

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.5>

УДК 537.874; 537.624

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ.

ЧАСТЬ 2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДРУГ НА ДРУГА

А. П. Иванов¹, В. Г. Шавров², В. И. Щеглов²

¹ Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

² Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 9 марта 2021 г.

Аннотация. Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основой рассматриваемой системы является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Главным предметом рассмотрения такой системы в настоящей работе является воздействие осцилляторов друг на друга. Рассмотрение проведено на основе полученной в первой части работы упрощенной системы двух связанных уравнений второго порядка. При этом уравнение для первого осциллятора является нелинейным, а для второго – линейным. Предложены два вида упрощенных систем: колебательная и релаксационная. Различие между системами состоит в колебательном или релаксационном характере уравнения для второго осциллятора. Рассмотрено развитие колебаний во времени в той и другой системах, происходящее после задания начального смещения первого осциллятора. В обоих случаях отмечено наличие довольно продолжительного интервала малоамплитудного запаздывания, после которого скачком возбуждается высокоамплитудный хаос.

Благодаря сходству колебаний в обеих системах, дальнейшее исследование выполнено только для релаксационной системы, как более простой и содержащей меньшее число свободных параметров. Для релаксационной системы исследована зависимость частоты собственных колебаний первого осциллятора при отсутствии связи со вторым от величины начального смещения. Показано, что эта зависимость имеет линейный характер, соответствующий кубическому виду потенциального слагаемого первого уравнения. Рассмотрена роль потенциала первого осциллятора в формировании характера колебаний, в первую очередь – высокоамплитудного хаоса. Показано, что в процессе колебаний потенциал первого осциллятора является динамическим, причем по обе стороны от нуля имеет симметрично расположенные минимумы, чередующиеся в такт с колебаниями второго осциллятора. В качестве механизма такого поведения предложена модель «прыгающего» потенциала, в процессе колебаний совершающего «прыжки» от одного крайнего положения до другого. Установлено, что первый осциллятор в процессе высокоамплитудного хаоса следует за положением минимума динамического потенциала, определяемого значением смещения второго осциллятора. Установлено, что в интервале первичного запаздывания смещение первого осциллятора, оставаясь монотонным, за все время запаздывания меняет знак один-два раза, но никогда не превышает величины начального смещения. При этом смещение второго осциллятора, также оставаясь монотонным и сохраняя один и тот же знак, постепенно увеличивается до величины, превышающей начальное смещение на один-два порядка. Окончание запаздывания характеризуется тем, что смещение первого осциллятора резким скачком увеличивается на пять порядков, а смещение второго осциллятора также скачком увеличивается в 5-10 раз, причем оба осциллятора переходят в режим высокоамплитудных хаотических колебаний. Предложена качественная картина развития колебаний. Так, в начальный момент времени первый осциллятор имеет некоторое начальное смещение. Благодаря связи осцилляторов это смещение передается второму, после чего возвращается к

первому, вызывая увеличение его смещения. Далее процесс повторяется кольцеобразным образом, вызывая все более значительное лавинообразное смещение второго осциллятора. Исследовано влияние на общий характер колебаний основных параметров системы, таких как параметр линейной связи второго осциллятора, а также параметры потенциальности (кубической нелинейности) и нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что увеличение параметра линейной связи второго осциллятора приводит к уменьшению времени запаздывания по закону обратной пропорциональности. Исследованы зависимости амплитуд хаоса для первого и второго осцилляторов от параметра линейной связи второго осциллятора. Показано, что обе зависимости имеют монотонный возрастающий характер, причем во всем исследованном интервале изменения связи остаются подобными друг другу. Исследовано влияние на характер колебаний параметра потенциальности, соответствующего кубической нелинейности первого осциллятора. Показано, что время запаздывания от параметра потенциальности не зависит, так как этот параметр обеспечивает лишь изменение «раскрыва» ветвей потенциала, не меняя его основной структуры. Так, при увеличении параметра потенциальности амплитуда хаотических колебаний первого осциллятора падает, что обусловлено сужением раскрыва потенциала. Отмечено, что в этом случае зависимости амплитуды хаоса для того и другого осцилляторов подобными не являются, а их отношение по мере увеличения параметра потенциальности постепенно уменьшается. Исследовано влияние на характер колебаний параметра нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что по мере увеличения этого параметра время запаздывания уменьшается по закону обратной пропорциональности. Получена общая эмпирическая формула, описывающая зависимость времени запаздывания от параметров линейной связи второго осциллятора и нелинейной связи первого, содержащая шесть характерных коэффициентов. Исследованы зависимости амплитуд хаоса для первого и второго осцилляторов от параметра нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что при увеличении параметра нелинейной связи

амплитуда хаоса первого осциллятора возрастает подобно таковой при увеличении параметра связи второго осциллятора. Отмечен спадающий характер зависимости амплитуды хаоса второго осциллятора от абсолютной величины параметра нелинейной связи. В качестве возможной причины спада такой зависимости отмечен отрицательный характер параметра нелинейной связи. Приведены некоторые соображения, касающиеся дальнейшего развития работы. В качестве главной задачи отмечено построение модели, отражающей продолжительность первичного запаздывания. Перечислены некоторые возможные направления и приведены предварительные соображения о построении такой модели.

Ключевые слова: нелинейные колебания, связанные осцилляторы, хаотические колебания.

Abstract. This work is the continuation of investigation of non-stationary delay of establishment nonlinear vibrations in the system of two connected oscillators. The physical foundation of this system is the excitation of power hypersound in ferrite plate having magnetoelastic properties and also excitation of intensive electromagnetic vibrations in ferrite disc placed in electro-dynamic resonator. The most object of investigation in this work is the question about influence of oscillators one to another. The investigation is carried out on the basis of received in first part of this work the simplified system of two connected equations of second order. In this system the equation for first oscillator is nonlinear and the equation for second oscillator is linear. It is proposed two kinds of simplified systems: oscillatory and relaxation. The distinction between these systems consist of oscillatory and relaxation character of equation for second oscillator. It is investigated the development of vibrations in time for both systems which take place after the establishment of initial displacement of first oscillator. In both cases it is found the existence of considerable length time interval of small-amplitude delay after which the large-amplitude chaos is exited. Owing to similarity of vibrations in both systems the further investigation is made only on relaxation system as it is more simply and contains less free parameters. For the relaxation system it is investigated the dependence of frequency

of own vibrations of first oscillator when the connection with second oscillator is absent from the value of initial displacement. It is shown that this dependence has linear character which correspond to the cubic structure of potential item of first equation. It is investigated the role of potential of first oscillator in formation of character of vibrations and in the first turn – the large-amplitude chaos. It is shown that in the process of vibrations the potential of first oscillator is dynamical. In this case in the both sides from zero it has two symmetrical displaced minima which alternate with each other in the cycle of vibrations of second oscillator. As a mechanism of this behaviour it is proposed the model of “jumping” potential which in the process of vibrations performs the “jumps” from one extreme position to other. It is found that first oscillator in the process of large-amplitude chaos follows to the position of minimum of dynamic potential which is determined by the displacement of second oscillator. It is found that in the time-interval of initial delay the displacement of first oscillator remains monotonous and changes its sign one-two units but never does not exceed the value of initial displacement. In this case the displacement of second oscillator also being monotonous and remain the constant sign gradually increases to the value which exceed initial displacement to one-two orders. In the end of delay the displacement of first oscillator by sudden leap increase to five orders and the displacement of second oscillator also sharp increases to 5-10 times and both oscillators changes to regime of large-amplitude chaotic vibrations. The quality picture of development of vibrations is proposed. In this picture the first oscillator has some initial displacement. Owing to the connection between oscillators this displacement is passed to the second oscillator and after this action return to the first oscillator prompting the increasing of its displacement. Further the process repeats by ringing character causing the more considerable avalanche-similar displacement of second oscillator. It is investigated the influence on the whole character of vibrations of main parameters of system so as the parameter of linear connection of second oscillator and also the parameters of potentiality (cubic nonlinearity) and nonlinear connection of first oscillator. It is shown that the increasing of linear connection of second oscillator brings to decreasing of delay time

as a law of inverse ratio of this parameter. It is investigated the dependencies of chaotic amplitude for both oscillators from the coefficient of linear connection of second oscillator. It is shown that both dependencies has monotonous increasing character and in the whole investigated interval of varying of connection remain similar to each other. The influence on the character of vibrations the parameter of potentiality which correspond to cubic nonlinearity of first oscillator is investigated. It is shown that the delay time does not depend from the potentiality parameter so as this parameter ensures only the variation of “opening” the branches of potential and does not change its main structure. So when the parameter of potentiality is increasing the amplitude of chaotic vibrations of first oscillator decreases what is determined by decreasing of opening of potential branches. It is found that in this case the dependencies of chaotic amplitude of both oscillators do not similar and its relation when parameter of potentiality increases is gradually decrease. The influence on the character of vibrations the parameter of nonlinear connection of first oscillator is investigated. It is shown that by the increasing of this parameter the delay time decreases as a law of inverse ratio of this parameter. It is found the general empirical formula which describes the dependence of delay time from parameters of linear connection of second oscillator and nonlinear connection of first oscillator containing six charactering coefficients. The dependencies of chaotic amplitude of first and second oscillators from the parameter of nonlinear connection of first oscillator is investigated. It is shown that by the increasing of parameter of nonlinear connection the amplitude of chaotic vibrations of first oscillator increase similar to the dependency by the increasing the parameter of connection of second oscillator. It is found the decreasing character of dependency of chaotic amplitude from the absolute value of parameter of nonlinear connection. As a possible reason of this decreasing it is proposed the negative character of nonlinear connection parameter. It is proposed some considerations which concern to the further development of this work. As a most important task it is proposed the construction of the model which describes the duration of initial delay. It is proposed some possible directions and described preliminary considerations about constructing of this model.

Key words: nonlinear vibrations, connected oscillators, chaotic vibrations.

Введение

Одной из важнейших задач современной физики является исследование нелинейных и нестационарных явлений [1-8]. Значительное разнообразие в этом плане обеспечивает ферромагнитный резонанс и связанные с ним магнитоупругие явления, в том числе имеющие место в диапазоне сверхвысоких частот [9-21]. В работах [22-24] была отмечена возможность возбуждения мощного гиперзвука с помощью магнитострикционного преобразователя, работающего в режиме нелинейного ферромагнитного резонанса. В работах [25-27] для той же системы была показана возможность умножения и деления частоты, в том числе, в дробном отношении. В работах [28, 29] были описаны колебания шумового характера в системе – феррит-резонатор.

Теоретическая интерпретация описанных в работах [22-29] явлений основана на решении системы связанных нелинейных уравнений, первую группу из которых составляют уравнения для намагниченности, а вторую – уравнения для упругих или электромагнитных колебаний. В зависимости от конкретного содержания задачи система содержит от 5 до 10 уравнений, из которых от 3 до 6 являются нелинейными.

Сложность явлений и громоздкость необходимого математического аппарата стимулирует поиск простых моделей, позволяющих описать наблюдаемую физику. Весьма удобной моделью можно считать представление исследуемой системы в виде совокупности двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. При этом нелинейный осциллятор соответствует магнитной части системы, а линейный – упругой или электромагнитной ее части [30-33]. Особенно успешное развитие модель получила в рамках квадратичного приближения, при котором параметры осцилляторов были выражены через параметры материала и геометрию структуры [34-38]. Были предложены различные варианты систем уравнений

для связанных осцилляторов, отличающиеся степенью и характером принятых приближений [39, 40].

В работе [41] сообщалось о проявлении нестационарного запаздывания возбуждения колебаний, имеющего место в режиме умножения частоты. Дальнейшее исследование запаздывания, в том числе с привлечением модели динамического потенциала, было выполнено в работах [42-44].

Несмотря на подробное исследование явления запаздывания, ряд его моментов оставался невыясненным. Так, оставалась неясной роль различных компонент системы уравнений, степени нелинейности и характера связи. Недостаточно рассматривалась роль релаксационных свойств и уровня возбуждения. Таким образом, ряд вопросов, касающихся явления запаздывания, оставался нерешенным. Значительная трудность задачи состояла в высокой сложности системы уравнений, содержащей в самом простейшем варианте до 10 независимых параметров.

Для преодоления этой трудности была поставлена задача выделения из полной системы той ее части, которая была бы ответственна непосредственно за эффект запаздывания. Эта задача в значительной степени была решена в работе [45]. Из полной системы было выделено «первичное ядро», содержащее всего 3 или 4 независимых параметра, в зависимости от колебательного или релаксационного характера линейного осциллятора.

Настоящая работа является продолжением, то есть второй частью работы [45], причем главной задачей является исследование свойств «первичного ядра» с целью более подробного выявления особенностей механизма запаздывания.

1. Основные системы уравнений

Настоящая работа является продолжением [45], так что приведем краткую сводку полученных там результатов.

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Для физического обоснования постановки задачи приведено краткое описание двух реальных

систем, каждая из которых в качестве нелинейного элемента содержит ферритовую пластину, а в качестве линейного – упругую пластину или электродинамический резонатор. При достаточной мощности внешнего возбуждения в первой системе генерируются высокоамплитудные гиперзвуковые колебания, а во второй – шумовые колебания стохастического характера.

Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй – линейным.

Для такой модели приведена система двух дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (2)$$

Здесь x_1 и x_2 – смещение первого и второго осцилляторов, β_1 и β_2 – соответствующие параметры диссипации, ω_1 и ω_2 – собственные частоты колебаний осцилляторов в отсутствие нелинейности и связи, γ_1 и γ_2 – параметры линейно связи между осцилляторами, η – параметр нелинейной связи, δ – параметр кубической нелинейности первого осциллятора, A – амплитуда и ω_0 – частота внешнего воздействия.

Замечание. Здесь и далее системы и все последующие выражения приведены в нормированных единицах, тех же, что использованы в работе [45]. Там же приведена схема нормировки и связь нормированных величин с параметрами реальных задач. Ввиду такого упрощения далее размерные обозначения единиц не приводятся.

Отмечено, что в такой системе при достаточном уровне внешнего сигнала возникают высокоамплитудные хаотические колебания, начало возбуждения которых происходит скачком по прошествии определенного времени запаздывания относительно начала воздействия возбуждающей силы.

Ввиду сложности исходной системы, поставлена задача выделения из нее упрощенного ядра, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием.

В качестве первого шага упрощения показана возможность исключения внешнего возбуждения, так что развитие колебаний обеспечивается заданием начального смещения или скорости любого из осцилляторов. Для обеспечения незатухающих колебаний параметры диссипации положены равными нулю. В результате таких преобразований система принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (4)$$

Относительно явления запаздывания на основе исследования развития во времени показана эквивалентность этой системы с начальной (1)-(2).

В качестве дальнейших шагов упрощения выявлена роль линейной связи и частоты первого осциллятора. Показано, что при исключении обоих этих параметров общие свойства и динамические характеристики запаздывания заметным образом изменяются, однако само запаздывание, как таковое, сохраняет тот же порядок амплитудных и временных параметров. При этом система (3)-(4) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (6)$$

Здесь оба уравнения являются колебательными, так как собственная частота первого осциллятора определяется потенциальным слагаемым кубической нелинейности, а второго – потенциальным слагаемым, содержащим квадрат собственной частоты.

Проверка показала, что исключение из первого уравнения слагаемых кубической нелинейности и нелинейной связи нарушает запаздывание. При этом исключение кубической нелинейности приводит к уходу системы на бесконечность, а исключение нелинейной связи уничтожает эффект запаздывания.

Дополнительного упрощения можно достичь при обращении в нуль потенциального слагаемого второго уравнения, так что система принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (8)$$

При этом запаздывание также имеет место, однако второе уравнение теряет колебательный характер, так что из двух осцилляторов колебательным остается всего один первый, а второй приобретает релаксационный характер.

Таким образом, в случае сохранения колебательного характера обоих осцилляторов, «первичным ядром», обеспечивающим запаздывание, является система (5)-(6), а в случае отказа от колебательного характера второго осциллятора «первичным ядром» остается система (7)-(8). Для различения далее обоих полученных первичных ядер будем первое называть «колебательным ядром», а второе – «релаксационным ядром». В дальнейшем рассмотрении уделим основное внимание именно этим двум системам.

2. Сравнение колебательной и релаксационной систем

В предыдущем разделе приведены две системы (5)-(6) и (7)-(8), которые можно рассматривать как первичное ядро исходной системы, обеспечивающее запаздывание. Для сравнения систем обратимся к рис.1 и рис.2, первый из

которых касается системы (5)-(6). а второй – системы (7)-(8). Оба рисунка построены в одинаковом масштабе по осям, для чего в первом случае начальное смещение положено равным 0, 21, а во втором – 0,001 ед.

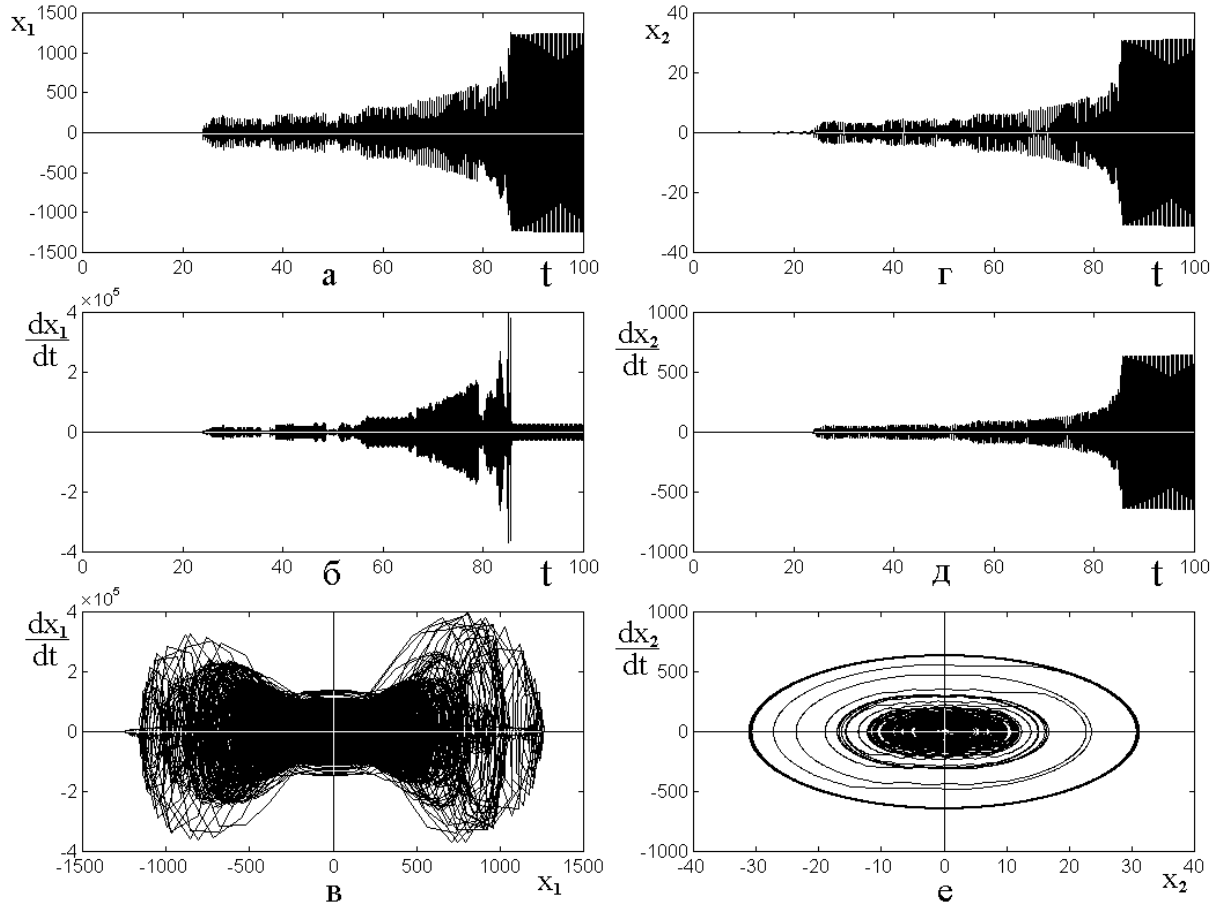


Рис.1. Колебания (а, г), их производные (б, д) и параметрические портреты (в, е) для первого (левый столбец – а, б, в) и второго (правый столбец – г, д, е) осцилляторов, рассчитанные по системе (5)-(6).

Параметры: $\delta = 5$; $\eta = 200$; $\gamma_2 = 10$; $\omega_2 = 5$.

Начальное смещение: $x_{10} = 0,21$.

Из сравнения рисунков можно видеть, что при таком соотношении начальных смещений колебания в обеих системах весьма сходны между собой. В обоих случаях величина запаздывания составляет около 20-25 ед. времени, развитие колебаний имеет двухступенчатый характер, параметрические портреты для первого осциллятора представляют собой «горизонтальную восьмерку», а для второго – «горизонтальный овал».

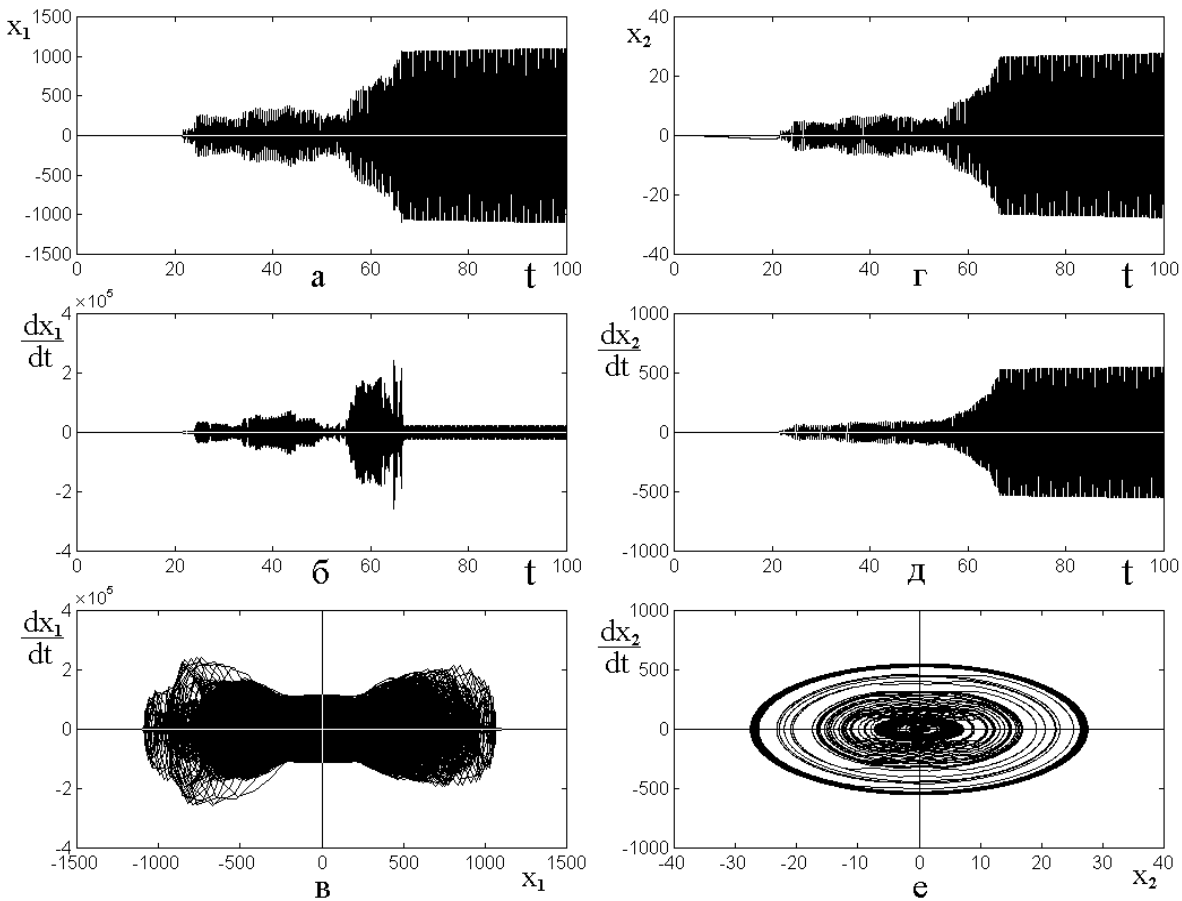


Рис.2. Колебания (а, г), их производные (б, д) и параметрические портреты (в, е) для первого (левый столбец) и второго (правый столбец) осцилляторов, рассчитанные по системе (7)-(8).

Параметры: $\delta = 5$; $\eta = 200$; $\gamma_2 = 10$.

Начальное смещение: $x_{10} = 0,001$.

Таким образом, можно полагать, что колебательный или релаксационный характер второго осциллятора для реализации запаздывания решающим не является, а различие состоит только в том, что при релаксационном характере те же колебания достигаются при начальном смещении более чем на два порядка меньше. То есть колебательный характер как бы «мешает» реализации запаздывания.

3. Роль частотного слагаемого во втором уравнении

Прямолинейная логика анализа запаздывания требует, чтобы дальнейшее рассмотрение касалось только системы (7)-(8), так как эта система обеспечивает запаздывание при наиболее простом виде уравнений. Однако, поскольку в системе (7)-(8) второе уравнение становится релаксационным, сделаем небольшую остановку и сначала рассмотрим несколько подробнее систему (5)-

(6), в которой оба уравнения остаются колебательными. В первую очередь обратим внимание на роль частоты ω_2 , присутствующей во втором уравнении, ибо именно она обеспечивает его колебательный характер.

Сравнение двух систем, выполненное в предыдущем разделе, показывает, что одинаковый характер колебаний требует для системы (5)-(6) уровня начального смещения значительно (в ~ 200 раз) более высокого, чем для системы (7)-(8). В то же время, система (5)-(6) переходит в систему (7)-(8) при $\omega_2 \rightarrow 0$. В этом отношении представляет интерес проследить, как зависит критическое значение начального смещения x_{10} от частоты второго осциллятора ω_2 . Ответ на этот вопрос дает рис.3, где приведена такая зависимость в интервале частот от 0 до 10 ед. Точки – результаты машинного эксперимента, аппроксимирующая кривая построена по формуле:

$$x_{10} = 0,0048 \cdot \omega_2^2. \quad (9)$$

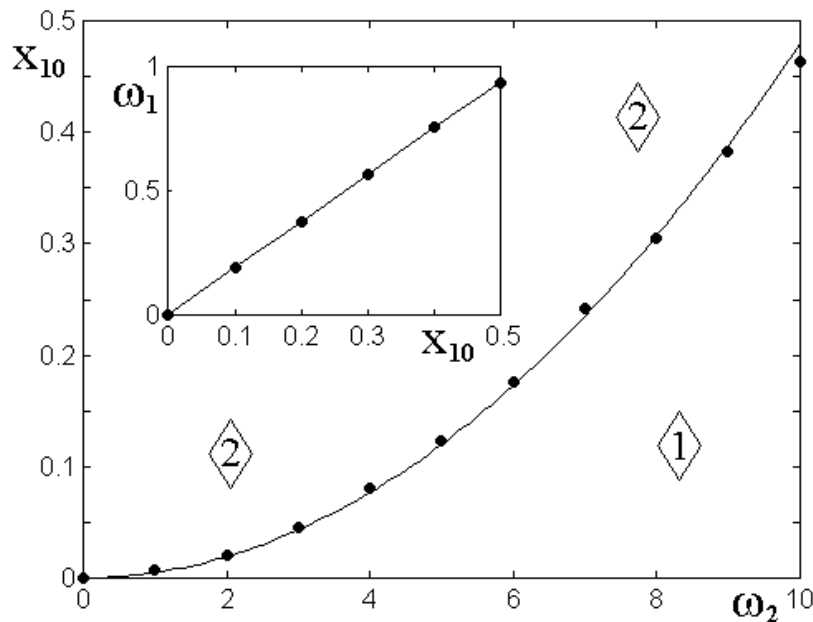


Рис.3. Зависимость критического значения начального смещения от частоты второго осциллятора.

- 1 – область квазирегулярных малоамплитудных колебаний;
- 2 – область запаздывающего высокоамплитудного хаоса.

Точки – результат машинного эксперимента. Кривая на основном рисунке построена по формуле (9). На врезке – зависимость частоты собственных колебаний первого осциллятора от начального смещения.

Параметры: $\delta = 5$; $\eta = 200$; $\gamma_2 = 10$, на врезке $\gamma_2 = 0$.

Из рисунка можно видеть, что аппроксимирующая зависимость, построенная по формуле (9), соответствует полученным в машинном эксперименте точкам, с весьма высокой точностью: отклонение точек от кривой не превышает 0,3%. По квадратичности эта зависимость подобна кривым, приведенным в работе [45] на рис.3б и рис.7, однако здесь она отличается значительной чистотой, видимо, благодаря тому, что исключены «мешающие» факторы (ω_1, γ_1, η , а также влияние второго осциллятора).

Приведенная кривая на рисунке разделяет две области 1 и 2. Ниже этой кривой, то есть в области 1 колебания имеют вид, близкий к синусоиде со слегка меняющейся амплитудой (не более 5%). Амплитуда составляет несколько единиц (как правило, менее 10). Изменения амплитуды носят характер, близкий к хаотическому. Период колебаний наименьший вблизи порога запаздывания и составляет порядка нескольких единиц времени, а по мере уменьшения x_{10} возрастает и при $x_{10} \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Выше приведенной на рис.3 кривой, то есть в области 2, колебания имеют вид высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Амплитуда хаоса составляет от 300 ед. до 1500 ед. Запаздывание максимально сразу после порога, где оно может составлять до 100 и более единиц времени (в некоторых случаях наблюдалось запаздывание до 500 ед.). По мере увеличения начального смещения x_{10} время запаздывания уменьшается, так что при значительном увеличении (в 2-3 раза и более) стремится к нулю. В общем, зависимость времени запаздывания от начального смещения имеет тот же характер, что кривые, приведенные в работе [40] на рис.8, однако опять здесь они проявляются в значительно более чистом виде, хотя скачки в некоторых случаях также сохраняются.

На врезке показана зависимость частоты первого осциллятора от величины начального смещения при отсутствии связи со вторым осциллятором, то есть при $\gamma_2 = 0$ и $x_2 = 0$, так что уравнение для него (5) приобретает вид чистого уравнения второго порядка с кубической нелинейностью:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta \cdot x_1^3 = 0. \quad (10)$$

В работе [40] рассмотрено подобное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b^2 \cdot x^3 = 0. \quad (11)$$

Показано, что это уравнение является колебательным, в формуле (39) приведен его общий вид, а в формулах (44), (48), (51), (52) приведены решения, полученные разными способами, причем во всех случаях частота прямо пропорциональна амплитуде колебаний.

Можно видеть, что (10) сводится к (11) заменой $\delta = b^2$, так что $b = \sqrt{\delta}$.

При такой замене полученные в [40] выражения для частоты (44), (48), (51) принимают вид:

$$\omega = \sqrt{\delta} \cdot x_{10}; \quad (12)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\delta}{2}} \cdot x_{10}; \quad (13)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\delta(9 + \sqrt{\delta})}{12}} \cdot x_{10}. \quad (14)$$

При $\delta = 5$ из этих выражений получаем: из (12) – $\omega = 2,24 \cdot x_{10}$;

из (13) – $\omega = 1,58 \cdot x_{10}$; из (14) – $\omega = 2,16 \cdot x_{10}$.

Из врезки на рис.3 видно, что частота ω_1 прямо пропорциональна величине начального смещения с коэффициентом 1,90. То есть линейная зависимость между ω_1 и x_{10} выполняется с высокой точностью, а из формул точнее всего подходит (14), однако и две другие (12) и (13) тоже получаются довольно близкими.

4. Роль потенциала в формировании характера колебаний

Теперь, поскольку роль частоты в основном выявлена, перейдем к более

подробному рассмотрению системы (7)-(8), как наиболее простой, но в то же время, сохраняющей эффект запаздывания. Эта система имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (15)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (16)$$

Прежде всего рассмотрим роль потенциала. Слагаемые, имеющие потенциальный характер, имеются только в первом уравнении, то есть (15). Соответствующий потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\delta}{4} x_1^4 + \frac{\eta}{3} x_1^3 x_2. \quad (17).$$

Можно видеть, что потенциал определяется не только значением смещения первого осциллятора x_1 , но также и смещением второго осциллятора x_2 , реализуемого через нелинейную связь с параметром η . Поскольку в процессе колебаний величина x_2 меняется, то потенциал является динамическим [41-44]. Основные свойства потенциала иллюстрируются рис.4.

На рис.4а показана зависимость потенциала U от смещения первого осциллятора x_1 при двух противоположных по знаку значениях смещения второго осциллятора x_2 . Для построения выбрано достаточно типичное значение x_2 , равное ± 20 ед. Можно видеть, что в обоих случаях потенциал имеет минимумы, положения которых показаны стрелками. Они чередуются в такт с колебаниями второго осциллятора. То есть потенциал в такт с колебаниями второго осциллятора «перепрыгивает» от одного положения до другого.

На рис.4б показана зависимость положения одного из минимумов (соответствующего кривой 1 на рис.4а) от величины смещения второго осциллятора x_2 . Видно, что зависимость представляет собой прямую линию.

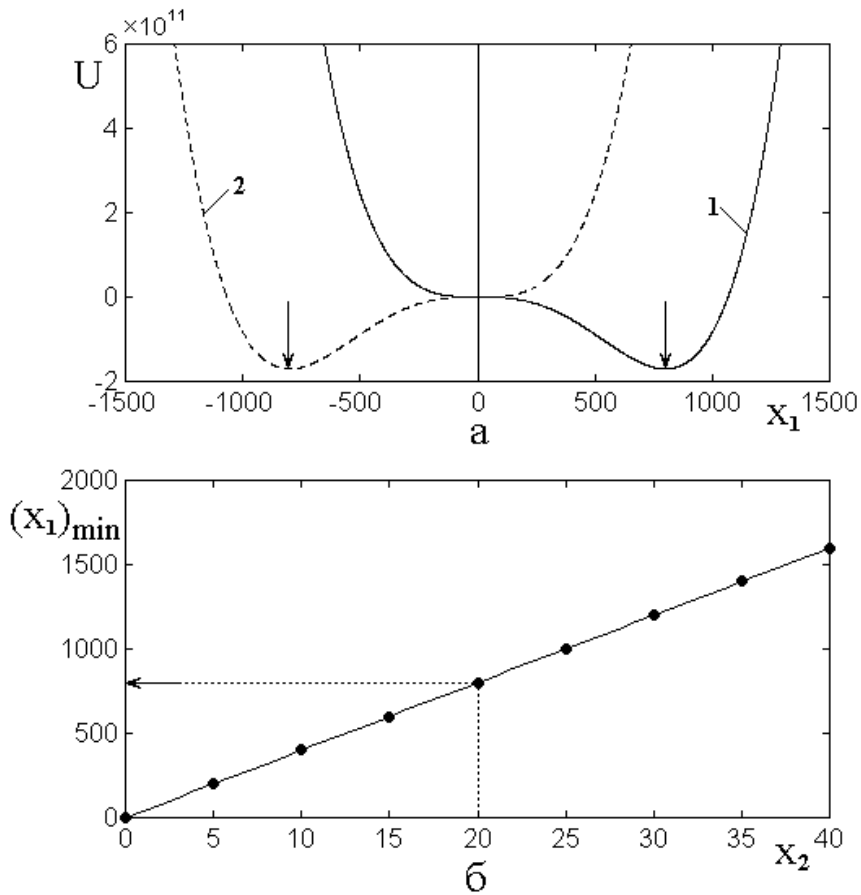


Рис.4. Потенциал для первого осциллятора.

а – зависимость потенциала U от x_1 при $x_2 = 20$ (сплошная кривая 1) и при $x_2 = -20$ (пунктирная кривая 2); б – зависимость положения минимума потенциала от x_2 . Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$.

Такой характер зависимости становится очевидным, если учесть, что условием минимума зависимости $U(x_1)$ является равенство нулю ее производной, то есть выполнение условия:

$$\delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0, \quad (18)$$

из которого получаем:

$$(x_1)_{min} = -\frac{\eta}{\delta} x_2. \quad (19)$$

Подставляя в это выражение принятые параметры $\delta = 5$ и $\eta = -200$, находим угловой коэффициент прямой на рис.4б равным:

$$k_m = -\eta/\delta = 40. \quad (20)$$

При этом значение $x_2 = 20$, при котором построен потенциал на рис.4а, соответствует $(x_1)_{min} = 1600$ ед. (показано точечной линией и стрелкой).

Рассмотрим теперь, как влияет потенциал на амплитуду колебаний, развивающихся во времени. Обратимся к рис.5, где показаны колебания смещения первого и второго осцилляторов на промежутке времени, значительно превышающем время запаздывания.

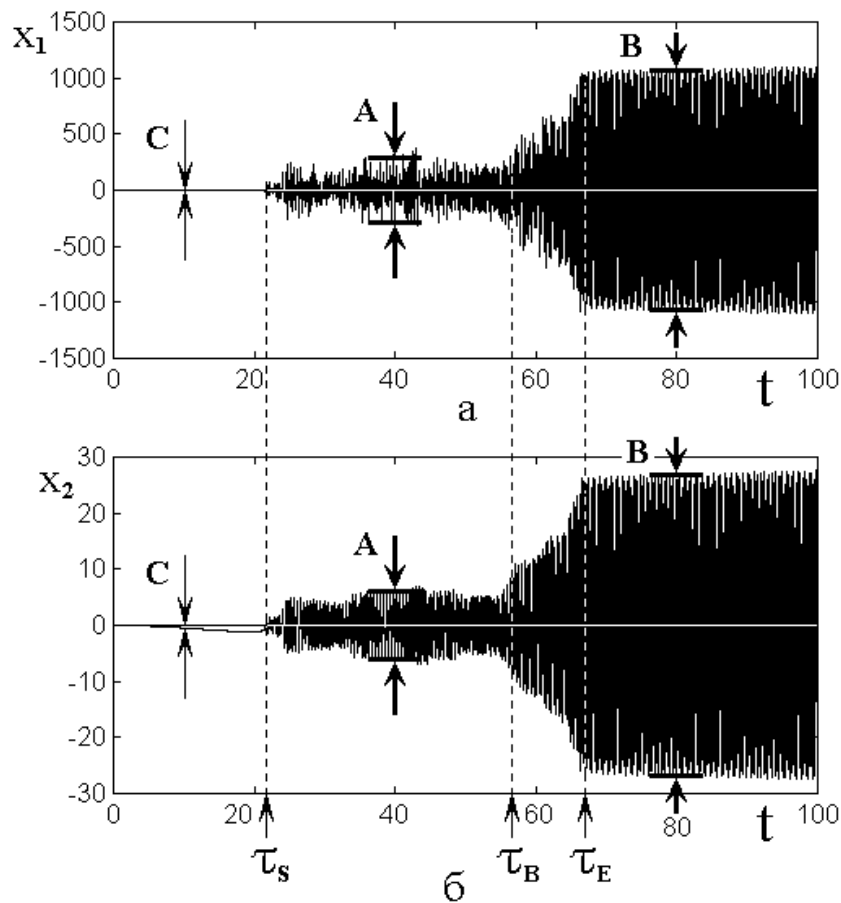


Рис.5. Колебания первого (а) и второго (б) осцилляторов в течение большого промежутка времени. А, В, С – позиции по времени, в которые измеряется максимальная амплитуда колебаний. τ_S , τ_B , τ_E – характерные моменты времени.

Расчет выполнен по системе уравнений (15)-(16). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $\gamma_2 = 10$. Начальное смещение $x_{10} = 0,001$.

Из рисунка можно видеть, что имеет место двухступенчатое запаздывание, подобное рассмотренному в работе [43, раздел 7, рис.5], однако насчитывающее заметные отличия. Так, здесь после первого запаздывания

амплитуда не возрастает, а держится на постоянном уровне, а после второго – пилообразные колебания сменяются также постоянным по амплитуде режимом. Таким образом, здесь картина более простая, что, по-видимому, связано с простотой рассматриваемой здесь системы (15)-(16) по сравнению со значительно более сложной системой, рассматривавшейся в работе [43, раздел 1, формулы (1)-(2)].

Подобно [43], введем основные характеристики наблюдаемых здесь колебаний. Прежде всего отметим $\tau_S = 21$ ед. времени – момент первого (основного) скачка, то есть собственно время запаздывания в принятом ранее смысле. После τ_S резким скачком начинается высокоамплитудный хаос, однако максимальная амплитуда колебаний остается постоянной до момента $\tau_B = 56$ ед. времени, откуда начинается второй скачок амплитуды хаоса. По достижении времени $\tau_E = 66$ ед. амплитуда колебаний перестает расти, колебания значительно упорядочиваются. Проверка показывает, что в этом случае колебания второго осциллятора становятся близкими к синусоидальным с периодом около 0,5 ед. времени, причем амплитуда меняется хаотическим образом в пределах 10%. Колебания первого осциллятора содержат близкую к синусоиде основную составляющую с тем же периодом и хаотически меняющейся амплитудой также в пределах 10%, однако теперь на эту синусоиду накладываются хаотические колебания с периодом примерно на порядок меньшим и амплитудой, меньшей амплитуды основной составляющей в 4-5 раз.

Таким образом, имеются два интервала времени, в которых колебания, хотя и остаются хаотическими, но максимальная амплитуда хаоса сохраняется постоянной. Первый интервал – от τ_S до τ_B , второй – от τ_E до времени не менее 100 ед.

Рассмотрим теперь, как соотносятся между собой амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов в пределах этих двух интервалов. Схема

регистрации амплитуды колебаний хаоса показана на рис.5 горизонтальными ограничивающими (габаритными) линиями, отмеченными стрелками.

В первом интервале (позиция А на рис.5) амплитуда колебаний второго осциллятора составляет 6 ед., а первого – около 240 ед. Отношение этих амплитуд равно 40, что как раз соответствует угловому коэффициенту прямой на рис.4б.

Во втором интервале (позиция В на рис.5) амплитуда колебаний второго осциллятора составляет около 27 ед., а первого – около 1100 ед. Отношение этих амплитуд равно 40,74, что также весьма близко к величине углового коэффициента прямой на рис.4б. Таким образом, можно видеть, что в обоих случаях амплитуда колебаний первого осциллятора определяется шириной кривой динамического потенциала (рис.4а) при заданном значении амплитуды второго осциллятора. То есть в обоих случаях первый осциллятор колеблется в пределах четко определенной потенциальной ямы, размер которой определяется величиной смещения второго осциллятора.

При этом важным является тот факт, что первый осциллятор в процессе колебаний не переходит с одной ветви потенциала на другую, как это было бы при статическом потенциале, а следует за положением минимума динамического потенциала, определяемого значением смещения второго осциллятора.

Таким образом, при времени после первичного запаздывания модель потенциала, «прыгающего» от одного положения до другого в такт с колебаниями второго осциллятора, отражает развитие колебаний высокоамплитудного хаоса в достаточной степени.

Однако в интервале времени от нуля до $\tau_S = 21$ ед., то есть в течение первичного запаздывания, такое положение нарушается. Так, при времени 10 ед. (позиция С на рис.5) величина смещения первого осциллятора составляет $4 \cdot 10^{-4}$ ед., а величина смещения второго – $-0,47$ ед. Отношение этих величин составляет около 340, да еще является отрицательным.

Более того, из рис.5б видно, что смещение второго осциллятора в этом интервале не является колебательным, а монотонно увеличивается с отрицательным знаком (особенно хорошо заметно между позицией С и временем τ_S). Контрольная проверка показывает, что смещение первого осциллятора при этом также меняется монотонно без каких-либо колебаний. Более подробно эта область времени будет рассмотрена далее.

5. Движение осцилляторов в интервале первичного запаздывания

В предыдущем разделе отмечено, что в интервале запаздывания (от нуля до 21 ед. времени) колебания осцилляторов имеют некоторые особенности, не укладывающиеся в представление о «прыгающем» потенциале. Рассмотрим колебания осцилляторов в этом интервале более подробно, для чего обратимся к рис.6 и рис.7.

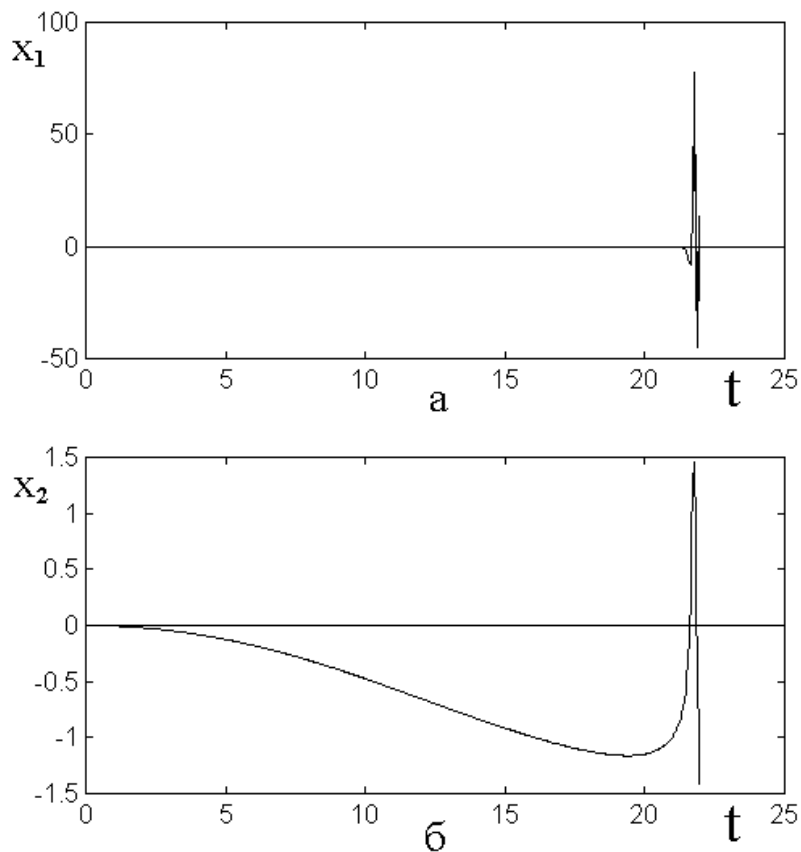


Рис.6. Колебания первого (а) и второго (б) осцилляторов в течение первичного интервала запаздывания. Расчет выполнен при значении времени $t = 22$ ед. Параметры – те же, что на рис.5.

Из рис.6а видно, что колебания первого осциллятора в течение всего

времени запаздывания, то есть до момента $t = \tau_S = 21,5$ ед. времени, практически отсутствуют. Проверка показывает, что небольшое смещение все же есть, но оно не превышает начального отклонения (0,001 ед.) и является монотонным, то есть не проявляет характерных периодических колебаний, хотя и меняет знак один или два раза с интервалом по времени порядка 5-10 ед. В момент времени 21,5 ед. смещение скачком резко увеличивается на пять порядков, достигая величины 50-70 ед. За пределами рисунка смещение еще более увеличивается до 200-250 ед., как это видно из рис.5а.

Из рис.6б видно, что смещение второго осциллятора уже с начального момента времени ($t = 0$ ед.) по абсолютной величине монотонно увеличивается, достигая максимума при $t = 20$ ед., где составляет около $-1,1$ ед., после чего уменьшается, проходя через нуль вблизи времени 21,5 ед. и далее резко возрастает до величины 1,5 ед., после чего испытывает резкие колебания. Из рис.5б видно, что далее смещение растет до 5-7 ед. и более, приобретая хаотический характер.

Заметным является тот факт, что в момент окончания запаздывания, то есть при $t = \tau_S = 21,5$ ед. времени смещение первого осциллятора скачком возрастает на пять порядков, а второго – почти не меняется, так как подходит к этому моменту уже достаточно большим (около 1,1 ед.).

С целью более подробного выявления характера выхода системы из запаздывания, на рис.7 показано развитие тех же колебаний в более крупном масштабе по времени.

Из сопоставления кривых на рис.7а и рис.7б можно видеть, что начало развития колебаний первого осциллятора происходит в тот момент, когда смещение второго осциллятора проходит через нуль (точка А на обоих рисунках). Далее смещение второго осциллятора претерпевает подъем до точки В, а колебания первого также следуют этому подъему, резким скачком достигая величины около 70 ед. (точка В на рис.7а). Далее движение первого осциллятора происходит колебательным образом с периодом около 0,1 ед. времени, а движение второго также становится колебательным с периодом

примерно в пять раз большим (около 0,5 ед. времени). В точке С смещения того и другого осцилляторов достигают максимума, после чего происходят дальнейшие колебания (уже за пределами правого края рисунка). Из сравнения верхней и нижней эюр на рис.7 можно видеть, что средняя линия колебаний первого осциллятора, в основном, следует величине смещения второго осциллятора, то есть от точки В до точки С спадает, как и кривая на нижней эюре, соответствующая второму осциллятору.

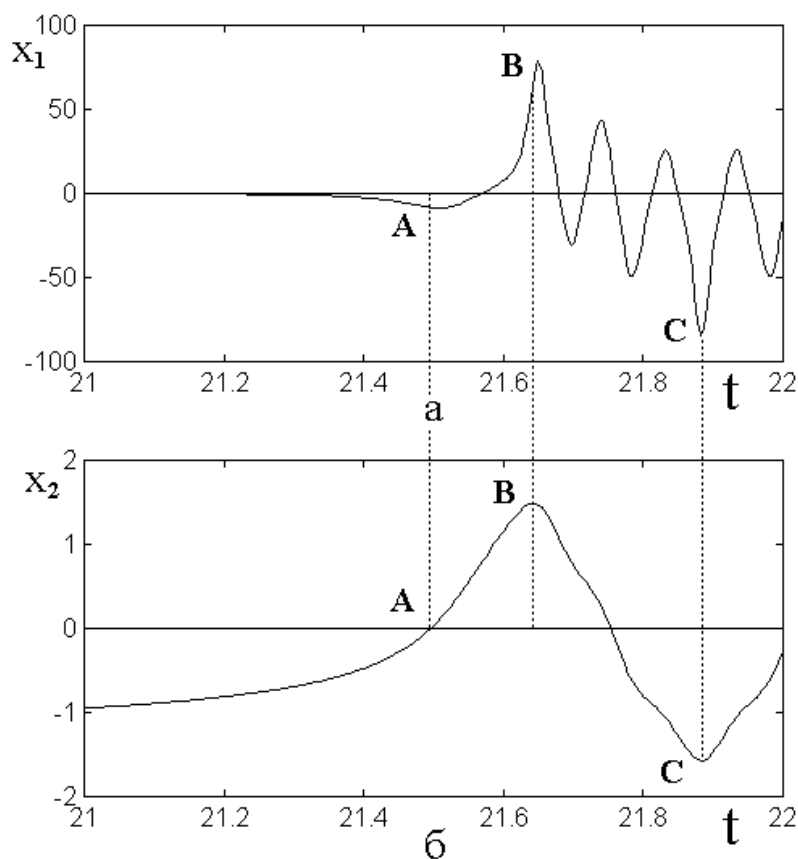


Рис.7. Колебания первого (а) и второго (б) осцилляторов в окрестности окончания запаздывания – фрагмент того же развития колебаний, что на рис.6, представленный в более крупном масштабе.

Параметры – те же, что на рис.5.

6. Качественная картина развития смещений в области запаздывания

Качественную картину развития смещений в области запаздывания можно представить следующим образом. В начальный момент времени первый осциллятор имеет некоторое начальное смещение. Благодаря связи

осцилляторов это смещение передается второму, однако ввиду слабости связи не может раскачать его до заметной величины, а смещает лишь весьма незначительно. Далее это незначительное смещение возвращается к первому осциллятору, вызывая некоторое увеличение его смещения. Ввиду слабости связи добавка к начальному смещению первого осциллятора является незначительной, но все же теперь полное его смещение оказывается несколько большим, чем в начальный момент времени. Такое слегка увеличенное смещение снова действует на второй осциллятор, вызывая дополнительное увеличение его отклонения. Такое увеличенное смещение второго осциллятора еще более увеличивает смещение первого. Далее процесс повторяется таким же кольцеобразным образом, вызывая лавинообразное все более значительное смещение второго осциллятора.

Согласно рис.4а смещение второго осциллятора постепенно формирует боковой минимум потенциала, так что, когда он становится достаточно заметным, первый осциллятор скатывается в него, что и проявляется как резкий скачок его смещения, то есть выход из режима запаздывания. Вблизи начального момента времени смещения первого осциллятора увеличивается на незначительную величину, так что рост смещения второго происходит очень медленно. Далее процесс ускоряется, приобретая кольцевой лавинообразный характер, что и приводит в конце концов к скатыванию первого осциллятора в боковую потенциальную яму, сформированную к тому времени вторым осциллятором.

7. Влияние пошагового развития колебаний

Нарисованная в предыдущем разделе качественная картина развития колебаний в процессе запаздывания предполагает, что расчет происходит последовательными шагами по времени. В настоящей работе в качестве такого пошагового алгоритма использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка, однако принципиальным моментом здесь является не использование конкретного метода, а сам факт кольцевого пошагового расчета движения осцилляторов. Приведем схему такого расчета по шагам.

Шаг №1.

Задание смещения первого осциллятора.

Шаг №2.

Вычисление смещения второго осциллятора по имеющемуся значению смещения первого.

Шаг №3.

Вычисление добавки к смещению первого осциллятора по полученному на шаге №2 смещению второго.

Шаг №4.

Вычисление смещения первого осциллятора с учетом добавки, полученной на шаге №3 от второго.

Шаг №5.

Повторение шага № 2 с использованием смещения первого осциллятора, полученного на шаге №4.

Таким образом, смещение нарастает ступенчатым образом. В этом случае можно полагать, что изменение шага может привести к изменению скорости нарастания смещения. В этом отношении должна быть какая-то достаточно малая величина шага, дальнейшее уменьшение которой не приведет к заметному изменению нарастания смещения. Для проверки такого предположения было выполнено исследование развития колебаний во времени при различной величине шага. Полученные результаты иллюстрируются рис.8. Для каждой последующей развертки величина шага уменьшается в два раза по сравнению с предыдущей.

Из рисунка можно видеть, что интервал первичного запаздывания во всех случаях остается одним и тем же, равным 21,5 ед. времени. Однако дальнейшее развитие колебаний происходит с некоторыми отличиями. Так, начало второй ступени запаздывания для рис.8а соответствует 62 ед. времени, для рис.8б – 80 ед. времени, а на рис.8в эта ступень вообще не наблюдается. Однако проверка показала, что и в этом случае второй скачок амплитуды все же имеет место, однако он происходит при времени 170 ед. Во всех случаях после окончания

первичного запаздывания колебания являются хаотическими, однако структура хаоса получается совершенно различной.

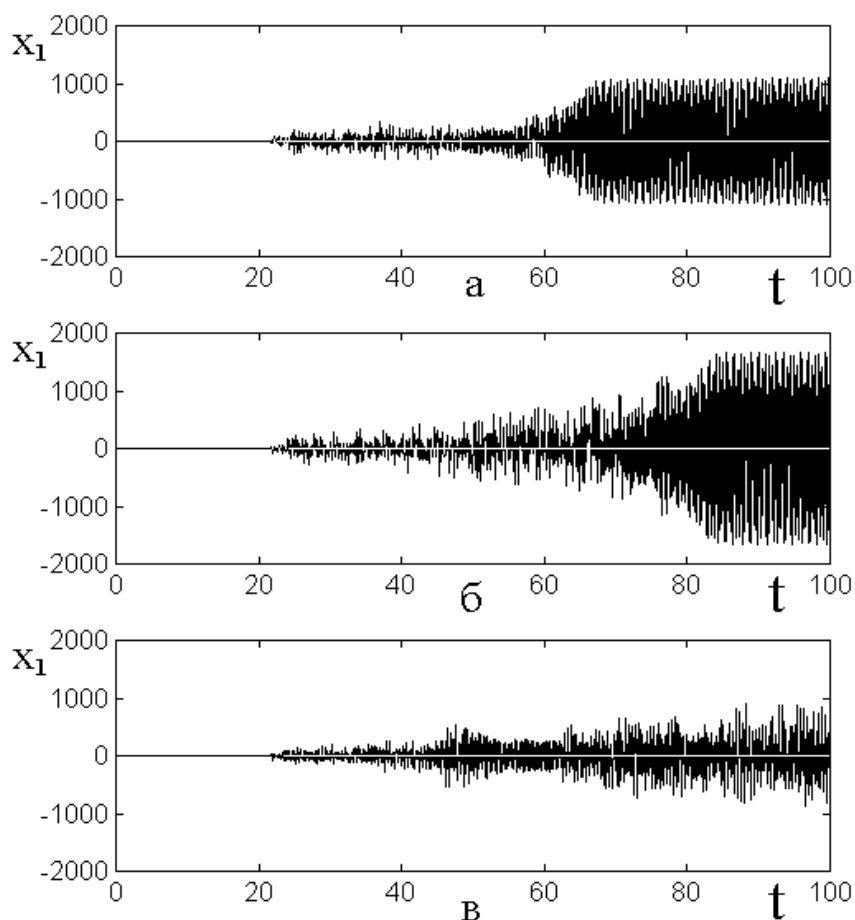


Рис.8. Развитие во времени колебаний первого осциллятора, рассчитанное при различном шаге по времени:

$$a - 5 \cdot 10^{-4} \text{ ед.}, \quad б - 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ ед.}, \quad в - 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ ед.}$$

Все параметры – те же, что на рис.5.

Такой характер колебаний можно понять, если учесть, что в течение интервала первичного запаздывания (до 21,5 ед. времени) характер процесса является регулярным, смещения обоих осцилляторов остаются непрерывными, меняются плавно вполне монотонным образом. Поэтому время выхода из первичного запаздывания от величины шага не зависит.

Однако не так обстоит дело в области хаоса. Там даже малое изменение смещения на каком-то шаге в корне меняет все последующее развитие колебаний. Проверка показывает, что процесс развития хаоса имеет

фрактальный характер, так что любое сужение интервала наблюдения не меняет подобия предыдущему, во всяком случае, по спектральному составу колебаний. Заметим, что такой фрактальный характер для хаоса является свойством достаточно общим [5, лекция 11].

8. Влияние основных параметров системы

В предыдущих разделах кратко рассмотрена общая картина эффекта запаздывания, базирующегося на системе уравнений (15)-(16). Однако все рассмотрение проведено при одном и том же наборе параметров, входящих в систему уравнений, а именно: $\gamma_2 = 10$, $\delta = 5$, $\eta = -200$. В работе [45] в какой-то степени отражена роль начального смещения x_{10} , однако упомянутые параметры также оставлены без изменений. Обратимся теперь к рассмотрению влияния этих параметров на свойства эффекта запаздывания. Начнем с коэффициента линейной связи второго осциллятора γ_2 .

9. Коэффициент линейной связи второго осциллятора

На рис.9 показана зависимость времени первичного запаздывания τ_S от коэффициента линейной связи второго осциллятора γ_2 , построенная в линейном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах.

Из рисунка видно, что при малом значении параметра γ_2 время запаздывания велико, а при увеличении этого параметра постепенно уменьшается. Такое поведение можно понять, если учесть, что второй осциллятор является необходимым компонентом системы, требующимся для возбуждения высокоамплитудного хаоса. При этом уменьшение связи затрудняет условия формирования хаоса, так что время запаздывания увеличивается, стремясь к бесконечности. С другой стороны, увеличение связи обеспечивает более легкие условия для возбуждения хаоса, вследствие чего время запаздывания уменьшается, в конечном счете, стремясь к нулю.

Из рис.9а видно, что зависимость τ_S от γ_2 хорошо (до единиц процентов) аппроксимируется функцией обратной пропорциональности вида:

$$\tau_S = \frac{100}{\gamma_2 + 1,9} + 12. \quad (21)$$

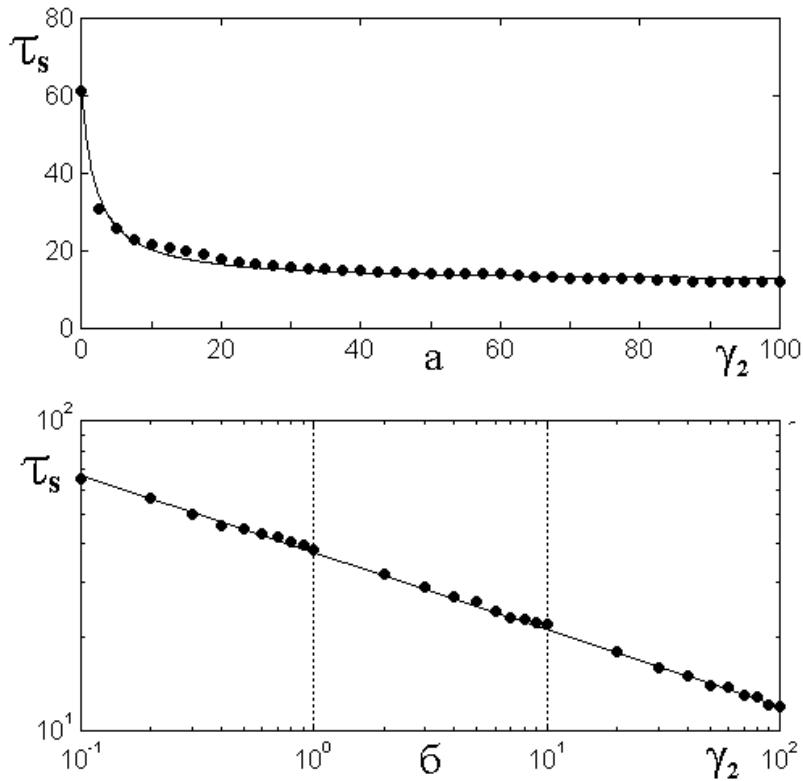


Рис.9. Зависимость времени запаздывания от коэффициента линейной связи второго осциллятора. а – масштаб линейный; б – масштаб двойной логарифмический. Точки – результаты машинного эксперимента. Сплошные линии построены по формуле (21); Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$.

Начальное смещение $x_{10} = 0,001$.

На рис.9б приведена та же зависимость, построенная в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что точки ложатся на прямую линию, в данном масштабе соответствующую той же функции (21). Прямолинейный характер дополнительно подтверждает аппроксимацию наблюдаемой зависимости функцией обратной пропорциональности.

Полученную зависимость можно описать с помощью эмпирической формулы:

$$\tau_S = 12 \left(\frac{8,33}{\gamma_2 + 1,9} + 1 \right), \quad (22)$$

или в символизированном виде:

$$\tau_S = a_\gamma \left(\frac{b_\gamma}{\gamma_2 + c_\gamma} + 1 \right), \quad (23)$$

где $a_\gamma = 12$, $b_\gamma = 8,33$, $c_\gamma = 1,9$.

Рассмотрим теперь, как меняется характер высокоамплитудного хаоса, возбуждаемого по окончании запаздывания. Обратимся к рис.10, где показаны зависимости амплитуд хаоса для первого (а) и второго (б) осцилляторов от коэффициента линейной связи второго осциллятора.

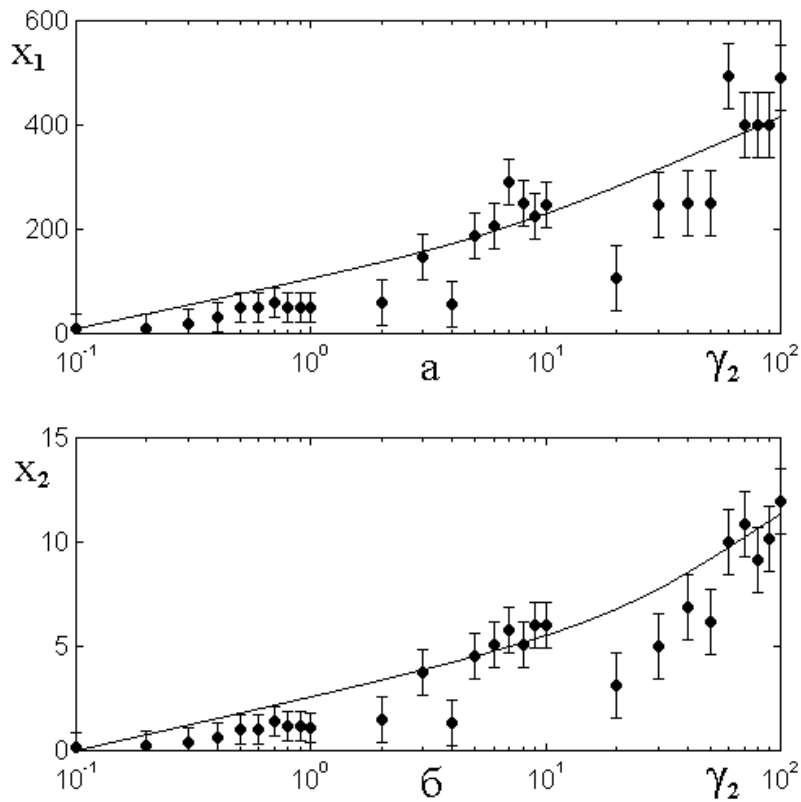


Рис.10. Зависимости амплитуд хаоса для первого (а) и второго (б) осцилляторов от коэффициента линейной связи второго осциллятора. Точки – результаты машинного эксперимента. Сплошные линии проведены приближено через места скопления точек. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$.

Начальное смещение $x_{10} = 0,001$.

Замечание. Доверительные интервалы точек здесь отражают вариации амплитуды хаоса довольно условно (с точностью порядка 20% и более). Такое

приближение принято из-за сильной неоднородности хаоса, в том числе не только двухступенчатого, но иногда имеющего три и более ступеней или плавный рост, где ступени вообще размыты и не выражены. В данном случае доверительные интервалы точек показаны в первую очередь для обеспечения большей наглядности картины. Вообще говоря, характер хаоса с учетом разнообразия его режимов требует более подробного исследования, могущего составить предмет для отдельной работы.

Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра γ_2 амплитуда хаоса того и другого осцилляторов увеличивается. Можно полагать, что такое увеличение вызвано усилением воздействия осцилляторов друг на друга при увеличении связи между ними. При этом часть потенциала (17), определяемая параметром δ , не меняется, однако второе его слагаемое, определяемое параметром η , возрастает пропорционально произведению квадрата x_1 на x_2 , так что положение минимума потенциала, определяющее амплитуду хаоса, по мере увеличения x_1 и x_2 от нуля удаляется, что и приводит к росту амплитуды хаоса.

Примечательно отметить, что обе кривые на рис.10 подобны друг другу и между амплитудами колебаний осцилляторов на всем протяжении кривых наблюдается одно и то же соотношение x_1/x_2 , равное или весьма близкое к 40. Именно такое соотношение отмечалось ранее на рис.4б в разделе 4, причем там было признано линейным как следствие того же механизма определения амплитуды хаоса положением минимума потенциала.

10. Параметр потенциальности

Другим независимым параметром, содержащимся в системе (15)-(16) является параметр потенциальности δ , определяющий слагаемое вида δx^3 .

Замечание. Другое название, используемое для δ , например в работе [40] – параметр кубической нелинейности, однако, поскольку в общем случае нелинейное слагаемое степенного вида может иметь любую другую степень,

кроме первой, причем определяет характер потенциала, будем здесь употреблять более общее название – параметр потенциальности.

На рис.11 показана зависимость времени первичного запаздывания τ_s от параметра потенциальности δ первого осциллятора γ_2 , построенная в логарифмическом масштабе.

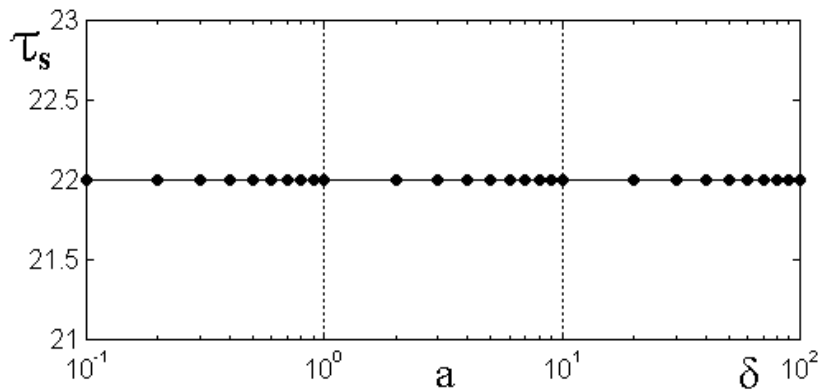


Рис.11. Зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности.

Точки – результаты машинного эксперимента. Сплошная линия – прямая, параллельная горизонтальной оси. Параметры: $\gamma_2 = 10$; $\eta = -200$.

Начальное смещение $x_{10} = 0,001$.

Из рисунка видно, что точки хорошо ложатся на прямую, параллельную горизонтальной оси, то есть зависимость отсутствует. Проверка показывает, что при уменьшении или увеличении представленного на рисунке интервала изменения δ на один-два порядка зависимость также отсутствует. При этом зависимость потенциала от δ , оставаясь пропорциональной x_1 в четвертой степени, лишь сжимается или расширяется по горизонтали, в остальном не меняясь.

Можно полагать, что такое изменение потенциала должно приводить к изменению амплитуды хаоса, возбуждаемого после запаздывания. Ответ на этот вопрос дает рис.12, где показаны зависимости амплитуд хаоса первого (а) и второго (б) осцилляторов от параметра потенциальности δ . Точки приведены с доверительными интервалами, однако величина этих интервалов дана приближенно, учитывая резко неоднородный характер хаотических колебаний.

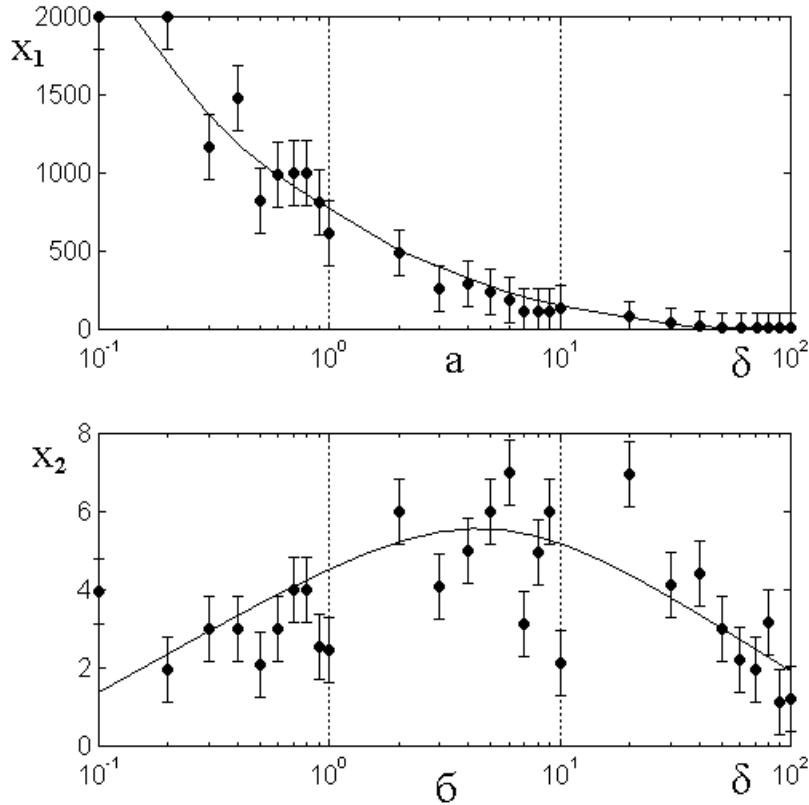


Рис.12. Зависимости амплитуд хаоса первого (а) и второго (б) осцилляторов от параметра потенциальности. Точки – результаты машинного эксперимента. Доверительные интервалы точек имеют тот же характер, что на рис.10. Кривые проведены приближенно через места скопления точек. Амплитуда измерена при времени, превышающем время запаздывания на 20%, то есть до второй ступени запаздывания. Параметры – те же, что на рис.11.

Из рис.12а видно, что амплитуда хаотических колебаний первого осциллятора по мере увеличения δ падает, стремясь к нулю. Такое падение обусловлено сужением раскрыва слагаемого потенциальной кривой четвертой степени (17) вида $\delta/4 \cdot x_1^4$, происходящим тем сильнее, чем больше параметр δ .

Однако колебания хаоса второго осциллятора (рис.12б) этому правилу не следуют, а сначала увеличиваются, после чего, пройдя через максимум около $\delta = 50$, уменьшаются. Факт первичного увеличения x_2 выражен не ярко и скорее походит на некоторую стабилизацию уровня смещения x_2 при общем изменении потенциала, тогда как уменьшение x_2 после прохождения

максимума обусловлено сужением раскрыва потенциала и уменьшением общей амплитуды колебаний обоих осцилляторов. Важно отметить, что здесь отношение амплитуд колебаний осцилляторов x_1/x_2 значению 40, отмеченному для рис.4б и рис.10, не соответствует, составляя, как правило, в 2-3 раза больше, уменьшаясь по мере увеличения δ . Такое несоответствие обусловлено тем, что рис.4б и рис.10 построены при неизменной величине параметра δ , так что раскрыв потенциала при изменении других параметров не меняется и только минимум потенциала претерпевает сдвиг. Здесь же по мере увеличения δ меняется раскрыв, что вызывает более сильное изменение положения минимума, в результате чего поведение соотношения x_1/x_2 приобретает более сложный характер. Заметим однако, что вопрос о точном соотношении между x_1 и x_2 в таких условиях требует более подробного рассмотрения, могущего составить предмет для отдельной работы.

11. Параметр нелинейной связи

Последним независимым параметром, содержащимся в системе (15)-(16) является параметр нелинейной связи η , определяющий слагаемое вида $\eta x_1^2 x_2$. Обратимся к рис.13, где представлены зависимости времени запаздывания от модуля параметра нелинейной связи в линейном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах.

Замечание. Вообще говоря, проверка показывает, что необходимым условием возбуждения высокоамплитудного хаоса колебаний в системе (15)-(16) является отрицательность параметра нелинейной связи η . При этом в арифметическом отношении большое по абсолютной величине значение этого параметра меньше значения, малого по абсолютной величине. Однако связь определяется не столько знаком, сколько абсолютной величиной параметра, поэтому для характеристики связи здесь выбран не сам параметр η , а его модуль, то есть абсолютная величина $|\eta|$.

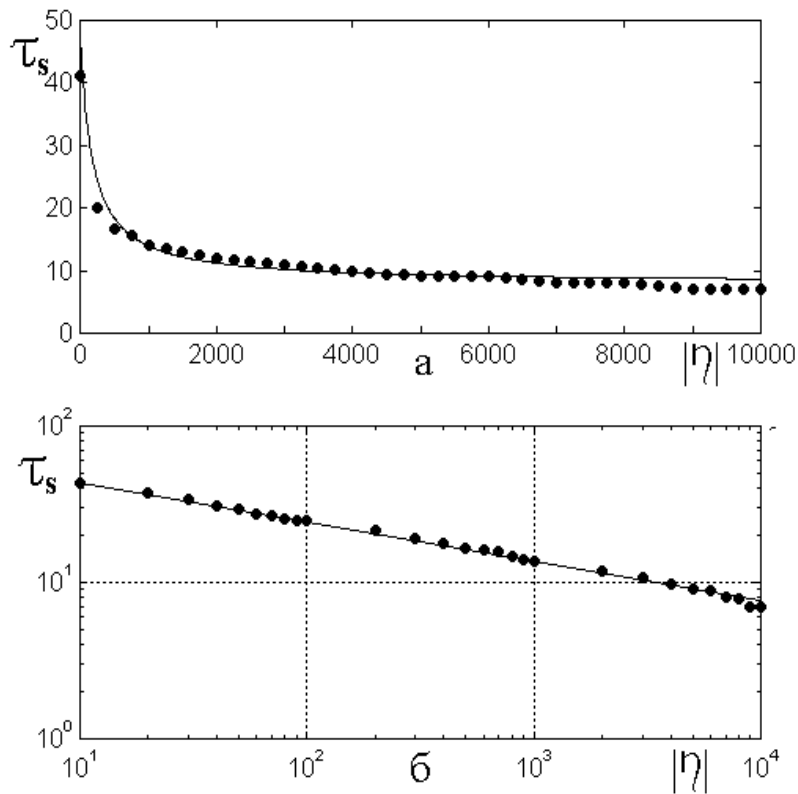


Рис.13. Зависимость времени запаздывания от модуля параметра нелинейной связи в линейном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах. Сплошные линии построены по формуле (24). Параметры: $\delta = 5$; $\gamma_2 = 10$. Начальное смещение $x_{10} = 0,001$.

Из рисунка можно видеть, что увеличение параметра нелинейной связи $|\eta|$ приводит к уменьшению времени запаздывания. В самом деле, при слабой связи влияние осцилляторов друг на друга мало и возбуждение высокоамплитудного хаоса затруднено, вследствие чего и время запаздывания получается большим. При увеличении связи влияние осцилляторов друг на друга увеличивается, в результате чего возбуждение хаоса облегчается и время запаздывания получается малым.

В этом отношении явление полностью аналогично имеющему место при изменении параметра линейной связи второго осциллятора (раздел 9). Различие состоит только в численных значениях коэффициентов, а механизм остается тем же самым, общим как для линейного, так и для нелинейного параметров. Следует заметить, что здесь, как и в случае линейной связи (рис.9а), время запаздывания при значительном увеличении η (по крайней мере, в пределах

рисунка) стремится не к нулю, а к малой, но все же конечной величине. Можно полагать, что эта величина определяется инерционными свойствами обоих осцилляторов, так что колебания начинаются не мгновенно, а с некоторой задержкой, требуемой для развития их до значительной амплитуды. Заметим, что вопрос об инерционности, по-видимому, является достаточно важным, так что также может потребовать отдельного рассмотрения.

Из рис.13а видно, что зависимость τ_S от $|\eta|$ хорошо (до единиц процентов) аппроксимируется функцией обратной пропорциональности вида:

$$\tau_S = \frac{7000}{|\eta| + 170} + 8. \quad (24)$$

На рис.13б приведена та же зависимость, построенная в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что точки ложатся на прямую линию, в данном масштабе соответствующую той же функции (24). Прямолинейный характер дополнительно подтверждает аппроксимацию наблюдаемой зависимости функцией обратной пропорциональности.

Полученную зависимость можно описать с помощью эмпирической формулы:

$$\tau_S = 8 \left(\frac{875}{|\eta| + 170} + 1 \right), \quad (25)$$

или в символизированном виде:

$$\tau_S = a_\eta \left(\frac{b_\eta}{|\eta| + c_\eta} + 1 \right), \quad (26)$$

где $a_\eta = 8$, $b_\eta = 875$, $c_\eta = 170$.

В разделе 9 показано, что время запаздывания обратно пропорционально также параметру линейной связи γ_2 в соответствии с формулой (23). Объединяя эту формулу с (26) получаем общую эмпирическую формулу, отражающую зависимость времени запаздывания от обоих параметров γ_2 и η :

$$\tau_S = a_\gamma a_\eta \left(\frac{b_\gamma}{\gamma_2 + c_\gamma} + 1 \right) \left(\frac{b_\eta}{|\eta| + c_\eta} + 1 \right), \quad (27)$$

где $a_\gamma = 12$, $a_\eta = 8$, $b_\gamma = 8,33$, $c_\gamma = 1,9$, $b_\eta = 875$, $c_\eta = 170$.

Рассмотрим теперь, как при изменении $|\eta|$ меняется характер высокоамплитудного хаоса, возбуждаемого по окончании запаздывания. Обратимся к рис.14, где показаны зависимости амплитуд хаоса для первого (а) и второго (б) осцилляторов от модуля параметра нелинейной связи.

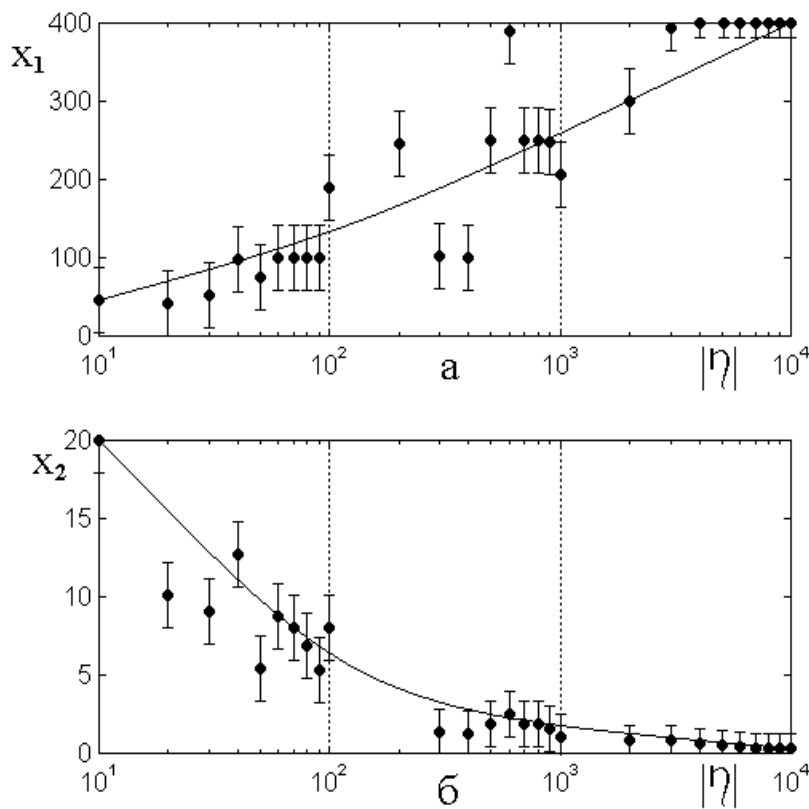


Рис.14. Зависимости амплитуд хаоса первого (а) и второго (б) осцилляторов от модуля параметра нелинейной связи. Точки – результаты машинного эксперимента. Характер доверительного интервала – тот же, что на рис 10 и рис.12.

Сплошные линии проведены приблизительно через места скопления точек.

Параметры – те же, что на рис.13.

Из рис.14а можно видеть, что амплитуда хаоса для первого осциллятора по мере увеличения $|\eta|$ возрастает. Характер возрастания подобен таковому

при увеличении параметра линейной связи γ_2 , представленному на рис.10а. Так что и механизм – тот же самый: увеличение $|\eta|$ соответствует усилению связи между осцилляторами, в результате чего амплитуда колебаний растет.

Однако характер изменения амплитуды хаоса для второго осциллятора (рис.14б) здесь прямо противоположный: увеличение $|\eta|$ приводит к уменьшению x_2 . Характер изменения соотношения x_1/x_2 также противоположен наблюдаемому на рис.12б. В качестве возможной причины такого поведения x_2 можно отметить влияние знака η , который является отрицательным. Однако следует полагать, что более подробное выяснение этого вопроса требует отдельного рассмотрения.

12. Замечание о возможном дальнейшем развитии работы

В настоящей работе довольно подробно исследован характер запаздывания развития нелинейных колебаний, а также в некоторой степени затронуты характеристики возбуждаемого после запаздывания высокоамплитудного хаоса. По ходу работы неоднократно приведены замечания, касающиеся дальнейшего развития и уточнения рассматриваемых явлений. Можно полагать, что некоторые из приведенных замечаний могут оставить предмет для отдельной работы.

Однако в качестве важнейшего нерешенного вопроса следует отметить построение модели первичного запаздывания. В самом деле, подробно рассмотрены процессы начала запаздывания и выхода из него. Приведены соответствующие развертки процессов во времени. Установлены зависимости характеристик времени запаздывания от различных параметров системы. В то же время, остается открытым вопрос о продолжительности самого процесса запаздывания. С внешней стороны явление протекает так, как будто бы в течение интервала запаздывания происходит постепенное накопление какой-то величины, по достижении критического значения которой монотонный рост сменяется лавинообразным увеличением смещения того и другого осцилляторов. Модель потенциала на этот вопрос прямого ответа не дает,

различные попытки анализа потенциальной и кинетической энергии колебаний или исследование бифуркационного характера траекторий параметрических портретов прямого ответа не дали. Попытки привлечь аналогии с моделью бильярда Синая также пока к успеху не привели. Тем не менее, авторы продолжают исследования и надеются на положительный успех в этом вопросе, а также предлагают задачу вниманию других заинтересованных исследователей.

Заключение

Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Отмечено, что физической основой рассматриваемой системы является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Главным предметом рассмотрения такой системы в настоящей работе является воздействие осцилляторов друг на друга.

Рассмотрение проведено на основе полученной в первой части работы упрощенной системы двух связанных уравнений второго порядка. Предложены два вида упрощенных систем: колебательная и релаксационная.

Колебательная система состоит из двух уравнений, первое из которых содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения первого осциллятора, потенциальный член, пропорциональный кубу того же смещения и член нелинейной связи, содержащий произведение квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Второе уравнение колебательной системы содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения второго осциллятора, потенциальный член, пропорциональный величине того же смещения и член линейной связи, содержащий смещение первого осциллятора.

Релаксационная система также состоит из двух уравнений, первое из которых совпадает с таковым для колебательной системы, а второе отличается от второго уравнения колебательной системы отсутствием потенциального члена.

Рассмотрено развитие колебаний во времени в той и другой системах, происходящее после задания начального смещения первого осциллятора. Установлено, что развитие колебаний требует превышения начального смещения первого осциллятора над определенным критическим значением. Выявлено сходство развития колебаний во времени в той и другой системах. В обоих случаях отмечено наличие довольно продолжительного интервала малоамплитудного запаздывания, после которого скачком возбуждается высокоамплитудный хаос. Для обеих систем построены параметрические портреты колебаний, образованные смещением и соответствующей ему производной каждого из осцилляторов. Выявлено сходство портретов для той и другой систем, для первого осциллятора имеющего форму горизонтальной восьмерки, а для второго – горизонтального овала, в обоих случаях образованных наложением друг на друга множества хаотических траекторий.

Установлено, что колебательный или релаксационный характер второго осциллятора для реализации запаздывания решающим не является, а различие состоит только в том, что при релаксационном характере те же колебания достигаются при начальном смещении более чем на два порядка меньшем.

Рассмотрена роль потенциального (частотного) слагаемого во втором уравнении колебательной системы. Получена зависимость критического значения смещения первого осциллятора от величины частотного коэффициента второго уравнения. Показано, что эта зависимость имеет четко выраженный квадратичный характер, разделяющий две области: квазирегулярных малоамплитудных колебаний и запаздывающего высокоамплитудного хаоса.

Установлено, что время запаздывания максимально сразу после превышения начального смещения первого осциллятора над критическим

значением, а далее по мере увеличения смещения уменьшается, стремясь к нулю по закону, близкому к обратной пропорциональности.

Благодаря сходству колебаний в обеих системах, дальнейшее исследование выполнено только для релаксационной системы, как более простой и содержащей меньшее число свободных параметров.

Для релаксационной системы исследована зависимость частоты собственных колебаний первого осциллятора при отсутствии связи со вторым от величины начального смещения. Показано, что эта зависимость имеет линейный характер, соответствующий кубическому виду потенциального слагаемого первого уравнения.

Рассмотрена роль потенциала первого осциллятора в формировании характера колебаний, в первую очередь – высокоамплитудного хаоса. Отмечено, что потенциал определяется не только значением смещения первого осциллятора, но также и смещением второго осциллятора, реализуемого через нелинейную связь со вторым уравнением. Показано, что в процессе колебаний потенциал первого осциллятора является динамическим, причем по обе стороны от нуля имеет симметрично расположенные минимумы, чередующиеся в такт с колебаниями второго осциллятора. В качестве механизма такого поведения предложена модель «прыгающего» потенциала, в процессе колебаний совершающего «прыжки» от одного крайнего положения до другого. Рассмотрена зависимость положения одного из минимумов от величины смещения второго осциллятора. Выполнен аналитический анализ положения такого минимума, определяемого равенством нулю производной от потенциала. Установлен линейный характер зависимости, связывающей законом прямой пропорциональности амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов.

На основе рассмотрения развития колебаний во времени, значительно превышающем время запаздывания, установлено, что первый осциллятор в процессе колебаний не переходит с одной ветви потенциала на другую, как это было бы при статическом потенциале, а следует за положением минимума

динамического потенциала, определяемого значением смещения второго осциллятора. Такое его поведение проверено в режиме как простого, так и двухступенчатого запаздывания, причем в обоих случаях установлено его выполнение. Отмечено, что установленное выше положение относится только к режиму высокоамплитудного хаоса, имеющего место по окончании первичного запаздывания, тогда как в области запаздывания смещение осцилляторов не является колебательным, а имеет монотонный характер.

Рассмотрено движение осцилляторов в интервале первичного запаздывания. Установлено, что в интервале первичного запаздывания смещение первого осциллятора, оставаясь монотонным, за все время запаздывания меняет знак один-два раза, но никогда не превышает величины начального смещения. При этом смещение второго осциллятора, также оставаясь монотонным и сохраняя один и тот же знак, постепенно увеличивается до величины, превышающей начальное смещение на один-два порядка. Окончание запаздывания характеризуется тем, что смещение первого осциллятора резким скачком увеличивается на пять порядков, а смещение второго осциллятора также скачком увеличивается в 5-10 раз, причем оба осциллятора переходят в режим высокоамплитудных хаотических колебаний.

Предложена качественная картина развития колебаний. Так, в начальный момент времени первый осциллятор имеет некоторое начальное смещение. Благодаря связи осцилляторов это смещение передается второму, после чего возвращается к первому, вызывая некоторое увеличение его смещения. Такое слегка увеличенное смещение снова действует на второй осциллятор, вызывая дополнительное увеличение его смещения. Далее процесс повторяется таким же кольцеобразным образом, вызывая лавинообразное все более значительное смещение второго осциллятора. Отмечено, что такой кольцеобразный процесс постепенно формирует боковой минимум потенциала, так что первый осциллятор через некоторое время скатывается в него, что и проявляется как резкий скачок его смещения, то есть выход из режима запаздывания.

Установлена пошаговая природа развития колебаний обоих осцилляторов. Приведен алгоритм расчета колебаний методом Рунге-Кутты и исследовано влияние величины шага расчета. Показано, что в области первичного запаздывания процесс развития колебаний является регулярным, так что от величины шага, как сам процесс, так и величина запаздывания не зависят. Установлено, что в области высокоамплитудного хаоса характер колебаний при изменении величины шага даже на весьма малую величину (единицы и доли процента) резко меняется, форма колебаний и их структура меняются хаотическим образом. Установлен фрактальный характер хаоса, проявляющийся в том, что уменьшение интервала наблюдения общего характера хаоса не меняет, во всяком случае, по его спектральному составу.

Исследовано влияние на общий характер колебаний основных параметров системы, таких как параметр линейной связи второго осциллятора, а также параметры потенциальности (кубической нелинейности) и нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что увеличение параметра линейной связи второго осциллятора приводит к уменьшению времени запаздывания по закону обратной пропорциональности. Отмечено, что причиной уменьшения является усиление воздействия осцилляторов друг на друга, обусловленное увеличением связи между ними. Получена эмпирическая формула, содержащая три характерных коэффициента, позволяющих описать наблюдаемую зависимость с точностью до единиц и долей процента.

Исследованы зависимости амплитуд хаоса для первого и второго осцилляторов от параметра линейной связи второго осциллятора. Показано, что обе зависимости имеют монотонный возрастающий характер, причем во всем исследованном интервале изменения связи остаются подобными друг другу с постоянным коэффициентом, равным отношению амплитуд колебаний осцилляторов, полученному при исследовании характера «прыгающего» потенциала.

Исследовано влияние на характер колебаний параметра потенциальности, соответствующего кубической нелинейности первого осциллятора. Показано,

что время запаздывания от параметра потенциальности не зависит, так как этот параметр обеспечивает лишь изменение «раскрыва» ветвей потенциала, не меняя его основной структуры. Отмечено, что такое изменение «раскрыва» существенным образом сказывается на положении минимума «прыгающего» потенциала, что приводит к изменению амплитуды хаотических колебаний, наступающих после окончания запаздывания. Так, при увеличении параметра потенциальности амплитуда хаотических колебаний первого осциллятора падает, что обусловлено сужением раскрыва потенциала. При этом амплитуда колебаний второго осциллятора сначала слегка увеличивается, после чего, пройдя через слабо выраженный максимум, также уменьшается. Отмечено, что в этом случае зависимости амплитуды хаоса для того и другого осцилляторов подобными не являются, а их отношение по мере увеличения параметра потенциальности постепенно уменьшается.

Исследовано влияние на характер колебаний параметра нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что по мере увеличения этого параметра время запаздывания уменьшается по закону обратной пропорциональности. Отмечено, что причиной уменьшения является усиление воздействия осцилляторов друг на друга, обусловленное увеличением связи между ними. Получена эмпирическая формула, содержащая три характерных коэффициента, позволяющих описать наблюдаемую зависимость с точностью до единиц и долей процента. Отмечено аналогия наблюдаемого явления с таковым имеющим место при изменении линейной связи второго осциллятора.

Выполнено объединение эмпирических формул для того и другого процессов, в результате чего получена общая формула, описывающая зависимость времени запаздывания от параметров линейной связи второго осциллятора и нелинейной связи первого, содержащая шесть характерных коэффициентов.

Исследованы зависимости амплитуд хаоса для первого и второго осцилляторов от параметра нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что при увеличении параметра нелинейной связи амплитуда хаоса первого

осциллятора возрастает подобно таковой при увеличении параметра связи второго осциллятора. Отмечен спадающий характер зависимости амплитуды хаоса второго осциллятора от абсолютной величины параметра нелинейной связи. В качестве возможной причины спада вместо роста такой зависимости отмечен отрицательный характер параметра нелинейной связи, вызывающий аномальное поведение рассматриваемой зависимости.

Приведены некоторые соображения, касающиеся дальнейшего развития работы. В качестве главной задачи отмечено построение модели, отражающей продолжительность первичного запаздывания. Перечислены некоторые возможные направления и приведены предварительные соображения о построении такой модели.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. Москва, Наука. 1981.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. Москва, Наука. 1988.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. Москва, Наука-Физматлит. 2000.
4. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит. 2003.
5. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001.
6. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. Москва, Физматлит, 2002.
7. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. *Генерация хаоса*. Москва, Техносфера. 2012.

8. Станкевич Н.В., Попова Е.С., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. Широкополосные хаотические колебания в слабосвязанном ансамбле автоколебательных осцилляторов. *Письма в ЖТФ*. 2019. Т.45. №24. С.17-20.
9. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. Москва, ИЛ. 1961. С.163.
10. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971.
11. Львов В.С. *Нелинейные спиновые волны*. Москва, Наука. 1987.
12. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. *УФН*. 1974. Т.114. №4. С.609.
13. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order. *Rev. Mod. Phys.* 2010. Vol.82. No.3. P.2731.
14. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. Vol.525. No.1-2. P.2.
15. Jäger J.V., Scherbakov A.V., Linnik T.I., Yakovlev D.R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S.A., Akimov A.V., Rushforth A.W., Bayer M. Picosecond inverse magnetostriction in garfenol thin films. *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol.103. №3. P.032409(5).
16. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics. *J. Appl. Phys.* 2016. Vol.120. No.14. P.140901(16).
17. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V.S., Lomonosov A.M., Temnov V.V., Tobey R.I. Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol.94. No.2. P.024415(7).
18. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн. *ФТТ*. 2016. Т.58. №6. С.1093.

19. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
20. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Колебания намагниченности в магнитоупругой среде при ударном воздействии упругого смещения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2018. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
21. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Излучение электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии фемтосекундного импульса света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>.
22. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2009. Т.54. №7. С.863.
23. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2013. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.
24. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2014. Т.59. №5. С.482.
25. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнестрикционного преобразователя. Умножение частоты в режиме релаксации. *РЭ*. 2019. Т.64. №5. С.487-489.
26. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнестрикционного преобразователя. Умножение частоты в непрерывном режиме. *РЭ*. 2019. Т.64. №6. С.604-618.

27. Плешев Д.А., Котов Л.Н., Власов В.С., Щеглов В.И. Преобразование частоты при акустическом резонансе в ферритах. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2019.
28. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. В кн.: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Сборник статей под ред. А.Г.Гуревича. Москва, ИЛ. 1961. С.281.
29. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомультиплицирующий режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе. *Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие»*. Москва-Фирсановка, 2009. Издание МЭИ. С.100.
30. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромангнитным. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.248.
31. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2013. №11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.
32. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.188.
33. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. *Сборник трудов XXI Международной конференции*

«Электромагнитное поле и материалы». Москва: «НИУ МЭИ». 2013. С.199.

34. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2014. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
35. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, ИНФРА-М. 2015. С.202.
36. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. *РЭ*. 2015. Т.60. №1. С.79.
37. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. *РЭ*. 2015. Т.60. №3. С.297.
38. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.
39. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.
40. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и

- квадратичной связи. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/7/text.pdf>.
41. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.
42. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
43. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал] 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.
44. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамический потенциал как модель нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. *Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. Москва, ИНФРА-М. 2018. С.243-253.
45. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 1. Общие положения. Формирование упрощенной системы. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr21/4/text.pdf>.

Для цитирования:

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 2. Воздействие осцилляторов друг на друга. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.5>