

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.6>

УДК 537.874; 537.624

# НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ.

## ЧАСТЬ 3. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

А. П. Иванов<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, В. И. Щеглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 30 марта 2021 г.

**Аннотация.** Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основной задачи является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. В основании настоящего исследования лежит полученная в первой части работы упрощенная система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих колебательный характер. В качестве главного шага упрощения задачи выполнено замещение колебаний второго осциллятора вспомогательной функцией, имеющей гармоническую зависимость от времени. При этом динамический потенциал приобрел характер симметричных периодических «прыжков» в прямом и обратном направлениях, в связи с чем введенная функция было названа «прыжковой». Результатом введения прыжковой функции явилась замена двух уравнений исходной системы одним «определяющим» уравнением, обеспечивающим свойства высокоамплитудного хаоса и нестационарного запаздывания. На основе определяющего уравнения рассмотрено развитие колебаний во времени,

найден их производная и построен соответствующий параметрический портрет. Показано, что развитие колебаний испытывает значительное запаздывание, в несколько раз превышающее период прыжковой функции. После запаздывания скачком развиваются нестационарные колебания, амплитуда которых превышает начальное смещение осциллятора более чем на три порядка. Параметрический портрет имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, типичный для хаотического характера колебаний. Исследован спектральный состав высокоамплитудного хаоса. Показано, что в полном спектре преобладает линия, соответствующая частоте прыжковой функции, а при вычете этой функции остается чистый хаос, ширина спектра которого превышает частоту прыжковой функции на два порядка. Рассмотрено влияние начального смещения на время запаздывания. Показано, что время запаздывания зависит от величины начального смещения в соответствии с законом обратной пропорциональности. Рассмотрено влияние амплитуды прыжковой функции на время запаздывания. Выявлено критическое значение амплитуды, ниже которого высокоамплитудный хаос отсутствует. Показано, что по мере увеличения амплитуды прыжковой функции время запаздывания, в основном, спадает, однако на общей плавной зависимости имеется ряд острых максимумов, соответствующих резкому росту времени запаздывания на порядок и более. В качестве возможного объяснения характера полученной зависимости выдвинута гипотеза о ее резонансном характере. Рассмотрено влияние частоты прыжковой функции на время запаздывания. Показано, что по мере увеличения частоты время запаздывания увеличивается вплоть до критического ее значения, выше которого возбуждение высокоамплитудного хаоса отсутствует. Отмечена аналогия наблюдаемого явления с возбуждением электрического колебательного контура синусоидальной силой, при котором на низкой частоте ток в контуре колеблется в одной фазе с возбуждающей силой, а после прохождения резонансной частоты колебания становятся противофазными. На полученной зависимости выявлен ряд узких максимумов, подтверждающий гипотезу о резонансном их происхождении. Отмечено, что

определяющее уравнение содержит инерционный и потенциальный члены, для характеристики которых введены параметры инерционности и потенциальности как коэффициенты при второй производной и слагаемом кубической нелинейности. Рассмотрено влияние параметра инерционности на время запаздывания. Выявлено критическое значение параметра, ниже которого высокоамплитудный хаос отсутствует. Рассмотрено влияние параметра потенциальности на время запаздывания. Выявлено возбуждение высокоамплитудного хаоса во всем возможном интервале изменения параметра без какого-либо критического значения. Рассмотрено влияние на время запаздывания сдвига фазы прыжковой функции относительно начала возбуждения. Выявлена весьма сильная зависимость, различным образом проявляющаяся при малых и больших временах запаздывания. Малая величина времени запаздывания здесь характеризуется отсутствием резких выбросов на зависимости времени запаздывания от начального смещения. Показано, что в этом случае зависимость времени запаздывания от величины сдвига фазы имеет резко выраженный широкий максимум, когда зависимость прыжковой функций от этого сдвига становится отрицательной, так что в этом случае высокоамплитудный хаос отсутствует. Отмечено, что при больших временах запаздывания, то есть в области резких выбросов на зависимости времени запаздывания от начального смещения, влияние сдвига фазы прыжковой функции резко возрастает. Приведены некоторые замечания, касающиеся возможного развития работы. В качестве главных задач отмечено построение модельного представления о продолжительности времени запаздывания, более подробное выявление природы критического характера ряда параметров, а также более подробное изучение фазового характера рассматриваемых явлений.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, связанные осцилляторы, хаотические колебания.

**Abstract.** This work is the continuation of investigation of non-stationary delay of establishment nonlinear vibrations in the system of two connected oscillators. The physical foundation of this task is the excitation of power hypersound in ferrite plate

having magnetoelastic properties and also excitation of intensive electromagnetic vibrations in ferrite disc placed in electro-dynamic resonator. The foundation of this work is received in the first part of this work the simplified system of two connected differential second order equations having vibration character. As a main step of simplification of the task it is made the substitution of the vibration of second oscillator by auxiliary function having harmonic dependency from the time. In this case the dynamic potential acquired the character of periodic “jumps” in forward and backward directions. By this circumstance the introduced function was named as “jumping”. As a result of introduction of jumping function it was the replacement of two equations of initial system by only one “determination” equation which maintains the properties of the large-amplitude chaos and non-stationary delay. On the basis of determination equation it is investigated the development of vibrations and founded its derivative in the time and the parametrical portrait is constructed. It is shown that the development of vibrations feels large delay in time which value surpass the period of jumping function about some times. When the delay is over it is developed by the sudden jump the non-stationary vibrations having the amplitude which surpass the initial displacement more then three orders. The parametrical portrait has the form of horizontal eight which is typical for chaotic vibrations. The spectrum composition of large-amplitude chaos is investigated. It is shown that in the whole spectrum is predominated the line which is correspond to frequency of jumping function. When this function is removed it is remained only clean chaos. The width of spectrum of this chaos exceeds the frequency of jumping function on two orders. The influence of initial displacement on delay time is investigated. It is shown that the delay time is depended on the value of initial displacement in the frame of inverse proportion law. The influence of jumping function amplitude on the delay time is investigated. It is found the critical value of this amplitude. It is shown that in the lower level of critical value the large-amplitude chaos is absent. It is shown that when the amplitude of jumping function increases the delay time is decreases. But on the general smooth dependence it is displaced some sharp maxima which correspond to sharp increasing of delay time on the value about one order and more. As a

possible explanation of this dependence character it is proposed the hypothesis about its resonance character. The influence of jumping function frequency on the delay time is investigated. It is shown that when this frequency is increased the delay time also increases right until its critical value. Above the level of critical value the large-amplitude chaos is absent. It is noted the analogy of this phenomenon with the excitation of electric vibration circuit by sinusoidal force. In this case on the low frequency the current in the circuit vibrates in the same phase with excitation force and after the overcoming the resonance frequency the vibrations becomes in opposite phase. On the received dependence it is found some narrow maxima which corroborate the hypothesis about its resonance character. It is found that the determination equation contains inertial and potential parts for the characteristics of which is introduced the inertial and potential parameters as a coefficients by second derivative and item of cubic nonlinearity. The influence of inertial parameter on the delay time is investigated. It is found the critical value of this parameter lower of which the large-amplitude chaos is absent. The influence of potential parameter on the delay time is investigated. It is found that the excitation of large-amplitude chaos is possible along unlimited range of this parameter without some critical value. The influence of phase displacement of jumping function in comparison with initial moment of excitation on the delay time is investigated. It is found very strong dependence which is differed by small and large delay times. The small value of delay time is characterized by absence of sharp maxima on the dependence of delay time from initial displacement. It is shown that in this case the dependence of delay time from of phase displacement has very wide maximum when the dependence of jumping function is negative. In this region the large-amplitude chaos is absent. It is found that by large delay times so as in region of sharp maxima on the dependence of delay time from initial displacement the influence of phase displacement of jumping function is sharp increased. It is proposed some comments about possible development of this work. As a general tasks it is mentioned the construction of model idea about duration of delay time, more detailed clarification of nature of

critical character of some parameters and more detailed investigation of phase character of described phenomena.

**Key words:** nonlinear vibrations, connected oscillators, chaotic vibrations.

## Введение

Исследование колебательных явлений нестационарного и хаотического характера представляет собой значительную ветвь науки о колебаниях [1-3]. Основным способом теоретической интерпретации здесь является аппарат дифференциальных уравнений, содержащих нелинейные составляющие в том или ином виде [4-8].

Важное место занимают нелинейные явления в магнитных средах, в том числе параметрическое возбуждение обменных спиновых волн [9-12], а также ударное возбуждение магнитных, упругих и магнитоупругих колебаниях при воздействии импульса света от фемтосекундного лазера [13-23].

В магнитоупругой среде важную роль играет совместное возбуждение магнитных и упругих колебаний, находящее множество практических применений в устройствах обработки информации, таких как линии задержки, фильтры, резонаторы и другие, работающие в диапазоне СВЧ [24].

В таких устройствах значительные дополнительные преимущества обеспечивает использование нелинейных колебаний. Так, в работах [25-27] показано, что при надлежащем выборе геометрии, обеспечивающем нелинейный режим, возможно возбуждение гиперзвуковых колебаний на два порядка более мощных, чем в линейном случае.

В работах [28, 29] продемонстрировано и теоретически интерпретировано возбуждение мощных шумовых электромагнитных колебаний в системе ферритовый диск – электродинамический резонатор.

Для теоретического описания явлений в таких устройствах традиционно используется система связанных дифференциальных уравнений для магнитных и упругих или магнитных и электрических колебаний. При этом уравнение для намагниченности является нелинейным, а уравнения для упругих и

электрических колебаний – линейными. Связь может иметь как линейный, так и нелинейный характер. Общая система обычно содержит от семи до одиннадцати нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка при шести и более граничных условиях.

Высокая сложность математического аппарата вынуждает искать более простые пути описания наблюдаемых явлений.

Удачным эквивалентом рассматриваемой системы можно считать модель двух связанных осцилляторов, один из которых отражает магнитные колебаний и является нелинейным, а другой – упругие или электромагнитные и в простейшем случае является линейным.

Впервые такая модель была предложена для описания возбуждения мощного гиперзвука в работах [30-33]. Дальнейшее развитие модель получила на основе квадратичного приближения колебаний магнитной системы [34-40]. Была показана возможность описания как стационарных явлений, так и нестационарного хаоса высокой амплитуды.

В работах [41-44] в системе связанных осцилляторов было обнаружено явление нестационарного запаздывания, состоящее в том, что высокоамплитудный хаос развивается не сразу после включения возбуждения, а по прошествии определенного промежутка времени, значительно большего, чем собственные период и время релаксации обеих подсистем.

Исследование явления запаздывания продолжено в последовательно развивающихся работах [45, 46].

Первая работа [45] посвящена выделению из полной системы уравнений «первичного ядра» – упрощенной системы, сохраняющей явление запаздывания во всех его проявлениях при условии минимального числа свободных параметров.

Вторая работа [46], являющаяся продолжением первой, посвящена исследованию свойств запаздывания на основе анализа «первичного ядра». Рассмотрены зависимости параметров запаздывания и высокоамплитудного

хаоса от свободных параметров системы, приведена схема развития и окончания запаздывания с переходом к высокоамплитудному хаосу.

Настоящая работа является дальнейшим продолжением исследований, развитых в [45, 46]. Главное внимание уделено исследованию возможности сведения состоящего из двух уравнений «первичного ядра» к единому уравнению, сохраняющему свойства нестационарного запаздывания и высокоамплитудного хаоса.

## 1. Основная система уравнений

Настоящая работа является продолжением [45, 46], поэтому приведем из них краткую сводку необходимых далее результатов.

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Физическим обоснованием постановки задачи являются две реальные системы, каждая из которых в качестве нелинейного элемента содержит ферритовую пластину, а в качестве линейного – упругую пластину или электродинамический резонатор. При достаточной мощности внешнего возбуждения в каждой из этих систем генерируются высокоамплитудные колебания хаотического характера, причем начало таких колебаний отстает по времени от момента включения возбуждения на величину, значительно превышающую как период, так и время релаксации каждой из подсистем, в чем собственно и состоит эффект нестационарного запаздывания.

Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй – линейным. Для такой модели получена система двух дифференциальных уравнений второго порядка, оба из которых имеют колебательный характер, причем первое уравнение является нелинейным со степенной нелинейностью третьего порядка, а второе – линейным:



$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (2)$$

Здесь  $x_1$  и  $x_2$  – смещение первого и второго осцилляторов,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – соответствующие параметры диссипации,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – собственные частоты колебаний осцилляторов в отсутствие нелинейности и связи,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – параметры линейно связи между осцилляторами,  $\eta$  – параметр нелинейной связи,  $\delta$  – параметр кубической нелинейности первого осциллятора,  $A$  – амплитуда и  $\omega_0$  – частота внешнего воздействия.

С целью упрощения математической структуры задачи предложен эквивалент такой системы, в котором внешнее возбуждение заменено начальным смещением первого осциллятора. В результате исключения второстепенных слагаемых, из полной системы выделена укороченная система – «первичное ядро», сохраняющее свойство нестационарного запаздывания. Полученная система имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (4)$$

В работе [46] показано, что главным ингредиентом, ответственным за формирование высокоамплитудного хаоса, является слагаемое нелинейной связи первого уравнения вида  $\eta x_1^2 x_2$ . Входящее в это уравнение смещение второго осциллятора  $x_2$  задается вторым уравнением за счет линейной связи с первым через параметр  $\gamma_2$ .

При этом, если та или другая связь недостаточна, то есть высокоамплитудный хаос не формируется, то система совершает колебания весьма малой амплитуды, что можно интерпретировать как стремление времени запаздывания к бесконечности.

Однако основной предмет настоящей работы и двух ее первых частей [45, 46] составляет именно высокоамплитудный хаос, так что связь должна быть достаточной для того, чтобы время запаздывания составляло конечную, ограниченную по длительности величину.

Таким образом, необходимым условием формирования хаоса, а следовательно и реально наблюдаемого нестационарного запаздывания, является достаточная амплитуда смещения второго осциллятора  $x_2$ .

## 2. Определяющее уравнение

Как отмечено в предыдущем разделе, решающим фактором, определяющим начало лавинообразного роста смещения первого осциллятора, то есть выход из режима запаздывания, является достаточный уровень смещения второго осциллятора. Рассмотрим теперь, как именно этот уровень сказывается на развитии колебаний.

Выделим из полной системы (3)-(4) только одно первое уравнение для  $x_1$ , а вместо второго зададим определенный уровень смещения  $x_2 = x_{2S}$ . То есть получим уравнение:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_{2S} = 0. \quad (5)$$

Поскольку второй осциллятор тоже совершает колебания, то будем считать его смещение зависящим от времени по синусоидальному закону. Для формирования такого смещения введем вспомогательную функцию, которую далее будем называть «прыжковой»:

$$x_{2S} = x_{2S0} \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t), \quad (6)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5) приводит его к виду:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + (\eta x_{2S0}) x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t) = 0. \quad (7)$$

Соответствующий потенциал принимает вид:

$$U = \frac{\delta}{4} x_1^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3} x_1^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (8)$$

Этот потенциал является динамическим в том отношении, что с течением времени совершает «прыжки» из одной конфигурации в другую, подобно потенциалу, изображенному на рис.4 в работе [46]. Только теперь такие прыжки совершаются принудительным образом под действием прыжковой функции (6).

Можно ввести вспомогательный параметр

$$\xi = \eta x_{2S0}, \quad (9)$$

при котором (7) и (8) принимают вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \xi x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t) = 0; \quad (10)$$

$$U = \frac{\delta}{4} x_1^4 + \frac{\xi}{3} x_1^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (11)$$

Далее будет показано, что уравнение (7) или (10) определяет эффект запаздывания без привлечения второго уравнения в явном виде. Поэтому для удобства дальнейшей терминологии назовем такое уравнение «определяющим». Важно отметить, что здесь система из двух уравнений (3)-(4) может быть сведена к одному единственному уравнению (7) или (10).

Рассмотрим развитие во времени колебаний первого осциллятора, соответствующих определяющему уравнению (7). Обратимся к рис.1, где показаны колебания (а), их производные (б) и соответствующий параметрический портрет (в).

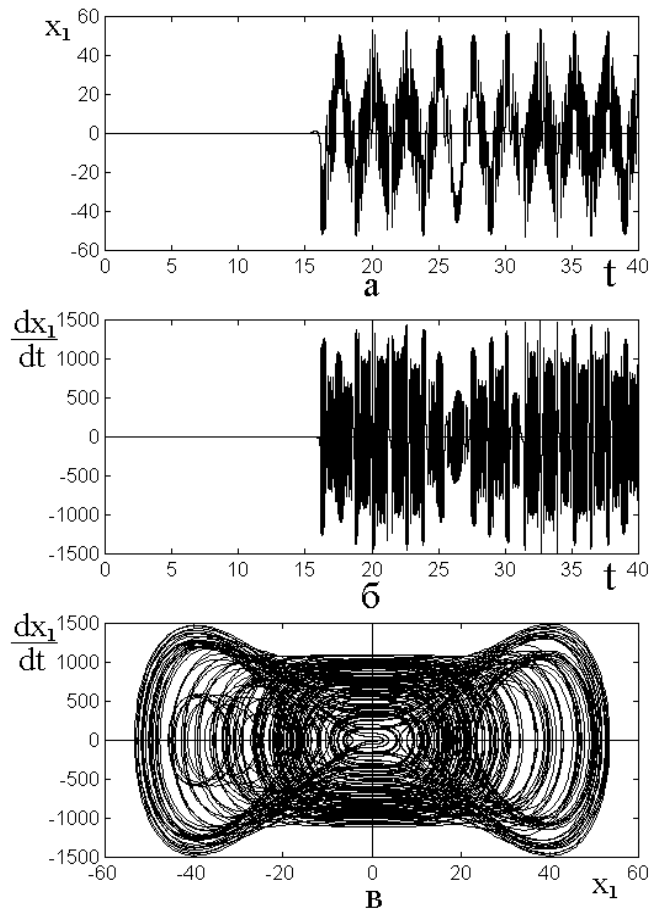


Рис.1. Колебания смещения (а), их производные (б) и соответствующий параметрический портрет (в) для первого осциллятора, развивающиеся в соответствии с уравнением (7). Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{2S0} = 1$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ .

Начальное смещение:  $x_{10} = 0,005$ .

Из рисунка видно, что развитие колебаний испытывает значительное запаздывание, составляющее около 16 ед. времени. В этот момент смещение скачком увеличивается с уровня около 0,01 ед. (этот уровень скрыт в толщине линии рисунка) до уровня 50 ед., то есть в 5000 раз. Дальнейшее развитие колебаний следует сильно размазанной синусоиде с более или менее постоянной амплитудой около 50 ед., на которую наложен хаос с амплитудой порядка 20-30 ед. Период основной синусоиды составляет 2,5133 ед., что соответствует периоду прыжковой функции (б) при частоте  $\omega_{2S} = 2.5$  ед.

Производная (рис.1б) в области подъемов и спадов смещения остается на почти одинаковом (хотя и несколько меняющемся от раза к разу) уровне, а в моменты перехода смещения от подъемов к спадам, имеет резкие выбросы,

период которых в два раза меньше периода основной синусоиды смещения. Между этими выбросами колебания имеют хаотический характер.

Параметрический портрет (рис.1в) имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, типичный для хаотического характера колебаний.

В отличие от разверток, приведенных на рис.5 в работе [46], здесь запаздывание является одноступенчатым, так что амплитуда колебаний смещения всегда остается на одном уровне около 50 ед. (проверено до времени 500 ед.).

Более подробно хаотический характер колебаний первого осциллятора иллюстрируется рис.2, где показано развитие колебаний во времени (а), то же что на рис.1а, колебания прыжковой функции (б), а также разности между смещением и умноженной на 20 (с целью нормировки) прыжковой функцией (в).

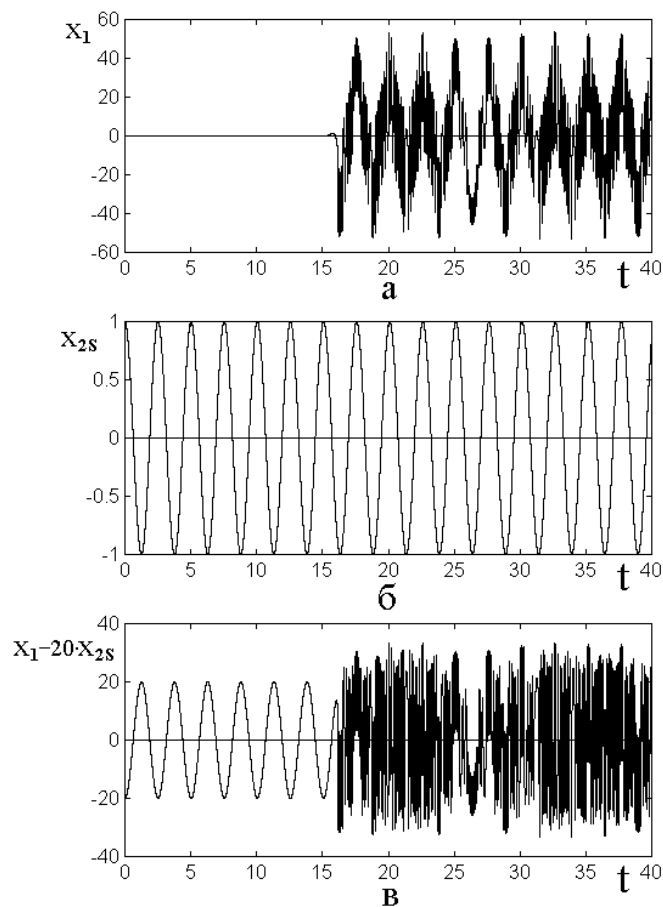


Рис.2. Иллюстрация хаотического режима колебаний первого осциллятора.

а – развитие колебаний во времени (соответствует рис.1а);  
 б – «прыжковая» функция (б); в – развитие во времени разностной функции  $x_1 - 20 x_{2S}$ . Параметры – те же, что на рис.1.

Из сравнения кривых, приведенных на верхних двух эпюрах этого рисунка, видно, что синусоидальная составляющая колебаний смещения (рис.2а) как раз точно следует синусоидальным же колебаниям прыжковой функции (рис.2б). При этом вычитание из смещения нормированной прыжковой функции (рис.2в) демонстрирует в чистом виде хаотическую составляющую колебаний смещения, максимумы которой здесь сохраняют амплитуду на уровне около 30 ед.

Из сравнения рис.2а и рис.2в видно, что характер колебаний в области хаоса заметно различается. Рассмотрим, в какой степени такое различие сказывается на параметрическом портрете колебаний, для чего обратимся к рис.3, где приведены такие портреты для смещения первого осциллятора  $x_1$  (а) и разностной функции  $x_1 - 20 x_{2s}$  (б).

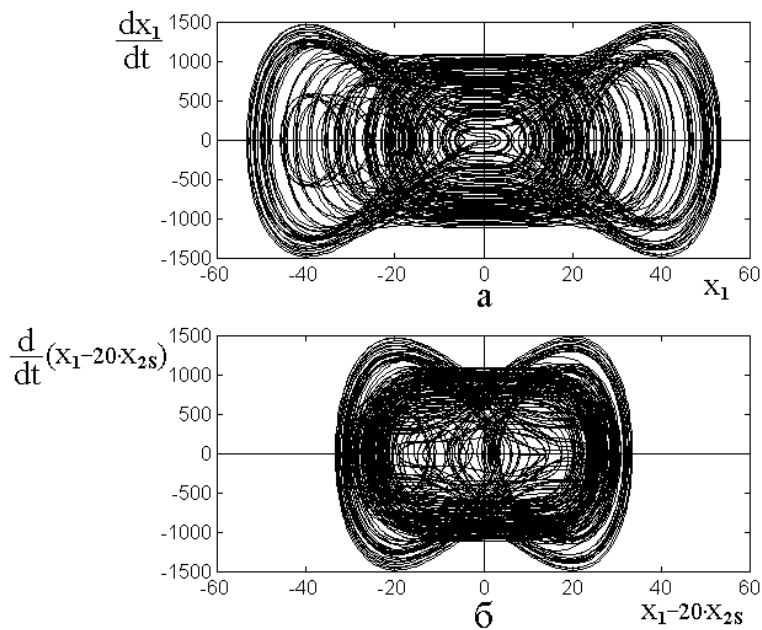


Рис.3. Параметрические портреты для смещения первого осциллятора  $x_1$  (а) и разностной функции  $x_1 - 20 x_{2s}$  (б). Параметры – те же, что на рис.1.

Из рисунка видно, что в обоих случаях портрет представляет собой горизонтальную восьмерку, причем густота и хаотический характер траекторий также одинаков. Горизонтальный размах портрета для разностной функции (б) несколько меньше такового для смещения (а), так как здесь отсутствует главная

составляющая колебаний на частоте прыжковой функции  $\omega_{2S}$ , приведенной на рис.2б. На втором портрете можно отметить лишь некоторое сгущение траекторий в форме горизонтального овала с двумя округлыми «окнами», что связано с большей группировкой колебаний вокруг горизонтальной оси на рис.2в. В остальном заметные отличия отсутствуют, то есть характер хаоса сохраняется.

### **3. Соотношение между временем запаздывания и периодом прыжковой функции**

Дополнительным весьма важным моментом, видимым из рис.2, является тот факт, что развитие высокоамплитудного хаоса происходит не за один период и не за половину периода прыжковой функции, а по прошествии 6-7 ее периодов. В этом состоит отличие от механизма, рассмотренного в работе [41], где для возбуждения хаоса было достаточно лишь одного смещения второго осциллятора до значительной величины. То есть здесь рассмотренный там механизм постепенного развития боковой ямы потенциала не реализуется, так как здесь такая яма формируется сразу в течение первого полупериода прыжковой функции.

Можно предположить, что здесь сказывается весьма высокая инерционность первого осциллятора, обусловленная его колебательным характером. В самом деле, как показано в работе [46, врезка в рис.3], частота собственных колебаний первого осциллятора соотносится с начальным смещением через коэффициент 1,9, так что период колебания при принятом здесь смещении 0,005 ед. составляет 661 ед., что более чем на два порядка (точнее – в 263 раза) превышает частоту прыжковой функции. То есть здесь, прежде чем прыжковая функция «задействует» смещение первого осциллятора, ей приходится раскачивать его в течение нескольких периодов, как это и видно из рис.2.

Таким образом, из проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что для реализации запаздывания наличие системы из двух уравнений второго порядка не является условием безусловно необходимым, так как второе

уравнение может быть заменено модельной функцией, обеспечивающий «прыжковый» характер динамического потенциала. При этом эффект запаздывания может быть реализован в одном уравнении с кубической нелинейностью, содержащем нелинейное слагаемое, пропорциональное квадрату смещения с коэффициентом, периодически зависящим от времени. Для удобства дальнейшей терминологии такое уравнение названо «определяющим».

#### 4. Спектральный состав высокоамплитудного хаоса

Рассмотрим теперь спектральный состав высокоамплитудных колебаний после запаздывания, для чего обратимся к рис.4, где показан исходный спектр колебаний (а) и тот же спектр за вычетом нормированной прыжковой функции (б).

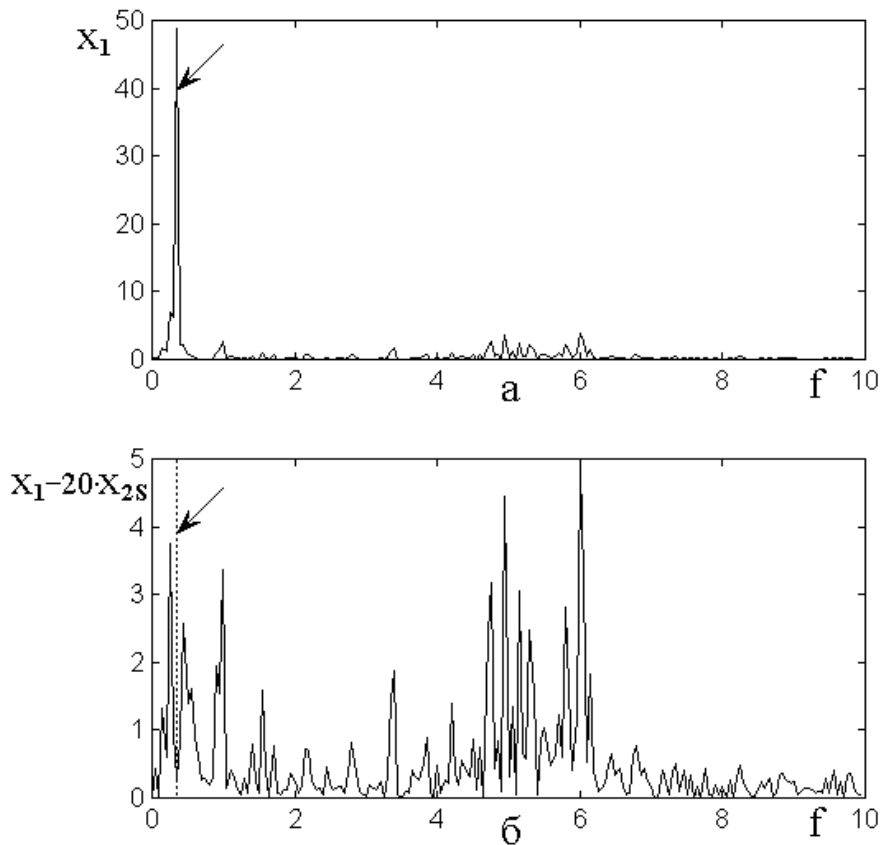


Рис. 4. Спектральный состав высокоамплитудных колебаний после запаздывания (промежуток времени от 16 до 40 ед.). а – полный спектр колебаний первого осциллятора ( $x_1$ ); б – спектр тех же колебаний за вычетом нормированной прыжковой функции ( $x_1 - 20 x_{2s}$ ). Параметры – те же, что на рис.1.



Из рисунка видно, что в полном спектре (а) значительно преобладает частота  $f = 0,3979$  ед. (показана стрелкой), соответствующая частоте прыжковой функции  $\omega_{2S} = 2.5$  ед. Амплитуда этой спектральной линии составляет 50 ед.

В области частот от 4,6 до 6,2 наблюдаются составляющие хаоса, однако амплитуда их здесь на порядок меньше (около 5 ед.).

Вычитание из полных колебаний  $x_1$  нормированной прыжковой функции  $20 x_{2S}$  (б) приводит к подавлению спектральной линии на частоте  $f = 0,3979$  ед., так что ее амплитуда падает на два порядка (до 0,5 ед.). В результате на этой частоте возникает провал (положение частоты  $f = 0,3979$  ед. показано вертикальной точечной линией и отмечено стрелкой), а спектральные составляющие хаотических колебаний выявляются в чистом виде. Основное скопление линий хаоса наблюдается между 4,6 и 6,2 ед. частоты, где их амплитуда достигает 5 ед. Другое скопление с амплитудой до 4 ед. имеет место в интервале от 0,1 до 1,2 ед. частоты. Вне этих скоплений спектр, хотя и спадает по амплитуде почти на порядок (до уровня около 0,5 ед.), но все равно остается достаточно богатым, заполняя непрерывным образом все остающиеся места вплоть до частоты в 10 ед. Проверка показывает, что далее амплитуда спектра постепенно спадает, стремясь к нулю в области около 15 ед. частоты.

Таким образом, подавление линии, соответствующей частоте прыжковой функции, позволяет наглядно выявить спектральные составляющие хаоса, непрерывным образом распределенные в широком интервале частот.

## 5. Влияние начального смещения

Рассмотрим теперь определяющее уравнение (7) несколько подробнее. Главным его свойством должно быть запаздывание развития высокоамплитудного хаоса относительно момента начала возбуждения колебаний, обусловленного высвобождением системы при задании начального смещения.

Обратимся к рис.5, где приведена зависимость времени запаздывания от величины начального смещения, построенная в соответствии с уравнением (7). Аппроксимирующие кривые 1 и 2 построены по формулам:

$$\tau_S = \frac{0,035}{x_{10} - 0,003} + 1,7; \quad (12)$$

$$\tau_S = \frac{0,002}{x_{10} - 0,00427} + 15. \quad (13)$$

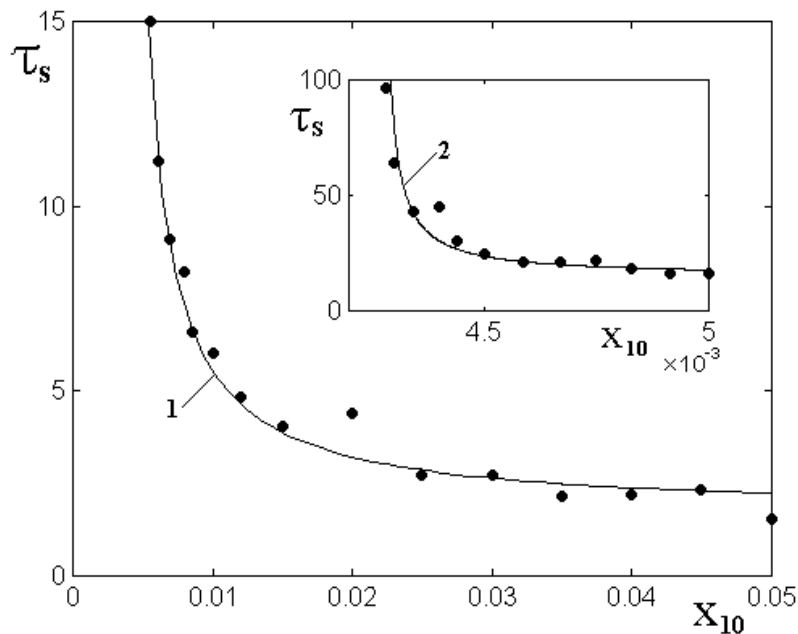


Рис.5. Определяемая уравнением (7) зависимость времени запаздывания от величины начального смещения. На врезке – начальный участок той же зависимости. Критическое значение начального смещения –  $x_{10C} = 0,00427$  ед.

Точки – результаты машинного эксперимента. Кривая 1 построена по формуле (12), кривая 2 – по формуле (13). Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{2S0} = 1$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ .

Из рисунка можно видеть, что приведенная зависимость довольно хорошо аппроксимируется функцией обратной пропорциональности. Некоторое различие в числовых параметрах формул (12) и (13) обусловлено разными масштабами основного рисунка и врезки, так что принципиального

значения не имеет. Общий характер зависимости соответствует полученным ранее подобным зависимостям для полной системы, приведенным на рис.3б и рис.8 в работе [45], а также в еще более раннем варианте на рис.5 в работе [41]. Зависимость полностью плавная, какие-либо скачки, отмечавшиеся ранее для полных систем (7)-(8) и (9)-(10) в работе [45], здесь отсутствуют. Можно полагать, что отсутствие скачков обусловлено простотой лежащей в основе уравнения (7) системы (3)-(4), по сравнению с системами, рассматривавшимися ранее.

Таким образом, из результатов настоящего и предыдущих разделов можно сделать вывод, что уравнение (7) отражает эффект запаздывания в достаточной степени. Рассмотрим теперь свойства этого уравнения более подробно.

## **6. Запаздывание при различной амплитуде прыжковой функции**

Главным свойством определяющего уравнения (7) является реализация запаздывания. При этом роль второго уравнения исходной системы (3)-(4) замещает прыжковая функция (6). Таким образом, представляет интерес проследить, как параметры этой функции сказываются на времени запаздывания.

Рассмотрим сначала, как зависит время запаздывания от амплитуды прыжковой функции, для чего обратимся к рис.6, где приведены такие зависимости в широком интервале значений  $x_{2S}$ . При построении этого рисунка начальное смещение первого осциллятора  $x_{10} = 0,00430$  ед. было выбрано вблизи критического значения ( $x_{10C} = 0,00427$ ) для того, чтобы выявить достаточно большие времена запаздывания более наглядно.

Из рисунка можно видеть, что по мере увеличения  $x_{2S}$  время запаздывания, в основном, спадает, хотя и крайне неоднородно. Критическое значение  $x_{2SC}$  равно 0,846 ед. При этом значении время запаздывания устремляется в бесконечность (левый конец кривой на врезке). Ниже этого значения запаздывание не было обнаружено (проверено по  $\tau_S$  в интервале до

1000 ед.). Выше  $x_{2S\tilde{N}}$  время запаздывания  $\tau_S$ , испытывая несколько скачков, в основном, убывает. Самый большой скачок наблюдается в области около  $x_{2S} = 0,92$  ед. (врезка), где время запаздывания опять стремится к бесконечности (конечное значение в интервале  $\tau_S$  до 1000 ед. не было обнаружено). При дальнейшем увеличении  $x_{2S}$  время запаздывания всегда остается конечным (проверено до  $x_{2S} = 5$  ед.).

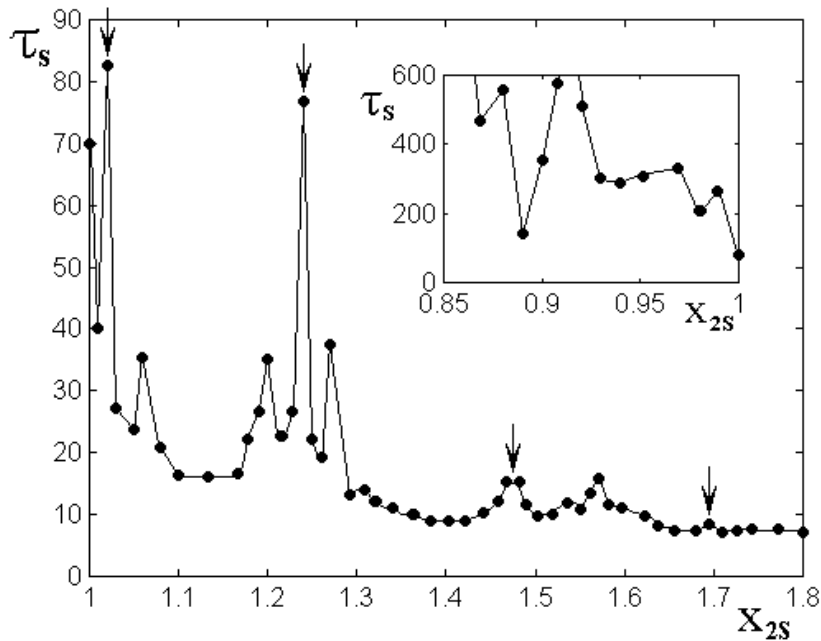


Рис.6. Зависимость времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции. На врезке – начальный участок той же зависимости в более удобном масштабе. Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ ;  $x_{10} = 0,0043$ .

Главные скачки наблюдаются при  $x_{2S} = 1,02$  ед. и  $1,24$  ед. (отмечены стрелками вверх). Амплитуда этих скачков превышает окружающие значения до пяти раз. При  $x_{2S} = 1,48$  ед. и  $1,70$  ед. также наблюдаются небольшие скачки с амплитудой в 1,7 и 1,1 раза больше окружающей (также отмечены стрелками). Неожиданным свойством этих четырех скачков (отмеченных стрелками) является тот факт, что по величине  $x_{2S}$  они располагаются на одинаковых промежутках друг от друга (по горизонтальной оси около 0,22 ед.).

Можно полагать, что скачкообразный характер приведенной зависимости, а также равноотстоящее расположение скачков отражают какие-то свойства колебаний резонансного характера.

В самом деле, основу определяющего уравнения (7) составляет уравнение второго порядка с кубической нелинейностью, которое, как показано в [40, раздел 13], имеет колебательный характер. Частота колебаний такого осциллятора прямо пропорциональна их амплитуде. С другой стороны, максимумы кривой на рис.6 приходятся на вполне определенные значения амплитуды прыжковой функции  $x_{2S}$ , причем эти максимумы являются весьма резкими. Относительно уравнения (7) прыжковую функцию можно в какой-то мере рассматривать как возбуждающую силу. То есть изменение амплитуды этой силы должно приводить к изменению амплитуды колебаний, такой силой возбуждаемых в колебательной системе с кубической нелинейностью. Поскольку собственная частота колебаний такой системы определяется ее амплитудой, то в тот момент, когда навязываемая прыжковой функцией частота совпадает с собственной, амплитуда колебаний может резко возрасти, что и будет проявляться как резонансное свойство.

Таким образом, можно ожидать, что время запаздывания будет зависеть от частоты прыжковой функции, а также меняться при изменении резонансных свойств основной системы второго порядка с кубической нелинейностью. Эти возможности будут рассмотрены далее.

## 7. Изменение частоты прыжковой функции

Кроме амплитуды важнейшим параметром прыжковой функции  $x_{2S}$  (6) является ее частота. В предыдущем разделе отмечено, что возможным механизмом резко неоднородного характера зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции может быть попадание параметров этой функции в условия собственных колебаний системы второго порядка с кубической нелинейностью. То есть изменение частоты прыжковой функции должно влиять на характер зависимости времени запаздывания от амплитуды этой функции.

Обратимся к рис.7, где показаны зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции при различных значениях ее частоты  $\omega_{2S}$ . В качестве рабочей области выбрана окрестность наиболее заметного пика на рис.6, соответствующего  $x_{2S} = 1,24$  ед. На рисунке рассмотрены три значения частоты, лежащие по обе стороны от фиксированного значения  $\omega_{2S} = 2,50$  ед., принятого при построении рис.6.

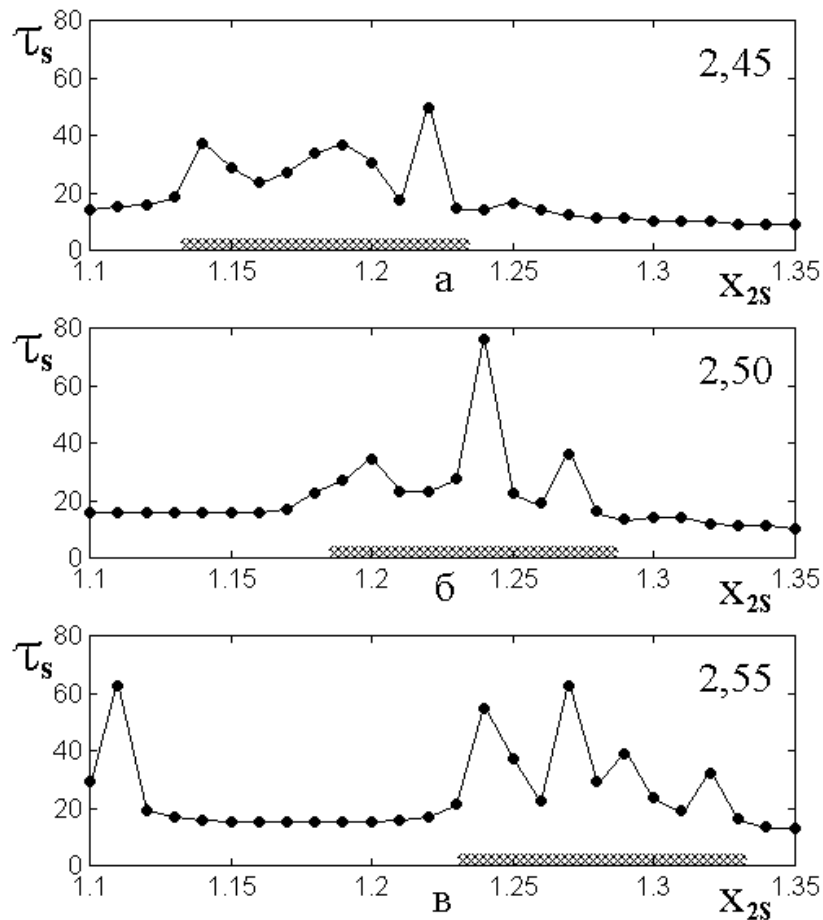


Рис.7. Зависимость времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции при различных значениях ее частоты  $\omega_{2S}$ : а – 2,45 ед.; б – 2,50 ед.; в – 2,55 ед.

Цифры в правых верхних углах эюр – значения частоты  $\omega_{2S}$ .

Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{10} = 0,0043$ .

Из рисунка можно видеть, что зависимость на рис.7б соответствует таковой, приведенной на рис.6. Виден основной пик при  $x_{2S} = 1,24$  ед. и два расположенные около него сателлита при  $x_{2S} = 1,20$  ед. и 1,27 ед. Основная

область значений  $x_{2S}$ , за которой осуществляется наблюдение, отмечена вдоль нижней оси краевой штриховкой. Центр этой области приходится на  $x_{2S} = 1,24$  ед.

На рис.7а приведена та же зависимость при более низкой частоте, составляющей 2,45 ед. Видно, что вся область сместилась вниз и теперь ее центр приходится на  $x_{2S} = 1,18$  ед. Центральный пик несколько размылся и его амплитуда упала почти в два раза, однако выделились боковые, так что ширина всей области осталась прежней и амплитуда, если и уменьшалась, то не более чем в полтора раза.

На рис.7в приведена та же зависимость при более высокой частоте, составляющей 2,55 ед. Видно, что вся область сместилась вверх и теперь ее центр приходится на 1,28 ед. Амплитуда центрального пика уменьшилась в 1,2 раза, однако нижнего бокового увеличилась в те же 1,2 раза, в верхний боковой сохранил ту же амплитуду, но разделился на два вблизи  $x_{2S} = 1,29$  ед. и 1,32 ед.

Таким образом, можно видеть, что увеличение частоты  $\omega_{2S}$  с 2,45 ед. до 2,55 ед. требует увеличения амплитуды прыжковой функции с 1,18 ед. до 1,28 ед. В принятом интервале частот зависимость получается линейной с угловым коэффициентом равным единице.

Заметим теперь, что основу определяющего уравнения (7) составляет колебательное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью. В работе [40] показано, что собственная частота решения такого уравнения прямо пропорциональна амплитуде колебаний. То есть полученная здесь прямо пропорциональная связь между частотой и амплитудой прыжковой функции имеет такой же характер, что и для уравнения, составляющего основу (7). Такое совпадение явно говорит в пользу резонансной природы пиков на зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции, представленной на рис.б.

Рассмотрим теперь влияние частоты прыжковой функции на эффект запаздывания несколько более подробно, для чего обратимся к рис.8, где показана зависимость времени запаздывания от частоты прыжковой функции в широком диапазоне ее изменения. В качестве рабочей области выбрана та же окрестность наиболее заметного пика на рис.6, соответствующего  $x_{2S} = 1,24$  ед. Частота  $\omega_{2S}$  меняется, а остальные параметры оставлены прежними. Рисунок начинается с частоты  $\omega_{2S} = 2,2$  ед., так как ниже этой частоты зависимость является плавной, какие-либо особенности отсутствуют, а время запаздывания постепенно спадает, составляя при частоте 0,1 ед. около 5 ед. времени.

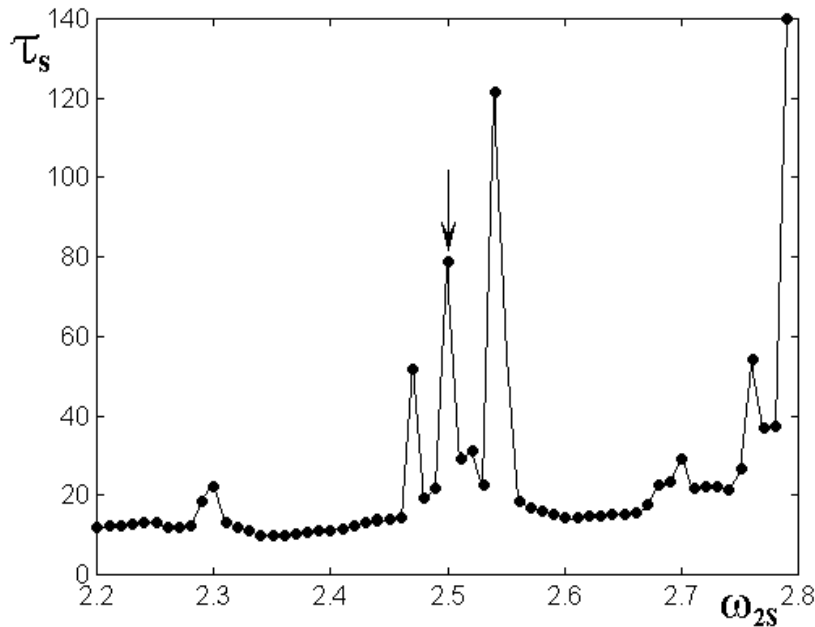


Рис.8. Зависимость времени запаздывания от частоты прыжковой функции. Стрелкой отмечена частота, соответствующая главному пику на рис 6 при  $x_{2S} = 1,24$  ед. Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{10} = 0,0043$ ;  $x_{2S} = 1,24$ .

Из рисунка видно, что зависимость является резко неоднородной и имеет несколько пиков, разделенных сравнительно монотонными областями. Наиболее сложная структура наблюдается при изменении  $\omega_{2S}$  от 2,47 ед. до 2,57 ед., где имеют место три пика высотой от 50 до 120 ед. Именно здесь по середине приходится значение частоты 2,5 ед., соответствующее наиболее характерному пику на рис.6 (отмечено стрелкой). То есть здесь, как и там,



подъем имеет трехпиковую структуру, однако теперь по амплитуде выделен не средний, а крайний более высокочастотный пик. Ширина пиков составляет около 0,01 ед. частоты, а расстояние между ними – около 0,03 ед. В области выше  $\omega_{2S} = 2,68$  ед. наблюдается все более возрастающий подъем, на котором слегка выделяются два пика при 2,70 и 2,77 ед. Главный подъем начинается после 2,79 ед. частоты, где амплитуда резко возрастает до весьма больших значений. Так при частоте 2,82 ед. время запаздывания составляет 260 ед. (выходит за пределы рисунка), при частоте 2,83 ед. составляет 500 ед., при частоте 2,84 – 610 ед., а при частоте 2,86 ед. превышает 1000 ед. Выше частоты 2,87 ед. высокоамплитудный хаос вообще не наблюдается, то есть время запаздывания стремится к бесконечности (проверено до времени запаздывания 2000 ед.). Таким образом, частота  $\omega_{2S} = 2,87$  ед. является критической выше которой хаос отсутствует.

Можно отметить, что области подъемов по горизонтальной оси опять расставлены на близкие по величине промежутки. Так, первый подъем приходится на 2,3 ед. частоты, середина группы из трех пиков – на частоту 2,5 ед., а последний подъем приходится на 2,8 ед. То есть расстояния между первыми двумя значениями составляет 0,2 ед., а между вторым и последним – 0,3 ед.

Таким образом, общий характер приведенной зависимости (резко выраженные узкие максимумы, расставленные на близкие по величине промежутки) говорит в пользу резонансной природы явления.

В качестве причины существования критического значения частоты можно предположить связь между скоростью «прыжков» прыжковой функции и временем собственных колебаний системы. Так, при низкой частоте прыжков смещение осциллятора полностью следует изменению динамического потенциала, а при высокой может несколько отставать. Когда частота прыжков станет настолько высокой, что в течение одного прыжка смещение не успеет развиться до заметной величины, колебания прекратятся, то есть высокоамплитудный хаос возбуждаться не будет. То есть имеет место явление

такого же характера, как и возбуждение электрического колебательного контура синусоидальной силой [2, стр.27]. При низкой частоте возбуждения смещение следует за силой, а при высокой – отстает по фазе на  $\pi$ . В этом плане было бы интересно посмотреть поведение фазы колебаний в режиме запаздывания при изменении частоты прыжковой функции, в том числе вблизи критического значения. Авторы полагают, что более подробное исследование фазы колебаний в рассматриваемом уравнении (7) могло бы составить предмет для отдельной работы.

## 8. Параметры собственных колебаний

Вспомним теперь, что основой определяющего уравнения (7) является уравнение с кубической нелинейностью вида:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 = 0. \quad (14)$$

В работе [40] показано, что это уравнение является колебательным, причем роль инерционного члена играет коэффициент при второй производной по времени (здесь принятый равным единице с целью нормировки), а роль потенциального члена, то есть возвращающей силы играет слагаемое  $\delta x_1^3$ . Таким образом, колебательные свойства и в первую очередь частота собственных колебаний для уравнения (14) определяются коэффициентами при второй производной и при кубическом члене.

Вполне естественно полагать, что параметры запаздывания и хаоса будут также зависеть от этих коэффициентов.

Введем упомянутые коэффициенты в определяющее уравнение (7) в явном виде. При этом уравнение (7) принимает вид:

$$A_R \cdot \frac{d^2 x_1}{d t^2} + B_R \cdot \delta x_1^3 + (\eta x_{2S0}) x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t) = 0, \quad (15)$$

где  $A_R$  – параметр инерционности,  $B_R$  – параметр потенциальности (возвращающей силы).

Рассмотрим теперь, что будет происходить с явлением запаздывания при изменении  $A_R$  и  $B_R$ .

### 9. Влияние параметра инерционности

Рассмотрим сначала влияние параметра инерционности, для чего обратимся к рис.9, где показана зависимость времени запаздывания от параметра инерционности в области наиболее заметного пика на рис.6, соответствующего  $x_{2S} = 1,24$  ед.

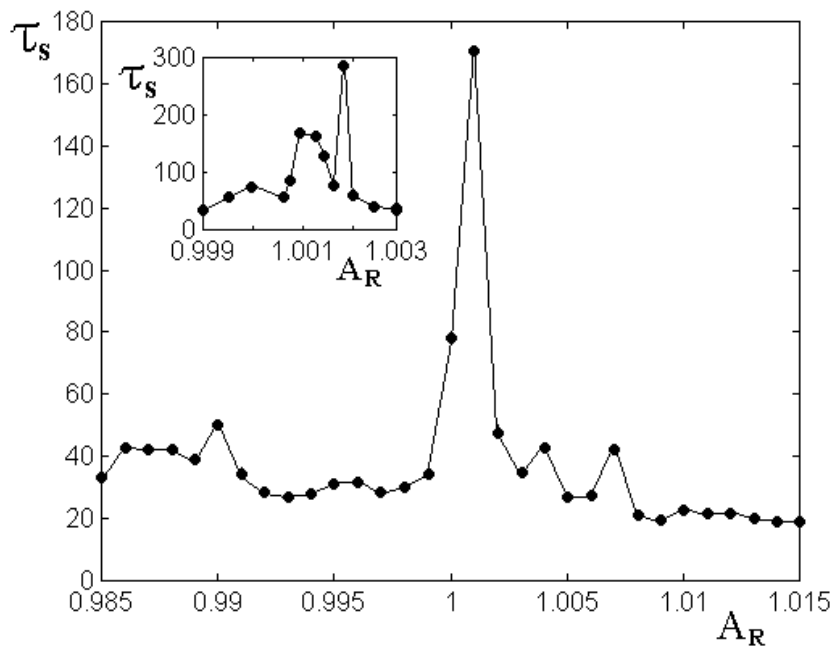


Рис.9. Зависимость времени запаздывания от параметра инерционности.

На врезке – структура главного пика в крупном масштабе.

На основном рисунке шаг по  $A_R$  составляет 0,001 ед., на врезке – 0,0002 ед.

Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{10} = 0,0043$ ;  $x_{2S} = 1,24$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ .

Из рисунка можно видеть, что зависимость имеет неоднородный характер с резко выделенным пиком при  $A_R$  вблизи значения 1,002 ед. Поскольку здесь меняется параметр инерционности, то есть частота собственных колебаний уравнения (14), составляющего основу уравнения (7), то такой пик следует отнести к явлению резонансного характера. Ширина пика на половине высоты (то есть при  $\tau_S$  около 80-90 ед.) составляет около 0,001 ед., однако пик не является единым, а имеет более сложную структуру, показанную на врезке.

Здесь, благодаря более мелкому шагу по  $A_R$ , удается выделить узкий пик, имеющий ширину в пять раз меньшую и амплитуду, составляющую 280 ед. Проверка показала, что дальнейшее уменьшение шага, вплоть до 0,00005 ед. к выявлению более дробного характера расщепления и увеличения амплитуды пика не приводит. То есть здесь явно фрактальный характер зависимости не наблюдается, но имеет место расщепление основного резонанса на две линии, отстоящие друг от друга на весьма малом расстоянии (порядка 0,0006 ед.).

Зависимость на рис.3 представляет единственный пик, выбранный из рис.6 как наиболее характерный. С целью выявления тонкой структуры пика шаг по  $A_R$  принят крайне малым (0,001 ед., на врезке – 0,0002 ед.). Однако столь малый шаг позволил рассмотреть только небольшую окрестность пика. Для более подробного выявления влияния параметра инерционности на время запаздывания обратимся к рис.10, снятому при шаге 0,005 ед. в более широком диапазоне изменения  $A_R$ . Все параметры приняты теми же, что на рис.9, а рассмотренный на рис.9 пик отмечен стрелкой.

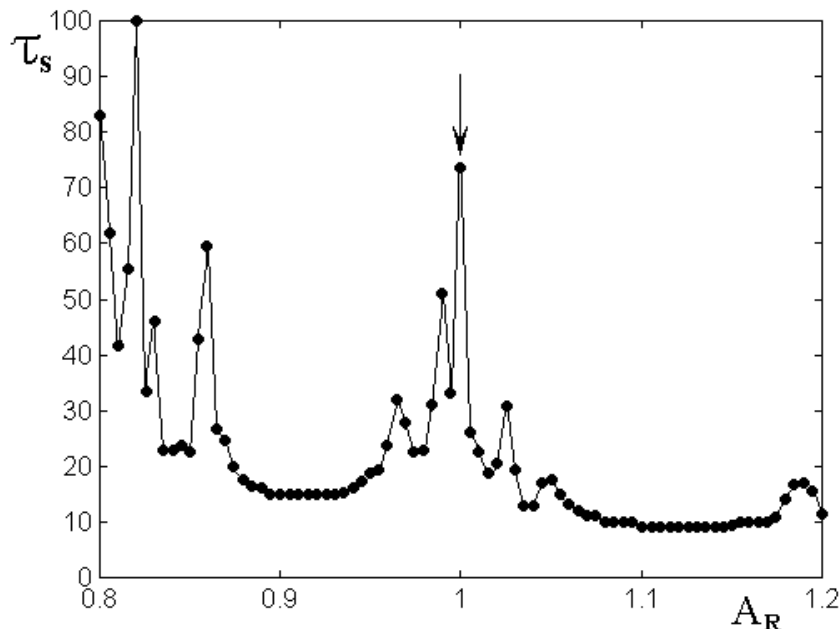


Рис.10. Зависимость времени запаздывания от параметра инерционности в широком диапазоне его изменения. Шаг по  $A_R$  составляет 0,005 ед.

Параметры – те же, что на рис.9.

Из рисунка можно видеть, что представленный на рис.9 пик является только главным из целой группы пиков, расположенных по  $A_R$  между 0,97 и 1,05 ед. Как и на врезке в рис.9, основной пик, показанный стрелкой, расщеплен на два, хотя здесь его структура выявлена заметно грубее, так как шаг по  $A_R$  значительно больше. Однако охват большего диапазона позволяет отметить сильный многократно расщепленный подъем вблизи левого края рисунка. Сразу за левым краем, при  $A_{RC} = 0,780$  ед. величина  $\tau_S$  стремится к бесконечности, так что это значение можно считать критическим. При значении  $A_R$  меньше критического высокоамплитудный хаос отсутствует. Вблизи  $A_{RC}$  время запаздывания может достигать весьма больших величин. Так, при  $A_R = 0,784$  ед. величина  $\tau_S$  составляет около 900 ед. времени, а при  $A_R = 0,781$  ед. достигает 1100 ед. На рисунке эти значения не представлены, чтобы не увеличивать масштаб по вертикальной оси, при котором все остальные пики будут выглядеть крайне малыми.

Обращает на себя внимание небольшой пик вблизи  $A_R = 1,190$  ед. Можно видеть, что этот пик, а также главный при  $A_R = 1,000$  ед. и группа пиков вблизи  $A_R = 0,800$  ед. разнесены по  $A_R$  на одинаковые расстояния. То есть и здесь можно отметить эквидистантность пиков, подобную отмеченной на рис.6.

Таким образом, здесь, как и для зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции, представленной на рис.6, можно отметить проявление свойств резонансного характера

## 10. Влияние параметра потенциальности

Рассмотрим теперь влияние параметра потенциальности, для чего обратимся к рис.11, где показана зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности в области наиболее заметного пика на рис.6, соответствующего  $x_{2S} = 1,24$  ед.

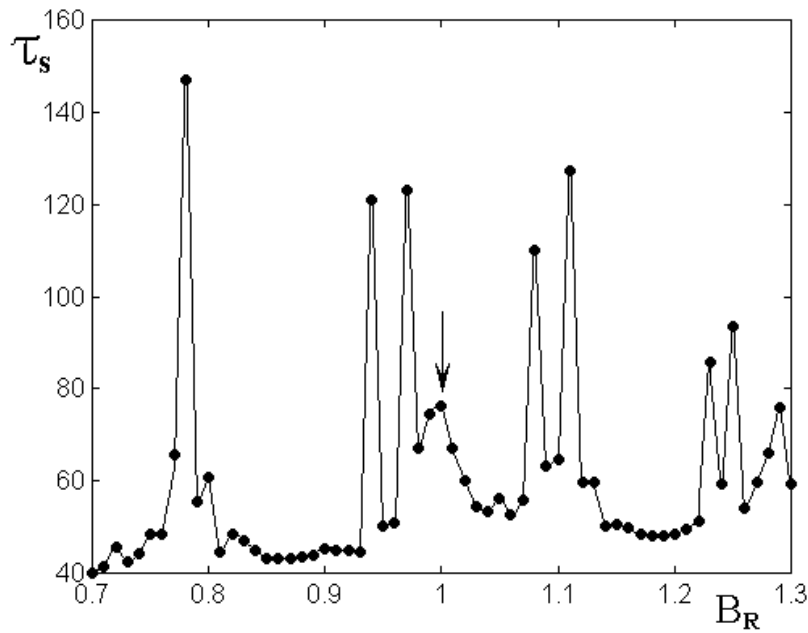


Рис.11. Зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности. Стрелкой показано положение главного пика на рис.6. Шаг по  $B_R$  составляет 0,01 ед. Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{10} = 0,0043$ ;  $x_{2S} = 1,24$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ .

Из рисунка можно видеть, что зависимость имеет неоднородный характер с несколькими группами пиков, разделенных широкими пологими промежутками. В качестве довольно общего свойства группировки пиков наблюдается объединение в пары, то есть можно говорить о расщеплении основных резонансов. Ширина каждого отдельного пика по основанию составляет около 0,01 ед., а на половине высоты – 0,005 ед. В каждой паре расстояние между соседними пиками составляет около 0,03 ед. Можно видеть, что каждый пик как раз укладывается в величину шага по  $B_R$ , равную 0,01 ед. Проверка показала, что уменьшение шага на порядок (до значения 0,001 ед.) более тонкой структуры пиков не выявляет, но значительно увеличивает трудоемкость работы, поэтому величина шага в 0,01 ед. была признана оптимальной.

Зависимость, представленная на рис.11 была получена при параметрах прыжковой функции, соответствующих наиболее выделенному пику на рис.6, то есть при  $x_{2S} = 1,24$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ . Здесь этот пик соответствует  $B_R = 1,0$  ед.

(отмечен стрелкой). Однако теперь он не является главным, так как по обе стороны имеются пары пиков, высота которых больше в 2-3 раза.

Важным моментом является размещение пар пиков по оси  $B_R$  с равными промежутками по 0,15 ед. Такое «эквидистантное» размещение напоминает стоячую волну в струне с закрепленными концами, содержащей множество узлов по ее длине.

Таким образом, наблюдаемое влияние на время запаздывания параметра потенциальности, как и влияние параметра инерционности, также свидетельствует в пользу резонансного характера явления.

Зависимость на рис.11 демонстрирует поведение времени запаздывания в сравнительно небольшом диапазоне изменения параметра потенциальности  $B_R$ . Довольно мелкий шаг, равный 0,01 ед., выбран для выявления тонкой структуры пиков. Рассмотрим теперь то же время запаздывания в более широком диапазоне изменения  $B_R$ , для чего обратимся к рис.12.

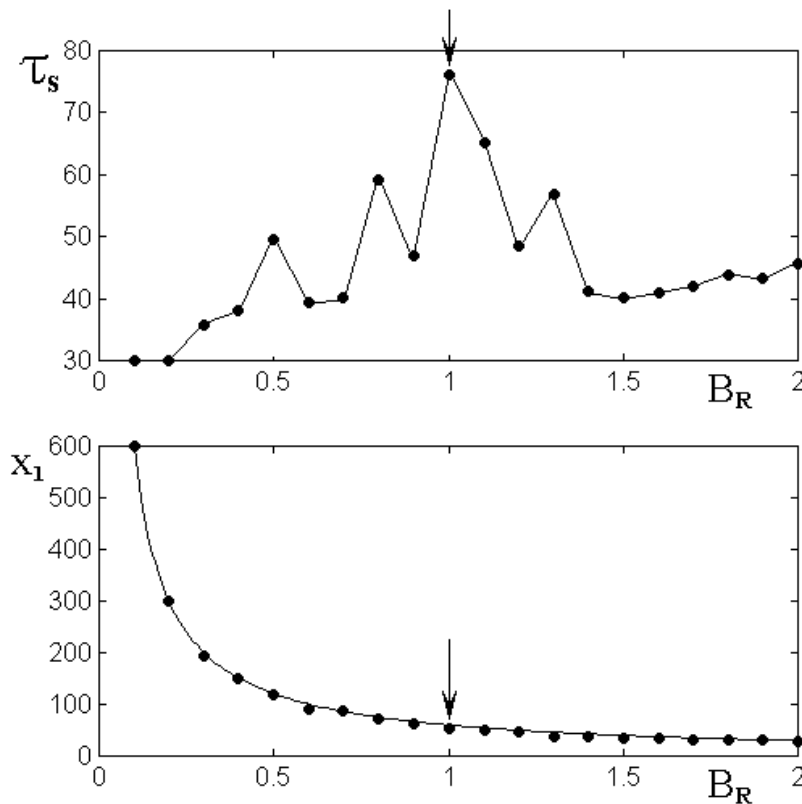


Рис.12. Зависимость времени запаздывания (а) и амплитуды хаоса (б) от параметра потенциальности в широком диапазоне его изменения. Шаг по  $B_R$  составляет 0,1 ед. Параметры – те же, что на рис.11.

В верхней части этого рисунка (а) показана зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности, снятая с более крупным шагом, равным 0,1 ед. Можно видеть, что полученная кривая является значительно более грубой, чем такая же на рис.11, так что отдельные пики слиты друг с другом, однако общий характер основного подъема по  $B_R$  от 0,7 до 1,4 ед. сохранен. Основной пик, отмеченный стрелкой, здесь выделен сильнее боковых, так как узкие пики, представленные на рис.11, здесь просто пропущены.

Тем не менее, из рисунка видно, что при отходе от основного пика в сторону уменьшения  $B_R$  время запаздывания постепенно снижается, останавливаясь при  $\hat{A}_R = 0,1$  ед. на уровне 30 ед. времени. Увеличение  $\hat{A}_R$  выше 1,4 ед. также не дает заметных пиков. Проверка показывает, что здесь время запаздывания монотонно снижается, стремясь к 20 ед. при  $\hat{A}_R \rightarrow 100$  ед. Исключением являются узкие пики вблизи  $\hat{A}_R = 5$  ед. и 10 ед., где время запаздывания увеличивается до 80-100 ед. (подобно пику при 0,79 ед. на рис.11), после чего опять монотонно спадает.

Дополнительная проверка показала, что во всем интервале  $\hat{A}_R$  от 0,0001 ед. до 100 ед. эффект запаздывания и возбуждения высокоамплитудного хаоса везде имеет место, причем время запаздывания нигде не превышает 160 ед. и не опускается ниже 20 ед. Таким образом, можно отметить, что параметр потенциальности критического характера не имеет. Это означает, что нет такого значения параметра, вблизи которого время запаздывания стремится к бесконечности, то есть высокоамплитудный хаос отсутствует. Такого значения нет ни при уменьшении, ни при увеличении  $\hat{A}_R$ .

Однако характер высокоамплитудного хаоса в зависимости от параметра потенциальности сильно меняется. В первую очередь, по мере увеличения  $\hat{A}_R$  происходит уменьшение амплитуды хаоса, как это показано на рис.12б. Здесь



точки – результат машинного эксперимента, а аппроксимирующая кривая построена по формуле:

$$x_I = \frac{60}{B_R}, \quad (16)$$

представляющей собой закон обратной пропорциональности. Видно, что аппроксимирующая кривая приближает точки с весьма высокой точностью.

Такой характер высокоамплитудного хаоса обусловлен тем, что положение осциллятора следует за минимумом потенциальной ямы, задаваемой прыжковой функцией. Согласно (8), потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\delta}{4} x_I^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3} x_I^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (17)$$

Подстановка параметра потенциальности  $\hat{A}_R$  приводит эту формулу к виду:

$$U = B_R \frac{\delta}{4} x_I^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3} x_I^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (18)$$

Учитывая, что максимальная абсолютная величина косинуса равна единице, получаем крайние значения потенциала, обеспечиваемые прыжковой функцией:

$$U_{max} = B_R \frac{\delta}{4} x_I^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3} x_I^3. \quad (19)$$

Изменение косинуса на  $\pi$  дает то же выражение с отрицательным знаком перед вторым слагаемым.

На рис.13 приведен вид потенциала, построенного по формуле (19) при параметрах:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{I0} = 0,0043$ ;  $x_{2S0} = 1,24$ . Положения минимумов отмечены стрелками.

Из рисунка видно, что минимум при  $\hat{A}_R = 0,1$  ед. (а) дает  $x_I = 500$  ед. На рис.12 то же значение  $\hat{A}_R$  соответствует амплитуде хаоса около 600 ед. Минимум при  $\hat{A}_R = 1,0$  ед. (б) дает  $x_I = 50$  ед, а минимум при  $\hat{A}_R = 2,0$  ед. (в) дает  $x_I = 25$  ед. Соответствующие значения на рис.12 равны 55 и 30 ед. Во всех

трех случаях совпадение составляет не хуже 20%, что, учитывая неустойчивость амплитуды хаоса, можно считать вполне успешным.

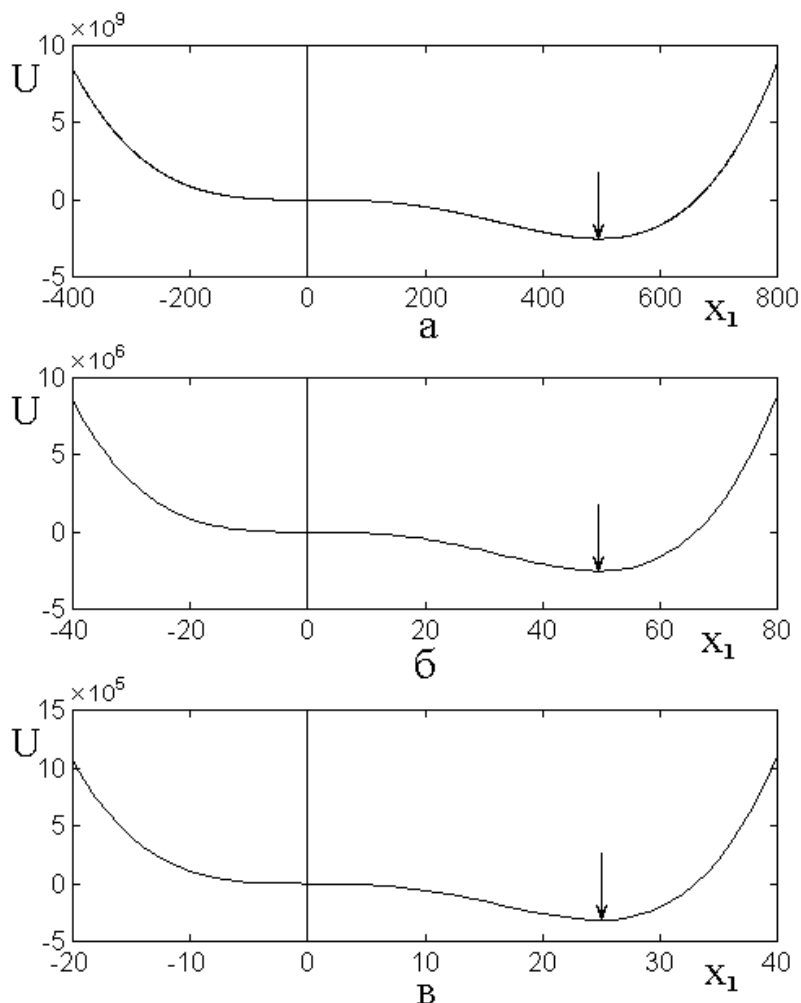


Рис.13. Зависимость крайней величины потенциала от смещения осциллятора при различных значения параметра потенциальности  $\hat{A}_R$ :  
 а – 0,1 ед., б – 1,0 ед., в – 2,0 ед.

Таким образом, можно сделать вывод, что амплитуда хаоса определяется величиной динамического потенциала, задаваемой прыжковой функцией.

### 11. Влияние фазы прыжковой функции

До сих пор предполагалось, что прыжковая функция, имеющая вид косинуса, стартует в тот момент, когда начинается отсчет времени, то есть со значения, равного единице. Однако машинный эксперимент показывает, что время запаздывания довольно сильно зависит от соотношения между этими моментами, то есть от начальной фазы прыжковой функции.

Характер зависимости при различных значениях амплитуды прыжковой функции сильно меняется, поэтому сначала обратимся к рассмотрению случая, когда время запаздывания при изменении амплитуды прыжковой функции меняется достаточно плавно и не содержит скачкообразных выбросов. Из рис.6 видно, что удобный плавный участок, где время запаздывания еще не устремилось к нулю, заключен между значениями  $x_{2S}$  равными 1,10 и 1,19, поэтому возьмем  $x_{2S} = 1,15$ .

Фазу прыжковой функции учтем в виде добавки к ее аргументу, равной  $\Delta\varphi_S$ , так что уравнение (15) примет вид:

$$A_R \cdot \frac{d^2 x_1}{d t^2} + B_R \cdot \delta x_1^3 + (\eta x_{2S}) x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t + \Delta\varphi_S) = 0, \quad (20)$$

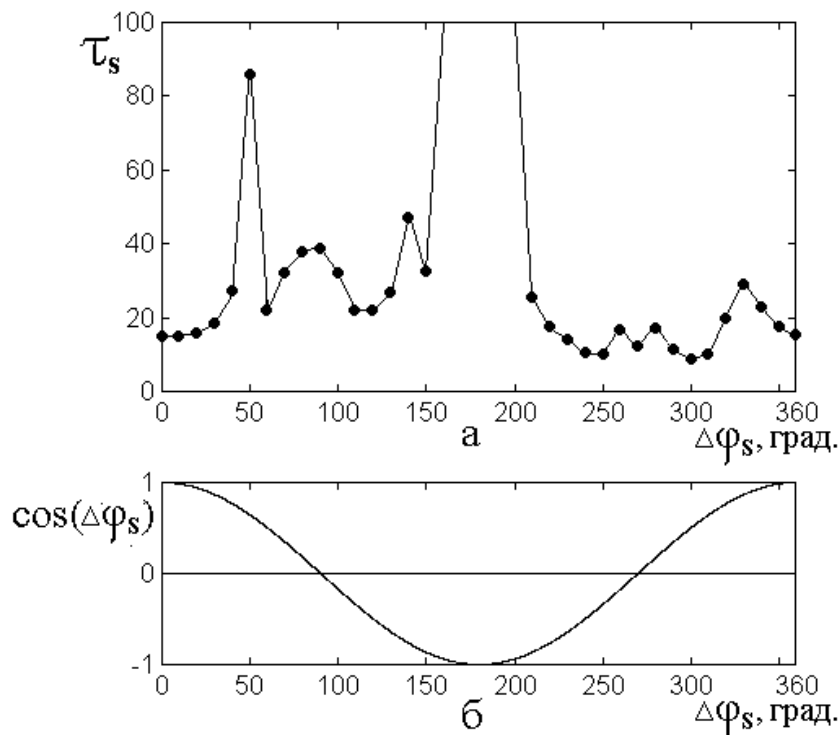


Рис.14. Зависимость времени запаздывания от сдвига фазы прыжковой функции (а) и косинус соответствующего значения сдвига (б). Параметры:  $\delta = 5$ ;  $\eta = -200$ ;  $x_{2S} = 1,15$ ;  $\omega_{2S} = 2,5$ ;  $x_{10} = 0,0043$ ;  $A_R = 1$ ;  $B_R = 1$ .

Полученная зависимость времени запаздывания  $\tau_S$  от сдвига фазы прыжковой функции  $\Delta\varphi_S$  показана на рис.14а. На рис.14б для сравнения

приведена величина косинуса от такого сдвига в момент начала отсчета времени

Из рис.14а видно, что зависимость имеет сильно изрезанный характер. Точки, как результаты машинного эксперимента, измерены с точностью не менее 5%, так что передают изрезанность в действительном виде, не обусловленном ошибками измерения. Поэтому на рисунке аппроксимация не проводилась, а точки напрямую соединены отрезками прямых линий. Можно полагать, что причина изрезанности состоит в общем статистическом разбросе явления высокоамплитудного хаоса.

В области  $\Delta\varphi_S$  от 160 до 200 градусов, центр которой приходится на 180 градусов, зависимость резко уходит вверх за пределы рисунка. В этом интервале значений  $\Delta\varphi_S$  возбуждение высокоамплитудного хаоса не было обнаружено вплоть до времени запаздывания 2000 ед. Таким образом, можно полагать, что здесь время запаздывания стремится к бесконечности. Из рис.14б видно, что эта область как раз совпадает с отрицательным минимумом косинуса, являющегося частью прыжковой функции. То есть для возбуждения высокоамплитудного хаоса значение начальной фазы прыжковой функции должно быть достаточно удалено от 180 градусов (не менее чем на  $\pm 10$  градусов).

Обращает на себя внимание острый пик вблизи  $\Delta\varphi_S = 50^\circ$ . Проверка показывает, что этот пик является достаточно узким, не шире  $\pm 5^\circ$ , причем другие пики подобной высоты во всем исследованном интервале углов не были обнаружены. В то же время, явной связи значения  $\Delta\varphi_S = 50^\circ$  для этого пика с близкими характерными углами (например  $\pi/4 = 45^\circ$  или 1 рад. =  $57^\circ$ ) не было обнаружено. По-видимому, этот пик представляет собой явление того же типа, что и остальные пики, образуя общую изрезанность рассматриваемой зависимости.

Как отмечено выше, для построения рис.14 амплитуда прыжковой функции  $x_{2S}$  выбрана равной 1,15 на участке, где время запаздывания  $\tau_S$  зависит от этой амплитуды достаточно мало. Не так однако обстоит дело в случае сильной зависимости времени запаздывания от  $x_{2S}$ . Из рис.6 видно, что максимум такой зависимости приходится на  $x_{2S} = 1,24$  ед. Проверка показывает, что в этом случае зависимость времени запаздывания от фазы прыжковой функции становится крайне резкой и приобретает хаотический характер. В качестве иллюстрации обратимся к рис.15, где показано развитие колебаний во времени при трех крайне мало различающихся значениях фазы прыжковой функции  $\Delta\varphi_S$ .

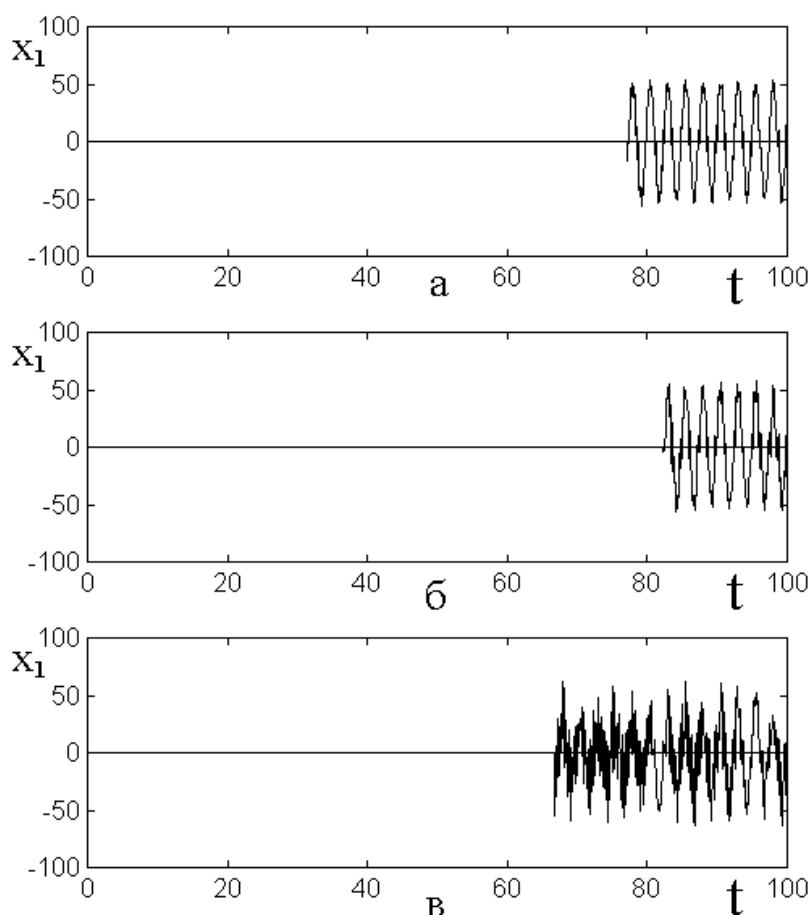


Рис.15. Развитие колебаний во времени при различных значениях фазы прыжковой функции  $\Delta\varphi_S$ : а – 0; б –  $0,0002^\circ$ ; в –  $0,0004^\circ$ .

Параметры – те же, что на рис14, кроме  $x_{2S0} = 1,24$ .

Из рисунка видно, что если при  $\Delta\varphi_S = 0$  время запаздывания составляет 77 ед., то при  $\Delta\varphi_S = 0,0002^\circ$  оно увеличивается до 82 ед., а при  $\Delta\varphi_S = 0,0004^\circ$  падает до 66 ед. времени. Столь резкое изменение  $\tau_S$  при крайне малом изменении  $\Delta\varphi_S$  говорит о явно выраженной статистической природе явления. При других значениях  $\Delta\varphi_S$  характер зависимости остается столь же резким и нестационарным.

Можно полагать, что столь сильная зависимость времени запаздывания от фазы прыжковой функции в рассматриваемых условиях заслуживает более подробного исследования, могущего составить предмет для отдельной работы.

## 12. Некоторые замечания о возможном развитии работы

Главным результатом настоящей работы можно считать демонстрацию возможности сведения системы из двух уравнений второго порядка для связанных осцилляторов к одному уравнению того же второго порядка, в котором роль второго осциллятора играет прыжковая функция, определяемая собственными независимыми параметрами – частотой и амплитудой. При этом сохранены главные свойства исходной системы, такие как существование высокоамплитудного хаоса и запаздывание возбуждения такого хаоса от момента задания начальных условий. Приведены свойства полученного уравнения, выявлены зависимости времени запаздывания и некоторые свойства высокоамплитудного хаоса от параметров прыжковой функции и самого уравнения.

Таким образом, можно полагать, что сделан определенный шаг в направлении упрощения задачи и выделения наиболее простого варианта, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием.

Тем не менее, некоторые вопросы остаются рассмотренными недостаточно. Ряд замечаний о возможном продолжении исследований приведены по тексту работы, поэтому здесь на них останавливаться не будем.

Отметим лишь два момента, которые, по-видимому, являются наиболее важными.

Так, по-прежнему остается задача построения механизма, определяющего время первичного запаздывания. Эта задача указывалась ранее в работе [46], некоторые качественные соображения высказывались там же. Возможные варианты механизма рассматривались еще в работах [41-43]. Однако там картина была осложнена значительным количеством дополнительных параметров, что затруднило получение полного аналитического критерия. Механизмы входа в режим запаздывания и выхода из него рассмотрены в работе [46, раздел 5]. Там же приведены некоторые качественные соображения, касающиеся продолжительности запаздывания. В настоящей работе выявлена еще одна важная характеристика запаздывания – влияние фазы прыжковой функции, в том числе до полного исключения возбуждения высокоамплитудного хаоса. В качестве возможного механизма здесь можно предполагать отставание по фазе собственных колебаний системы (то есть ее собственная инерционность) от вынуждающих колебаний прыжковой функции. В пользу решающего влияния фазы говорит крайне высокая зависимость времени запаздывания от малого изменения фазы прыжковой функции. Кроме того, проверка показывает, что изменение знака начального смещения также меняет свойства запаздывания, вплоть до полного исключения высокоамплитудного хаоса. Таким образом, в качестве важной задачи для дальнейшего исследования можно рассматривать изучение фазовых свойств рассматриваемых явлений.

Другим важным моментом остается изучение критических значений ряда параметров системы, таких как начальное смещение, амплитуда и частота прыжковой функции и ряд других, отмеченных в настоящей и предыдущих работах. Здесь также можно предполагать влияние инерционности системы, как это отмечено в разделе 7, посвященном изучению влияния частоты прыжковой функции. Там же приведены некоторые качественные соображения о влиянии фазы, что делает этот вопрос родственным предыдущему.

Таким образом, можно полагать, что приведенные вопросы заслуживают достаточного внимания и могут составить предмет для отдельной работы.

### **Заключение**

Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основной задачи является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор.

В основании настоящего исследования лежит полученная в первой части работы упрощенная система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих колебательный характер. Первое из уравнений системы содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения первого осциллятора, потенциальный член, пропорциональный кубу того же смещения и член нелинейной связи, содержащий произведение квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Второе уравнение содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения второго осциллятора и член линейной связи, содержащий смещение первого осциллятора.

В качестве главного шага дальнейшего упрощения задачи выполнено замещение смещения второго осциллятора вспомогательной функцией, имеющей гармоническую зависимость от времени. Введение такой функции в динамический потенциал привело к периодическому изменению его формы, имеющему характер симметричных периодических «прыжков» в прямом и обратном направлениях. Вследствие такого характера потенциала, введенной функции было дано название «прыжковой».

Прыжковая функция заняла место входящего в первое уравнение смещения второго осциллятора, содержащегося в слагаемом нелинейной связи, представляющим собой произведение квадрата смещения первого осциллятора



на смещение второго. Результатом такого введения прыжковой функции явилась замена двух уравнений исходной системы одним, в достаточной степени обеспечивающим свойства высокоамплитудного хаоса и нестационарного запаздывания, Благодаря сохранению основных свойств исходной системы, полученное уравнение было названо «определяющим».

Рассмотрено развитие во времени колебаний первого осциллятора, соответствующих определяющему уравнению. Найдена производная колебаний по времени и построен соответствующий параметрический портрет. Показано, что развитие колебаний испытывает значительное запаздывание, в несколько раз превышающее период прыжковой функции. После запаздывания скачком развиваются нестационарные колебания, амплитуда которых превышает начальное смещение осциллятора более чем на три порядка. Дальнейшее развитие колебаний следует сильно размазанной синусоиде, на которую наложен хаос с амплитудой порядка половины от ее амплитуды. Установлено, что размазанная синусоида соответствует синусоидальным колебаниям прыжковой функции. За вычетом из полных колебаний синусоиды прыжковой функции с соответствующей нормировкой, остающиеся колебания имеют вид полностью хаотический. Параметрический портрет имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, типичный для хаотического характера колебаний.

Исследован спектральный состав высокоамплитудного хаоса. Показано, что в полном спектре преобладает линия, соответствующая частоте прыжковой функции, а при вычете этой функции остается чистый хаос, ширина спектра которого превышает частоту прыжковой функции на два порядка.

Выполнено исследование соотношения между временем запаздывания и периодом прыжковой функции. Показано, что развитие высокоамплитудного хаоса происходит по прошествии нескольких периодов прыжковой функции, так что боковой минимум динамического потенциала формируется еще в процессе развития запаздывания, значительно раньше его окончания.

Рассмотрено влияние начального смещения на время запаздывания. Показано, что время запаздывания зависит от величины начального смещения в соответствии с законом обратной пропорциональности. Отмечено отсутствие скачков полученной зависимости, отмечавшихся ранее для более сложных систем уравнений. В качестве возможной причины отсутствия скачков выдвинута крайне простая структура определяющего уравнения по сравнению с другими системами.

Рассмотрено влияние амплитуды прыжковой функции на время запаздывания. Выявлено критическое значение амплитуды, ниже которого высокоамплитудный хаос отсутствует. Показано, что по мере увеличения амплитуды прыжковой функции время запаздывания, в основном, спадает, однако на общей плавной зависимости имеется ряд острых максимумов, соответствующих резкому росту времени запаздывания на порядок и более. Отмечен эквидистантный характер расположения максимумов. В качестве возможного объяснения характера полученной зависимости выдвинута гипотеза о ее резонансном характере. В обоснование гипотезы приведен колебательный характер уравнения с кубической нелинейностью, составляющего основу уравнения для первого осциллятора без учета смещения второго.

Рассмотрено влияние частоты прыжковой функции на время запаздывания. Показано, что по мере увеличения частоты время запаздывания увеличивается вплоть до критического ее значения, выше которого возбуждение высокоамплитудного хаоса отсутствует. В качестве причины существования критического значения частоты высказано предположение о связи между скоростью «прыжков» прыжковой функции и временем собственных колебаний системы. Отмечено, что при низкой частоте прыжков смещение осциллятора полностью следует изменению динамического потенциала, а при высокой может несколько отставать. В случае значительного отставания смещение не успевает развиться до заметной величины, колебания прекращаются и высокоамплитудный хаос отсутствует. Отмечена аналогия

наблюдаемого явления с возбуждением электрического колебательного контура синусоидальной силой, при котором на низкой частоте ток в контуре колеблется в одной фазе с возбуждающей силой, а после прохождения резонансной частоты колебания становятся противофазными. На полученной зависимости выявлен ряд узких максимумов, подтверждающий гипотезу о резонансном их происхождении.

Отмечено, что определяющее уравнение содержит инерционный и потенциальный члены, для характеристики которых введены параметры инерционности и потенциальности как коэффициенты при второй производной и слагаемом кубической нелинейности.

Рассмотрено влияние параметра инерционности на время запаздывания. Выявлено критическое значение параметра, ниже которого высокоамплитудный хаос отсутствует. Установлено, что при увеличении параметра инерционности выше критического значения время запаздывания уменьшается, однако также содержит несколько узких выбросов с высокой амплитудой, дополнительно подтверждающих резонансный характер явления.

Рассмотрено влияние параметра потенциальности на время запаздывания. Выявлено возбуждение высокоамплитудного хаоса во всем возможном интервале изменения параметра без какого-либо критического значения. Отмечен ряд острых выбросов, как правило, имеющих раздвоенный характер, что дополнительно подтверждает гипотезу о резонансной их природе. По мере увеличения параметра потенциальности отмечен плавный спад амплитуды хаоса, с высокой точностью соответствующий закону обратной пропорциональности. Характер такой зависимости интерпретирован на основе модели динамического потенциала, боковой минимум которого как раз соответствует амплитуде хаоса.

Рассмотрено влияние на время запаздывания сдвига фазы прыжковой функции относительно начала возбуждения. Выявлена весьма сильная зависимость, различным образом проявляющаяся при малых и больших временах запаздывания. Малая величина времени запаздывания здесь

характеризуется отсутствием резких выбросов на зависимости времени запаздывания от начального смещения. Показано, что в этом случае зависимость времени запаздывания от величины сдвига фазы имеет резко выраженный широкий максимум, когда зависимость прыжковой функций от этого сдвига становится отрицательной, так что в этом случае высокоамплитудный хаос отсутствует. При положительных значениях прыжковой функции от сдвига фазы время запаздывания имеет типичную среднюю величину и меняется мало. Отмечено, что при больших временах запаздывания, то есть в области резких выбросов на зависимости времени запаздывания от начального смещения, влияние сдвига фазы прыжковой функции резко возрастает. В этом случае изменение сдвига фазы на величину четвертого порядка малости относительно нулевого значения приводит к изменению времени запаздывания на 20% и более.

Приведены некоторые замечания, касающиеся возможного развития работы. В качестве главных задач отмечено построение модельного представления о продолжительности времени запаздывания, более подробное выявление природы критического характера ряда параметров, а также более подробное изучение фазового характера рассматриваемых явлений.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

### Литература

1. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. *Основы теории колебаний*. Москва, Наука. 1978.
2. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит. 2003.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. Москва, Наука. 1981.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. Москва, Наука. 1988.
5. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. Москва, Наука-Физматлит.

2000.

6. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001.
7. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. Москва, Физматлит, 2002.
8. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. *Генерация хаоса*. Москва, Техносфера. 2012.
9. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.163.
10. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971.
11. Львов В.С. *Нелинейные спиновые волны*. Москва, Наука. 1987.
12. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. *УФН*. 1974. Т.114. №4. С.609.
13. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order. *Rev. Mod. Phys.* 2010. Vol.82. No.3. P.2731.
14. Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M., Huebl H., Gross R., Brandt M.S., Goennenwein S.T.B. Surface acoustic wave driven ferromagnetic resonance in nickel thin films: theory and experiment. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol.86. No.13. P.134415(13).
15. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. Vol.525. No.1-2. P.2.
16. Jäger J.V., Scherbakov A.V., Linnik T.I., Yakovlev D.R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S.A., Akimov A.V., Rushforth A.W., Bayer M. Picosecond inverse magnetostriction in gadolinium thin films. *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol.103. No.3. P.032409(5).
17. Thevenard L., Gourdon C., Prieur J.Y., Von Bardeleben H.J., Vincent S., Becerra L., Largeau L., Duquesne J.Y. Surface-acoustic-wave-driven ferromagnetic resonance in (Ga,Mn)(As,P) epilayers. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol.90. No.9. P.094401(8).
18. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz

- spintronics. *J. Appl. Phys.* 2016. Vol.120. No.14. P.140901(16).
19. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V.S., Lomonosov A.M., Temnov V.V., Tobey R.I. Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients. *Phys. Rev. B.* 2016. Vol.94. No.2. P.024415(7).
20. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн. *ФТТ.* 2016. Т.58. №6. С.1093.
21. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
22. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Колебания намагниченности в магнитоупругой среде при ударном воздействии упругого смещения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2018. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
23. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Излучение электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии фемтосекундного импульса света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>.
24. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: Мэзон У. (ред.): *Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки.* Москва, Мир. 1968. С.156.
25. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *РЭ.* 2009. Т.54. №7. С.863.
26. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2013. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.

27. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2014. Т.59. №5. С.482.
28. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. В кн.: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Сборник статей под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.281.
29. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомодуляционный режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе. *Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие»*. Москва-Фирсановка, Издание МЭИ. 2009. С.100.
30. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромангнитным. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва: НИУ МЭИ. 2012. С.248.
31. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2013. №11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.
32. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.188.
33. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, «НИУ МЭИ». 2013. С.199.

34. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2014. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
35. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, ИНФРА-М. 2015. С.202.
36. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. *РЭ*. 2015. Т.60. №1. С.79.
37. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. *РЭ*. 2015. Т.60. №3. С.297.
38. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.
39. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.
40. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/7/text.pdf>.
41. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты.



- Часть 1. Динамический потенциал. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.
42. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
43. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал] 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.
44. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамический потенциал как модель нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. *Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. Москва, ИНФРА-М. 2018. С.243-253.
45. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 1. Общие положения. Формирование упрощенной системы. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.4>
46. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 2. Воздействие осцилляторов друг на друга. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.5>

**Для цитирования:**

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 3. Определяющее уравнение. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.6>