработка модели нестационарного запаздывания, в первую очередь ее математической стороны, с целью максимального упрощения, выделения главных характеристик и более подробной интерпретации наблюдаемых явлений.

## **1. Основные системы уравнений для связанных колебаний двух осцилляторов**

Настоящая работа является развитием и в какой-то мере продолжением работы [61]. В качестве первичных рассматриваются те же две основные задачи – возбуждение мощного гиперзвука на основе магнестрикционного преобразователя и возбуждение шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор.

В работе [61] показано, что обе задачи допускают интерпретацию посредством представления колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным и обладает нелинейными свойствами, а другой – упругим или электродинамическим, в обоих случаях оставаясь линейным.

В математической трактовке обеих задач выявлено единство, то есть показано, что они сводятся к одной и той же системе из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Первое уравнение соответствует колебаниям магнитной системы и содержит нелинейные

слагаемые, второе уравнение соответствует упругой или электродинамической системе и является линейным.

Квадратичное приближение для намагниченности позволило ввести динамический потенциал в виде степенной функции четвертого порядка по двум переменным. При этом оба уравнения и связь между ними приобрели дополнительные нелинейные составляющие, возникающие благодаря последовательному учету граничных условий. Полученная при этом обобщенная система имеет вид [60, форм.(46),(47)], [61, форм.(31),(32)]:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 +$$

$$+ d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 +$$

$$+ b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 +$$

$$+ d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 +$$

$$+ b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$ ,  $d_{ik}$  определяются магнитными и упругими параметрами материала пластины. Явные выражения для этих коэффициентов приведены в работе [60, форм.(7)-(29) с учетом (6)].

Оба уравнения являются нелинейными до третьей степени и связь также является нелинейной до той же степени. Система как целое является симметричной, то есть замена индексов «1» на «2» и обратно структуры левых частей уравнений не меняет. Несимметричность возбуждения принципиальным моментом не является, так как второе уравнение также может быть дополнено подобным слагаемым.

В работе [61, форм.(28), (29)] из полной системы (1)-(2) была выделена часть, ответственная за получение ряда автомодуляционных режимов колебаний:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (4)$$

Здесь  $x_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2}$ ,  $\omega_{1,2}$  – координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов,  $\delta_1$  – параметр нелинейности первого осциллятора,  $\gamma_{1,2}$  – коэффициенты связи,  $A_0$  и  $\omega_0$  – амплитуда и частота возбуждающей силы. С целью приближения вида уравнений к традиционно используемому в задачах о колебаниях (см. напр. [4, стр.27, форм.(2.20)]), в системе (1)-(2) выполнена следующая замена обозначений:  $a_{11} \rightarrow 1$ ;  $a_{12} \rightarrow \beta_1$ ;  $a_{13} \rightarrow \omega_1^2$ ;  $b_{11} \rightarrow \delta_1$ ;  $d_{13} \rightarrow \gamma_1$ ;  $a_{21} \rightarrow 1$ ;  $a_{22} \rightarrow \beta_2$ ;  $a_{23} \rightarrow \omega_2^2$ ;  $a_{24} \rightarrow \gamma_1$ , остальные коэффициенты положены равными нулю.

Эти уравнения совпадают с системой, впервые предложенной в работе [49] и исследовавшейся далее в работах [50-52], применительно к задаче о возбуждении мощного гиперзвука.

В работах [62-64] вместо слагаемого  $\gamma_1 x_2^2$  были введены два слагаемых  $\gamma_1 x_2$  и  $\eta \cdot x_1^2 x_2$ , первое из которых отвечает за линейную связь второго осциллятора с первым, а второе учитывает более высокую степень нелинейной связи. При этом система приобрела вид [62, форм.(6), (7)]

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (6)$$

В этой системе относительно (1)-(2) произведены замены обозначений переменных:  $a_{11} \rightarrow 1$ ;  $a_{21} \rightarrow 1$ ;  $a_{12} \rightarrow \beta_1$ ;  $a_{22} \rightarrow \beta_2$ ;  $a_{13} \rightarrow \omega_1^2$ ;  $a_{23} \rightarrow \omega_2^2$ ;  $a_{14} \rightarrow \gamma_1$ ;  $a_{24} \rightarrow \gamma_2$ ;  $b_{11} \rightarrow \delta$ ;  $b_{12} \rightarrow \eta$ ;  $A_0 \rightarrow A$ . Остальные коэффициенты положены равными нулю. Явный вид коэффициентов  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  приведен в работе [50, форм. (7)-(29) с учетом (6)].

**Замечание.** Параметры слагаемых систем (5)-(6) и (3)-(4) являются нормированными, то есть разделенными на коэффициент при второй производной, что позволило привести этот коэффициент к единице. Поэтому далее не будем обращать внимания на конкретную размерность этих параметров, а будем их измерять в нормированных единицах без употребления соответствующих обозначений. Более подробно вопрос о нормировке рассмотрен в работе [62], где приведена связь между нормированными параметрами и реальными константами материала исходных задач.

## 2. Общий характер развития колебаний во времени

Система вида (5)-(6) исследовалась в работах [62-65]. Рассматривалось развитие колебаний во времени, происходящее после включения возбуждения. Было показано, что довольно характерная общая структура развития колебаний следующая. Сначала возбуждаются колебания весьма малой амплитуды (в большинстве случаев порядка 1-2 нормированных единиц). Эти колебания имеют характер, близкий к синусоидальному с четко выраженным периодом около 0,4-0,5 ед., однако амплитуда их может меняться в пределах 10-20%.

По прошествии некоторого промежутка времени, составляющего собственно запаздывание, амплитуда колебаний резким скачком увеличивается на 2-3 порядка, составляя около 100-500 ед. Эти колебания имеют характер, близкий к хаотическому, хотя максимальные выбросы амплитуды в некоторых случаях повторяются с периодом около тех же 0,4-0,5 ед.

Хаотические колебания с большой амплитудой имеют определенный порог по уровню возбуждения или начального смещения. Если этот порог не достигнут, то колебания остаются малоамплитудными при любом сколь угодно продолжительном промежутке времени.

При значительном превышении порога (как правило, в несколько раз), высокоамплитудные хаотические колебания возникают почти сразу после включения возбуждения, так что время запаздывания становится меньше одного полупериода малоамплитудных колебаний, то есть можно говорить о «пропадании» запаздывания. Однако хаос с высокой амплитудой в этом случае сохраняется, по-видимому, при сколь угодно большом уровне возбуждения (по крайней мере, на порядок выше порога и более).

**Замечание.** В настоящей работе численное решение системы (5)-(6) и систем, полученных далее на ее основе, выполнялось методом Рунге-Кутты четвертого порядка [66, стр.702], для которого характерно последовательное вычисление переменных и их производных с определенным шагом по времени. Исследуемые в настоящей работе высокоамплитудные хаотические колебания в общем случае имеют фрактальный характер [67, 68], частично отмечавшийся ранее в работе [63]. Вообще говоря, фрактальность является достаточно общим свойством хаотических систем [5, лекция 11]. При этом конкретная структура хаотических колебаний при уменьшении шага по времени окончательно не стабилизируется, что в настоящей работе было проверено до шага  $10^{-8}$  ед. времени. Было установлено, что при изменении шага от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  время запаздывания меняется в ту или иную сторону в пределах  $\pm 10\%$ . Поэтому, чтобы соблюсти единство приведенных далее результатов, шаг развертки по времени всегда выбирался единым, равным  $5 \cdot 10^{-4}$  ед. времени. Такая величина шага при частоте собственных колебаний второго осциллятора  $\omega_2 = 15$  составляла около  $10^{-3}$  от их периода, так что развертка по времени получалась достаточно плавной. Дальнейшее уменьшение шага хотя и приводило к некоторым вариациям времени запаздывания (не более 10%),

однако, не внося заметных деталей в рассматриваемые явления, значительно увеличивало время машинного счета, так что было признано авторами нерациональным. В качестве условного приближения можно считать, что приведенные далее результаты имеют точность  $\pm 10\%$ . Тем не менее, по мнению авторов, более подробное исследование фрактального характера описываемых явлений вполне достойно того, чтобы составить предмет для отдельной работы.

### 3. Основные задачи настоящей работы

Итак, в работах [62-65] показано, что при определенных условиях, в первую очередь в режиме умножения частоты, возбуждение высокоамплитудных хаотических колебаний в системе (5)-(6) происходит с запаздыванием, время которого на порядок и более может превышать времена релаксации обеих колебательных систем, определяемые параметрами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . В этих работах параметры линейной связи для обоих осцилляторов были приняты равными друг другу, то есть полагалось, что  $\gamma_1 = \gamma_2$  и для такого общего параметра было введено единое обозначение  $\gamma$ . Были выявлены четыре основных режима, соответствующие различным уровням параметра  $\gamma$ , условно названные «двухступенчатым запаздыванием», «плавным насыщением», «перемежающимися скачками» и «малоамплитудной релаксацией». По мере увеличения линейной связи эти режимы поочередно сменяли друг друга.

В работах [63-65] была дана определенная интерпретация запаздывания на основе модели динамического потенциала. Выявлена роль линейной связи  $\gamma$  между осцилляторами и отмечена крайняя важность в формировании режимов также нелинейной связи, определяемой параметром  $\eta$ .

Тем не менее, еще в работе [64] был приведен ряд вопросов, исчерпывающие ответы на которые до конца не были получены. К числу таких вопросов относятся следующие (нумерация соответствует принятой в работе [64]):

- 1) природа первичного запаздывания возбуждения колебаний;

4) роль синхронизма между частотами обоих осцилляторов и возбуждающего воздействия;

5) роль времен релаксации первого и второго осцилляторов и необходимость их различия для реализации запаздывания;

8) необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого.

Из перечисленных вопросов, по-видимому, главным следует считать первый, так как первичное запаздывание присутствует во всех режимах и наблюдается даже при малой величине линейной связи. Вопросы 4 и 8 в известной мере являются едиными, так как касаются частотных параметров системы. Вопрос 5 поставлен по той причине, что различие времен релаксации осцилляторов для реализации запаздывания в рамках работ [62-65] признано весьма важным: при совпадении этих времен запаздывание не наблюдалось.

В настоящей работе авторы предполагают основное внимание уделить первому вопросу, так как именно он является наиболее общим и на настоящий момент не интерпретированным. Остальные вопросы будут считаться подчиненными, и обращение к ним будет производиться по мере необходимости. Рассмотрение будет выполняться на основе системы (5)-(6).

#### **4. Время запаздывания при изменении внешнего возбуждения и начального смещения**

Итак, начнем рассмотрение с системы (5)-(6), имеющей вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (8)$$

Для подробного изучения эта система является довольно сложной, так как содержит в общей сложности девять параметров, которые могут меняться независимо. Для упрощения анализа пойдем по пути выявления роли



отдельных слагаемых обоих уравнений, с тем, чтобы часть из них можно было бы исключить и оставить только те, которые принципиально необходимы для реализации запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний.

Прежде всего обратим внимание на возбуждение, осуществляемое единственным слагаемым  $A \cdot \cos(\omega_0 t)$ , находящимся в правой части уравнения (7). Именно через это слагаемое осуществляется поставка энергии в систему, которая далее рассеивается за счет диссипативных слагаемых  $\beta_1 \cdot \frac{d x_1}{d t}$  и  $\beta_2 \cdot \frac{d x_2}{d t}$ . Если диссипативные слагаемые убрать, то размах колебаний будет расти неограниченно, однако, если при этом убрать возбуждение, то колебания могут установиться на стационарном уровне. Для их возбуждения в этом случае будет необходимо какое-то начальное смещение того или другого осциллятора. Таким образом, полагая  $A = 0$ , а также  $\beta_1 = 0$  и  $\beta_2 = 0$ , приводим систему (7)-(8) к виду:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = 0; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (10)$$

Исходя из общих принципов колебаний, можно полагать, что благодаря отсутствию диссипации при условии сохранения механизмов превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно (то есть наличия второй производной смещения и возвращающей силы), система будет колебаться вокруг какого-то среднего положения с частотой, определяемой ее собственными параметрами. Для сообщения системе начального запаса энергии следует задать начальное смещение или скорость одного из осцилляторов.

Необходимо проверить, возможна ли в такой системе задержка установления колебаний после того, как она будет отпущена в свободное

движение после задания определенной начальной энергии.

Для проверки такого положения сравним колебания в полной системе (7)-(8) с колебаниями в системе (9)-(10) при одинаковых параметрах, не отвечающих за диссипацию и начальное возбуждение, то есть  $\omega_1^2, \omega_2^2, \gamma_1, \gamma_2, \delta, \eta$ .

Обратимся к рис.1 и рис.2. Первый из них относится к колебаниям первого осциллятора, второй – второго. Левый столбец обоих рисунков соответствует системе (7)-(8), правый – системе (9)-(10).

### Первый осциллятор

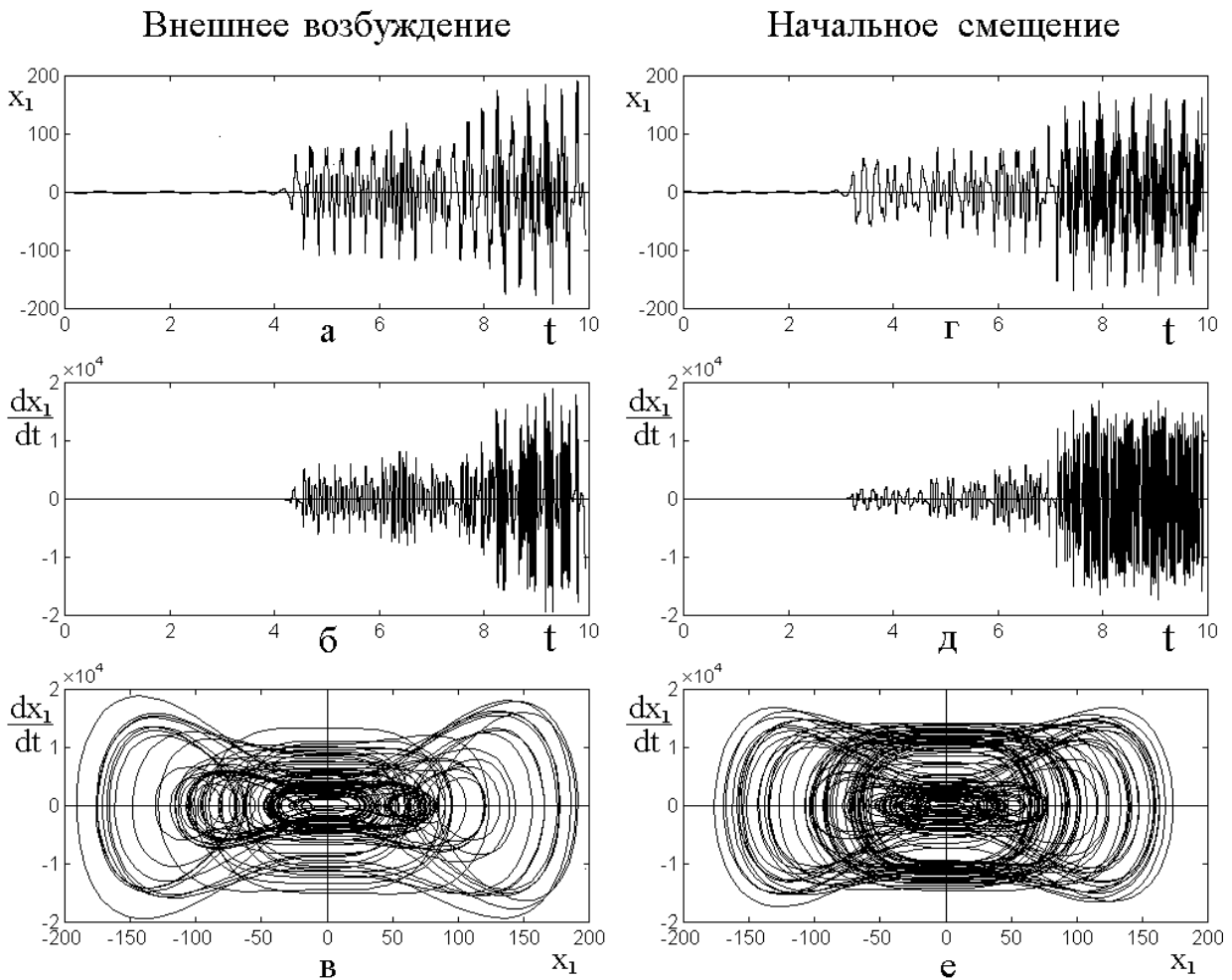


Рис.1. Колебания ПЕРВОГО осциллятора при внешнем возбуждении (а, б, в) и задании начального смещения первого осциллятора (г, д, е).

а, г – развитие колебаний смещения во времени; б, д – развитие колебаний производной от смещения во времени; в, е – параметрические (фазовые) портреты.

Эпюры а, б, в соответствуют решению системы (7)-(8), эпюры г, д, е соответствуют решению системы (9)-(10).

## Второй осциллятор

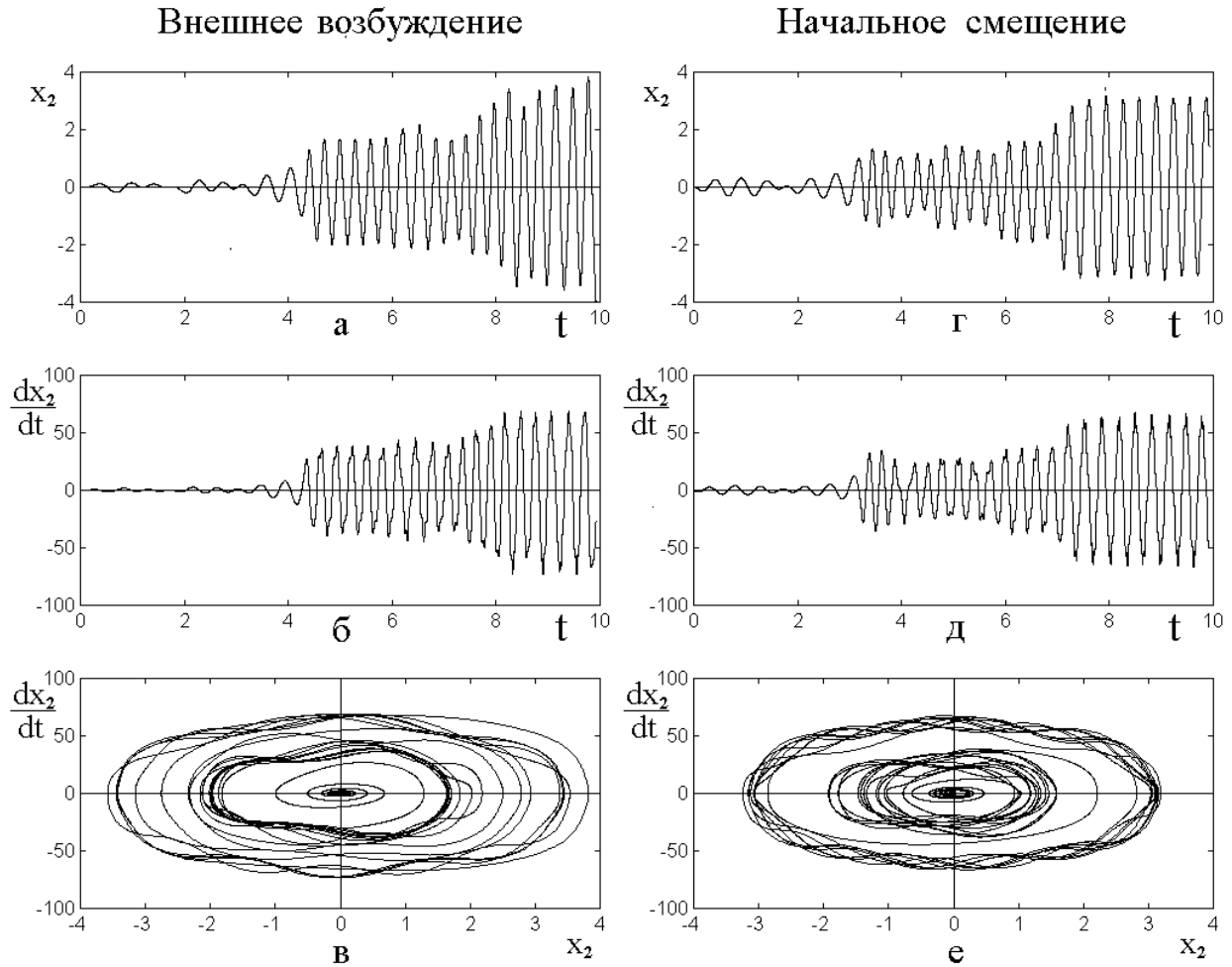


Рис.2. Колебания ВТОРОГО осциллятора при внешнем возбуждении (а, б, в) и задании начального смещения первого осциллятора (г, д, е).  
а, г – развитие колебаний смещения во времени; б, д – развитие колебаний производной от смещения во времени; в, е – параметрические (фазовые) портреты.

Эпюры а, б, в соответствуют решению системы (7)-(8), эпюры г, д, е соответствуют решению системы (9)-(10).

Для построения левого столбца на обоих рисунках приняты следующие параметры:  $\omega_1 = 5$ ;  $\omega_2 = 15$ ;  $\beta_1 = 1,0$ ;  $\beta_2 = 0,1$ ;  $\gamma_1 = 10$ ;  $\gamma_2 = 10$ ;  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $A = 70$ ;  $\omega_0 = 5$ . При этом начальные значения смещений и скоростей обоих осцилляторов равнялись нулю. Такие параметры выбраны близкими к использовавшимся в работе [62-64] (см. напр. рис.2 в работе [62]), при которых эффект запаздывания проявлялся весьма ярко. Уровень возбуждения по сравнению с принятым в работе [62] значением  $A = 50$ , был выбран несколько

большим ( $A = 70$ ), чтобы запаздывание реализовалось при несколько меньшем времени, чем в той работе (там – около 12 ед, здесь будет около 4 ед.). Проверка показала, что каких-либо принципиальных отличий такое изменение не вносит.

Для построения правого столбца на обоих рисунках приняты следующие параметры:  $\omega_1 = 5$ ;  $\omega_2 = 15$ ;  $\beta_1 = 0$ ;  $\beta_2 = 0$ ;  $\gamma_1 = 10$ ;  $\gamma_2 = 10$ ;  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $A = 0$ ;  $\omega_0 =$  любое. Начальные условия задавались смещением первого осциллятора:  $x_{10} = 2,15$ . Начальное смещение второго и начальные скорости обоих осцилляторов полагались равными нулю.

В случае внешнего возбуждения время запаздывания равно 4,1 ед. времени, в случае начального смещения – 3,4 ед. времени. Для построения рисунков соотношение уровня возбуждения  $A = 70$  и начального смещения  $x_{10} = 2,15$  специально были подобраны такими, чтобы времена запаздывания в обоих случаях примерно совпадали. Единственной целью такого подбора было повышение наглядности рисунков и удобство их сравнения. Выбор других значений возбуждения и смещения принципиальной картины не меняет.

Из физического содержания систем (7)-(8) и (9)-(10) видно, что в первом случае поступление энергии в систему осуществляется внешним возбуждением, а рассеяние энергии – механизмами диссипации, чем поддерживается ее постоянный уровень, тогда как во втором – энергия не поступает и не рассеивается, а необходимый ее уровень (постоянный запас) задается начальным отклонением (то есть начальной потенциальной энергией) первого осциллятора.

Сравнение рисунков по парным эпюрам каждого из горизонтальных рядов показывает, что характер колебаний в обоих случаях один и тот же. Для первого осциллятора сразу после окончания запаздывания развиваются близкие к хаотическим колебания, амплитуда которых сначала поддерживается постоянной, а после некоторого промежутка времени еще одним скачком увеличивается примерно в два раза. Подобный характер развития колебаний

отмечался в работе [63, рис.3] и назван там «двухступенчатым запаздыванием». Примерно такой же характер развитие колебаний имеет место и для второго осциллятора (рис.2).

Параметрический портрет для первого осциллятора (рис.1в и рис.1е) имеет вид «горизонтальной восьмерки», свойственный колебаниям в системе, динамический потенциал которой имеет два минимума [62, рис.4], [61, рис.5].

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис.2в и рис.2е) вместо восьмерки имеет вид горизонтального овала, так как динамический потенциал для него имеет всего один минимум, однако общий характер колебаний подобен колебаниям первого осциллятора, так как возбуждение второго происходит за счет линейной связи, описываемой коэффициентом  $\gamma_2$  в уравнениях (8) и (10).

Таким образом, можно видеть, что в обоих случаях, как при внешнем возбуждении, так и при задании начального смещения, характер колебаний, описываемых системами (7)-(8) и (9)-(10) практически совпадает. Некоторые более тонкие вопросы будут рассмотрены далее.

**Замечание.** В традиционной литературе относительно кривых, приведенных на рис.1в,е и рис.2в,е, как правило, используется термин «фазовый портрет» (см. напр. [2, стр.12, рис.1.5]). При этом по горизонтальной оси откладывается координата, а по вертикальной ее производная по времени (или в механике – импульс). Однако такой же термин употребляется в ряде других случаев, например, при анализе системы Лоренца, когда по всем осям откладываются переменные (см. напр. [5, стр.57, рис.4.2]). Поэтому в рамках настоящей работы с целью единообразия, не меняя физической сущности исследуемого объекта, используется более общий термин «параметрический портрет», охватывающий различные виды портретов, рассматриваемые в литературе.

## 5. Интервал реализации запаздывания

В работе [62], посвященной эффекту запаздывания при внешнем возбуждении, показано, что время запаздывания зависит от уровня

возбуждения значительным образом. Соответствующая зависимость приведена в этой работе на рис.5. Установлено, что реализация запаздывания требует превышения уровня возбуждения выше порога, при принятых там параметрах составляющего около 32 ед. Вблизи порога, сразу после его превышения, время запаздывания  $\tau_S$  стремится к достаточно большой величине (по данным работы [62] порядка 155 ед.), причем испытывает несколько скачков, а при дальнейшем превышении (на 3-5 ед.) успокаивается и по мере увеличения возбуждения спадает по закону, близкому к обратной пропорциональности. Поскольку времена запаздывания для обоих осцилляторов совпадают, на данном этапе ограничимся рассмотрением запаздывания только для первого осциллятора и прежде всего сравним запаздывание при внешнем возбуждении (система (7)-(8)) и при изменении начального смещения в отсутствие возбуждения (система (9)-(10)).

Обратимся к рис.3, где показаны зависимости времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения (а) и начального смещения (б). При этом рис.3а, с точностью до интервалов изменения параметров, представляет ту же зависимость, что приведена на рис.5 в работе [62]. На рис.3б построена подобная зависимость, имеющая место при изменении начального смещения. Обе зависимости ограничены максимальным временем запаздывания 10 ед., так как именно ниже этого значения их вид является наиболее важным для настоящего рассмотрения (изображение представляется в удобном для анализа масштабе). Порог по уровню возбуждения составлял около 40 ед. Соответствующий порог начального смещения – около 1,6 ед. Ниже того и другого порогов запаздывание отсутствовало. При этом до порога колебания имели близкий к регулярному характер, причем амплитуда их была крайне малой и составляла порядка 1-2 ед. По достижении порога амплитуда колебания резко возрастала, как правило, на два-три порядка, составляя 100-200 ед, причем их характер был близок к хаотическому. То есть общая структура колебания полностью соответствовала описанной в разделе 4. В непосредственной близости от порога (по возбуждению выше на 1-2 ед., по

смещению на 0,02 ед.) максимальное значение запаздывания составляло около 40 ед. (находится за пределами обоих рисунков).

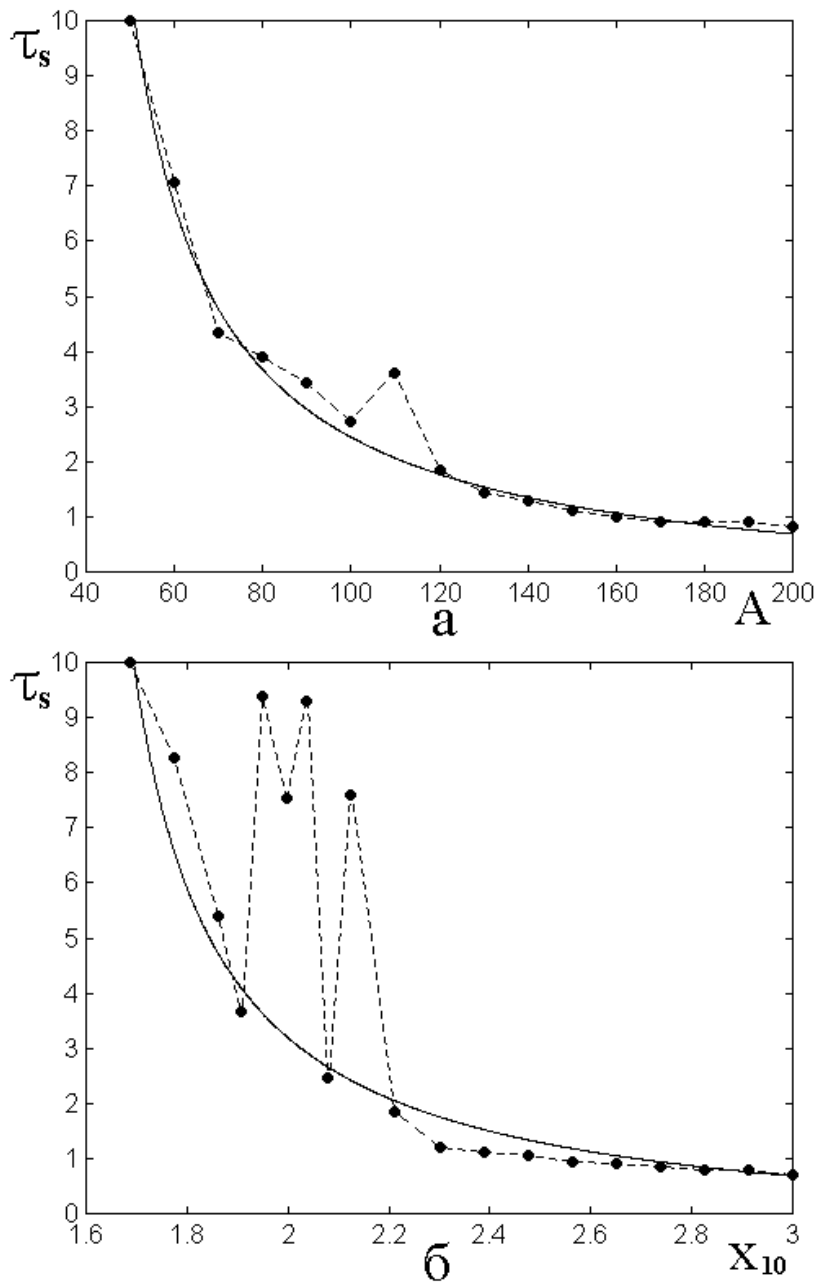


Рис.3. Зависимость времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения (а) и начального смещения (б). Точки – результаты машинного эксперимента.

Пунктирные линии получены соединением точек отрезками прямых. Сплошная кривая на эюре «а» построена по формуле (11), сплошная кривая на эюре «б» – по формуле (13). Параметры – те же, что на предыдущих рисунках.

Из сравнения обеих частей рис.3 можно видеть, что обе зависимости имеют сходный характер.

На рис.3а точки соответствуют решению системы (7)-(8), а сплошная кривая построена по формуле:

$$\tau_S = \frac{200}{A - 32} - 0.5. \quad (11)$$

Можно видеть, что эта формула по структуре близка к приведенной в работе [62] формуле (12), так что тоже представляет собой обратную пропорциональность.

Для построения рис.3б, поскольку там по горизонтальной оси другой масштаб, в формуле (11) была выполнена замена переменной;

$$A \rightarrow 115 \cdot (x_{10} - 1,25), \quad (12)$$

что привело к формуле:

$$\tau_S = \frac{200}{115 \cdot (x_{10} - 1,25) - 32} - 0.5, \quad (13)$$

которая и использовалась при построении кривой на рис.3б.

Из рис.3а можно видеть, что аппроксимирующая формула отражает реально наблюдаемую зависимость вполне приемлемым образом. Имеет место только один небольшой скачок вблизи  $A = 10$ , так что  $\tau_S$  в этой точке увеличивается примерно в два раза, тогда как точки по обе стороны от этого значения ложатся на кривую с точностью около 5%.

Из рис.3б можно видеть, что при изменении  $x_{10}$  от 1,7 до 1,9, а также выше  $x_{10} = 2,2$ , точки хорошо ложатся на аппроксимирующую кривую. В области от 1,9 до 2,1 имеются скачки, соответствующие увеличению  $\tau_S$  примерно в 2-3 раза, после которых величина  $\tau_S$  опять возвращается на кривую аппроксимации.

Таким образом, из сравнения рис.3а и рис.3б видно, что зависимости времени запаздывания, как при изменении уровня возбуждения, так и при изменении начального смещения, с точностью до нескольких скачков в довольно узких интервалах изменения того и другого параметров, вполне



приемлемо описываются одной и той же аппроксимирующей зависимостью, имеющей характер обратной пропорциональности.

**Замечание.** Наличие скачков, по-видимому, связано со стохастическим характером явления запаздывания в целом. Проверка показывает, что при времени, меньшем  $\tau_S$ , то есть до резкого скачка амплитуды, начальные колебания уже имеют нерегулярный характер, как правило, близкий к синусоиде, амплитуда которой на каждом периоде меняется в пределах до 20% и более. Такое изменение амплитуды во времени носит случайный характер. Если положить, что резкое увеличение амплитуды колебаний при окончании запаздывания соответствует преодолению начальными колебаниями какого-то порога, то амплитуда таких колебаний, меняющаяся во времени случайным образом, может достичь этого порога тоже в случайный момент времени. Поэтому время запаздывания  $\tau_S$ , определяемое преодолением порога, при случайном характере допороговых колебаний, также может меняться случайным образом. Более подробная интерпретация природы скачков требует исследования, могущего составить предмет для отдельной работы.

## **6. Характер колебаний по обе стороны от интервала эффективного запаздывания**

Из рис.3 видно, что запаздывание реализуется наиболее эффективным образом при уровне возбуждения или начального смещения, заключенного в пределах определенного интервала своих значений. При возбуждении менее 40 ед. или смещении менее 1,6 ед. запаздывание отсутствует. При возбуждении более 200 ед. и смещении более 3 ед. запаздывание составляет менее 1 ед. времени, что меньше максимального значения (здесь – 10 ед.) более чем на порядок. Интервал изменения параметров в этих пределах (то есть по возбуждению от 40 до 200 ед. и по смещению от 1,6 до 3,0 ед.) можно охарактеризовать как «интервал эффективного запаздывания», в котором запаздывание реализуется наиболее явным образом.

Для полноты картины сопоставления роли внешнего возбуждения и начального смещения, рассмотрим характер колебаний по обе стороны от этого

интервала. Как и ранее, ограничимся рассмотрением колебаний только первого осциллятора, так как второй ведет себя сходным образом.

На рис.4 показано развитие колебаний и их производных во времени, а также соответствующие параметрические портреты при уровне возбуждения, недостаточном для реализации запаздывания (левый столбец), а также при уровне настолько большом, что запаздывание становится малым (правый столбец).

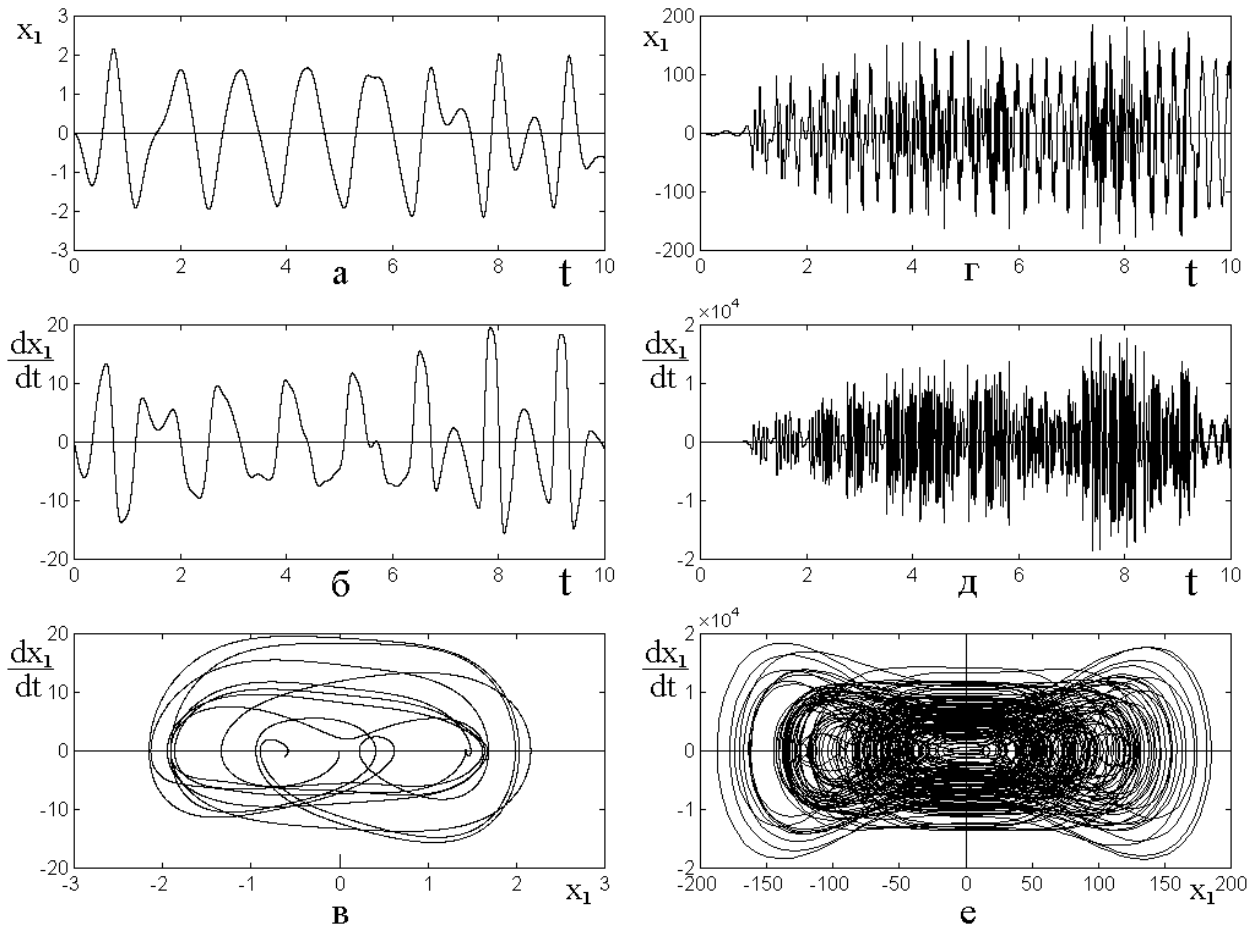


Рис.4. Колебания (а, г), их производные (б, д) и параметрические портреты (в, е) для первого осциллятора при значениях возбуждения за пределами интервала реализации запаздывания.

Левый столбец (а, б, в) –  $A = 30$ ; Правый столбец (г, д, е) –  $A = 200$ .

Из рисунка можно видеть, что при уровне возбуждения, недостаточном для реализации запаздывания (левый столбец), колебания все же являются нестационарными и имеют вид искаженной синусоиды, амплитуда которой меняется почти хаотическим образом. Амплитуда колебаний составляет около 2 ед., а амплитуда производной – около 15 ед., иногда достигая 20 ед.

Параметрический портрет имеет вид горизонтального овала с едва намечающимися следами горизонтальной восьмерки. Траектории идут в мешающемся порядке, заметая по образующей более половины своего максимального размаха. Такой вид траекторий граничит с хаосом, что отражает неустойчивость амплитуды колебаний и их производной на рис.3а и рис.3б.

При уровне возбуждения, находящемся далеко за пределами порога, где время запаздывания уже упало более чем на порядок (правый столбец), как сами колебания, так и их производная имеют четко выраженный хаотический характер. Амплитуда колебаний составляет около 150-170 ед., амплитуда производной достигает  $1,5 \cdot 10^4$  ед. Оба эти значения превышают таковые до порога более чем на два порядка. Параметрический портрет имеет четко выраженный характер горизонтальной восьмерки с сильно замазанной сердцевинкой и размазанными крыльями. В целом картина полностью аналогична представленной на рис.1а,б,в, с тем отличием, что там время запаздывания составляет около 4 ед., а здесь оно уменьшено до 1 ед.

Рассмотрим теперь те же колебания, возбуждаемые заданием начального смещения, для чего обратимся к рис.5.

На этом рисунке левый столбец опять соответствует заданию смещения ниже порога запаздывания, а правый – превышению этого порога до величины, когда время запаздывания уменьшается более чем на порядок от максимальной величины.

В левом столбце колебания и их производная опять имеют вид синусоиды, однако здесь, в отличие от предыдущего случая, синусоида почти правильная и ее амплитуда сохраняется с точностью до нескольких процентов. В соответствии с этим параметрический портрет имеет вид горизонтального овала почти без размазки, хотя дробный характер траекторий все же заметен (превышает ширину линии рисунка в 3-5 раз). Проверка показывает, что при большем отклонении от порогового значения, например при  $x_{10} = 1,00$  ед. и менее, нестационарный характер обеих синусоид все же проявляется, однако

девиация амплитуды составляет не более 10%. Амплитуды синусоид колебаний и производных составляю около 1,7 ед. и 10 ед. соответственно, что довольно близко к таким же значениям при внешнем возбуждении (рис.4а, б, 2,0 и 15 ед. соответственно). Параметрический портрет по размерам также близок к приведенному на рис.4в, однако отличается значительно более высокой упорядоченностью.

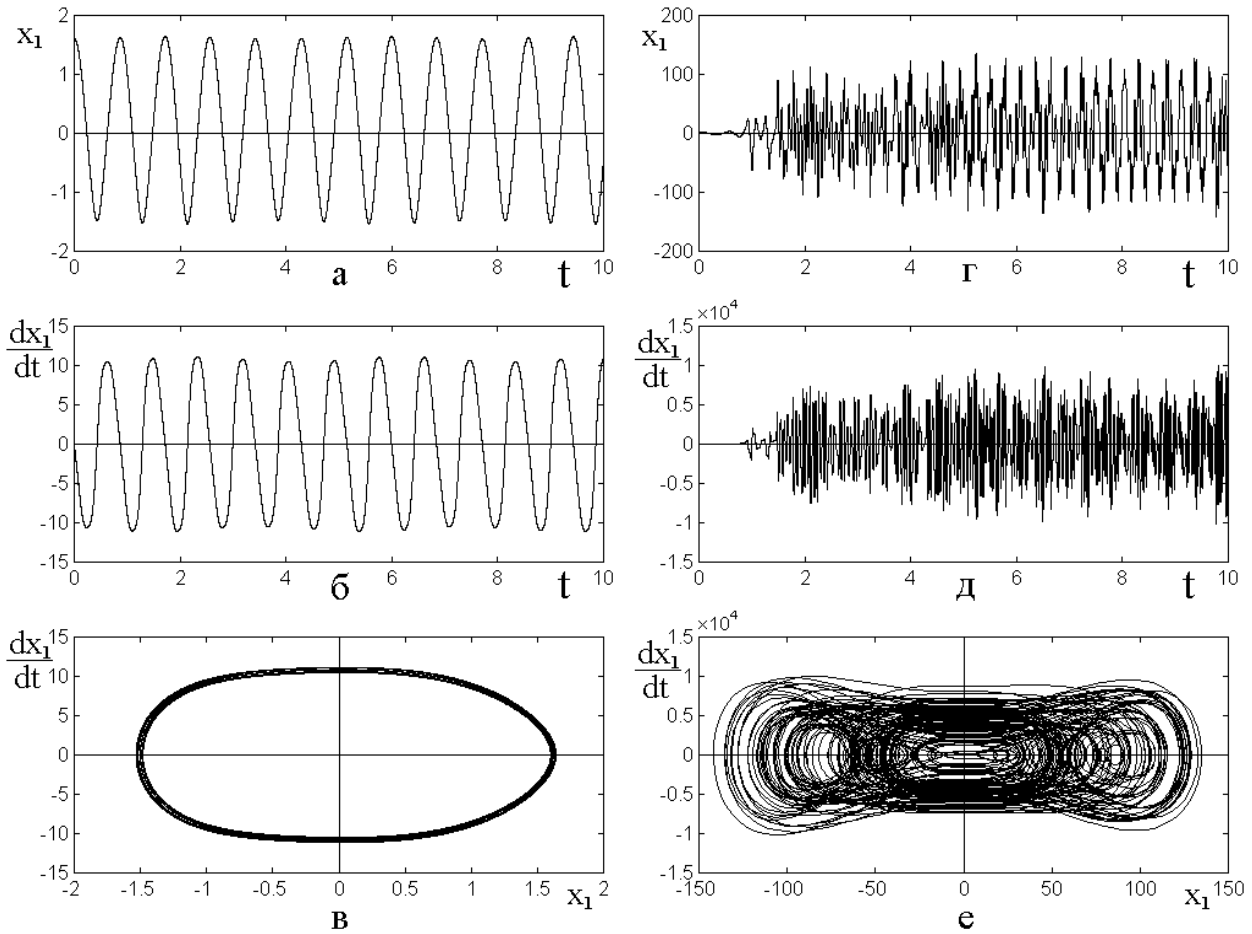


Рис.5. Колебания (а, г), их производные (б, д) и параметрические портреты (в, е) для первого осциллятора при значениях начального смещения за пределами интервала реализации запаздывания.

Левый столбец (а, б, в) –  $x_{10} = 1,50$ ; Правый столбец (г, д, е) –  $x_{10} = 2,70$ .

При начальном смещении, превышающем порог настолько, что время запаздывания упало уже более чем на порядок, характер колебаний и их производной полностью хаотический. Амплитуда колебаний составляет около 100 ед., а амплитуда производной – около  $0,9 \cdot 10^4$  ед. Параметрический

портрет имеет вид сильно размазанной горизонтальной восьмерки, полностью соответствующей хаотическому характеру образующих ее колебаний и их производной. Картина также аналогична представленной на рис.1г,д,е с тем отличием, что там время запаздывания составляет около 3,5 ед., а здесь – меньше 1 ед.

В целом, из сравнения рис.4 с рис.5 можно видеть, что в обоих случаях как внешнее возбуждение, так и начальное смещение, за незначительными отклонениями, приводят к одним и тем же результатам: колебания и их производные за пределами интервала эффективного запаздывания ведут себя вполне сходным образом.

## 7. Различные начальные условия

Согласно общим положениям теории колебаний, начальные условия для системы (9)-(10) можно задать не только смещением первого осциллятора, но и смещением второго, а также заданием скоростей каждого из осцилляторов в отдельности или любым сочетанием этих параметров, в том числе всех вместе.

Для проверки такого положения обратимся к рис.6, где показано развитие колебаний первого осциллятора во времени при задании различных значений начальных параметров. При построении рисунка задавался только один параметр, а остальные начальные параметры полагались равными нулю. Для удобства наблюдения значения параметров подобраны так, чтобы времена запаздывания во всех случаях приходились вблизи середины рисунка. На рисунке отражены колебания только первого осциллятора. Проверка показывает, что второй осциллятор, а также производные колебаний обоих осцилляторов ведут себя аналогичным образом.

Из рисунка можно видеть, что запаздывание реализуется при задании смещений или скоростей любого из осцилляторов. Сочетание каких либо двух начальных параметров, как правило, позволяет уменьшить каждый из них в 3-4 раза при сохранении времени запаздывания тем же самым. Так например, время запаздывания около 5 ед. реализуется при одновременном задании  $x_{10} = 0,5$  ед.

и  $x_{20} = 0,5$  ед., то есть когда каждый из параметров принимает значение примерно в 4 раза меньшее, чем принято при построении рис.6а,б.

Таким образом, можно полагать, с точки зрения возможности реализации запаздывания, выбор задания того или иного начального параметра критичным не является.

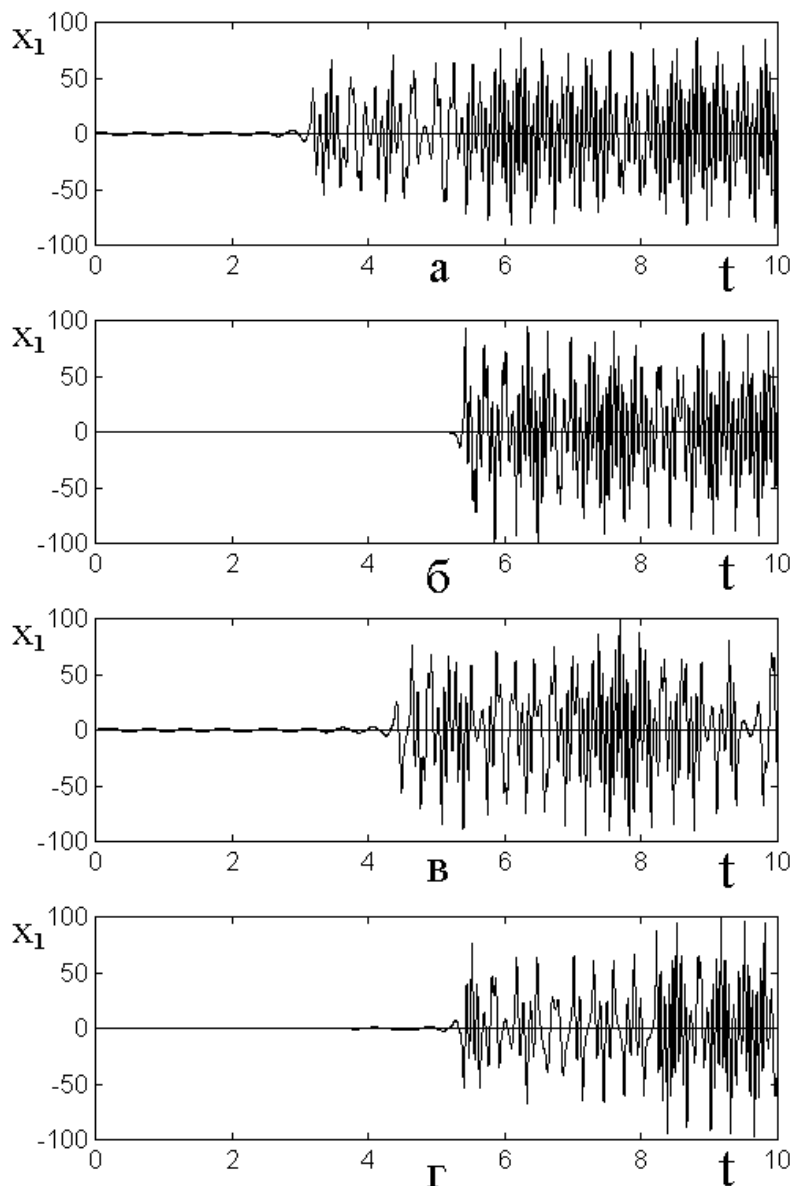


Рис.6. Колебания первого осциллятора при задании различных значений начальных параметров: а –  $x_{10} = 2,16$ ; б –  $x_{20} = 1,90$ ; в –  $(dx_1/dt)_0 = 15,10$ ; г –  $(dx_2/dt)_0 = 10,00$ . Остальные параметры – те же, что на предыдущих рисунках.

## 8. Эквивалентность систем с внешним возбуждением и начальным смещением

В результате проделанной работы можно сделать предварительный вывод. Сравнение характера колебаний, описываемых системами (7)-(8) и (9)-(10), показывает их весьма значительное сходство. Обе системы допускают развитие высокоамплитудных хаотических колебаний с соответствующим запаздыванием, а также отражают последующие развитие таких колебаний в одинаковой степени. Таким образом, можно говорить об эквивалентности возбуждения колебаний системы из двух осцилляторов как внешним воздействием, так и заданием начального смещения. При этом как высокоамплитудный хаос, так и запаздывание его развития реализуются в обеих этих системах примерно одинаковым образом.

Причиной эквивалентности систем является тот факт, что в обоих случаях динамические потенциалы обоих осцилляторов являются одними и теми же. При этом потенциал первого осциллятора имеет два минимума, разделенные определенным максимумом. В пользу двух минимумов говорит характер параметрического портрета в виде горизонтальной восьмерки. При малом уровне возбуждения или начального смещения колебания происходят в одном из минимумов, не выходя за его пределы. Для того, чтобы реализовалось запаздывание, максимальный уровень потенциальной энергии должен превысить максимум, расположенный между минимумами. Это превышение как раз определяет порог запаздывания. После превышения колебания уже не ограничиваются одним минимумом, а происходят в пределах всего потенциала в целом, в результате чего их размах, то есть амплитуда, резко увеличивается.

Следует заметить, что приведенная здесь трактовка предполагает, что потенциал первого осциллятора заведомо имеет два минимума. При этом в случае недостаточной амплитуды колебания происходят в окрестности одного из минимумов, центр которого смещен в ту или иную сторону относительно нулевого значения координаты. Однако подробное рассмотрение рисунков, например рис.1а, рис.1г и других подобных показывает, что колебания до

момента роста амплитуды, то есть в течение времени запаздывания происходят не сбоку, а точно в нуле координаты  $x_1$ .

Причина локализации малых колебаний вблизи нуля состоит в динамическом характере потенциала первого осциллятора. Этот потенциал имеет вид (формула (11) в работе [62]):

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (14)$$

Дифференцирование этого выражения по  $x_1$  дает потенциальную группу слагаемых уравнений (7) или (9). При этом переменную  $\delta_2$  следует рассматривать как постоянный параметр. Влияние этого параметра на формирование минимумов потенциала подробно рассмотрено в работе [62, раздел 7, рис.4]. Для построения потенциала используются те же параметры, что приняты здесь. Выполнен анализ характера динамического потенциала первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго. Показано, что в отсутствие колебаний второго осциллятора потенциал первого имеет единственный минимум, приходящийся на  $x_1 = 0$ . По мере увеличения  $x_2$ , после достижения критического значения около 1.2 ед., минимум при  $x_1 = 0$  раздваивается и замещается максимумом, а новые минимумы резко разъезжаются в противоположные стороны, стремясь к большим значениям  $\pm x_1$ , что проявляется как скачкообразный рост амплитуды колебаний.

В работе [62] интерпретация времени запаздывания выполнена на основе анализа времен релаксации того и другого осцилляторов. Отмечено, что необходимым условием проявления запаздывания является сильное различие этих времен релаксации. Характерные примеры различия таких времен на порядок в ту или иную сторону приведены на рис.2 и 3 в этой работе. Однако там же отмечена недостаточность модели различия времен релаксации для полной интерпретации картины явлений. Сказано, что «вопрос о роли различия времен релаксации осцилляторов требует более подробного исследования».



Далее высказано предположение о том, что «динамический характер потенциала требует синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов», а также утверждается, что «при равенстве частот запаздывание отсутствует при любых значениях параметров». В качестве осторожного предположения сказано: «видимо, требование синхронизма и является причиной, почему запаздывание проявляется только в режиме умножения частоты».

В работе [62] все исследования выполнены на основе системы (7)-(8). Однако выполненное выше сравнение этой системы с системой (9)-(10) показывает, что различие времен релаксации для проявления запаздывания необходимым не является. Действительно, в системе (9)-(10) релаксация как таковая отсутствует ( $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ ), а запаздывание проявляется в такой же степени, как в системе (7)-(8). Можно полагать, что различие времен релаксации необходимо лишь при внешнем возбуждении, то есть тогда, когда релаксация сама по себе является необходимой, так как предотвращает уход системы на бесконечность.

Таким образом, вопрос 5 из раздела 3 (или с тем же номером в работе [64]), по крайней мере относительно системы с начальным смещением, можно считать решенным.

Возвращаясь к сравнению систем (7)-(8) и (9)-(10), можно утверждать, что безразлично, за счет чего происходит запаздывание развития колебаний – за счет большой амплитуды внешнего возбуждения или за счет достаточно высокого уровня начального смещения, так как развитие колебаний и их начальное запаздывание в обоих случаях происходят одинаковым образом.

Несмотря на столь важный факт эквивалентности систем, а также возможности интерпретации порога запаздывания и резкого скачка амплитуды на основе модели потенциала, остаются открытыми три вопроса.

1. Является ли условие синхронизма или кратного соотношения частот осцилляторов необходимым для проявления запаздывания?
2. Чем определяется время запаздывания и почему оно столь велико, что многократно превышает периоды собственных колебаний обоих осцилляторов?

3. Почему характер колебаний после преодоления порога становится хаотическим?

Можно полагать, что в какой-то мере найти ответы на эти вопросы поможет максимальное упрощение системы (9)-(10) с условием сохранения явления запаздывания.

Из сравнения структуры систем (7)-(8) и (9)-(10) видно, что во второй отсутствуют только внешнее возбуждение и параметры затухания при первых производных ( $A$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  положены равными нулю). Параметры линейной связи  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , кубической нелинейности  $\delta$  и нелинейной связи  $\eta$ , а также частоты свободных колебаний осцилляторов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  до сих пор в обеих системах полагались одинаковыми. То есть, несмотря на явное упрощение, система (9)-(10) все еще остается достаточно сложной. С целью дальнейшего упрощения системы, рассмотрим теперь роль перечисленных параметров в возможности реализации запаздывания более подробно.

### 9. Произвольное соотношение частот осцилляторов

В работе [62] высказано утверждение, что эффект запаздывания имеет место только в условиях умножения частоты, причем наиболее ярко проявляется в том случае, когда частота второго осциллятора  $\omega_2$  в три раза превышает частоту первого осциллятора  $\omega_1$ , то есть выполняется соотношение  $\omega_2 = 3\omega_1$ . В той работе исследовалась система (7)-(8), соответствующая внешнему возбуждению и наличию диссипации у каждого из осцилляторов. Предметом настоящей работы является система (9)-(10), в которой внешнее возбуждение отсутствует, а колебания в системе возбуждаются путем задания начального смещения или скорости одного из осцилляторов. Диссипация в осцилляторах также отсутствует, что является необходимым условием реализации незатухающего режима.

Рассмотрим теперь, какую роль в такой системе играет соотношение между частотами осцилляторов. Предварительная проверка показала, что

запаздывание имеет место при произвольном значении такого соотношения, требуется только определенный уровень начального смещения.

Для более точного рассмотрения обратимся к рис.7, где показаны зависимости величины начального смещения  $x_{10}$ , требуемой для запаздывания  $\tau_S$  на 5 и на 2 единицы времени (пунктирные кривые 1 и 2) от соотношения между частотами осцилляторов  $\omega_2/\omega_1$ , при  $\omega_1 = 5$  ед.

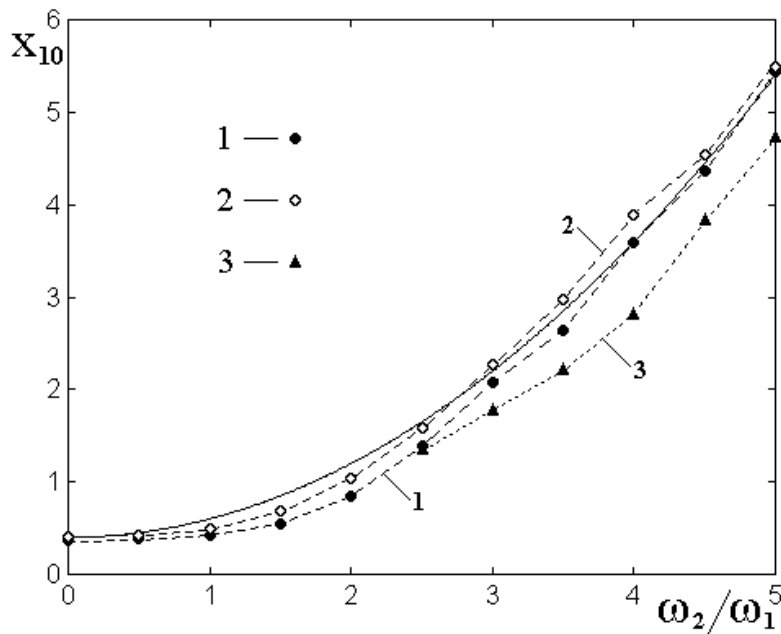


Рис.7. Зависимость величины начального смещения  $x_{10}$ , требуемой для запаздывания  $\tau_S$  на 5 (1) и 2 (2) единиц времени от соотношения между частотами осцилляторов  $\omega_2/\omega_1$ , где  $\omega_1 = 5$  ед. частоты.

1 –  $\tau_S = 5$  ед. времени; 2 –  $\tau_S = 2$  ед. времени; 3 –  $\tau_S$  – нижняя (пороговая) граница начального смещения, необходимая для реализации запаздывания.

Сплошная кривая построена по формуле (15).

Параметры – те же, что на предыдущих рисунках.

Из рисунка видно, что запаздывание реализуется во всем исследованном диапазоне соотношений частот – от нуля до пяти относительных единиц. Можно видеть, что обе приведенные зависимости (1 и 2) довольно хорошо описываются сплошной квадратичной кривой вида:

$$\tau_S = 0,2 \cdot (\omega_2/\omega_1)^2 + 0,4. \quad (15)$$

Кривой 3 показана зависимость, соответствующая пороговому значению начального смещения, необходимому для реализации запаздывания. Видно, что эта кривая также имеет квадратичный характер. Она отражает «раздел» плоскости рисунка на две части: выше кривой 3 запаздывание есть, ниже – отсутствует. Соответственно, при значении  $x_{10}$  ниже кривой 3 амплитуда колебаний на протяжении любого промежутка времени всегда остается малой, соответствующей уровню начального смещения, с сами колебания сохраняют упорядоченный характер, близкий к синусоидальному. При значении  $x_{10}$  выше кривой 3 амплитуда остается малой только на протяжении времени запаздывания (здесь – 2 или 5 ед. времени), после чего резко возрастает на два порядка и более, причем характер колебаний становится хаотическим. Сразу после порога запаздывание является значительным и может составлять до нескольких десятков единиц времени, однако при дальнейшем увеличении  $x_{10}$  постепенно уменьшается в соответствии с законом обратной пропорциональности, подобно показанному на рис.3б.

Итак, из рисунка видно, что запаздывание реализуется при любой кратности (от нуля до пяти) частоты второго осциллятора относительно частоты первого. Таким образом, требование для реализации запаздывания трехкратного умножения частоты, отмеченное в работе [62], к системе (9)-(10) не относится. Правомерность утверждения о необходимости умножения частоты на три для системы (7)-(8), то есть соответствующей внешнему возбуждению с учетом релаксации осцилляторов, в рамках настоящей работы не проверялась и требует отдельного исследования.

**Замечание.** Из рис.7 видно, что запаздывание по первому осциллятору реализуется даже при  $\omega_2/\omega_1 = 0$ , причем достижимы времена запаздывания до 5 ед. Следует заметить, что при этом во втором уравнении системы (9)-(10) отсутствует потенциальная возвращающая сила, то есть оно не является в обычном смысле колебательным, так как содержит только вторую производную в качестве инерционного слагаемого. Можно полагать, что в этом случае

колебательный режим обеспечивается за счет слагаемого линейной связи  $\gamma_2 x_1$  через посредство первого осциллятора. Запаздывание реализуется обычным образом, то есть имеется критическое значение смещения около 0,38 ед., ниже которого запаздывание отсутствует, а выше плавно спадает подобно закону обратной пропорциональности. При этом после запаздывания возбуждается хаос. Ниже критического значения при смещении от 0,01 до 0,30 реализуется синусоида с амплитудой около 0,02, осевая линия которой смещается от нуля на одно из боковых значений, составляющее около 0,2 ед. Знак этого значения меняется при изменении знака начального смещения, что говорит о наличии потенциала с двумя минимумами. При смещении от 0,30 до критического 0,38 реализуется такая же синусоида, но без смещения, то есть ее осевая линия остается около нуля. Во всех этих случаях запаздывание и хаос отсутствуют, а оба реализуются только после преодоления критического значения. Авторы полагают, что подробное исследование такого состояния представляет заметный интерес, в том числе с позиций модели динамического потенциала, так что намереваются посвятить ему отдельную работу.

## 10. Запаздывание при изменении начального смещения

В предыдущем разделе установлен факт реализации запаздывания при произвольном соотношении частот осцилляторов, причем отмечено только критическое значение смещения и два значения, соответствующие временам запаздывания 2 и 5 ед. Рассмотрим теперь роль смещения более подробно, для чего обратимся к рис.8, где показаны зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Для простоты выбраны кратные целочисленные соотношения, равные 1, 2, 3, 4. Точки являются результатом машинного эксперимента, а кривые 1-4 построены по аппроксимирующим формулам:

$$(\tau_S)_1 = 0,10 (x_{10} - 0,43)^{-1} + 0,60; \quad (16)$$

$$(\tau_S)_2 = 0,50 (x_{10} - 0,74)^{-1} + 0,22; \quad (17)$$

$$(\tau_S)_3 = 0,40 (x_{10} - 0,43)^{-1} + 0,60; \quad (18)$$

$$(\tau_S)_4 = 1,35 (x_{10} - 3,00)^{-1} - 0,21. \quad (19)$$

**Замечание.** В разделе 5 на рис.3б приведена кривая, аналогичная построенной здесь кривой 3, однако формула (13) по структуре несколько отличается от формулы (18). Путем простого преобразования можно убедиться, что формула (13) эквивалентна следующей формуле:

$$\tau_S = 1,74 (x_{10} - 1,53)^{-1} - 0,50, \quad (20)$$

структура которой та же, что у формулы (18). Эта формула при построении дает кривую, близкую к кривой 3 на рис.8, проходящую через те же точки с точностью около 10%. Различие формул продиктовано удобством построения для каждого конкретного случая. Главным моментом является тот факт, что обе формулы соответствуют зависимости типа обратной пропорциональности.

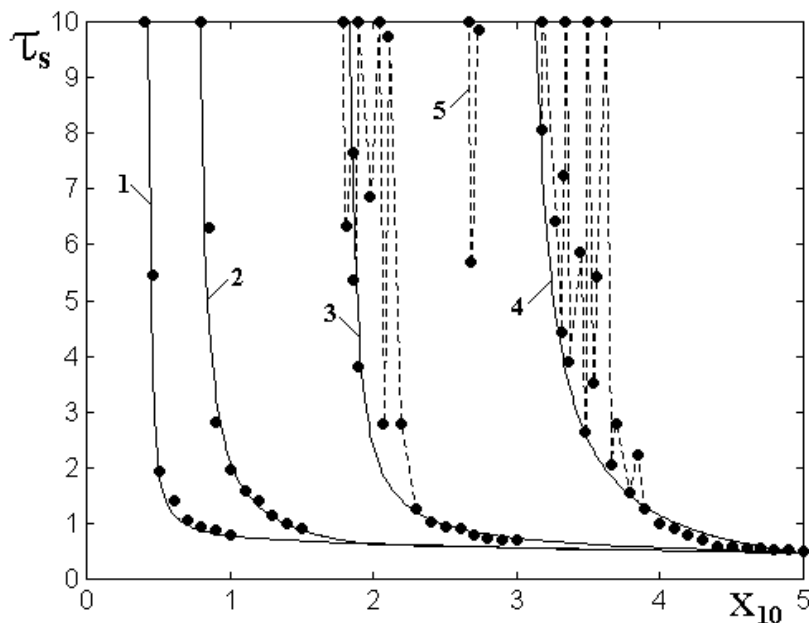


Рис.8. Зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот: 1 –  $\omega_2/\omega_1 = 1$ ; 2 –  $\omega_2/\omega_1 = 2$ ; 3 –  $\omega_2/\omega_1 = 3$ ; 4 –  $\omega_2/\omega_1 = 4$ . 5 – дополнительная кривая, также соответствующая  $\omega_2/\omega_1 = 4$ . Во всех случаях  $\omega_1 = 5$ . Точки – результаты машинного эксперимента. Пунктирные линии – соединение точек отрезками прямых. Сплошные кривые построены по формулам (16)-(19). Остальные параметры – те же, что на предыдущих рисунках.

Из рисунка видно, что при малых значениях отношения  $\omega_2/\omega_1 = 1$  и  $\omega_2/\omega_1 = 2$  (кривые 1 и 2 соответственно) точки ложатся на аппроксимирующие кривые без заметных отклонений. Однако при увеличении отношения частот при  $\omega_2/\omega_1 = 3$  и особенно при  $\omega_2/\omega_1 = 4$  (кривые 3 и 4 соответственно) время запаздывания испытывает сильные скачки до величины 10 ед. и более (выше верхнего края рисунка), так что с кривыми (18) и (19) совпадают участки зависимостей не более  $\tau_S$  порядка 1,5 ед. времени. В то же время, по мере изменения  $x_{10}$  скачки все время возвращаются к зависимостям, описываемым формулами (18) и (19), так что эти формулы отражают как бы «нижний край» диапазона скачков, играя для этого края роль огибающей. Исключением является зависимость 5, соответствующая, как и кривая 4, соотношению  $\omega_2/\omega_1 = 4$ , однако проявляющаяся в узком диапазоне значений  $x_{10}$  ниже критического значения, соответствующего уходу на бесконечность кривой 4 (то есть  $x_{10} = 3,0$ ). Ввиду малости диапазона проявления такой аномалии, в рамках настоящей работы ее рассмотрение не проводилось, однако авторы полагают, что подробное изучение этого явления, в том числе при значениях  $\omega_2/\omega_1$  больше четырех, может явиться предметом для отдельного исследования.

Факт существования скачков уже отмечался в разделе 5 при рассмотрении рис.3б, соответствующего  $\omega_2/\omega_1 = 3$ . Было отмечено, что в условиях внешнего возбуждения, соответствующего системе (7)-(8) скачки тоже могут иметь место, однако из сравнения рис.3б с рис.3а видно, что они выражены значительно слабее, чем при задании начального смещения. Так что наличие скачков следует считать принципиальным моментом системы (9)-(10). Некоторые соображения об их природе высказывались также в разделе 5, однако там же отмечено, что этот вопрос требует более подробного исследования.

Возвращаясь к рис.8, можно видеть, что все зависимости, в основном, ведут себя сходным образом: спадают по мере увеличения начального смещения по закону обратной пропорциональности. Все кривые по мере увеличения  $x_{10}$  стремятся к значению  $\tau_S$  порядка 0,7. При этом время запаздывания становится почти в два раза меньше периода собственных колебаний первого осциллятора (для  $\omega_1 = 5$  период составляет 1,25 ед. времени). Так что более или менее регулярный характер движения системы еще не успевает проявиться должным образом, как происходит резкий скачок амплитуды с переходом к хаосу. То есть здесь можно говорить не о запаздывании колебаний, а о небольшой задержке с последующим ступенчатым развитием хаоса.

Относительно рис.8 заметим, что приведенные там зависимости по верхнему уровню ограничены значением запаздывания  $\tau_S = 10$  ед. времени, что сделано для удобства рассмотрения. Однако проверка показывает, что запаздывание при заданном значении кратности частот  $\omega_2/\omega_1$  выше 3 имеет место в непрерывном диапазоне изменения  $x_{10}$ . При этом время запаздывания может достигать нескольких десятков единиц, после чего в любом случае происходит скачок амплитуды с развитием хаоса. Более подробно вопрос о непрерывности изменения начального смещения и соответствующих значениях времени запаздывания требует отдельного рассмотрения.

### 11. Роль линейной связи в первом уравнении

Продвинемся дальше по пути упрощения системы и рассмотрим роль линейной связи в первом уравнении системы (9)-(10).

Если положить линейную связь отсутствующей, то система (9)-(10) переходит в следующую:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \omega_1^2 x_1 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (21)$$



$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (22)$$

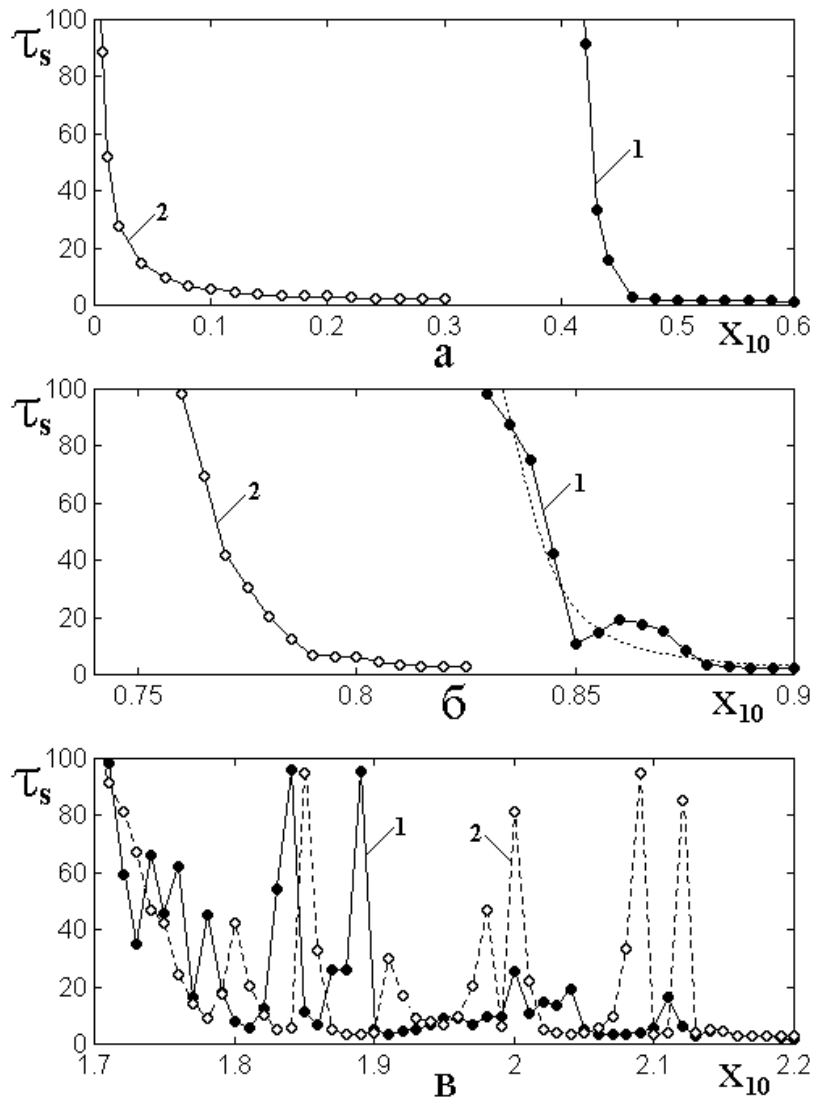


Рис.9. Зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот: а –  $\omega_2/\omega_1 = 1$ ; б –  $\omega_2/\omega_1 = 2$ ; в –  $\omega_2/\omega_1 = 3$ . На всех эянорах кривые 1 построены с помощью системы (9)-(10), кривые 2 – с помощью системы (21)-(22). Во всех случаях  $\omega_1 = 5$ . Точки – результаты машинного эксперимента. Сплошные и пунктирные линии – соединение точек отрезками прямых. Остальные параметры – те же, что на предыдущих рисунках.

Обратимся к рис.9, где показаны зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Кривые 1 соответствуют полной системе (9)-(10), кривые 2 – системе (21)-(22),

отличающейся от системы (9)-(10) тем, что в полной системе положено  $\gamma_1 = 0$ . Области изменения начального смещения соответствуют таковым, приведенным на рис.8.

**Замечание.** В отличие от рис.8, здесь интервал времени запаздывания значительно расширен (до 100 ед. времени). Такое расширение позволяет более подробно выявить не только участок малых значений времени запаздывания (на рис.8 – 10 ед.), где кривые проявляют явный характер обратной пропорциональности, но также и достаточно большие времена запаздывания, где такой характер нарушается из-за возможного присутствия скачков. Более того, значительные времена запаздывания представляют больший интерес, чем малые, так как именно на них эффект запаздывания проявляется в максимальной степени.

Сначала рассмотрим рис.9а, соответствующий равенству частот обоих осцилляторов. Можно видеть, что отсутствие линейной связи приводит к значительному сдвигу всей кривой 2 относительно кривой 1 в сторону меньших значений начального смещения. Характер кривой 2 геометрически подобен кривой 1, так что тоже может быть описан законом обратной пропорциональности. Критическое значение смещения для кривой 1 составляет около 0,43, тогда как для кривой 2 – около 0,005, то есть сдвиг происходит более чем в 80 раз. Какие-либо скачки на обеих кривых полностью отсутствуют.

Теперь обратимся к рис.9б, соответствующему случаю, когда частота второго осциллятора превышает частоту первого в два раза. Здесь кривая 1, соответствующая наличию линейной связи, уже испытывает некоторый скачок в области 0,86 ед. смещения. На рис.8 (кривая 2) такой скачок не заметен из-за ограничения рассматриваемого там интервала времени. Величина скачка сравнительно невелика (примерно в два раза), так что общий характер кривой 1 также остается близким к обратной пропорциональности, показанной на рисунке точечной линией. Кривая 2, соответствующая отсутствию линейной связи, не имеет скачков и остается довольно близкой к обратной

пропорциональности, изображенной точечной линией в области кривой 1. То есть здесь также наблюдается геометрическое подобие характера кривых. Критическое значение смещения для кривой 1 составляет около 0,83. Отсутствие связи для кривой 2 сдвигает это значение до величины около 0,75. То есть здесь величина сдвига далеко не столь разительна как на рис.9а и составляет всего около 10%.

Рассмотрим теперь рис.9в, соответствующий случаю, когда частота второго осциллятора превышает частоту первого в три раза. Здесь обе кривые испытывают весьма значительные скачки, составляющие до 10 раз и более, причем взаимно перепутываются в заметной степени. Кривая 1 (сплошные точки, сплошные линии), соответствующая наличию связи, имеет два больших скачка вблизи 1,84 и 1,90. Кривая 2 (открытые точки, пунктирные линии) имеет единичный скачок вблизи 1,86 и два парных в областях около 2,0 и 2,1. То есть какое-либо соответствие между скачками не наблюдается. Сдвиг кривой 2 относительно кривой 1 также отсутствует, для обеих кривых критическое значение смещения составляет около 1,70. Характер типа обратной пропорциональности в какой-то степени можно проследить, если пренебречь скачками, примерно так, как это было сделано для кривой 3 на рис.8. Общим является тот факт, что вблизи критического значения смещения обе кривые принимают большие значения (около 60-100), а по мере увеличения смещения спадают, стремясь к малым значениям около 1-2 ед. времени особенно после смещения порядка 2,14 ед.

Таким образом, можно считать, что исключение линейной связи в первом уравнении системы при равенстве частот осцилляторов, сохраняя вид зависимости времени запаздывания от начального смещения, приводит к значительному (в десятки раз) уменьшению критического значения смещения. При увеличении частоты второго осциллятора относительно частоты первого в два раза уменьшение критического значения смещения падает до нескольких процентов, а при увеличении в три раза полностью отсутствует. Во всех этих

случаях запаздывание сохраняется и может достигать весьма больших значений (до 100 ед. времени и более).

При равенстве частот осцилляторов и умножении частоты второго относительно частоты первого, значительные времена запаздывания имеют место сразу после критического значения смещения. При умножении частоты второго осциллятора в три раза значительное время запаздывания может наблюдаться при скачках на заметном (до 20%) удалении от критического значения смещения.

В качестве причины сдвига кривой 2 относительно кривой 1 в сторону меньших значений начального смещения можно полагать нагружение первого осциллятора вторым, то есть первый осциллятор, благодаря собственной линейной связи со вторым, вынужден «таскать за собой» второй осциллятор, на что требуется определенная энергия. В отсутствие линейной связи необходимость «таскания» отпадает, так что первый осциллятор как бы высвобождается и для его возбуждения до уровня, необходимого для запаздывания, требуется меньше энергии, то есть меньшее начальное смещение. Такое уменьшение «потребности» энергии первым осциллятором и проявляется как сдвиг критического значения смещения в меньшую сторону. Можно полагать, что такой механизм работает тем эффективнее, чем ближе частота второго осциллятора к частоте первого, то есть при равенстве частот обоих осцилляторов (что соответствует рис.9а). Когда частота второго осциллятора полагается в два раза выше частоты первого, механизм «таскания» реализуется значительно слабее, так как их частоты сильно различаются. При этом влияние линейной связи становится меньше, так что ее устранение приводит к меньшему «высвобождению» первого осциллятора, чем в случае равенства частот. В результате сдвиг кривой 2 относительно кривой 1 уменьшается, как это и проявляется на рис.9б. Когда частота второго осциллятора в три раза превышает частоту первого, то рассогласование частот становится столь сильным, что сдвиг уже перестает проявляться заметным образом (рис.9в).

**Замечание.** Поскольку в разделе 9 было установлено, что запаздывание в системе (9)-(10) возможно при любой кратности частот (проверено до пяти), было бы интересным проследить изменение критического смещения при плавном изменении такой кратности. При этом может проявиться зависимость резонансного типа с основным пиком вблизи совпадения частот осцилляторов. Исследование этого вопроса авторы оставляют в качестве отдельной задачи.

Итак, если отвлечься от частных случаев, то главным результатом настоящего раздела можно считать тот факт, что в отсутствие линейной связи в первом уравнении явление запаздывания сохраняется, так что линейная связь для проявления запаздывания фактором критическим не является. То есть, на данном этапе, рабочим инструментом для реализации запаздывания можно считать систему (21)-(22).

## 12. Роль собственной частоты первого осциллятора

Для дальнейшего упрощения системы уравнений (21)-(22) рассмотрим роль слагаемого вида  $\omega_1^2 x_1$ , где  $\omega_1$  – собственная частота первого осциллятора. Если это слагаемое исключить, то возможность периодических колебаний у первого осциллятора все равно остается, так как теперь роль инерционной составляющей будет играть слагаемое  $\delta x_1^3$ , соответствующее потенциалу четвертой степени. Более подробно роль этого слагаемого обсуждается далее, а здесь рассмотрим, к чему приведет исключение слагаемого  $\omega_1^2 x_1$ , для чего в системе (21)-(22) положим  $\omega_1 = 0$ , так что эта система перейдет в следующую:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (23)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (24)$$

Обратимся к рис.10, где показаны зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора и различных значениях частоты второго осциллятора.

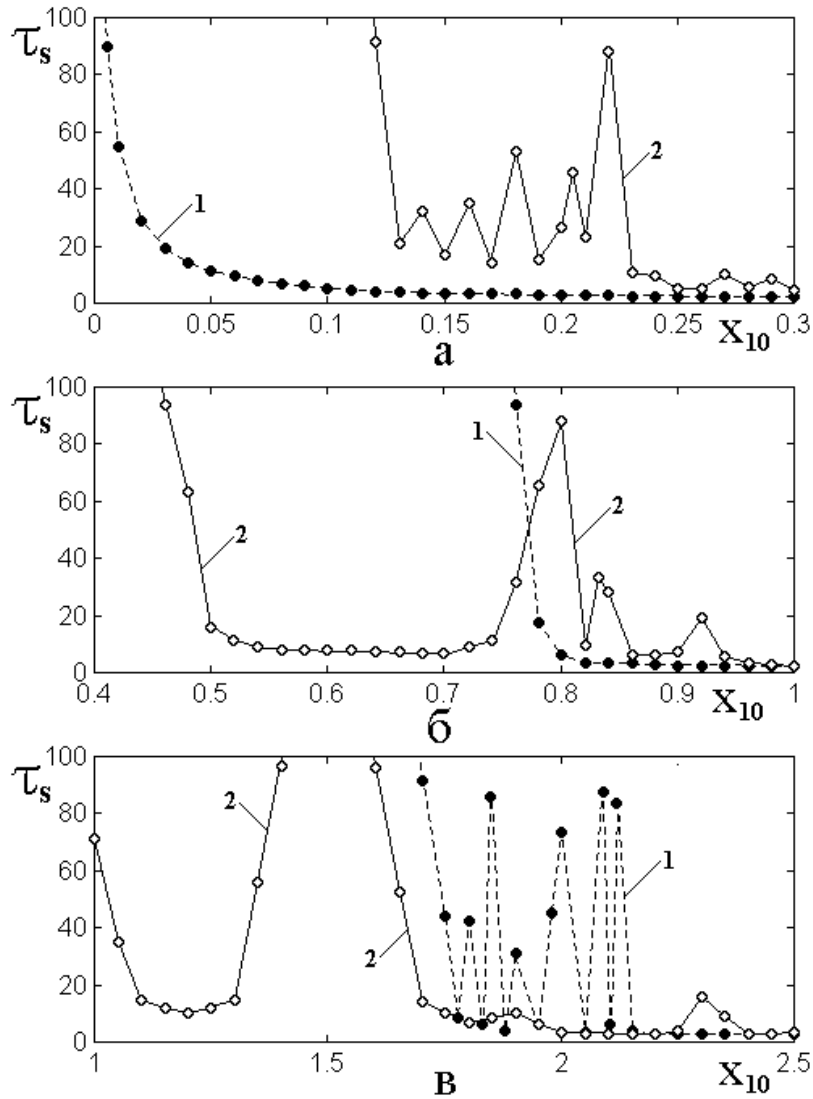


Рис.10. Зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора ( $\omega_1 = 0$ ) и различных значениях частоты второго осциллятора: а –  $\omega_2 = 5$ ; б –  $\omega_2 = 10$ ; в –  $\omega_2 = 15$ . Кривые 1 (пунктирные линии, сплошные точки) соответствуют системе (21)-(22), кривые 2 (сплошные линии, открытые точки) – системе (23)-(24).

Из рисунка можно видеть, что новые кривые (2) значительно отличаются от старых (1). При этом на рис.10а новая кривая сместилась в область больших значений начального смещения, а на рис.10б и рис.10в – в сторону меньших.

Из рис.10а, соответствующего  $\omega_2 = 5$ , видно, что критическое значение начального смещения теперь составляет около 0,12 ед., что более чем на порядок превышает значение, где частота первого осциллятора равна частоте второго (5 ед.). При этом зависимость приобрела изрезанный характер, однако время запаздывания, в основном, увеличилось, причем в некоторых случаях более чем на два порядка ( $\tau_S = 90$  ед. при  $x_{10} = 0,22$  ед.).

Из рис.10б, соответствующего  $\omega_2 = 10$ , видно, что критическое значения начального смещения резко уменьшилось и составляет около 0,45 ед. вместо 0,76 ед. при  $\omega_1 = 5$  ед. Как раз вблизи старого критического значения, около  $x_{10} = 0,8$  ед., новая кривая имеет резкий подъем до  $\tau_S = 90$  ед. Однако зависимость (кривая 2) все же остается непрерывной, так что ниже этого подъема, то есть в области от 0,7 до 0,8 ед. высокоамплитудный хаос все же наблюдается.

Из рис.10в, соответствующего  $\omega_2 = 10$ , видно, что кривая 2 теперь потеряла непрерывность и образовала широкий разрыв в области от 1,4 до 1,6 ед. начального смещения. То есть в этой области высокоамплитудный хаос отсутствует. Так что теперь уверенно можно говорить, что имеют место два критических значения – при 1,0 и 1,6 ед. При этом в области  $x_{10}$  от 1,3 до 1,4 ед. кривая 2 имеет плавный подъем вплоть до весьма больших значений порядка 90 ед.

Можно предположить, что столь большое разнообразие зависимости времени запаздывания от начального смещения при  $\omega_1 = 0$  связано с тем, что, несмотря на отсутствие традиционного инерционного слагаемого в уравнении (23), первый осциллятор все же остается системой колебательной, так как роль такого слагаемого теперь играет  $\delta x_1^3$ . При этом второй осциллятор, описываемый уравнением (24), в любом случае является системой колебательной, так как инерционное слагаемое с  $\omega_2$  сохраняется. Частота

первого осциллятора теперь зависит от амплитуды, как решение уравнения с кубической нелинейностью [61], поэтому между частотами первого и второго осцилляторов при изменении начального смещения, да и просто в процессе колебаний, могут возникнуть сложные соотношения, так или иначе влияющие на возбуждение высокоамплитудного хаоса.

Более подробное выяснение роли равенства нулю частоты первого осциллятора требует рассмотрения в отдельной работе. Здесь же ограничимся констатацией того факта, что при обращении в нуль частоты первого осциллятора, то есть при  $\omega_1 = 0$ , запаздывание возбуждения высокоамплитудного хаоса реализуется вплоть до значений  $\tau_S$  порядка 90 ед. и более в довольно широком диапазоне как частоты второго осциллятора  $\omega_2$  (от 5 до 15 ед.), так и начального смещения  $x_{10}$  (от 0,12 до 2,5 ед. в зависимости от  $\omega_2$ ). То есть система (23)-(24) вполне допускает описание как высокоамплитудного хаоса, так запаздывания его возбуждения.

### 13. Сравнение с колебаниями полных систем

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что полученная система (23)-(24) сохраняет главные свойства полной системы (9)-(10), возбуждаемой путем задания начального смещения. В разделе 4 показано, что система (9)-(10) по характеру возбуждаемых колебаний в свою очередь эквивалентна исходной системе (7)-(8), получаемой из реальных задач о возбуждении мощного гиперзвука и шума в резонаторе с ферритом.

В качестве главных свойств системы (23)-(24), унаследованных от систем (9)-(10) и (7)-(8), следует отметить возбуждение высокоамплитудного хаоса и запаздывание во времени для такого возбуждения относительно момента включения начального смещения. Рассмотрим теперь несколько подробнее характер возбуждаемых колебаний, для чего обратимся к рис.11, где показано развитие колебаний во времени и соответствующие параметрические портреты для первого (левый столбец) и второго (правый столбец) осцилляторов. Для удобства сравнения с предыдущими результатами, развитие колебаний



рассмотрено в том же интервале времени от 0 до 10 ед., что на рис.1 и рис.2, соответствующих полной системе (9)-(10).

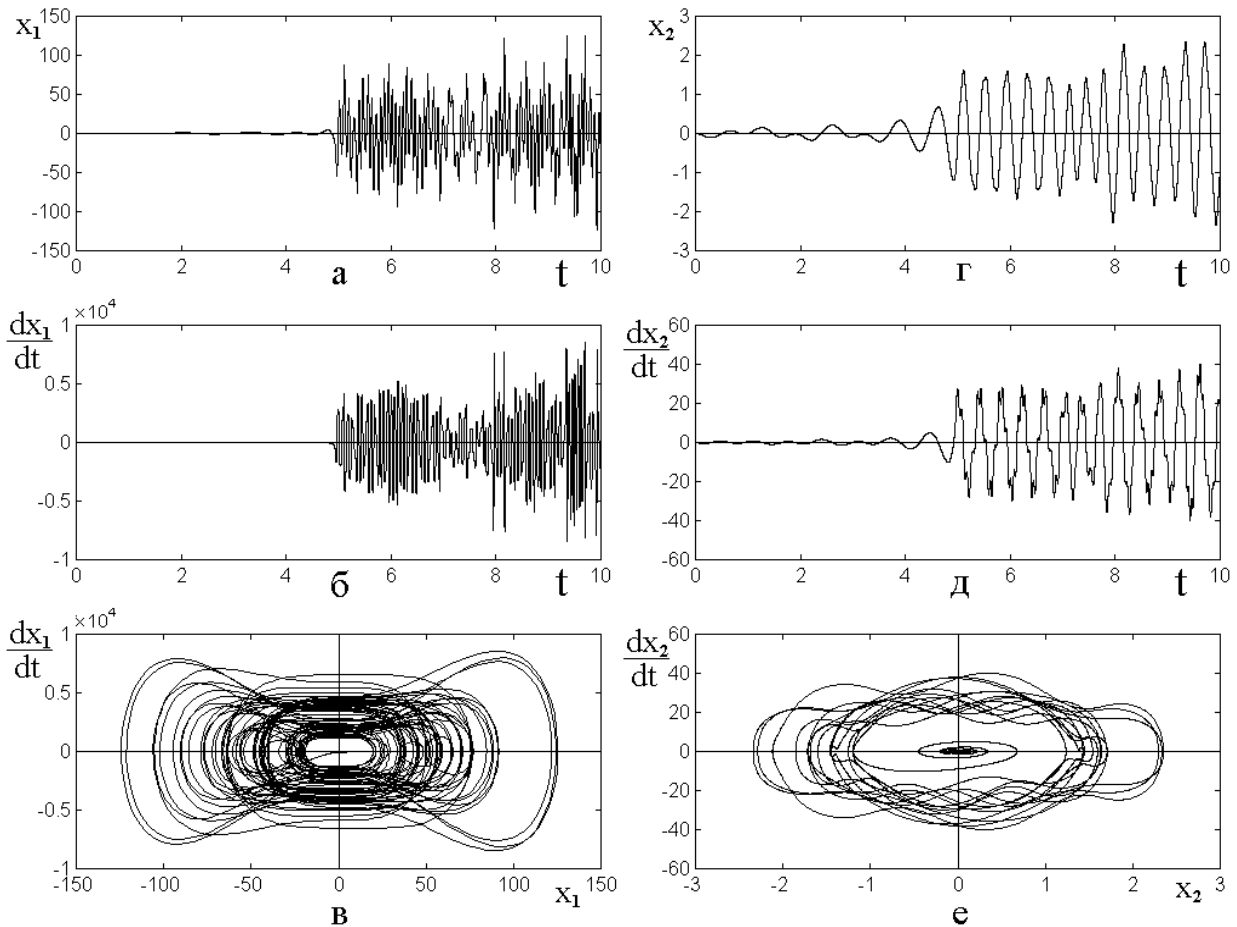


Рис.11. Развитие колебаний во времени и соответствующие параметрические портреты для первого (а, б, в) и второго (г, д, е) осцилляторов. Расчет выполнен по системе (23)-(24). Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $\omega_2 = 10$ ;  $\gamma_2 = 10$ .

Начальное смещение:  $x_{10} = 0,57$ .

Из рисунка можно видеть, что колебаний обоих осцилляторов ведут себя практически таким же образом, как колебания тех же осцилляторов на рис.1г,д,е и рис.2г,д,е. Точно так же имеется запаздывание около 5 ед. времени, после чего развивается высокоамплитудный хаос с примерно такой же амплитудой. Параметрический портрет для первого осциллятора также имеет вид горизонтальной восьмерки, а для второго – горизонтального овала.

Видимое различие состоит в том, что на рис.1 и рис.2 высокоамплитудный хаос развивается двухступенчатым образом, а здесь

второй ступени не наблюдается. Однако проверка показывает, что здесь также имеется вторая ступень, в результате которой амплитуда  $x_1$  скачком возрастает до 250-300 ед., а амплитуда  $x_2$  возрастает до 6,4 ед. Такой скачок происходит при времени около 60 ед. так что находится за правым краем рис.11 и здесь не приведен для сохранения масштаба с рис.1 и рис.2. Следует заметить, что здесь амплитуда хаоса после второго скачка уже превышает таковую на рис.1 и рис.2 примерно в полтора-два раза.

Другое отличие состоит в том, что для возбуждения режимов, представленных на рис.1 и рис.2 величина начального скачка составляет  $x_{10} = 2,15$  ед., тогда как здесь для такого же времени запаздывания достаточно  $x_{10} = 0,57$  ед. При задании большего начального смещения здесь время запаздывания довольно резко уменьшается и при  $x_{10} = 1,0$  ед. составляет около 0,8 ед., а при  $x_{10} = 2,0$  – всего 0,05 ед.

Можно полагать, что оба эти отличия не являются принципиальными, так что система (23)-(24) в достаточной степени определяет общий характер колебаний в системах (9)-(10), а также (7)-(8). Для удобства дальнейшей терминологии систему (23)-(24) можно назвать «первичным ядром» обеих этих систем.

**Замечание.** Приведенные два обстоятельства, а именно – возбуждение большой амплитуды хаоса сразу после запаздывания и высокая амплитуда хаоса после второй ступени, а также значительно меньший требуемый уровень начального смещения, наводят на мысль, что дополнительные слагаемые, присутствующие в системе (9)-(10) по сравнению с системой (23)-(24), то есть линейная связь и задание частоты первого осциллятора, как бы «мешают» реализации эффекта нестационарного запаздывания высокоамплитудного хаоса, который в достаточной степени обеспечивается системой (23)-(24). Таким образом, можно полагать, что для исследования этого эффекта в чистом виде следует исходить только из системы (23)-(24).

#### 14. Замечание о возможности дальнейшего упрощения системы

Таким образом, в результате проделанного рассмотрения из исходной системы (5)-(6) выделено ядро, сохраняющее возможность возбуждения высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Это ядро имеет вид (23)-(24):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (25)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (26)$$

Проверка показывает, что исключение из первого уравнения какого-либо из слагаемых  $\delta x_1^3$  или  $\eta x_1^2 x_2$  нарушает возможность возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Исключение из второго уравнения слагаемого связи  $\gamma_2 x_1$  недопустимо, так как разрывает связь осцилляторов. При исключении слагаемого  $\omega_2^2 x_2$  система (25)-(26) сводится к следующей:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (27)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (28)$$

Проверка показывает, что в этом случае возможность возбуждения хаоса с запаздыванием при некотором соотношении параметров все же сохраняется, однако при этом второе уравнение перестает быть колебательным, то есть теперь вместо двух осцилляторов остается всего один.

Таким образом, на данном этапе рассмотрения дальнейшее упрощение системы (25)-(26) при условии сохранения колебательных свойств обоих осцилляторов, признано нецелесообразным. Более подробно возможность такого упрощения авторы намереваются рассмотреть в следующей части настоящей работы.

## Заключение

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным.

Приведено краткое описание двух реальных физических систем, допускающих возбуждение хаотических колебаний. Первая система представляет собой нормально намагниченную ферритовую пластину, обладающую магнитоупругими свойствами. Возбуждение ферромагнитного резонанса в такой системе приводит к генерации интенсивных гиперзвуковых колебаний, после определенного порога принимающих хаотический характер. Другая система представляет собой электродинамический резонатор волноводного типа с намагниченным по нормали ферритовым диском. При поступающей мощности выше определенного порога в такой системе происходит возбуждение электромагнитных колебаний шумового характера. Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй – линейным. Приведена общая система двух дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде разложения в степенной ряд по двум переменным до четверного порядка. Установлена связь между коэффициентами разложения и реальными параметрами обеих физических систем.

На основе квадратичного приближения выделены основные слагаемые уравнений предложенной системы. Так, первое уравнение содержит кроме второй производной по времени, диссипативного и потенциального членов также слагаемые кубической нелинейности, линейной и нелинейной связи со вторым уравнением. Второе уравнение, кроме второй производной по времени, диссипативного и потенциального членов содержит слагаемое линейной связи с первым уравнением. Возбуждение колебаний в системе осуществляется путем подачи на первый осциллятор внешней силы синусоидального характера.

Показано, что в такой системе при достаточном уровне внешнего сигнала

возникают высокоамплитудные хаотические колебания, причем начало их возбуждения происходит скачком не сразу, а только по прошествии определенного времени запаздывания относительно начала воздействия возбуждающей силы.

Ввиду сложности исходной системы, в качестве главной задачи настоящей работы поставлено выделение из полной системы максимально упрощенного ядра, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса, развивающегося с запаздыванием относительно начала возбуждения системы. Такое выделение выполнено путем отсечения второстепенных слагаемых обоих уравнений, с условием сохранения высокоамплитудного хаоса и запаздывания.

В качестве первого шага упрощения рассмотрена возможность исключения внешнего возбуждения системы. При этом возбуждение колебаний осуществляется путем задания начального смещения с последующим высвобождением системы в режим свободных колебаний. Для обеспечения незатухающего режима колебаний диссипативные слагаемые в обоих уравнениях положены равными нулю. Показано, что при надлежащем выборе начального смещения характер колебаний каждого из осцилляторов, а также их параметрические портеры, образованные самими колебаниями в сочетании с производными по времени, полностью подобны таковым для системы с внешним возбуждением. Отмечено пороговое значение начального смещения и приведена интерпретация параметрических портретов для каждого из осцилляторов на основе модели динамического потенциала.

Для укороченной системы рассмотрены условия реализации запаздывания возбуждения высокоамплитудного хаоса. Выявлен интервал допустимых значений начального смещения, снизу ограниченный пороговым значением, а сверху условием превышения длительности запаздывания над полупериодом собственных колебаний системы.

Выполнено сравнение зависимостей времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения (для полной системы) и начального смещения (для

укороченной системы). Показано, что в обоих случаях зависимости, в основном, являются геометрически подобными и описываются законом обратной пропорциональности. В случае начального смещения отмечено наличие скачков зависимости, достигающих двух-трех раз, в области, близкой к порогу возбуждения. Показано, что при превышении начального смещения выше порога около полутора раз скачки прекращаются и дальнейшая зависимость, оставаясь плавной, следует закону обратной пропорциональности. В качестве возможной причины скачков отмечен стохастический характер возбуждения высокоамплитудного хаоса.

Исследован характер колебаний системы по обе стороны от интервала реализации запаздывания. Показано, что при недостаточном для реализации запаздывания уровне как внешнего возбуждения, так и начального смещения, колебания близки к синусоидальным с некоторыми следами нестационарности. При уровне, превышающем интервал реализации запаздывания, колебания остаются резко нестационарными, сохраняющими характер высокоамплитудного хаоса с той же амплитудой и параметрическими свойствами, что и внутри интервала. Установлено, что в обоих случаях, как внешнего возбуждения, так и начального смещения, характер колебаний по обе стороны от интервала реализации запаздывания остается одинаковым.

Рассмотрены колебания, задаваемые начальными условиями различных видов: смещением первого осциллятора, смещением второго, а также заданием скоростей каждого из осцилляторов в отдельности или любым сочетанием этих параметров, в том числе всех вместе. Показано, что во всех случаях возбуждение высокоамплитудного хаоса и соответствующее запаздывание, с точностью до конкретных уровней начальных условий, реализуются полностью тождественным образом.

В результате проделанного сравнения сделан промежуточный вывод об эквивалентности возбуждения колебаний системы из двух осцилляторов как внешним воздействием, так и заданием начального смещения. При этом как высокоамплитудный хаос, так и запаздывание его развития реализуются в

обеих этих системах примерно одинаковым образом. Отмечено, что причиной эквивалентности является тождество динамического потенциала в обоих случаях.

С целью установления возможности дальнейшего упрощения системы связанных уравнений рассмотрена роль соотношения собственных частот того и другого осцилляторов. Отмечено, что для системы с внешним возбуждением, согласно данным предшествующих работ, реализация запаздывания имеет место только в режиме умножения частоты, в простейшем случае, когда частота второго осциллятора превышает частоту первого в три раза.

Для проверки правомерности такого положения в системе с заданием начального смещения выполнено исследование характера колебаний при произвольном соотношении частот осцилляторов. Показано, что возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием при надлежащем уровне начального смещения реализуется в непрерывном диапазоне соотношений частот осцилляторов вплоть до пяти относительных единиц. Установлено, что зависимость порогового уровня начального смещения от отношения частоты второго осциллятора к частоте первого является непрерывной и имеет четко выраженный возрастающий квадратичный характер.

Исследована зависимость времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Показано, что при любой величине такого соотношения время запаздывания при увеличении начального смещения, начиная с определенного критического значения, спадает по закону обратной пропорциональности. Критическое значение смещения по мере увеличения соотношения частот также увеличивается. При этом до соотношения частот порядка двух относительных единиц спад является достаточно плавным, а при увеличении соотношения до трех единиц и более на закон обратной пропорциональности вблизи критического значения накладываются скачки, по времени запаздывания достигающие полутора-двух раз. По прохождении

такого участка дальнейшие зависимости спадают полностью плавно по закону обратной пропорциональности.

С целью исследования возможности дальнейшего упрощения системы рассмотрена роль слагаемого первого уравнения, отражающего линейную связь первого осциллятора со вторым. Для двух случаев – наличия и отсутствия линейной связи рассмотрены зависимости времени запаздывания от начального смещения при соотношениях частот осцилляторов в 1, 2 и 3 раза. При равенстве частот осцилляторов исключение линейной связи приводит к значительному (в десятки раз) уменьшению критического значения смещения. При отношении частот осцилляторов в два раза уменьшение критического значения смещения падает до нескольких процентов, а при увеличении в три раза полностью отсутствует. В первом случае зависимости остаются полностью плавными, во втором наблюдаются небольшие скачки, в третьем скачков становится столь много, что зависимости приобретают изрезанный характер. Во всех этих случаях высокоамплитудный хаос сохраняется, а его запаздывание может достигать весьма больших значений.

На основе сделанного вывода, из первого уравнения линейная связь исключена, в результате чего достигнуто упрощение рассматриваемой системы. С целью дальнейшего упрощения рассмотрена роль собственной частоты первого осциллятора. Отмечено, что исключение потенциального слагаемого из уравнения для первого осциллятора не приводит к ликвидации колебательного характера этого осциллятора, так как теперь роль возвращающей силы начинает играть слагаемое с кубической нелинейностью, соответствующее потенциалу четвертой степени. Рассмотрены зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора и трех различных значениях частоты второго осциллятора. Показано, что во всех случаях характер зависимости типа обратной пропорциональности с соответствующим критическим значением смещения, в основном, сохраняется. При этом критическое значение смещения уменьшается тем сильнее, чем частота второго осциллятора ниже. Скачкообразный характер зависимостей при



малых значениях частоты второго осциллятора почти отсутствует, а при увеличении этой частоты увеличивается, однако всегда остается значительно менее выраженным, чем в случае отличия от нуля частоты первого осциллятора.

Во всех случаях при исключении слагаемого, соответствующего частоте первого осциллятора, общий характер высокоамплитудного хаоса и соответствующего запаздывания сохраняется.

На основе сделанного вывода, из первого уравнения слагаемое, соответствующее собственной частоте первого осциллятора, то есть потенциалу второй степени, исключено, в результате чего достигнуто дальнейшее упрощение рассматриваемой системы.

В ходе проверки установлено, что исключение других слагаемых из первого уравнения нарушает возможность реализации высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Исключение потенциального слагаемого из второго уравнения нарушает его колебательный характер, так что также не является допустимым. Таким образом, на данном этапе рассмотрения дальнейшее упрощение системы признано нецелесообразным.

В результате проделанного рассмотрения, из исходной полной системы уравнений для двух осцилляторов выделено ядро, ответственное за возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Уравнение для смещения первого осциллятора содержит вторую производную по времени, слагаемое кубической нелинейности и слагаемое нелинейной связи со вторым. Уравнение для смещения второго осциллятора содержит вторую производную по времени, потенциальное слагаемое, соответствующее частоте второго осциллятора и слагаемое линейной связи второго осциллятора с первым. При этом возбуждение системы может быть осуществлено путем задания начального смещения или начальной скорости любого из осцилляторов.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

## Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. Москва, Наука. 1981.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. Москва, Наука. 1988.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. Москва, Наука-Физматлит. 2000.
4. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит. 2003.
5. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001.
6. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. Москва, Физматлит, 2002.
7. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. *Генерация хаоса*. Москва, Техносфера. 2012.
8. Станкевич Н.В., Попова Е.С., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. Широкополосные хаотические колебания в слабосвязанном ансамбле автоколебательных осцилляторов. *Письма в ЖТФ*. 2019. Т.45. №24. С.17-20.
9. Малоземов А., Слозуски Дж. *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*. Москва, Мир. 1982.
10. Лисовский Ф.В. *Физика цилиндрических магнитных доменов*. Москва, Сов.Радио. 1979.
11. О'Делл Т. *Ферромагнитодинамика. Динамика ЦМД, доменов и доменных стенок*. Москва, Мир. 1983.
12. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода*. Москва, Физматлит. 2018.
13. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации*. Москва, Физматлит. 2019.
14. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных*

- сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. Москва, ИЛ. 1961. С.163.
15. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971.
16. Львов В.С. *Нелинейные спиновые волны*. Москва, Наука. 1987.
17. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. *УФН*. 1974. Т.114. №4. С.609.
18. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order. *Rev. Mod. Phys.* 2010. Vol.82. No.3. P.2731.
19. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. Vol.525. No.1-2. P.2.
20. Jäger J.V., Scherbakov A.V., Linnik T.I., Yakovlev D.R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S.A., Akimov A.V., Rushforth A.W., Bayer M. Picosecond inverse magnetostriction in garfenol thin films. *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol.103. No.3. P.032409(5).
21. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics. *J. Appl. Phys.* 2016. Vol.120. No.14. P.140901(16).
22. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V.S., Lomonosov A.M., Temnov V.V., Tobey R.I. Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol.94. No.2. P.024415(7).
23. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн. *ФТТ*. 2016. Т.58. №6. С.1093.
24. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
25. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Колебания намагниченности в магнитоупругой среде при ударном воздействии

- упругого смещения. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
26. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Излучение электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии фемтосекундного импульса света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>.
27. Джаффе Д., Качерис Дж., Караянис Н. Ферритовый детектор СВЧ. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. Москва, ИЛ. 1961. С.23.
28. Simon J.C., Broussaud G. Detection with microwave ferrites. *Compt. Rend. Acad. Sci.* 1954. Vol.238. No.24. P.2294.
29. Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное детектирование магнитоупругих колебаний в режиме амплитудной модуляции. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2019. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar19/7/text.pdf>.
30. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнестрикционного преобразователя. Умножение частоты в режиме релаксации. *РЭ*. 2019. Т.64. №5. С.487-489.
31. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнестрикционного преобразователя. Умножение частоты в непрерывном режиме. *РЭ*. 2019. Т.64. №6. С.604-618.
32. Плешев Д.А., Асадуллин Ф.Ф., Оганезова Н.А., Власов В.С., Котов Л.Н., Щеглов В.И. Особенности динамики магнитной и упругой подсистем в тонкой ферритовой пленке при магнестрикционном преобразовании частот. *Известия РАН. Серия Физическая*. 2019. Т.83. №7. С.987-989.
33. Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Детектирование частотно-модулированного СВЧ сигнала с помощью магнестрикционного преобразователя. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul20/3/text.pdf>.

34. Плешев Д.А., Котов Л.Н., Власов В.С., Щеглов В.И. *Преобразование частоты при акустическом резонансе в ферритах*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2019.
35. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. В кн.: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Сборник статей по ред. А.Г.Гуревича. Москва, ИЛ. 1961. С.281.
36. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомультиплицирующий режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе. *Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие»*. Москва-Фирсановка, 2009. Издание МЭИ. С.100.
37. Щеглов В.И. Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в периодически неоднородном поле типа «вала». *XVII международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники»*. Москва, 2000. Сборник трудов. С.331-333.
38. Зубков В.И., Щеглов В.И. Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной модулированным полем с профилем «вала». *Письма в ЖТФ*. 2001. Т.27. №8. С.90-94.
39. Щеглов В.И. Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в поле типа «вала» с пространственной модуляцией. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2014. №10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct14/1/text.pdf>.
40. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Магнитостатические волны в неоднородных полях*. Москва, Физматлит. 2016.
41. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах*. Москва, Физматлит. 2017.

42. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: Мэзон У. (ред.): *Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки*. М.: Мир. 1968. С.156.
43. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. *Письма в ЖЭТФ*. 1968. Т.7. №9. С.315-317.
44. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Мандельштама-Бриллюэна. *Письма в ЖЭТФ*. 1971. Т.13. №5. С.229-232.
45. Кирюхин Н.Н., Лисовский Ф.В. Спиновые волны в среде с пространственно-временной периодичностью. *ФТТ*. 1968. Т.10. №3. С.709.
46. Медников А.М., Попков А.Ф., Анисимкин В.И., Нам Б.П., Петров А.А., Спиваков Д.Д., Хе А.С. Неупругое рассеяние поверхностной спиновой волны в тонкой пленке ЖИГ на поверхностной акустической волне. *Письма в ЖЭТФ*. 1981. Т.33. №12. С.646.
47. Крышталь Р.Г., Медведь А.В. Экспериментальное исследование рассеяния нелинейных поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне. *ФТТ*. 1992. Т.34. №1. С.333.
48. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2009. Т.54. №7. С.863.
49. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гироманитным. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.248.
50. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2013. №11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.

51. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.188.
52. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва: «НИУ МЭИ». 2013. С.199.
53. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2013. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.
54. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2014. Т.59. №5. С.482.
55. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2014. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
56. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, ИНФРА-М. 2015. С.202.
57. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. *РЭ*. 2015. Т.60. №1. С.79.

58. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. *РЭ*. 2015. Т.60. №3. С.297.
59. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.
60. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.
61. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/7/text.pdf>.
62. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.
63. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
64. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.
65. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамический потенциал как модель нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих



колебаний в режиме умножения частоты. *Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. Москва, ИНФРА-М. 2018. С.243-253.

66. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1973.

67. Mandelbrot B.B. *The fractal geometry of nature*. S.F. 1982.

68. *Фракталы. Физическая энциклопедия. Т.5. С.371-372*. Москва, Большая Российская Энциклопедия. 1998. 760 с.

**Для цитирования:**

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 1. Общие положения. Формирование упрощенной системы. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.4>