

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.7>

УДК 537.874; 537.624

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ.

ЧАСТЬ 4. КОЛЬЦЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

А. П. Иванов¹, В. Г. Шавров², В. И. Щеглов²

¹ Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

² Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 30 марта 2021 г.

Аннотация. Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основной задачи является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Отмечено, что при определенных условиях колебания в таких системах принимают характер нестационарного высокоамплитудного хаоса, возбуждающегося со значительным запаздыванием после включения системы. В основании настоящего исследования лежит полученная в первой части работы достаточно общая система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде степенных функций до третьего порядка. В результате устранения второстепенных параметров из фундаментальной системы была выделена укороченная система – «первичное ядро», сохраняющее свойство нестационарного запаздывания и хаоса. Выявлен кольцевой характер укороченной системы, состоящий в том, что определяемое первым уравнением смещение первого осциллятора воздействует на смещение второго осциллятора

через линейную связь второго уравнения, а получаемое при этом смещение второго осциллятора снова возвращается в первое уравнение через слагаемое нелинейной связи первого уравнения. При этом полная связь уравнений между собой образует как бы «кольцо», замкнутое само на себя. Относительно первого осциллятора в этом кольце имеется «посредник» – второй осциллятор, который здесь играет подчиненную роль. Рассмотрено последовательное действие осцилляторов друг на друга в схеме разомкнутого кольца. Показано, что воздействие синусоидального сигнала постоянной амплитуды на второй осциллятор, приводит к возбуждению его колебаний, имеющих характер биений. Воздействие таких биений на первый осциллятор приводит к сильно запаздывающему возбуждению хаотических колебаний. Рассмотрена возможность существования кольца в классической системе Лоренца, допускающей хаотические колебания. Путем замены переменных выполнено преобразование системы Лоренца, состоящей из трех уравнений первого порядка, к эквивалентной системе из двух уравнений, одно из которых имеет второй порядок, а другое – первый. Для такой системы установлен кольцевой характер, при котором уравнение первого порядка для второго осциллятора является «посредником» по отношению к уравнению второго порядка для первого осциллятора. Показано, что классическая система Лоренца, записанная в виде двух уравнений, имеет кольцевой характер, подобный таковому в системе для двух осцилляторов, причем развитие высокоамплитудного хаоса в системе Лоренца сопровождается задержкой в виде интервала регулярности, подобной задержке в системе для двух осцилляторов в виде интервала запаздывания. Подробно рассмотрен кольцевой характер релаксационной системы для двух осцилляторов. Предложен алгоритм пошагового расчета, имеющий двухступенчатый характер, первая ступень которого состоит в прохождении первой половины кольца, образованной первым уравнением, а вторая – в прохождении второй половины кольца, образованной вторым уравнением. Отмечена возможность представления системы из двух уравнений в виде, каждое из уравнений которого содержит выделенную из

соответствующего уравнения собственную переменную, приравненную к остальной части того же уравнения. Отмечен кольцевой характер такого представления. Показано, что подстановка второй переменной из второго уравнения в первое приводит к уравнению, содержащему только первую переменную. Полученное при этом уравнение названо «кольцевым уравнением», а его решение – «кольцевой функцией». Установлено, что ввиду сложности кольцевого уравнения, единственным способом его решения является пошаговый. При этом значение переменной на данном шаге определяется через функцию, содержащую ту же переменную, полученную на предыдущем шаге. Отмечена аналогия такого решения с расчетом дискретных одномерных отображений. На примере классического логистического отображения рассчитано развитие колебаний по шагам для ряда значений параметра, в том числе охватывающих регулярный затухающий, регулярный стационарный и хаотический режимы. Установлено, что для логистического отображения запаздывание по шагам отсутствует. Отмечена возможность решения кольцевого уравнения, то есть расчета кольцевых функций, тем же пошаговым методом, каким рассчитываются отображения. Предложены два вида кольцевых функций – первого и второго рода, в качестве дискретно меняющейся переменной использующих время. Левая часть колебательных функций того и другого рода представляет собой переменную – смещение первого осциллятора на данном шаге. Правая часть содержит тригонометрическую функцию (синус или косинус), аргумент которой представляет собой произведение обобщенной частоты на время, соответствующие предыдущему шагу. Для кольцевой функции первого рода обобщенная частота пропорциональна смещению осциллятора плюс единица. Для кольцевой функции второго рода обобщенная частота пропорциональна смещению осциллятора плюс значение частоты, полученное на предыдущем шаге. Рассмотрено развитие колебаний во времени, описываемое кольцевыми функциями первого и второго рода. Приведен алгоритм расчета, подобный таковому, применяемому для отображений. Показано, что колебания во

времени развиваются в два этапа. Для кольцевых функций первого рода в течение первого этапа колебания представляют собой регулярную синусоиду, а в течение второго этапа на регулярную синусоиду накладываются колебания со значительно меньшим периодом, имеющие хаотический характер. Для кольцевых функций второго рода в течение первого этапа колебания отсутствуют, то есть происходит их запаздывание, а в течение второго этапа развиваются высокоамплитудные хаотические колебания. В результате проделанного рассмотрения показано, что кольцевые функции второго рода обеспечивают удобную имитацию запаздывания и развития высокоамплитудного хаоса в системе из двух осцилляторов. Для кольцевой функции второго рода рассмотрено начало развития запаздывания высокоамплитудных колебаний, а также его окончание и переход к высокоамплитудному хаосу. Предложена модель, состоящая в борьбе между стремлением аргумента функции с течением времени уменьшиться до величины $\pi/2$ и ростом смещения, стремящегося этот аргумент увеличить. Выход из запаздывания и начало возбуждения высокоамплитудных колебаний происходит через нарушение такого баланса, обусловленного возбуждением колебаний треугольной формы. Приведены некоторые замечания о возможном развитии работы. В качестве важной задачи отмечена разработка модельного представления продолжительности интервала запаздывания. Этот вопрос может быть расширен не только на систему из двух осцилляторов, но и на кольцевые функции, а также дополнен исследованием интервала регулярности в системе Лоренца. Отмечена также важность рассмотрения роли нелинейной связи высоких порядков, позволяющей обобщить полученные результаты на более широкий круг явлений.

Ключевые слова: нелинейные колебания, связанные осцилляторы, хаотические колебания.

Abstract. This work is the continuation of investigation of non-stationary delay of establishment nonlinear vibrations in the system of two connected oscillators. The physical foundation of this task is the excitation of power hypersound in ferrite plate

having magnetoelastic properties and also excitation of intensive electromagnetic vibrations in ferrite disc placed in electro-dynamic resonator. It is found that under certain conditions the vibrations in these systems take character of non-stationary large-amplitude chaos which excites with large delay after the system is switched. The foundation of this work is received in the first part of this work the enough general system of two connected differential second order equations having nonlinearity as the power row to third order. As a result of elimination of secondary parameters from fundamental system it was selected the reduced system – «initial core» which preserves the properties of non-stationary delay and chaos. It is found the circular character of reduced system. In this character the determined by first equation displacement of first oscillator influences to the displacement of second oscillator through the linear connection of second equation. The received in this case displacement of second oscillator again return to the first equation through the item of nonlinear connection of first equation. In this case the whole connection of equations between ones forms the «ring», which is closed by itself. The first oscillator in this ring has the «mediator» – the second oscillator which plays the subordinate role. In the scheme of break ring the successive influence of oscillators one to other is investigated. It is shown that the influence of sinusoidal signal with constant amplitude to second oscillator leads to the excitation of its vibrations which has the beating character. The influence of these beatings to first oscillator leads to the large delay of excitation chaotic vibrations. The possibility of existence of ring in classic system of Lorents which admit chaotic vibrations. By the replacement of variables it is execute the transformation of Lorents system having three equations of first order to equivalent system having two equations. In this system the first equation has second order and second equation has first order. For this system it is established the circular character. In this case the first order equation for second oscillator is the «mediator» for second order equation for first oscillator. It is shown that the classic Lorents system which is described as a system of two equations has circular character which is the similar to the circular character for two oscillators. In Lorents system the development of large-amplitude chaos is accompanied by time-delay which has form

of interval of regularity which is the similar as time-delay in system for two oscillators. The circular character of relax system for two oscillators is investigated. It is proposed the algorithm of step by step calculation having two stages character. The first stage is the passage of first half of whole ring which is determined by first equation. The second stage is the passage of second half of whole ring which is determined by second equation. It is established the possibility of presentation of system from two equations in the form when each equation contains selected from corresponding equation the own variable quantity which is equated for the remaining part of initial equation. It is established the circular character of this presentation. It is shown that the substitution the second variable form second equation to the first equation leads to the equation which contain only first variable. The excitation which is found by this substitution is named as «ring excitation» and its solution is named by «ring function». It is established that by the reason of large complexity of ring equation the unique method of its solution is step by step method. In this case the meaning of the variable on present step is determined by the function which contains the same variable which is determined on previous step. It is attended the analogy of this solution with the calculation of discrete single size reflection. On the example of classic logistical reflection it is calculated the development of vibrations by steps for some meanings of parameters which spread the regular dissipative, regular stationary and chaotic regimes. It is established that the delay by steps for logistical reflection is absent. It is established the possibility of ring equation solution as ring function using the same step by step method which is used for the calculation of reflections. It is proposed two variety of ring functions – first and second kind which in the quality of discrete varying variable uses the time. The left part of vibration function of both kinds is the variety – the displacement of first oscillator on the present step. The right part contains the trigonometric function (sine or cosine) which argument is the product of generalized frequency on the time which correspond to the previous step. For the ring function of first kind the generalized function is proportional to the displacement of oscillator plus unit. For the ring function of second kind the generalized frequency is proportional to the displacement of oscillator plus value of

frequency which is determined by previous step. It is investigated the development of vibrations on time which is described by ring functions of first and second kinds. It is proposed the algorithm of calculation which is similar to algorithm which is used for the reflections. It is shown that the vibrations in time are developed in two stages. For the ring function of first kind during the first stage the vibrations are the regular sine and during the second stage on the regular sine is deposited the chaotic vibrations having more lesser period. For the ring function of second kind during the first stage the vibrations are absent which is its delay and during the second stage the large-amplitude chaos is developed. As a result of performed investigation it is shown that the ring functions of second kind provide the convenient imitation of delay and development of the large-amplitude chaos in the system of two oscillators. For the ring function of second kind it is investigated the beginning of development of delay the large-amplitude vibrations and its end and transition to the large-amplitude chaos. It is proposed the model which is consist of the aspiration of function argument during the time to decrease to value $\pi/2$ and the increasing of displacement which try to increase of this argument. The exit from delay and beginning of the large-amplitude vibrations is passed through the breach of this balance which is determined by the excitation of vibrations having triangular form. It is proposed some comments about possible development of this work. As an important task it is mentioned the construction of model idea about duration of delay time. This question may be expanded not only the system of two oscillators and also on the ring functions and supplemented the investigation of interval of regularity in Lorents system. It is mentioned the importance of investigation of the role of nonlinear connection having high orders. This investigation may be applied to more wide round of phenomena.

Key words: nonlinear vibrations, connected oscillators, chaotic vibrations.

Введение

Исследование нелинейных явлений составляет значительную ветвь общей науки о колебаниях [1-5]. Особый интерес представляет изучение нестационарных, в том числе хаотических проявлений нелинейности [6-10].

Большим разнообразием отличаются нелинейные явления, сопровождающие колебания намагниченности в магнитных и магнитоупругих средах. На первом этапе исследований нелинейности в магнетизме главное внимание уделялось стабильным нелинейным процессам, примерами которых можно считать умножение частоты или детектирование [11-20]. Затем внимание переключилось на волновые процессы, типичным представителем которых можно считать параметрическое возбуждение обменных спиновых волн при неоднородном ферромагнитном резонансе [21-24]. В последнее время значительное внимание уделяется возбуждению магнитных и магнитоупругих колебаний в масштабе пико- и фемтосекунд, возникающих при воздействии на магнетик мощного импульса света, генерируемого фемтосекундным лазером [25-35].

В магнитоупругой среде значительный интерес представляет одновременное возбуждение магнитных и упругих колебаний, находящее широкое применение в технике обработки информации [36-38]. Нелинейные явления позволяют здесь расширить функциональные возможности устройств.

Так, в работах [39-41] показано, что переход к нелинейному режиму позволяет увеличить мощность СВЧ гиперзвука, возбуждаемого магнитострикционным преобразователем, на два порядка и более.

Другой важнейшей задачей, разрешимой при использовании колебаний намагниченности, является возбуждение мощных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор [42-43].

Высокая сложность теоретической интерпретации таких явлений требует поиска упрощенных моделей, позволяющих описать их основные свойства. Весьма удачной моделью для обоих случаев можно считать представление системы в виде двух связанных осцилляторов. В задаче о возбуждении гиперзвука один осциллятор играет роль магнитной системы, другой – упругой, а в задаче о возбуждении шумовых колебаний – один осциллятор играет роль магнитной системы, а другой – электродинамического резонатора. Подробное описание такой модели приведено в работах [44-54].

С использованием квадратичного приближения колебаний намагниченности получена система двух связанных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена на основе разложения потенциала в степенной ряд до четвертой степени. Показано, что при достаточном уровне сигнала возможно возбуждение интенсивных нестационарных колебаний, имеющих хаотический характер.

В работах [55-58] показано, что в определенных условиях возбуждение высокоамплитудного хаоса происходит не сразу после включения возбуждения, а со значительным запаздыванием во времени, продолжительность которого намного превышает как периоды, так и времена релаксации свободных колебаний каждого из осцилляторов.

Настоящая работа является продолжением работ [59-61], посвященных исследованию такого нестационарного запаздывания.

В первой работе [59] из полной системы уравнений для обоих осцилляторов выделена упрощенная система, являющаяся «первичным ядром» в том отношении, что она отличается высокой простотой и при этом сохраняет свойства нестационарного запаздывания и высокоамплитудного хаоса.

Во второй работе [60] выполнено всестороннее исследование явления запаздывания, выявлена его зависимость от параметров системы, а также рассмотрены механизмы начала запаздывания и выхода из него.

В третьей работе [61] рассмотрена роль второго уравнения системы как элемента, возвращающего в первое уравнение его же собственные колебания в преобразованном виде. На основе анализа динамического потенциала показана возможность сведения системы из двух уравнений к одному с помощью особой «прыжковой» функции, отражающей симметричное гармоническое изменение потенциала (его «прыжки»), происходящее под действием второго осциллятора. Подробно исследованы характеристики запаздывания при изменении параметров системы. Выявлены критические значения ряда параметров, а также резонансный характер полученных зависимостей.

Настоящая работа является продолжением и дальнейшим развитием исследований нестационарного запаздывания, предпринятых в работах [59-61]. Основное внимание уделено кольцевому характеру развития нестационарных колебаний, в том числе введены в рассмотрение кольцевые функции, реализующие эффект запаздывания в наиболее простом виде.

1. Основные системы уравнений

Настоящая работа является продолжением [59-61], поэтому приведем из них некоторые необходимые данные.

Рассматриваются колебания двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным.

Обоснованием постановки задачи являются реально существующие системы, содержащие в качестве нелинейного элемента ферритовую пластину, а в качестве линейного – упругую пластину или электродинамический резонатор.

Для описания возбуждаемых колебаний в работах [44-54] на основе квадратичного приближения по намагниченности была предложена общая система, состоящая из двух дифференциальных уравнений второго порядка [53, форм.(46),(47)], [54, форм.(31),(32)]:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + \\
 & \quad + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + \\
 & \quad + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + \\
 & \quad + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + \\
 & \quad + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , d_{ik} определяются магнитными и упругими параметрами материала пластины [53, форм.(7)-(29) с учетом (6)].

На основе сравнения входящих в систему (1)-(2) коэффициентов с реальными параметрами физических задач, из нее была выделена упрощенная система, отражающая основные свойства наблюдаемых явлений [55, форм.(6), (7)]:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (4)$$

Здесь x_1 и x_2 – смещение первого и второго осцилляторов, β_1 и β_2 – соответствующие параметры диссипации, ω_1 и ω_2 – собственные частоты колебаний осцилляторов в отсутствие нелинейности и связи, γ_1 и γ_2 – параметры линейной связи между осцилляторами, η – параметр нелинейной связи, δ – параметр кубической нелинейности первого осциллятора, A – амплитуда и ω_0 – частота внешнего воздействия.

В работах [55-58] было показано, что под действием внешнего возбуждения в системе (3)-(4) генерируются высокоамплитудные колебания хаотического характера, причем начало таких колебаний запаздывает по времени от момента включения возбуждения на значительную величину.

В работе [59] для упрощения математической структуры задачи предложена эквивалентная система, где внешнее возбуждение заменено начальным смещением первого осциллятора. В результате исключения второстепенных слагаемых, из полной системы (3)-(4) выделена укороченная система – «первичное ядро», сохраняющее свойство нестационарного запаздывания. Предложены два варианта первичного ядра:

система колебательная:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0, \quad (6)$$

и система релаксационная:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (8)$$

В обеих системах первое уравнение – одно и то же, а второе в первой системе является колебательным, то есть в отсутствие связи со вторым описывает периодические колебания с частотой ω_2 , тогда как во второй системе это уравнение имеет релаксационный характер, периодических колебаний не допускающий. Именно такими свойствами второго уравнения обусловлено название каждой из систем.

В то же время, каждая из систем в целом сохраняет возможность существования высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием, причем в обоих случаях хаос и запаздывание имеют одинаковый характер, отличаясь лишь конкретными значениями параметров (амплитудой хаоса и временем запаздывания).

2. Кольцевой характер обеих систем

В работе [60] было показано, что высокоамплитудный хаос, в обеих системах (5)-(6) и (7)-(8) формируется за счет слагаемого нелинейной связи первого уравнения вида $\eta x_1^2 x_2$. Входящее в это слагаемое смещение второго осциллятора x_2 задается вторым уравнением через слагаемое линейной связи $\gamma_2 x_1$, то есть в конечном счете опять-таки определяется смещением первого осциллятора x_1 . Таким образом, имеет место связь смещения первого

осциллятора x_1 через посредство смещения второго x_2 опять со смещением первого осциллятора x_1 . Образно говоря, полная связь в той или другой системе образует как бы «кольцо», замкнутое само на себя. В этом кольце имеется «посредник» – второй осциллятор, который играет подчиненную роль.

Относительно колебательной системы (5)-(6) в работе [60] рассматривалась роль слагаемого, содержащего частоту ω_2 , причем было показано, что одинаковый характер колебаний требует для системы (5)-(6) уровня начального смещения значительно (в ~200 раз) более высокого, чем для системы (7)-(8). Поэтому основное внимание далее было уделено релаксационной системе (7)-(8), как имеющей более простую структуру.

В работе [61] кольцевой характер системы (7)-(8) был нарушен тем, что «кольцо» было разомкнуто и вместо смещения второго осциллятора x_2 на место «разрыва» в первое уравнение была вставлена вспомогательная функция, имеющая гармонический характер. Было показано, что под действием такой функции динамический потенциал совершает симметричные «прыжки» из одного крайнего положения в другое, так что функция была названа «прыжковой». Исследование колебаний под действием прыжковой функции показало, что основные свойства высокоамплитудного хаоса и запаздывания, такие как критический характер и монотонное изменение за пределами критичности, сохраняются в достаточно чистом виде. При этом некоторые зависимости времени запаздывания от параметров задачи приобрели резонансный характер, определяемый первым уравнением, оставшимся колебательным.

Таким образом, было показано, что причиной хаоса и запаздывания является кольцевой характер системы уравнений, причем роль замыкания через кольцо может играть вспомогательная функция, моделирующая этот кольцевой характер, то есть играющая ту же роль, что и полное кольцо.

3. Кольцевое воздействие осцилляторов друг на друга

В предыдущем разделе установлено, что хаос и запаздывание

обусловлены кольцевым характером колебательной (5)-(6) и релаксационной (7)-(8) систем, причем кольцо может быть разомкнуто и его действие заменено моделирующей функцией. Рассмотрим теперь, как именно образующие кольцо осцилляторы могут действовать друг на друга. То есть, каким образом первый осциллятор действует на второй и как к нему возвращаются такое действие от второго осциллятора.

Предварительная проверка показала, что более наглядно такое действие можно проследить на примере колебательной системы (5)-(6).

Предположим, что из первого уравнения исходит синусоидальный сигнал постоянной амплитуды без запаздывания, имеющий вид (амплитуду $A_1 = 1,4$ ед. и частоту $\omega_1 = 20$ ед. зададим условно, исходя из наглядности представления):

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t). \quad (9)$$

Этот сигнал представлен на рис. 1а.

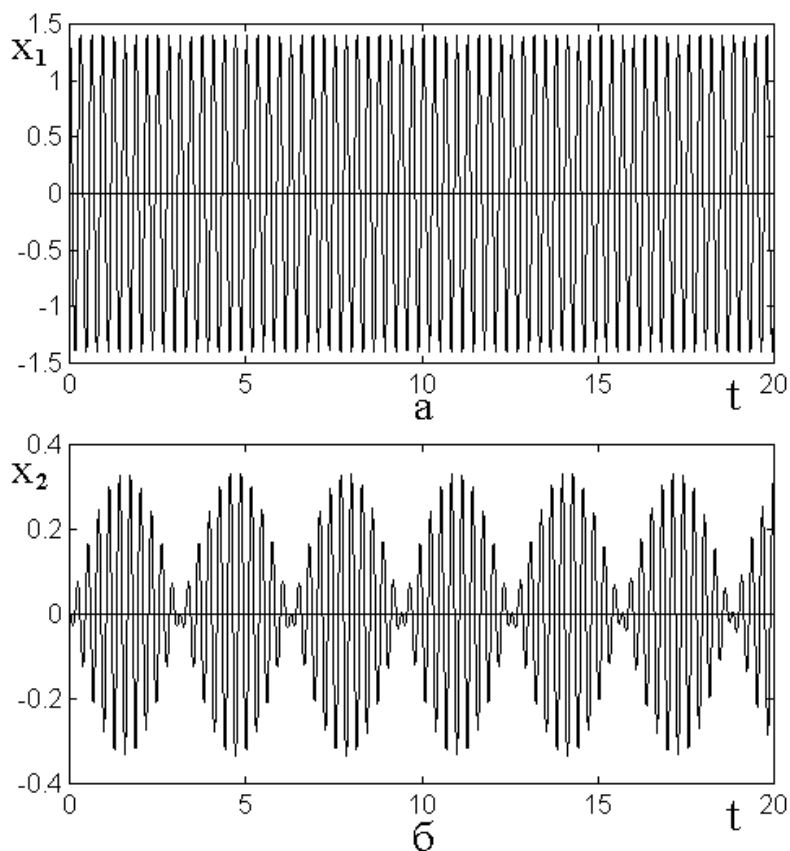


Рис.1. Действие первого осциллятора на второй осциллятор.
а – первый осциллятор; б – второй осциллятор.

Будем полагать, что далее он поступает на второй осциллятор, уравнение для которого имеет вид (6):

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0, \quad (10)$$

в котором: $\omega_2 = 22$; $\gamma_2 = 10$.

Получаемые колебания второго осциллятора представлены на рис.1б, из которого можно видеть, что они представляют собой биения, частота которых равна:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (11)$$

то есть при принятых значениях частот $\Delta\omega = 2$ ед.

Таким образом, синусоидальный сигнал с постоянной амплитудой от первого осциллятора вызывает у второго колебания с биениями, частота которых равна разности собственных частот осцилляторов.

Колебания второго осциллятора (рис.1б) можно рассматривать как прохождение первой половины кольца.

Рассмотрим теперь вторую половину кольца, для чего предположим, что колебания второго осциллятора имеют вид:

$$x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \sin(\Delta\omega/2 \cdot t), \quad (12)$$

где $A_2 = 0,32$ ед., $\omega_1 = 20$ ед., $\Delta\omega = 2$ ед.

Здесь амплитуда выбрана такой же, как получена на рис.1б, а деление частоты биений на два обусловлено тем, что биения моделируются синусом, каждый полупериод которого дает один полный период биений. Такие колебания представлены на рис.2а. Можно видеть, что они полностью повторяют представленные на рис.1б, так как параметры формулы (12) специально выбраны такими, чтобы моделировать переход от первой половины кольца ко второй.

Положим далее, что эти колебания действуют на первый осциллятор, то есть возвращаются к нему от второго по второй половине кольца. Уравнение для первого осциллятора имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0, \quad (13)$$

где: $\delta = 5$; $\eta = -200$.

Получаемые колебания первого осциллятора представлены на рис.2б. Можно видеть, что под действием биений, поступающих от второго осциллятора, колебания первого осциллятора происходят с запаздыванием на 8 ед. времени, после чего скачком возникает хаос, амплитуда которого превышает амплитуду колебаний до скачка более чем на порядок.

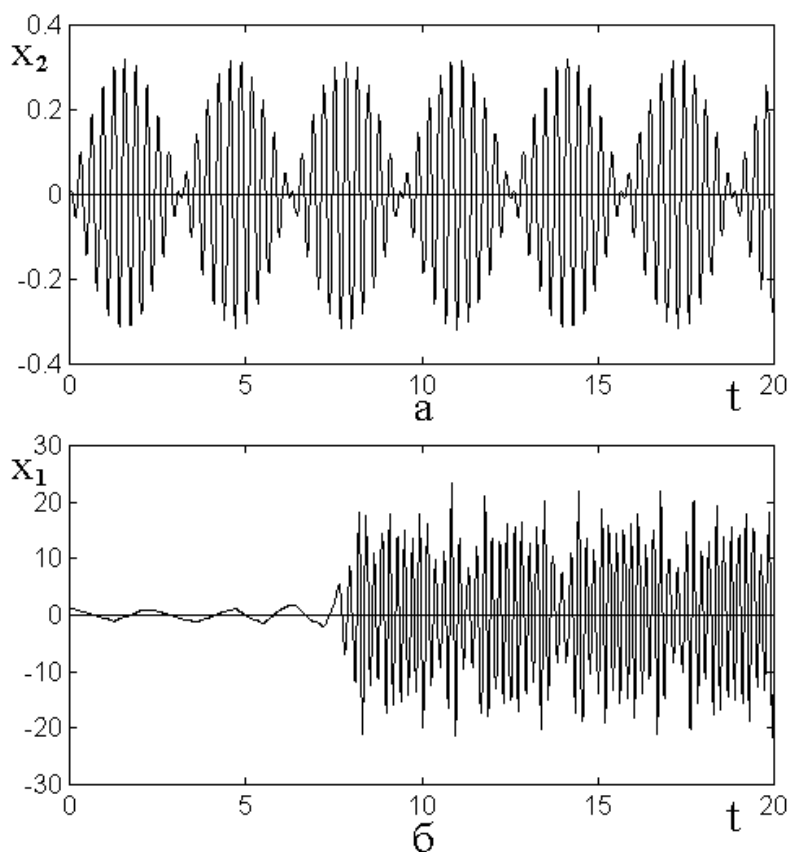


Рис.2. Действие второго осциллятора на первый.
а – второй осциллятор; б – первый осциллятор.

Таким образом, можно представить общую картину развития событий в следующем виде. Колебания первого осциллятора вызывают биения колебаний второго. Такие колебания с биениями возвращаются к первому осциллятору, вызывая его запаздывание. Эти колебания снова передаются второму и так далее – по кольцу. Имеет место что-то вроде кольцевой связи, аналогией

которой можно считать положительную или отрицательную обратную связь в радиотехнических устройствах [62, стр.365, 370].

4. Некоторые дополнительные особенности модели кольца

Отметим некоторые дополнительные свойства модели кольцевого взаимодействия осцилляторов, не нашедшие своего освещения в предыдущем разделе.

Проверка показывает, что время запаздывания напрямую с периодом биений не связано, однако запаздывание проявляется только тогда, когда проходит хотя бы один или полтора периода биений (могут проходить два-три и более). Возникающий после запаздывания хаос с периодом биений также не связан.

В качестве важной особенности рассматриваемых явлений следует отметить высокую чувствительность времени запаздывания и характера хаоса к фазам обеих составляющих биений, поступающих на первый осциллятор. Так, изменение в формуле (12) второго сомножителя с синуса на косинус, что соответствует изменению фазы на $\pi/2$, приводит к уменьшению времени запаздывания почти в три раза, то есть с 8 ед. до 3 ед., а изменение первого сомножителя с косинуса на синус увеличивает время запаздывания также почти в три раза, то есть с 8 ед. до 23 ед.

Весьма значительно меняется время запаздывания при изменении частоты модулирующего сигнала биений, то есть при изменении аргумента второго синуса в формуле (12). Так, умножение аргумента на 1,1 приводит к увеличению времени запаздывания с 8 до 10 ед., а умножение на 1,2 увеличивает время запаздывания до 42 ед., что превышает длительность периода биений в 16 раз.

Заметим, что высокая чувствительность времени запаздывания к фазе возбуждения отмечалась в работе [61, раздел 11], где рассматривалось моделирование запаздывания с помощью прыжковой функции. По-видимому, здесь имеет место явление того же порядка – чувствительность механизма запаздывания к собственным фазовым характеристикам. Можно полагать, что

более подробное исследование фазовых свойств предложенной здесь модели кольцевого взаимодействия, наряду с фазовыми явлениями, отмеченными в работе [61], представляет интерес в качестве предмета для отдельной работы.

Таким образом, проведенное модельное представление показывает, что кольцевой характер колебательной системы (5)-(6), включающий в себя механизм биений, способен обеспечить формирование как высокоамплитудного хаоса, так и предшествующее ему запаздывание возбуждения. Заметим, что роль биений в формировании запаздывания и хаоса отмечалась ранее в работе [55, раздел 6], однако там биения в чистом виде выделены не были, по-видимому, из-за высокой сложности рассматривавшейся там системы.

5. Некоторые ограничения модели кольца

Определенным ограничением предложенной модели является тот факт, что она успешно действует в рамках только одно прохода по кольцу. Так, после первого прохождения по кольцу колебания первого осциллятора приобретают вид, показаны на рис.2б, то есть не соответствуют чисто синусоидальным колебаниям, представленным на рис.1а. Воздействие таких колебаний на второй осциллятор, если и даст картину биений, то значительно более сложную, чем на рис.1б, а воздействие получаемых колебаний снова на первый осциллятор еще более усложнит картину. Можно предположить, что здесь определенную роль сыграют резонансные свойства обоих осцилляторов, способствующие выделению из полного спектра колебаний одной определенной частоты или ограниченной группы частот.

Таким образом, несмотря на успешное применение модели для представления запаздывания и хаоса при первом прохождении кольца, необходимо дальнейшее совершенствование модели, что позволило бы применить ее для случая прохождения кольца сколь угодно большое число раз. Авторы полагают, что такое совершенствование может составить предмет для отдельной работы.

В качестве еще одного ограничения предложенной модели следует отметить тот факт, что образование биений, составляющих основу воздействия второго осциллятора на первый, с необходимостью требует, чтобы второй осциллятор имел колебательный характер. То есть, во втором уравнении системы (5)-(6), приведенном здесь в виде (10), должно быть слагаемое, имеющее потенциальный характер, то есть $\omega_2^2 x_2$. В отсутствие такого слагаемого уравнение становится релаксационным, так что смещение x_2 биений не образует, а просто повторяет колебания первого осциллятора, сохраняя постоянную амплитуду.

Подобное воздействие синусоидального сигнала на первое уравнение через посредство x_2 аналогично введению прыжковой функции, рассмотренной в работе [61, формула (6)], с той разницей, что там прыжковая функция была независимой, а здесь она определяется смещением второго осциллятора x_2 , входящего в кольцо. В общем случае такую функцию можно рассматривать как вынуждающую силу, но не в чистом виде, а будучи умноженной на x_1^2 . Более подробное исследование таких вынужденных колебаний, по-видимому, может составить предмет для отдельной работы.

6. Кольцо в системе Лоренца

В предыдущих разделах рассмотрено кольцевое воздействие двух осцилляторов друг на друга состоящее в прохождении кольца последовательными шагами. Показано, что такое прохождение после определенного запаздывания порождает высокоамплитудный хаос. Можно полагать, что кольцевое взаимодействие не является специфическим свойством только одной рассматриваемой системы, но и имеет место во многих других случаях. В качестве примера приведем широко известную систему Лоренца, являющуюся классическим «генератором хаоса». Эта система многократно приводится во множестве учебников, например в [5, стр.260, форм.(1.6)], [2, стр.76, форм.(4.66), а также стр.101, 177, 401], [6, лекция 3, стр.43-55]:

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \quad (14)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz; \quad (15)$$

$$\dot{z} = -bz + xy. \quad (16)$$

Здесь имеется три уравнения первого порядка, причем можно полагать, например, что y в первом уравнении определяется через x посредством второго, то есть некоторое кольцо уже есть, но в него «вклинена» дополнительная переменная z , которая сама задается третьим уравнением через посредство сразу двух переменных x и y . Таким образом, переплетение получается довольно сложным, ни одно уравнение не имеет колебательного характера и простое кольцо не просматривается.

Однако систему трех уравнений (14)-(16) можно привести к двум уравнениям, из которых, по крайней мере, одно является колебательным [6, 7]. Сделаем это, следуя [6, стр.54-55].

Введем новую переменную u , связанную с z и x соотношением:

$$z = \frac{u + x^2}{2\sigma}. \quad (17)$$

Продифференцируем это выражение по t , подставим в (16) и освободимся от дроби (полагая $\sigma \neq 0$):

$$\dot{u} + 2x\dot{x} = -bu - bx^2 + 2\sigma yx. \quad (18)$$

Подставляя в это выражение \dot{x} в соответствии с (14) и выполняя приведение подобных членов, получаем:

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma - b)x^2. \quad (19)$$

Теперь разрешим (14) относительно y :

$$y = \frac{\dot{x}}{\sigma} + x. \quad (20)$$

Дифференцируя это выражение, получаем:

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{\sigma} + \dot{x}. \quad (21)$$

Подставим далее в уравнение (15) выражения (21), (20) и (17), чем будет достигнуто из него исключение переменной \acute{o} . В результате, после приведения подобных членов и освобождения от дробей, содержащих σ , получаем:

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0. \quad (22)$$

Итак, получены два уравнения (22) и (19), содержащие только две переменные x и u . Выпишем их еще раз в виде единой системы:

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0; \quad (23)$$

$$\dot{u} + bu - (2\sigma - b)x^2 = 0. \quad (24)$$

Можно видеть, что записанная таким образом система Лоренца является частным случаем общей системы (1)-(2), в которой выполнена замена переменных $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow u$, а все отличные от нуля коэффициенты равны:

$$a_{11} = 1; a_{12} = (\sigma - 1); a_{13} = -(r - 1); b_{11} = 1/2; d_{12} = 1/2;$$

а также:

$$a_{22} = 1; a_{23} = b; d_{21} = (2\sigma - b).$$

В полученной системе (23)-(24) хорошо просматривается кольцевой характер. Так, второе уравнение связано с первым через содержащее x слагаемое $-(2\sigma - b)x^2$, а первое – со вторым через содержащее u слагаемое $xu/2$.

Потенциал для первого уравнения имеет вид:

$$U = \frac{1}{8}x^4 - \frac{\sigma(r - 1)}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 u. \quad (25)$$

Можно видеть, что два первых слагаемых обеспечивают симметрично расположенные два минимума (подобно потенциалу на рис.4а в работе [60]), а

третье при положительном значении u может свести эти минимумы вместе и обратить в один, а при отрицательном углубляет оба. Таким образом, потенциал является динамическим и имеет «прыжковый» характер, однако в отличие от прыжкового потенциала, рассмотренного в работе [61, форм.(8)], здесь прыжки совершаются не с правой стороны на левую симметрично относительно центра, в вверх-вниз, оставляя потенциал симметричным, но меняя один минимум на два и обратно.

Согласно [6, стр.54-55], именно такой характер потенциала является причиной образования хаоса в системе Лоренца. При этом говорится, что система совершает колебания «в одной из потенциальных ям с перебросом время от времени в другую яму, благодаря изменению величины u и соответственно формы потенциала». Кольцевой характер колебаний в сочетании с динамическим характером потенциала там же описывается фразой: «в нашей системе u не является параметром в обычном смысле слова, а переменной, подчиняющейся уравнению (24). Она отслеживает изменение во времени величины x^2 , но не мгновенно, а с инерцией и сглаживанием, которые количественно определяются параметром b ». Здесь под «параметром b » имеется в виду второе слагаемое в уравнении (24).

Таким образом, можно видеть, что система Лоренца в записи (23)-(24) имеет четко выраженный кольцевой характер.

7. Сравнение системы Лоренца с системой для двух осцилляторов

Чтобы перейти к привычным для настоящего рассмотрения категориям, положим, что первое уравнение (23) соответствует первому осциллятору, а второе, то есть (24) – второму. Введем новые обозначения переменных: $x \rightarrow x_1$, $u \rightarrow x_2$. При этом система (23)-(24) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + (\sigma + 1) \frac{dx_1}{dt} - \sigma(r - 1)x_1 + \frac{x_1^3}{2} + \frac{x_1 x_2}{2} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{dx_2}{dt} + b x_2 - (2\sigma - b)x_1^2 = 0. \quad (27)$$

Записанную в таком виде систему Лоренца удобно сравнить с основной рассматриваемой здесь системой (7)-(8):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (28)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0, \quad (29)$$

которая, согласно [59-61], обеспечивает возбуждение высокоамплитудного хаоса с запаздыванием.

В обеих системах первое уравнение содержит кубическую нелинейность. Слагаемые уравнения (25), содержащие $d x_1 / d t$ и x_1 отражают диссипацию и частоту первого осциллятора, так что решающего значения для реализации хаоса и запаздывания не имеют. В самом деле, диссипация в умеренных пределах способна лишь снижать амплитуду, а нейтральная роль второго слагаемого установлена в работе [59]. Однако слагаемое нелинейной связи $x_1 x_2 / 2$ здесь принципиально отлично от такового в уравнении (27). В уравнении (25) оно пропорционально x_1 в первой степени, а в уравнении (27) – во второй.

Уравнение (26) принципиально отличается от (28) тем, что имеет лишь первый порядок вместо второго, а слагаемое связи здесь является нелинейным, пропорциональным x_1^2 , тогда как в (28) оно линейно и пропорционально лишь x_1 .

Рассмотрим теперь развитие колебаний во времени, обеспечиваемое системой (26)-(27). Для работы методом Рунге-Кутты сведем систему (26)-(27) к трем уравнения первого порядка, для чего введем вспомогательную переменную x_3 с помощью соотношения:

$$x_3 = \frac{d x_1}{d t}. \quad (30)$$

При этом система (26)-(27) становится эквивалентной трем уравнениям первого порядка:

$$\frac{d x_1}{d t} = x_3; \quad (31)$$

$$\frac{d x_2}{d t} = -b x_2 + (2\sigma - b)x_1^2. \quad (32)$$

$$\frac{d x_3}{d t} = -(\sigma + 1)x_3 + \sigma(r - 1)x_1 - \frac{x_1^3}{2} - \frac{x_1 x_2}{2}. \quad (33)$$

Здесь основными переменными остаются x_1 и x_2 , а переменная x_3 является производной от x_1 по времени. Дополнительной производной от x_2 по времени (то есть еще одной переменной типа x_4) здесь нет, так как уравнение (27) имеет лишь первый порядок.

Решение системы (31)-(33) методом Рунге-Кутты позволяет получить колебания смещения первого осциллятора, представленные на рис.3. Параметры положены равными классическому набору параметров Лоренца (см. напр. [2, стр.178], [5, стр.260]): $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Минимумы потенциала (25), приходящиеся на $x_1 = \pm 8,6$ ед., отмечены на рис.3а горизонтальными точечными линиями.

Из рис.3а видно, что колебаниям при времени менее 0,05 ед. предшествует весьма кратковременный резкий выброс вверх до уровня 20 ед., после чего наступает довольно длительный, вплоть до времени около 17 ед., интервал довольно регулярных колебаний с постепенно увеличивающейся амплитудой. Эти колебания происходят вблизи одного из минимумов потенциала (нижняя точечная линия). После окончания этого интервала колебания по очереди группируются вокруг верхней и нижней точечных линий, что соответствует перескоку осциллятора от одного минимума потенциала к другому. Эти перескоки уже происходят в случайном порядке, что и представляет собой классический хаос Лоренца. Производная, приведенная на

рис.3б, также до времени около 17 ед. имеет довольно регулярный характер, после чего становится хаотической. Параметрический портрет, приведенный на рис.3в, имеет вид горизонтальной восьмерки, соответствующей двум симметричным минимумам потенциала.

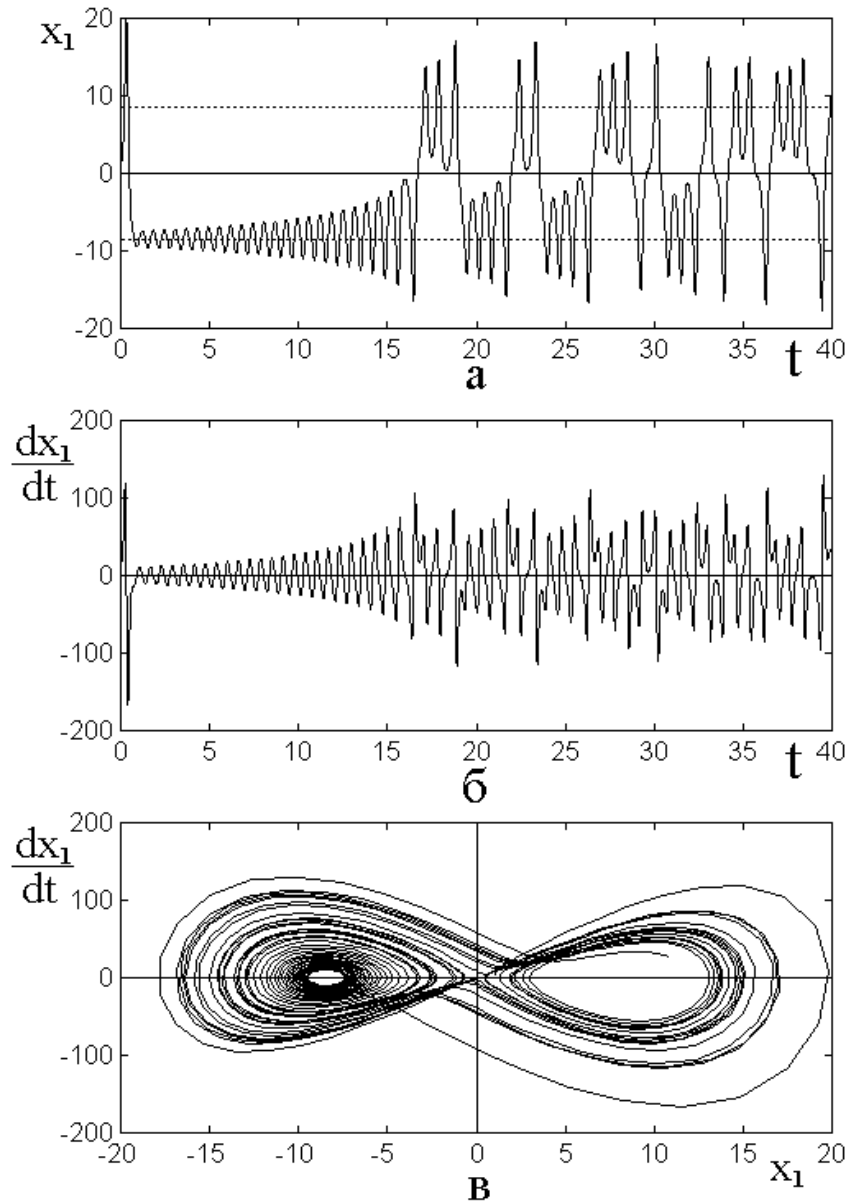


Рис.3. Колебания в системе Лоренца, представленной в виде уравнений (26)-(27) или (31)-(33). а – колебания смещения первого осциллятора; б – производная от колебаний смещения первого осциллятора; в – параметрический портрет.

Горизонтальными точечными линиями на верхнем рисунке отмечены минимумы потенциала (25). Параметры: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Начальное смещение $x_{10} = 1$. Шаг развертки по времени 0,02 ед.

Сравнение приведенных разверток с таковыми для системы двух осцилляторов (28)-(29), пример которых можно найти, например, на рис.11 в работе [59], а также на сходных рисунках в работах [60, 61], показывает, что в системе Лоренца запаздывание, типичное для системы (28)-(29), отсутствует.

В самом деле, колебания развиваются сразу вблизи одного из минимумов потенциала, а не вблизи нуля, как для системы (28)-(29). В то же время, амплитуда высокоамплитудного хаоса, развивающегося на рис.3а после времени 17 ед. как раз соответствует минимумам потенциала, как и для системы (28)-(29). Можно полагать, что такое сходство амплитуд хаоса определяется близким по структуре динамическим характером потенциала для обеих систем, в обоих случаях имеющих два симметричных минимума, реализуемых в соответствии с «прыжками» амплитуды второго осциллятора.

Что касается запаздывания, то в системе Лоренца следует отметить начальный интервал развития колебаний до времени 17 ед., где они имеют регулярный характер, то есть хаос отсутствует. Изменение шага развертки по времени при расчете методом Рунге-Кутты (по крайней мере, от величины 0,02 ед. в сторону ее уменьшения на порядок и более) характер колебаний в этом интервале не меняет, тогда как хаос, то есть времена перескока от одного минимума к другому, меняется весьма значительно. Такое поведение колебаний в этом интервале роднит его с неизменностью интервала запаздывания, представленного на рис.8 в работе [60]. Для терминологической характеристики этого интервала его можно назвать «интервалом регулярного развития» или короче – «интервалом регулярности».

В работах [59-61] установлено, что в уравнении для первого осциллятора (28) главным ингредиентом, ответственным за эффект запаздывания является слагаемое, содержащее $x_1^2 x_2$. Можно полагать, что в первом уравнении системы Лоренца (26) главную роль в формировании интервала регулярности играет слагаемое, содержащее $x_1 x_2$. Различие состоит в показателе степени

смещения первого осциллятора x_1 , что и приводит к различию начального этапа развития колебаний.

Резюмируя сказанное, можно отметить, что классическая система Лоренца, записанная в виде (26)-(27), имеет кольцевой характер, подобный таковому в системе (28)-(29), причем развитие высокоамплитудного хаоса сопровождается задержкой в виде интервала регулярности, подобной задержке в системе (28)-(29) в виде интервала запаздывания.

8. Возможные способы решения релаксационной системы уравнений для двух осцилляторов

Вернемся от системы Лоренца к основной для настоящего рассмотрения релаксационной системе для двух связанных осцилляторов (7)-(8):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (34)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (35)$$

Система состоит из двух дифференциальных уравнений, связанных друг с другом. Для решения дифференциальных уравнений подобного типа, по-видимому, наиболее часто используются два подхода.

Первый – использование подстановочной функции, с помощью которой система приводится к состоянию, не содержащему дифференцирования. Так, для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами такой подстановочной функцией является экспонента, которая при дифференцировании остается неизменной, так что исходное дифференциальное уравнение приводится к алгебраическому, разрешимому (по крайней мере, до четвертой степени) алгебраическими методами. Вариантом такого подхода является решение уравнения с помощью разложения в ряд, так что подстановочными функциями являются члены ряда.

Второй – использование численного метода, при котором решение находится путем последовательного прохождения по шагам, начиная с

некоторого начального значения, таким образом, что на каждом последующем шаге используется значение искомой функции, полученное на предыдущем. Вариантом такого подхода является метод Рунге-Кутты.

Выгодный аспект первого подхода состоит в том, что задача решается в единый момент времени, так что решение относительно времени является непрерывным. При втором подходе решение получается шагами в следующие друг за другом моменты времени, то есть непрерывная функция заменяется ломаной, которая должна приближаться к истинной при бесконечно малом уменьшении шага. Такое приближение становится проблематичным при фрактальном характере зависимости, так что здесь достаточно подробно могут быть определены только статистические характеристики исследуемого процесса. В этом случае применение первого подхода, по-видимому, недопустимо, так что единственным вариантом является применение пошагового метода.

9. Сведение релаксационной системы к единому уравнению

Рассмотрим еще одну возможность подхода к решению системы (34)-(35), которая может привести к упрощению задачи.

Релаксационная система (34)-(35) содержит две переменных x_1 и x_2 , чему соответствуют два уравнения второго порядка. Таким образом, при решении надо одновременно искать две неизвестных, то есть решать сразу два уравнения. Можно полагать, что исключение одной из переменных позволит свести систему к одному уравнению, содержащему оставшуюся переменную. По-видимому, проще всего исключить смещение второго осциллятора x_2 , так что останется смещение только первого осциллятора x_1 . Покажем, как это можно сделать.

Итак, релаксационная система для двух связанных осцилляторов имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (36)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (37)$$

Введем новые обозначения переменных x_1 , x_2 и параметра γ_2 :

$$x_1 \rightarrow x, \quad x_2 \rightarrow y, \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma.$$

Система принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \delta x^3 + \eta x^2 y = 0; \quad (38)$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \gamma x = 0. \quad (39)$$

Умножим первое уравнение на x^{-2} и перенесем последнее слагаемое в правую часть:

$$x^{-2} \frac{d^2 x}{d t^2} + \delta x = -\eta y; \quad (40)$$

Продифференцируем левую часть по t :

$$\frac{d}{d t} \left(x^{-2} \frac{d^2 x}{d t^2} + \delta x \right) = -2 x^{-3} \frac{d^2 x}{d t^2} + x^{-2} \frac{d^3 x}{d t^3} + \delta \frac{d x}{d t}. \quad (41)$$

Продифференцируем еще раз и запишем в порядке убывания порядка производных:

$$\frac{d^2}{d t^2} \left(x^{-2} \frac{d^2 x}{d t^2} + \delta x \right) = x^{-2} \frac{d^4 x}{d t^4} - 4 x^{-3} \frac{d^3 x}{d t^3} + 6 x^{-4} \frac{d^2 x}{d t^2} + \delta \frac{d^2 x}{d t^2} \quad (42)$$

Продифференцируем правую часть уравнения (40) по t два раза:

$$\frac{d^2}{d t^2} (-\eta y) = -\eta \frac{d^2 y}{d t^2}. \quad (43)$$

Приравнявая (42) и (43), приводя подобные члены и перенося все в левую часть, получаем:

$$x^{-2} \frac{d^4 x}{dt^4} - 4x^{-3} \frac{d^3 x}{dt^3} + (\delta + 6x^{-4}) \frac{d^2 x}{dt^2} - \gamma \eta x = 0. \quad (44)$$

Умножаем на x^2 :

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 4x^{-1} \frac{d^3 x}{dt^3} + (\delta x^2 + 6x^{-2}) \frac{d^2 x}{dt^2} - \gamma \eta x^3 = 0. \quad (45)$$

Это уравнение содержит только одну переменную x .

Однако, поскольку ожидается, что x будет иметь колебательный характер, то есть периодически проходить через нуль, то сдвинем средний уровень ожидаемых колебаний на постоянную положительную величину b , полагая, что эта величина всегда будет больше любого значения x , то есть выполняются условия: $b > 0$, $b > |x_{max}|$.

То есть произведем замену переменной:

$$x \rightarrow x + b. \quad (46)$$

При этом уравнение (45) принимает вид:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - \frac{4}{(x+b)} \frac{d^3 x}{dt^3} + \left[\delta(x+b)^2 + \frac{6}{(x+b)^2} \right] \frac{d^2 x}{dt^2} - \gamma \eta (x+b)^3 = 0 \quad (47)$$

или в записи без дробей:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 4(x+b)^{-1} \frac{d^3 x}{dt^3} + \left[\delta(x+b)^2 + 6(x+b)^{-2} \right] \frac{d^2 x}{dt^2} - \gamma \eta (x+b)^3 = 0 \quad (48)$$

При решении этого уравнения начальное смещение x_0 надо отсчитывать от значения b , то есть:

$$(x+b)_0 = x_0 + b. \quad (49)$$

Можно полагать, что решение уравнения (47) будет обладать теми же свойствами возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием.

Из структуры этого уравнения видно, что использование какой-либо достаточно простой подстановочной функции здесь вряд ли возможно, так что по-прежнему единственной возможностью решения остается пошаговый метод Рунге-Кутты. Приведем вкратце схему такого решения.

Прежде всего введем новые переменные u , v , w с помощью соотношений:

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad (50)$$

$$v = \frac{du}{dt}; \quad (51)$$

$$w = \frac{dv}{dt}. \quad (52)$$

При этом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v; \quad (53)$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = w. \quad (54)$$

С помощью этих соотношений уравнение (47) (или (48)) приводим к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad (55)$$

$$\frac{du}{dt} = v; \quad (56)$$

$$\frac{dv}{dt} = w; \quad (57)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{4}{(x+b)} w - \left[\delta(x+b)^2 + \frac{6}{(x+b)^2} \right] v + \gamma \eta(x+b)^3. \quad (58)$$

Эта система содержит четыре уравнения первого порядка, левая часть которых представляет собой первые производные от четырех переменных x , u , v , w . То есть она имеет классический вид, требуемый для успешного применения метода Рунге-Кутты [63, стр.707].

Замечание. В рамках настоящей работы авторы не занимаются подробным анализом уравнения (47), а лишь ограничиваются констатацией факта его достаточной сложности, требующей применения пошагового метода. Более подробному изучению этого уравнения авторы предполагают посвятить отдельную работу.

10. Кольцевой характер релаксационной системы

Рассмотрим теперь более подробно кольцевой характер релаксационной системы (34)-(35):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (59)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (60)$$

Как показано в предыдущих разделах, такая система должна решаться пошаговым методом, в качестве которого достаточно удобно использовать метод Рунге-Кутты. При этом на каждом шаге вычисляются новые значения обеих переменных x_1 и x_2 по их значениям, полученным на предыдущем шаге.

Однако кольцевой характер системы (59)-(60) позволяет предположить возможность расчета несколько иным методом. Так, сначала в первом уравнении вычисляется переменная x_1 . При этом значение x_2 предполагается известным. Далее, по полученному значению x_1 из второго уравнения определяется переменная x_2 . Это значение x_2 подставляется в первое уравнение, из которого снова вычисляется x_1 , так что процесс повторяется.

Приведем алгоритм решения. Предварительное действие – задание x_2 .
Далее – выполнение последовательных шагов.

Шаг №1.

Вычисление x_1 из первого уравнения. При этом x_2 предполагается заданным.

Шаг №2.

Подстановка полученного значения x_1 во второе уравнение.

Шаг №3.

Решение второго уравнения, нахождение значения x_2 , определяемого подставленным значением x_1 .

Шаг №4.

Подстановка полученного значения x_2 в первое уравнение.

Шаг №5.

Повторение шага №1.

При этом на шаге №1 и шаге №3 надо решать дифференциальные уравнения второго порядка, что можно сделать тем же методом Рунге-Кутты, в котором будут использоваться значения переменных, полученные на предыдущем шаге. То есть цельный метод Рунге-Кутты разбивается на две части, выполняемые последовательно.

Замечание. Предложенный здесь метод решения системы (59)-(60) приведен в качественном виде без строгого математического доказательства, в первую очередь, для обоснования кольцевого характера системы. Важность такого характера для явлений высокоамплитудного хаоса и запаздывания в общем случае будет показана далее. Тем не менее, авторы полагают, что решение системы (59)-(60) предложенным методом представляет заметный интерес для рассмотрения в качестве отдельной задачи.

11. Обобщенные кольцевые функции

Рассмотрим теперь кольцевой характер рассматриваемой задачи в более отвлеченном виде. Для удобства обращения, приведем здесь еще раз релаксационную систему для двух осцилляторов (59)-(60):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (61)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (62)$$

Представим уравнения системы (61)-(62) в условном виде:

первое:

$$x_1 = \varphi(x_2); \quad (63)$$

второе:

$$x_2 = \psi(x_1), \quad (64)$$

где $\varphi(x_2)$ и $\psi(x_1)$ – интегральные операторы, определяемые решением уравнений (61) и (62) относительно x_1 и x_2 соответственно.

В явном виде достаточно просто можно представить лишь второй из них, так как уравнение (62) можно решить путем двойного интегрирования:

$$x_2 = -\gamma_2 \int \left(\int_{\tau} x_1 d\tau + C_1 \right) dt + C_2, \quad (65)$$

так что:

$$\psi(x_1) = -\gamma_2 \int \left(\int_{\tau} x_1 d\tau + C_1 \right) dt + C_2, \quad (66)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые могут быть определены из начальных условий. Заметим, что подстановка (65) в (61) с использованием того же приема, что в разделе 9, должна привести к тому же уравнению четвертого порядка (47).

Однако, несмотря на успешное решение уравнения (62), разрешить подобным путем уравнение (61) не удастся. Так что будем считать выражение (66) приведенным здесь для иллюстрации и обратимся к дальнейшему обобщению задачи.

Итак, из системы (63)-(64) видно, что она имеет кольцевой характер. То есть во втором уравнении (64) участвует переменная x_1 , определяющая через посредство функции ψ переменную x_2 . В свою очередь эта переменная через функцию φ , входящую в первое уравнение (63) определяет переменную x_1 , которая далее поступает в правую часть уравнения (64) и так далее по кругу.

Подстановка (64) в (63) позволяет свести задачу к одному уравнению относительно x_1 :

$$x_1 = \varphi [\psi (x_1)]. \quad (67)$$

Будем называть уравнение такого вида «кольцевым уравнением», а его решение – «кольцевой функцией».

Уравнение (67) можно представить в обобщенном виде:

$$x = F(x). \quad (68)$$

Здесь левая часть, то есть сама переменная, определяется функцией от той же переменной. В случае колебательного процесса амплитуда колебаний определяется функцией от той же амплитуды, в чем и состоит кольцевой характер функции (68).

В общем случае кольцевая функция подразумевает одновременное существование левой и правой частей кольцевого уравнения в единый момент времени. Однако, так хорошо получается только в том случае, если уравнение вида (68) можно разрешить в аналитическом виде. Но, как показано выше, уравнение (61) представить в виде (63) затруднительно, так что и (68) разрешить вряд ли удастся, поэтому приходится прибегать к численным методам, подразумевающим пошаговое решение.

В этом случае используется метод пошаговых трансформаций, так что левая часть определяется при подстановке в правую часть значения переменной, полученное на предыдущем шаге:

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (69)$$

Для такого расчета можно использовать любой метод численного решения дифференциальных уравнений, например метод Рунге-Кутты.

12. Пошаговый характер расчета отображения

Математическая конструкция вида, подобного (69), рассматривается во многих работах. Так, в [6, стр.15, 25] она названа «дискретным одномерным отображением» и отмечена достаточно широкая область ее применения для описания динамики биологических популяций. Аналогичные определения приведены также в [5, стр.31-35] и в [2, стр.69-71, форм.(4.44)]. В большинстве случаев отображения трактуются как результат воздействия силы периодическими толчками, однако в [2] на основе «отображения последования» выполнен анализ свободных колебаний линейного осциллятора с трением [2, стр.69, форм.4.45)].

Достаточно широкой областью применения отображений для расчета пошагового развития процесса во времени является анализ хаоса. Так в [6, стр.28, форм.(2.3)] метод пошагового расчета применен для описания хаотического поведения одного из наиболее простых видов отображений – так называемого «логистического» отображения, описываемого формулой:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (70)$$

где λ – параметр, определяющий характер колебаний.

На рис.4 показано развитие по шагам колебаний логистического отображения (70) при различных значениях параметра λ .

Так, на рис.4а колебания являются регулярными и затухают по амплитуде. На рис.4б колебания сначала несколько нарастают, после чего принимают стационарную амплитуду, во всех случаях оставаясь регулярными. Однако на рис.4в регулярность колебаний нарушается, так что они представляют собой хаос. Преобладающим периодом здесь все же остается единица, задаваемая шагом, однако амплитуда меняется случайным образом.

При значениях λ меньше приведенного здесь 0,7, характер затухающих колебаний сохраняется, однако они затухают тем быстрее, чем λ меньше. Переход от затухающего режима (рис.4а) к стационарному (рис.4б) происходит

плавно: по мере увеличения λ время затухания увеличивается, устремляясь к бесконечности, где по амплитуде достигает устойчивого значения, а на начальном участке амплитуда к этому значению постепенно подтягивается.

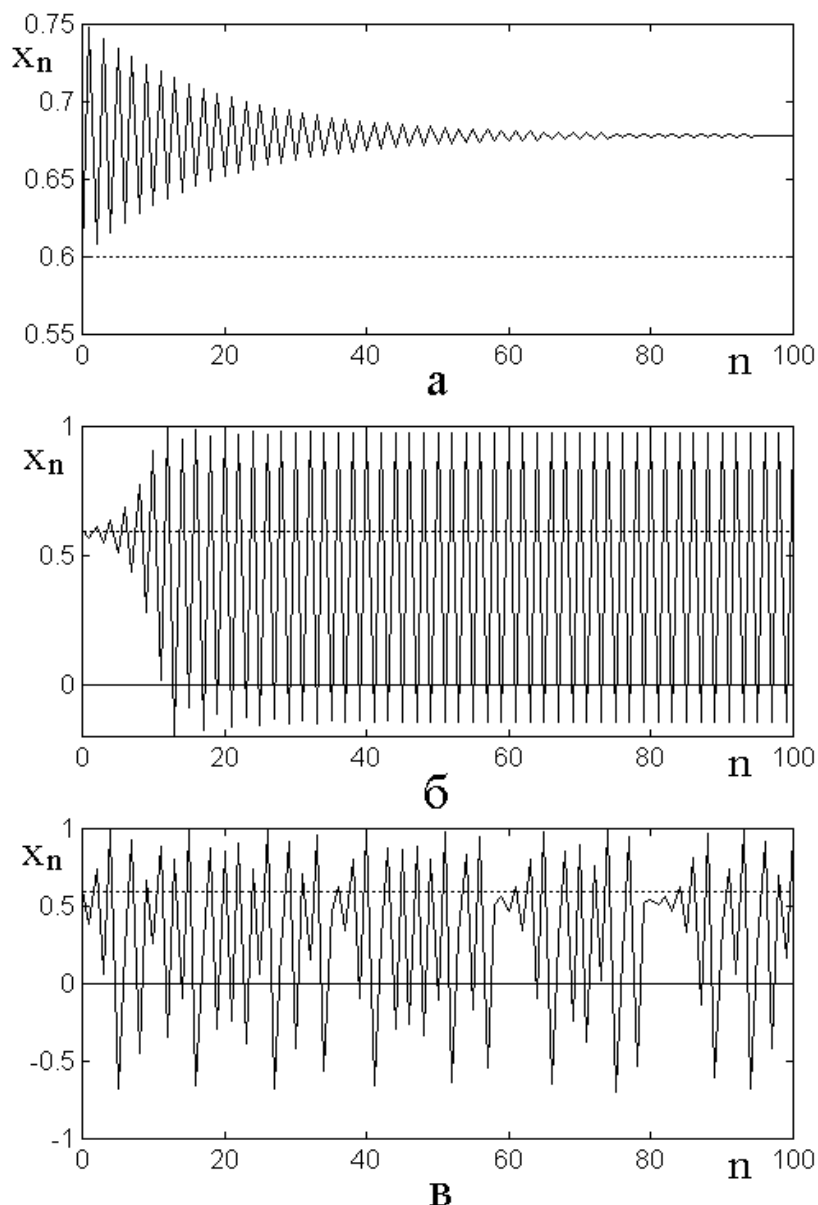


Рис.4. Развитие по шагам колебаний логистического отображения (70) при различных значениях параметра λ : а – 0,7, б – 1,2, в – 1,7.

Горизонтальная сплошная линия – уровень нуля, горизонтальная точечная линия – уровень начального смещения. Шаг по горизонтальной оси – единичный.

Начальное смещение $x_0 = 0,6$.

Переход от стационарного режима (рис.4б) к хаосу (рис.4в) также происходит достаточно плавно: по мере увеличения λ амплитуда регулярных

колебаний сначала приобретает чередующийся через единицу характер (то есть появляется вторая гармоника), после чего, по мере усиления таких «чередований» (то есть появления дополнительных гармоник) переходит к хаосу. Максимальным допустимым значением параметра является $\lambda = 2$. При превышении этого значения система сразу после нескольких (3-4) шагов уходит на бесконечность. Величина начального смещения при значении меньше 1,0 к развитию хаоса не критична, амплитуда и характер хаоса остаются постоянными вплоть до весьма малых начальных значений (проверено до 0,01). При начальном смещении выше 1,0 система уходит на бесконечность.

13. Замечание о возможности вариации шага расчета

Таким образом, как кольцевая функция, так и отображение, имеют сходную математическую конструкцию, определяемую формулой (69). Для расчета в обоих случаях приходится применять пошаговую процедуру. Для расчета отображения традиционно используется метод итераций [2, стр.70, рис.4.6], [6, стр.28, рис.2.3], а для расчета кольцевой функции можно использовать метод Рунге-Кутты.

Однако принципиальное различие состоит в том, что отображение является дискретной функцией, а кольцевая функция – непрерывной. Так, в отображении нельзя изменить величину последовательного шага, каждое последующее значение определяется предыдущим, отличающимся на величину одного шага. При изменении величины шага вся картина развития по шагам, подобная представленной на рис.4, сжимается или растягивается как целое пропорционально изменению величины шага.

При расчете непрерывной функции, каковой в частности является кольцевая, шаг можно менять в широких пределах. Максимальная величина шага определяется условием, чтобы он был меньше характерного размера неоднородности функции. Изменение шага при таком условии, в первую очередь при его уменьшении, общего характера функции не меняет: она не сжимается и не расширяется подобно отображению, а сохраняет прежний характерный размер. В случае хаоса из-за его фрактального характера

конкретный вид хаоса может меняться, однако общие статистические свойства остаются прежними.

С другой стороны, решение уравнений методом Рунге-Кутты также представляет собой последовательную пошаговую процедуру, однако отличие ее от процедуры вычисления отображения состоит в том, что метод Рунге-Кутты опирается на производные, тогда как расчет отображения – чисто дискретный, учитывает только значения функции, но не ее производную.

Важным моментом, имеющим решающее значение для настоящего рассмотрения, является для отображений (по крайней мере, для логистического) полное отсутствие эффекта запаздывания. То есть в случае отображений как регулярные, так и хаотические колебания всегда развиваются с самого начала процесса дискретного увеличения переменной.

14. Кольцевые функции для синусоидальных колебаний

Согласно показанному в разделе 11, кольцевую функцию для задачи о двух осцилляторах, можно представить в обобщенном виде (69):

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (71)$$

Здесь функция $F(x)$ имеет довольно сложный вид, вряд ли доступный аналитическому представлению в элементарных функциях (из-за сложности интегральных операторов), так что применение метода Рунге-Кутты, требующего предварительного вычисления производных, также может вызвать определенные затруднения.

Поэтому попытаемся пройти по пути максимального качественного упрощения, учитывая, что переменная x , по существу представляющая собой смещение первого осциллятора, должна иметь колебательный характер, представимый в виде тригонометрических функций типа синуса или косинуса. При этом функция $F(x)$ также должна иметь вид синуса или косинуса, зависящего от времени по закону типа $\cos(\omega t)$ или $\sin(\omega t)$, где ω – частота колебаний. Далее учтем, что правая часть уравнения (71), теперь имеющая вид тригонометрической функции, должна зависеть от x , так что такую

зависимость введем в частоту: $\omega \rightarrow \omega (x)$. Сконструированная таким образом кольцевая функция с участием косинуса принимает вид:

$$x = \cos\{\omega (G \cdot x) \cdot t\}, \quad (72)$$

где G – постоянное число. Такая же функция может быть сконструирована с участием синуса.

В идеальном случае кольцевая функция должна быть определена в заданный момент времени, то есть уравнение вида (72) должно быть решено относительно x при заданном фиксированном значении времени t . Далее, задавая времени последовательные значения, можно получить зависимость x от t . Качественное рассмотрение графическим методом показывает, что зависимость будет иметь пилообразный характер (или несколько пил, следующих друг за другом).

Однако, по-видимому, более удобно ввести дискретное время и предположить, что значение функции в данный момент времени определяется ее значением в предыдущий момент. В этом случае зависимость такой функции от времени можно рассчитать по шагам. Для косинуса и синуса такие функции приобретают вид:

$$x_{n+1} = \cos\{\omega (G \cdot x_n) \cdot t_n\}, \quad (73)$$

$$x_{n+1} = \sin\{\omega (G \cdot x_n) \cdot t_n\}. \quad (74)$$

Такая методика расчета сходна с применяемой для расчета отображений (раздел 12).

Настоящее рассмотрение ориентировано на систему из двух связанных осцилляторов, колебания в которой имеют характер, в какой-то степени соответствующий тригонометрическим функциям (во всяком случае, может быть представлен в виде ряда по таким функциям). Можно полагать, что приведенная конструкция (73), (74) в определенной степени является средством имитации колебаний в исходной системе. Поскольку в формулах (73), (74) отсутствуют дифференциальные и интегральные операторы, следует ожидать,

что расчет развития во времени таких колебаний будет значительно проще, чем метод Рунге-Кутты,

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести два вида таких функций: кольцевые функции первого рода:

$$x = \cos(\omega \cdot A \cdot t), \text{ где } A \rightarrow I + \alpha \cdot x; \quad (75)$$

$$x = \sin(\omega \cdot A \cdot t), \text{ где } A \rightarrow I + \alpha \cdot x; \quad (76)$$

кольцевые функции второго рода:

$$x = \cos(\omega \cdot A \cdot t), \text{ где } A \rightarrow A + \alpha \cdot x; \quad (77)$$

$$x = \sin(\omega \cdot A \cdot t), \text{ где } A \rightarrow A + \alpha \cdot x. \quad (78)$$

Здесь α – постоянный параметр, который характеризует «эффективность» или «силу» влияния предыдущего значения кольцевой функции на последующее.

Можно ввести обобщенное обозначение для частоты:

$$\Omega = \omega \cdot A, \quad (79)$$

При этом для функций первого рода получаем:

$$\Omega^{(1)} = \omega \cdot (I + \alpha \cdot x). \quad (80)$$

Так как x определяется по шагам, то и частота также имеет пошаговый характер:

$$\Omega_n^{(1)} = \omega \cdot (I + \alpha \cdot x_n). \quad (81)$$

Аналогично для функций второго рода получаем:

$$\Omega^{(2)} = \omega \cdot (A + \alpha \cdot x), \quad (82)$$

а также:

$$\Omega_n^{(2)} = \omega \cdot (A_n + \alpha \cdot x_n), \quad (83)$$

где

$$A_n \rightarrow A_{n-1} + \alpha \cdot x_{n-1}. \quad (84)$$

Принципиальное различие здесь состоит в том, что частота для функций первого рода просто определяется величиной смещения, а для функций второго

рода еще и зависит от величины A_n , определяемой смещением на предыдущем шаге.

В символическом обобщении кольцевые функции приобретают вид

$$x = \cos(\Omega^{(1),(2)} \cdot t); \quad (85)$$

$$x = \sin(\Omega^{(1),(2)} \cdot t), \quad (86)$$

что еще больше их роднит с колебательными решениями волновых уравнений.

Из (81), (83) можно видеть, что в обоих случаях обобщенная частота Ω_n получается пропорциональной смещению x_n , причем для функции первого рода пропорциональность получается линейной, а для функции второго рода еще и зависящей от величины A_n , которая на каждом шаге увеличивается в соответствии с (84).

Следует заметить, что, согласно показанному в работе [54], линейная зависимость частоты от амплитуды свойственна решению уравнения с кубической нелинейностью вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \delta x^3 = 0, \quad (87)$$

которое составляет основу первого уравнения системы (34)-(35). Таким образом, здесь имеет место еще одна аналогия свойств кольцевых функций с задачей о двух связанных осцилляторах.

Как отмечено в разделе 2, основная рассматриваемая здесь система для двух связанных осцилляторов (34)-(35), по своей структуре обладает кольцевым свойством. В то же время, такая система способна описать возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Можно предполагать, что кольцевые функции, имеющие колебательный характер, также смогут в какой-то степени описать высокоамплитудный хаос с запаздыванием, то есть обеспечить достаточно наглядную и простую имитацию этих явлений.

В связи с этим дальнейшим шагом настоящей работы будет рассмотрение колебаний, описываемых кольцевыми функциями первого и второго рода, которое выполним для обеих функций по отдельности. Главной задачей будет демонстрация возможности имитации возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием на основе кольцевых функций.

15. Кольцевые функции первого рода

В качестве имитационных кольцевых функций первого рода выберем следующие:

$$x_{n+1}^{(C)} = \cos\left[\left(1 + \alpha x_n^{(C)}\right)(t_n + \Delta t)\right], \quad (88)$$

$$x_{n+1}^{(S)} = \sin\left[\left(1 + \alpha x_n^{(S)}\right)(t_n + \Delta t)\right]. \quad (89)$$

Параметры α и Δt полагаются заданными. Начало расчета соответствует $n = 0$. При этом время $t_0 = 0$, а также смещение $x_0^{(C,S)} = 0$. Частота ω здесь в явном виде не участвует, а периодичность функций во времени обеспечивает комбинация

$$\omega_n^{(C,S)} = 1 + \alpha x_n^{(C)}, \quad (90)$$

которую можно условно назвать «текущей частотой».

Алгоритм вычисления значений t, ω, x для двух последовательных шагов n и $n + 1$ имеет вид:

Шаг n :

Получение с предыдущего шага: $t = t_n; \omega = \omega_n$

Вычисление: $x_n = \cos(\omega_n t_n)$.

Вывод: t_n, ω_n, x_n .

Вычисление: $\omega_{n+1} = 1 + \alpha x_n; t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Шаг $n + 1$:

Получение с предыдущего шага: $t = t_{n+1}; \omega = \omega_{n+1}$.

Вычисление: $x_{n+1} = \cos(\omega_{n+1} t_{n+1})$.

Вывод: $t_{n+1}, \omega_{n+1}, x_{n+1}$.

Вычисление: $\omega_{n+2} = 1 + \alpha x_{n+1}; t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Для простоты обозначений функции (88) и (89) далее будем записывать в виде:

$$x_C = \cos[(1 + \alpha x_C) t], \quad (91)$$

$$x_S = \sin[(1 + \alpha x_S) t], \quad (92)$$

Рассмотрим развитие этих функций во времени, для чего обратимся к рис.5.

На рис.5а и рис.5б приведены развертки по времени имитационных колебаний, имеющих вид косинуса (88) и синуса (89). Видно, что в обоих случаях на начальном участке вплоть до 15 ед. времени развиваются почти регулярные высокоамплитудные колебания, период которых составляет около 6 ед. времени, что в 60 раз больше величины шага по времени. Можно видеть, что при принятых параметрах этот период близок к таковому, определяемому частотой $1 + \alpha x_{C,S} \approx 1$, то есть 2π . Колебания, соответствующие кольцевой функции синуса, близки к синусу, а соответствующие кольцевой функции косинуса – к косинусу. Амплитуда колебаний составляет ± 1 , что характерно для косинуса и синуса.

После 15 ед. времени развиваются высокоамплитудные почти хаотические колебания. Здесь слегка прослеживается некоторая регулярность с тем же периодом 6 ед., однако хаотическая составляющая колебаний значительно преобладает, тем более, чем дальше идет время. Максимальная амплитуда колебаний здесь также равна ± 1 , однако присутствует множество колебаний значительно меньшей амплитуды. Проверка показывает, что такие высокоамплитудные хаотические колебания продолжают далее при любой протяженности времени.

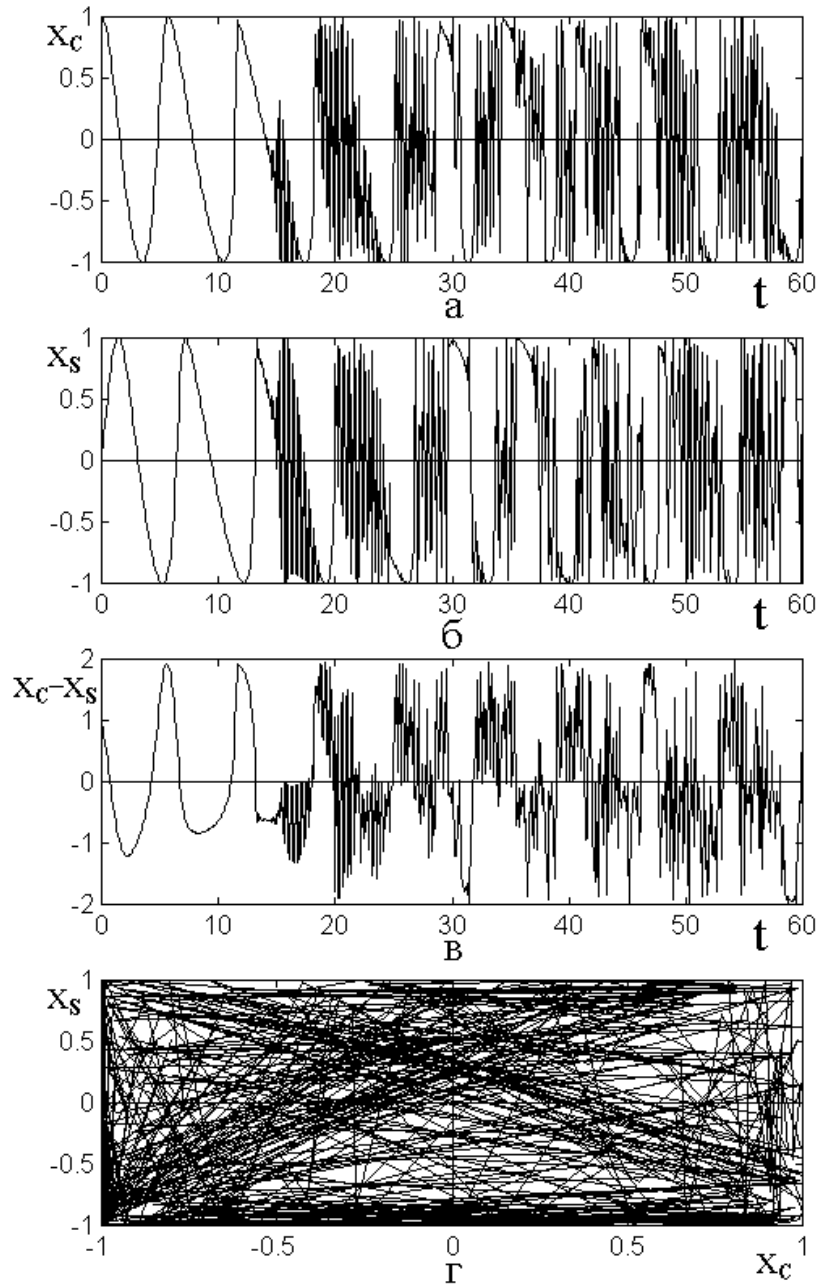


Рис.5. Развитие во времени и параметрический портрет имитационных колебаний. а – $x_C = \cos[(1 + \alpha x_C) t]$; б – $x_S = \sin[(1 + \alpha x_S) t]$; в – $x_C - x_S$; г – параметрический портрет $x_S(x_C)$.
 Параметры: $\alpha = 0,1$; $\Delta t = 0,1$.

На рис.5в том же масштабе по времени показана разность колебаний $x_C - x_S$. Видно, что до момента времени 15 ед. разность также претерпевает медленные колебания, период которых составляет те же 6 ед. После этого времени колебания приобретает хаотичность, по амплитуде даже более заметно

выраженную, чем на предыдущих рисунках. Амплитуда колебаний и здесь иногда достигает ± 2 ед., что соответствует случайным совпадениям фаз колебаний x_C и x_S .

На рис.5г показан параметрический портрет, образованный колебаниями x_C и x_S , в которых параметром является время. Видно, что траектории хаотическим образом заматают квадрат со сторонами, равными ± 1 , что соответствует полным амплитудам синуса и косинуса. Какой-либо упорядоченности в геометрии траекторий не наблюдается. Проверка показывает, что при увеличении времени хаотические траектории полностью заматают квадрат ± 1 , так что свободных участков на нем не остается.

Таким образом, из рис.5 видно, что переход от регулярных к хаотическим колебаниям происходит с запаздыванием, продолжающимся от нуля до 15 ед. времени. Однако в режиме запаздывания амплитуда колебаний имеет тот же порядок, что и после него, то есть в режиме хаоса. По этому параметру свойства запаздывания существенным образом отличаются от таковых для запаздывания в системе двух связанных осцилляторов, где в режиме запаздывания амплитуда почти на полтора-два порядка меньше амплитуды в режиме хаоса.

16. Кольцевые функции второго рода

В качестве имитационных кольцевых функций второго рода выберем следующие:

$$x_{n+1}^{(C)} = \cos \left[\left(\omega_n^{(C)} + \alpha x_n^{(C)} \right) (t_n + \Delta t) \right]; \quad (93)$$

$$x_{n+1}^{(S)} = \sin \left[\left(\omega_n^{(S)} + \alpha x_n^{(S)} \right) (t_n + \Delta t) \right], \quad (94)$$

где

$$\omega_n^{(C,S)} = \omega_{n-1}^{(C,S)} + \alpha x_{n-1}^{(C,S)}. \quad (95)$$

Параметры α и Δt полагаются заданными. Начало расчета соответствует $n = 0$. При этом время $t_0 = 0$, а также смещение $x_0^{(C,S)} = 0$. Для обеспечения

единства с функциями первого рода, начальное значение частоты ω_0 в обоих случаях удобно выбрать равным единице, то есть положить $\omega_0^{(C,S)} = 1$. При этом значение $x_1^{(C,S)}$ вычисляется по формулам (93) или (94), в которые подставляются $\omega_0^{(C,S)}$, $x_0^{(C,S)}$, t_0 . На следующем шаге, то есть при $n = 1$ значение $\omega_1^{(C,S)}$ вычисляется по формуле (95), которое подставляется далее в формулы (93) или (94). Далее процесс циклически повторяется.

Проверка показывает, что выбор $\omega_0^{(C,S)} = 1$ не является безусловным, так как он сказывается только на начальном участке развития колебаний, когда их форма еще близка к синусоидальной. Далее, то есть после прохождения такого участка, колебания при любом выборе ω_0 развиваются совершенно одинаковым образом. Следует заметить однако, что в формуле (94) начальное значение ω_0 должно быть отличным от нуля, так как в противном случае величина $x_n^{(S)}$ при любом времени получается равной нулю. В остальном выбор ω_0 в известной степени может быть произвольным.

Алгоритм вычисления значений t, ω, x для двух последовательных шагов n и $n + 1$ имеет вид:

Шаг n :

Получение с предыдущего шага: $t = t_n; \omega = \omega_n$

Вычисление: $x_n = \cos(\omega_n t_n)$.

Вывод: t_n, ω_n, x_n .

Вычисление: $\omega_{n+1} = \omega_n + \alpha x_n; t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Шаг $n + 1$:

Получение с предыдущего шага: $t = t_{n+1}; \omega = \omega_{n+1}$.

Вычисление: $x_{n+1} = \cos(\omega_{n+1} t_{n+1})$.

Вывод: t_{n+1} , ω_{n+1} , x_{n+1} .

Вычисление: $\omega_{n+2} = \omega_{n+1} + \alpha x_{n+1}$; $t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Для простоты обозначений функции (93) и (94) далее будем записывать в виде:

$$x_C = \cos[(\omega + \alpha x_C) t]; \quad (96)$$

$$x_S = \sin[(\omega + \alpha x_S) t]. \quad (97)$$

Рассмотрим развитие этих функций во времени, для чего обратимся к рис.6.

На рис.6а и рис.6б приведены развертки по времени имитационных колебаний, имеющих вид косинуса (96) и синуса (97). Видно, что в обоих случаях, кроме начального участка, полностью релаксирующего ко времени 10 ед., амплитуда смещения падает практически до нуля и остается таковой вплоть до времени 25 ед., что и представляет собой ярко выраженный эффект запаздывания. После этого происходит резкий рост амплитуды колебаний практически до единицы, то есть до максимальной величины, доступной синусу или косинусу. В промежутке времени от 26 до 38 ед. колебания носят упорядоченный характер, после чего резко переходят в хаос такой же амплитуды. Проверка показывает, что такие высокоамплитудные хаотические колебания продолжают далее при любой протяженности времени.

На рис.6в в том же масштабе по времени показана разность колебаний $x_1 - x_2 = \cos[(\omega + \alpha x_1) t] - \sin[(\omega + \alpha x_2) t]$. Видно, что до момента времени 25 ед. разность равна нулю (кроме небольшого начального участка релаксации). В этом месте наблюдается небольшой короткий всплеск, после которого до времени 30 ед. колебаний x_1 и x_2 снова равняются друг другу. Такое равенство нулю соответствует участку регуляризации колебаний на развертках (а) и (б), то есть здесь колебания полностью идентичны. Далее со времени 38 ед. развивается хаос, то есть x_1 и x_2 уже не повторяют друг друга,

а отличаются случайным образом, то есть хаос для синуса и косинуса полностью различается. Амплитуда колебаний и здесь иногда достигает ± 2 ед., что соответствует случайным совпадениям фаз колебаний x_1 и x_2 .

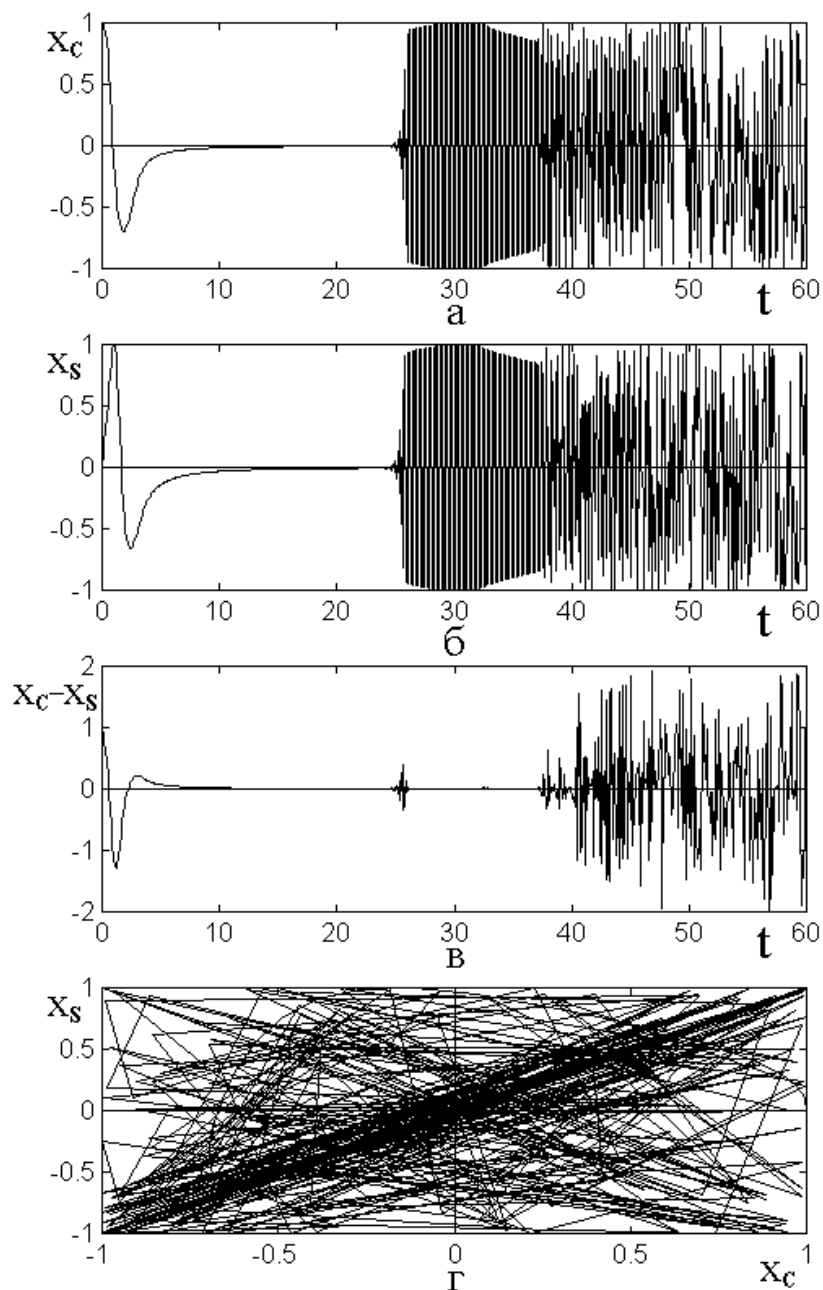


Рис.6. Развитие во времени и параметрический портрет имитационных колебаний. а – $x_C = \cos[(\omega + \alpha x_C) t]$; б – $x_S = \sin[(\omega + \alpha x_S) t]$; в – $x_C - x_S$; г – параметрический портрет $x_S(x_C)$.
 Параметры: $\omega = 1, \alpha = 0,1$.

На рис.6г показан параметрический портрет, образованный колебаниями x_1 и x_2 , в которых параметром является время. Видно, что траектории хаотическим образом заметают квадрат со сторонами, равными ± 1 , что соответствует полным амплитудам синуса и косинуса. Какой-либо упорядоченности в геометрии траекторий не наблюдается, кроме в некоторой степени выделенной диагонали, образованной участками разверток, где они имеют регулярный характер. Проверка показывает, что при увеличении времени хаотические траектории полностью заметают квадрат ± 1 , так что свободных участков на нем не остается.

Таким образом, из рис.6 видно, что развитие высокоамплитудных колебаний происходит с запаздыванием, продолжающимся от 5 до 25 ед. времени, после чего амплитуда колебаний резким скачком увеличивается до максимума. Такой характер явлений наиболее соответствует высокоамплитудному хаосу и запаздыванию, проявляющемуся в системе двух связанных осцилляторов. Таким образом, имитацию возбуждения высокоамплитудного хаоса и запаздывания с помощью колебательной кольцевой функции второго рода можно считать довольно удачной.

Главным преимуществом такой имитации в сравнении с традиционным решением системы (34)-(35) является крайняя простота и высокая наглядность. То есть можно надеяться, что и рассмотрение хаоса с запаздыванием на основе кольцевой функции будет более простым и доступным. В связи с этим рассмотрим далее эти процессы для кольцевой функции более подробно. Предварительно вкратце остановимся на влиянии величины шага по времени на полученные результаты, после чего основное внимание обратим на начало формирования процесса запаздывания, а также выхода из него с переходом к режиму высокоамплитудного хаоса.

17. Влияние величины шага на развитие кольцевой функции во времени

Заметим, что проведенное здесь и в предыдущем разделе рассмотрение выполнено в предположении, что кольцевую функцию можно рассчитывать по шагам, подобно отображению. При этом, поскольку дискретным здесь

принимается время, а не переменная x , то можно ожидать, что изменение шага может влиять на развитие функции во времени. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

В самом деле, чистая кольцевая функция соответствует пределу пошаговой функции при $\Delta t \rightarrow 0$. В приведенных примерах основной шаг – 0,1. При уменьшении шага до 0,01 время запаздывания уменьшается на 1,5 ед. времени (то есть при времени запаздывания 25 уменьшается на 6%), а при дальнейшем уменьшении шага вплоть до 0,01 уменьшается на 0,1 ед. времени (то есть на 0,4%). То есть, можно считать, что начиная с достаточно малого шага (при периоде синусоиды около 2 ед. времени, начиная с момента, когда на периоде синусоиды укладывается 200 шагов) развитие колебаний во времени практически не меняется, то есть от величины шага не зависит.

Таким образом, можно считать, что расчет кольцевых функций пошаговым методом при достаточно малой величине шага является вполне допустимым.

18. Начало развития запаздывания высокоамплитудных колебаний

Рассмотрим формирование запаздывания развития высокоамплитудных колебаний на примере кольцевой функции вида $x = \cos[(\omega + \alpha x) t]$. Поскольку уравнение всего одно, то нижним индексом будем обозначать не номер осциллятора, а момент времени. Обратимся к рис.7, где показано развитие во времени основных составляющих этой функции.

Основные начальные параметры следующие: начальная точка по времени: $t = t_0$, где $t_0 = 0$; начальное значение частоты: $\omega_0 = 0$. При этом: $\omega t = 0$; $x_0 = \cos(\omega t) = 1$. Кривые 1 и 2 выходят из точки 0, кривая 3 – из точки 1.

Рассмотрим развитие колебаний последовательно по времени.

Время $t = t_1$. Предположим, что это – один шаг по времени. При этом: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha x_0$, так что $\omega_1 = \alpha$, где $\alpha > 0$, так что частота возрастает, как

это видно из кривой 2. Поскольку время тоже возрастает до величины t_1 , то ωt (кривая 1) возрастает пропорционально $\alpha x_0 t_1$. Смещение равно $x_1 = \cos(\omega_1 t_1)$, где $\omega_1 t_1 > 0$, так что x убывает.

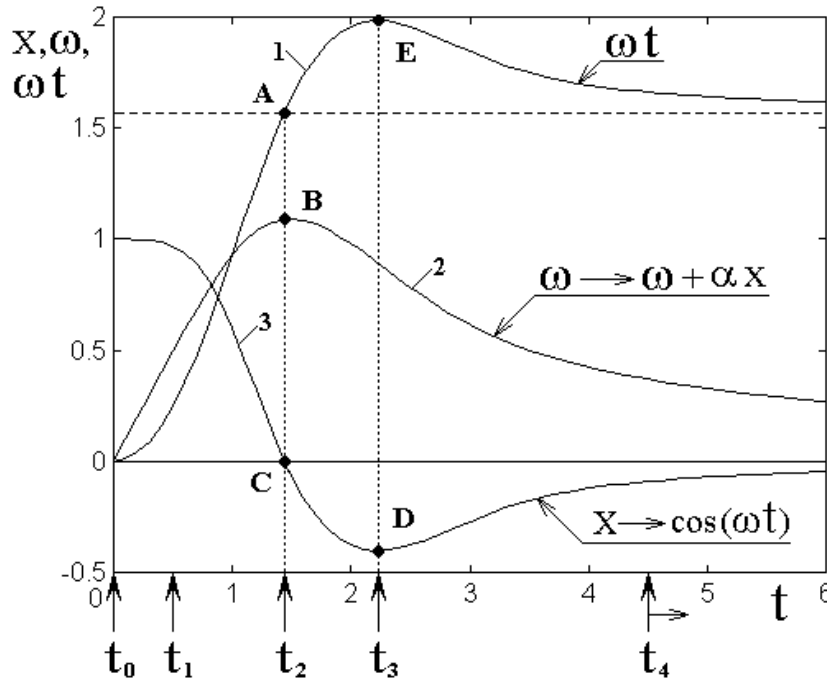


Рис.7. Развитие во времени основных составляющих кольцевой функции. Горизонтальная пунктирная линия соответствует ординате, равной $\pi/2$. Пояснения остальных обозначений даны в тексте.

Время $t = t_2$. Это время определяется тем, что величина ωt выросла до $\pi/2$ (точка А), так что смещение x_2 , равное косинусу этой величины, упало до нуля. При этом частота перестает увеличиваться, так как ее приращение, определяемое величиной αx_2 , падает до нуля.

Время между t_2 и t_3 . После того, как время прошло точку t_2 , смещение x становится отрицательным, так что добавка к частоте, определяемая как αx , также становится отрицательной, в результате чего частота уменьшается. Таким образом, кривая 2 в точке В проходит через свой максимум, после чего спадает. Величина ωt пока еще растет, но ее рост замедляется, так как, хотя время и увеличивается, но частота уменьшается. Когда падение частоты

становится столь большим, что увеличение времени не может его пересилить, рост кривой 1 прекращается и она достигает максимума в точке E. Между точками A и E кривая 1 проходит выше величины $\pi/2$ (горизонтальная пунктирная линия), так что $\cos(\omega t)$ является отрицательным, что и наблюдается для кривой 3, соответствующей смещению. Однако после точки E кривая 1 начинает спадать, так что смещение $x = \cos(\omega t)$, пройдя через свой минимум в точке D, возрастает.

Таким образом, время $t = t_3$ соответствует максимуму кривой 1 и минимуму кривой 3. При этом кривая 2 продолжает монотонно спадать без каких-либо заметных особенностей.

Рассмотрим теперь дальнейшее развитие времени. Следующая после точки t_3 точка t_4 носит условный характер и отражает лишь стремление времени в сторону дальнейшего увеличения на значительную величину. При времени больше t_3 , поскольку смещение x остается отрицательным, то частота продолжает убывать, постепенно стремясь к нулю. В результате такого уменьшения частоты величина ωt также уменьшается, так что увеличение времени по-прежнему не может спад частоты компенсировать. Величина ωt стремится к $\pi/2$ (горизонтальная пунктирная линия), однако не может эту линию пересечь, так как при этом смещение x станет положительным и частота обязана будет увеличиться. Такое увеличение частоты приведет к росту кривой 1, так что она снова будет вынуждена убраться выше пунктирной линии. То есть имеет место определенное противоречие: стремление кривой 1 опуститься ниже пунктирной линии заставляет ее подняться выше. В такой противоречивой борьбе кривая 1 стремится как можно ближе подойти к пунктиру, кривая 3 выйти на нулевую линию, а кривая 2 также стремится к нулю. Такой противоречивый баланс продолжается довольно долго, что и проявляется как запаздывание развития высокоамплитудных колебаний.

В общих чертах можно полагать, что выход из состояния баланса происходит тогда, когда кривой 3 все же удастся пересечь линию $\pi/2$. Такое пересечение происходит из-за дискретного характера изменения времени. То есть между следующими друг за другом шагами по времени участок кривой 3 представляет собой прямую линию, продолжение которой все же упирается в уровень $\pi/2$. Такой перескок приводит к резкому лавинообразному росту смещения с соответствующим ростом частоты и колебания приобретают высокоамплитудный характер.

Такова общая довольно грубая картина выхода из режима запаздывания. Однако проверка показывает, что дело обстоит намного сложнее. Более подробно процесс выхода рассматривается далее.

19. Выход из режима запаздывания высокоамплитудных колебаний

В предыдущем разделе на примере кольцевой функции вида $x = \cos[(\omega + \alpha x)t]$ показана динамика развития режима запаздывания. Приведено развитие во времени основных составляющих кольцевой функции. Отмечено, что запаздывание может быть достаточно длительным.

Рассмотрим теперь, как происходит выход из режима запаздывания, переходящий в развитие высокоамплитудных колебаний. Обратимся к рис.8, где показано развитие во времени тех же составляющих кольцевой функции, что и на рис.7, но теперь уже по прошествии достаточно большого промежутка времени. Вычисление функций произведено с шагом по времени равным $0,1$ ед.

Время t_0 не привязано жестко к какому-то моменту, важно лишь, что оно соответствует пребыванию системы в режиме запаздывания.

Время t_1 соответствует началу осцилляций рассматриваемых функций, то есть тому моменту, когда такие осцилляции становятся достаточно заметными (составляют несколько процентов от установившейся ранее величины).

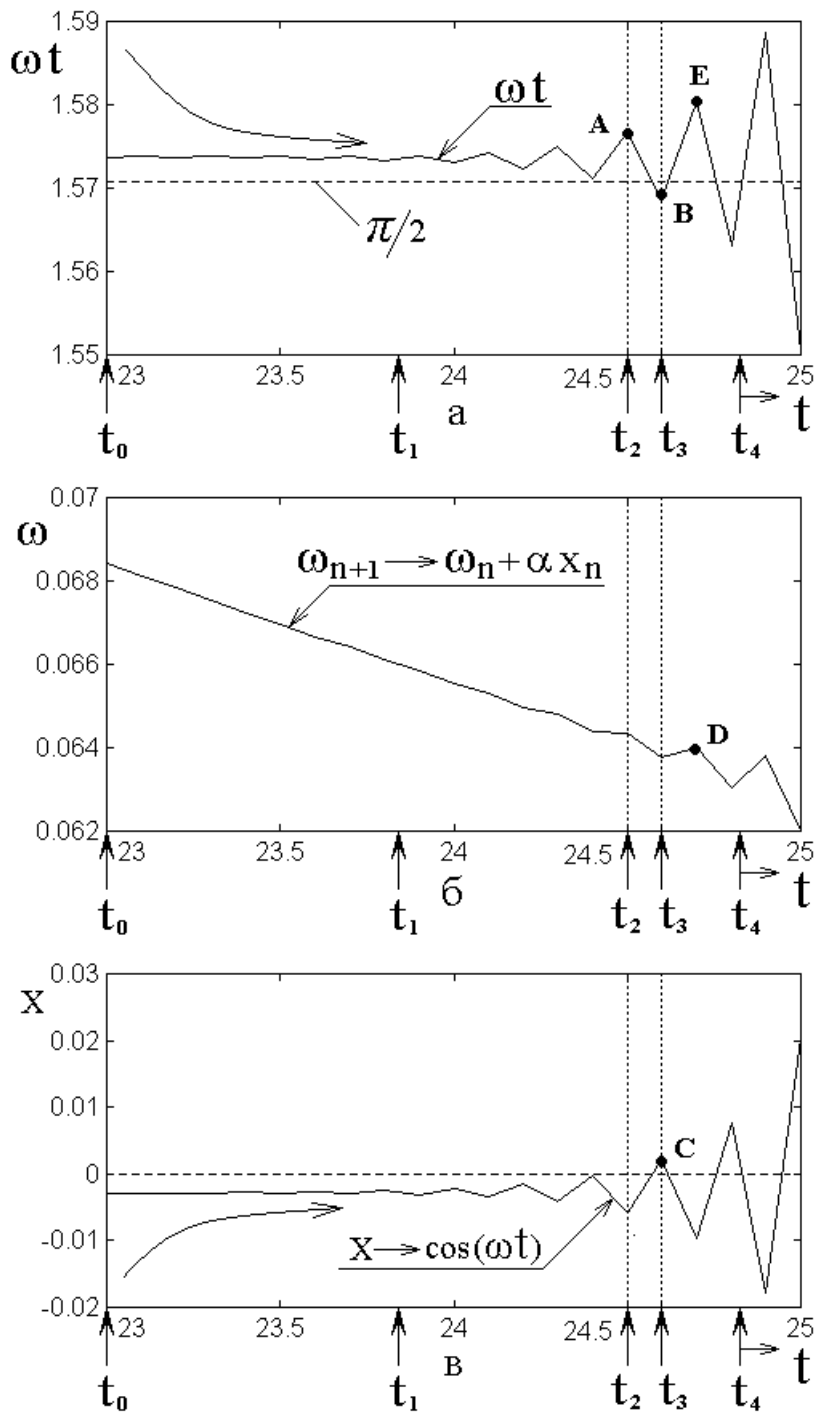


Рис.8. Схема выхода из режима запаздывания. Развитие во времени основных составляющих кольцевой функции. Пояснения обозначений даны в тексте.

Моменты времени t_2 и t_3 соответствуют тому шагу по времени, на котором происходит перескок функции ωt (рис.8а) через величину $\pi/2$, так что косинус, определяющий функцию x (рис.8в), становится положительным. С этого момента начинается резкий рост амплитуды колебаний.

Время t_4 к какому-то характерному моменту жестко не привязано и отражает просто дальнейшее увеличение времени вплоть до бесконечности.

В промежутке времени от t_0 до t_1 представленная на рис.8а функция ωt , стремится к величине $\pi/2$ сверху, однако это стремление крайне медленное. Функция ω (рис.8б) медленно спадает почти линейным образом. Функция $x \rightarrow \cos(\omega t)$ (рис.8в), медленно приближается к нулю, причем в силу того, что $\omega t > \pi/2$, остается отрицательной.

Уменьшение функции ω (рис.8б) обусловлено тем, что на каждом шаге к ней добавляется величина αx , где $\alpha > 0$, а $x < 0$ (рис.8в), так что добавка αx является отрицательной.

В формировании функции ωt кроме убывающей величины ω участвует нарастающая величина t , так что их уравнивание приводит к почти горизонтальному характеру зависимости ωt от времени. Но с течением времени абсолютная величина добавки αx постепенно уменьшается (так как $x \rightarrow 0$), так что в формировании функции ωt время t начинает преобладать. Такое преобладание проявляется в образовании осцилляций функции ωt , которые с течением времени между t_1 и t_2 постепенно растут. Осцилляции происходят в такт с шагами по времени, в результате чего имеют характер треугольных импульсов, нарастание и спад которых соответствуют одному шагу по времени, то есть полная длительность импульса получается равной длительности двух шагов по времени.

Критическое положение наступает на шаге по времени между t_2 и t_3 , когда функция ωt перескакивает через рубеж, равный $\pi/2$. Такой перескок на рис.8а соответствует переходу от точки А к точке В. При этом косинус, образующий функцию x , становится положительным, что на рис.8в соответствует переходу к точке С. Изменение знака x приводит к изменению знака добавки к частоте αx , так что эта добавка становится положительной, в

результате чего спад функции ω прекращается и сменяется нарастанием, так что величина ω на следующем шаге приобретает значение, на рис.8б обозначенное буквой D. Такой рост частоты приводит к росту функции ωt , которая приобретает значение, обозначенное на рис.8а буквой E.

Ввиду того, что это значение достигнуто при росте не только времени t , но и частоты ω (тогда как значение A достигнуто при росте только времени) оно значительно превышает значение, соответствующее точке A.

Таким образом, система возвращается в ту же ситуацию, что и в точке A, но теперь на значительно более высоком уровне. Далее происходит тот же цикл развития всех функций, подобный таковому, исходящему из точки A. Значение функции ωt еще более увеличивается, так что происходит как бы лавинообразный процесс увеличения амплитуды колебаний, характеризуемый резким ростом функции x , как это видно на правом краю рис.8в при времени t_4 .

Таким образом, происходит выход из режима запаздывания и резкий рост высокоамплитудных колебаний. Такой рост ограничивается только максимальной допустимой величиной косинуса, равной ± 1 , как это видно из рис.8а.

Итак, можно полагать, что «спусковым моментом» выхода из режима запаздывания является достижение осцилляций функции ωt величины, достаточной для перескока этой функции через значение $\pi/2$, что приводит к изменению знака косинуса с последующим ростом величины ω , увеличивающего рост той же функции ωt .

В заключение настоящего раздела следует сказать, что все рассмотренное здесь выполнено для функции вида $x = \cos[(\omega + \alpha x)t]$, содержащей косинус. В то же время, из раздела 1б видно, что такой же характер колебаний имеет место для функции вида $x = \sin[(\omega + \alpha x)t]$, содержащей синус. Подробное рассмотрение показывает, что все описанные здесь явления для синуса происходят полностью сходным образом. Единственное серьезное

отличие состоит в том, что функция ωt при увеличении времени стремится не к $\pi/2$, а к величине π , так же, как здесь, приближаясь сверху. При этом функция x (синус) также остается отрицательной и приближается к нулю снизу, а функция ω стремится к нулю сверху. В остальном повторение практически тождественное.

20. Критерии выхода из режима запаздывания

Исходя из изложенного, можно ввести критерии выхода из режима запаздывания, то есть такие значения переменных, по достижении которых амплитуда колебаний начинает увеличиваться лавинообразным образом.

Из рис.8в видно, что условием лавинного роста является положительность смещения x , то есть критерий имеет вид:

$$x > 0. \quad (98)$$

Можно видеть, что этот критерий достигается в точке С в момент времени t_3 .

Из рис.8а следует, что другим критерием может явиться пересечение кривой ωt уровня $\pi/2$, то есть:

$$\omega t < \pi/2. \quad (99)$$

Этот критерий достигается в точке В в тот же момент времени t_3 .

Преимуществом второго критерия является возможность определения критического значения времени. Однако определенность этого критерия меньше, чем первого, так как там все определяется только значением x , допускающим непосредственное измерение (по крайней мере, в рамках машинного эксперимента), тогда как здесь необходимо знать (или как-то измерить) величину ω , которая сама с течением времени изменяется. В качестве приближенного способа определения ω можно использовать зависимость $\omega(t)$, представленную на рис.8б, из которой видно, что в интервале от 23 до 25 ед. времени ω меняется мало, всего на $\pm 4,5\%$ около величины 0,065. Из рис.7 видно, что максимальное значение ω (в точке В) составляет около единицы (больше на 8%), так что в области окончания

запаздывания величина ω составляет около 7% от максимума. Подстановка значения 0,07 в формулу (99) дает время 22,4 ед., что довольно близко соответствует реальному значению $t_3 = 24,6$ ед. времени (отклонение вниз – около 9%).

Таким образом, можно видеть, что критерий (98) является независимым, а критерий (99) также пригоден для оценки времени окончания запаздывания с точностью единиц процентов.

21. Замечание об объективной точности полученных результатов

Представленное на рис.8 развитие колебаний соответствует увеличению времени шагами по 0,1 ед. времени. Эта величина является специфической в том отношении, что при изменении времени на один шаг изменение всех функций происходит ступенчатым образом, где величина ступеньки определяется величиной шага по времени. Изменение шага приводит к некоторому изменению полного времени запаздывания (раздел 17). Увеличение шага в 2-3 раза приводит к нарушению плавности изменения функций на начальном участке времени, представленном на рис.7. Уменьшение шага при стремлении его к нулю (проверено до 0,0001 ед. времени) приводит к стабилизации времени запаздывания на величине меньшей рассматриваемой здесь примерно на 10%. Однако при этом структура рисунка становится мелкой, что нарушает наглядность рассмотрения. Таким образом, принятая здесь величина шага в 0,1 ед. времени, полностью соответствуя физической картине явления, позволяет рассмотреть процесс достаточно наглядным образом.

22. Замечание о механизме треугольных осцилляций

Важнейшим моментом, приводящим к запуску «спускового механизма» роста амплитуды является развитие осцилляций вида треугольных импульсов, следующих в такт с шагами по времени.

Из рис.8а или рис.8в можно видеть, что такие осцилляции становятся заметными намного раньше, чем кривая ωt достигает значения $\pi/2$ или x

становится положительным.

Согласно рис.7, эффективное запаздывание начинается около 5 ед. времени. Из рис.8 видно, что оно заканчивается около 24,5 ед. времени. То есть полная протяженность времени запаздывания составляет около 20 ед. времени. При этом треугольные осцилляции развиваются только в промежутке от 23 до 24, 5 ед. времени. Попытки выявить следы осцилляций при временах менее 20 ед. времени, состоявшие в увеличении чувствительности наблюдения, сужении интервала времени наблюдения и уменьшении шага по времени к безусловному успеху не привели.

В то же время, из рассмотрения осцилляций на подходе к моменту лавинообразного роста, было установлено, что их амплитуда нарастает ускоряющимся образом (как это видно из рис.8а и рис.8в) еще задолго до момента пересечения критического уровня (то есть для ωt величины $\pi/2$, а для x – нуля).

То есть можно полагать, что имеется какой-то более глубокий механизм, обуславливающий момент возникновения и дальнейший рост этих осцилляций. Авторы осмеливаются высказать предположение, что подробное исследование такого механизма может составить предмет для отдельной работы.

Замечание. Заметим, что вариация шага по времени, особенно его уменьшение, приводит к проявлению некоторых дополнительных особенностей рассматриваемого явления. Так, уменьшение шага до 0,0001 ед. времени приводит к некоторому «размазыванию» зависимости для x , так что на ней появляются осцилляции крайне малой амплитуды (менее 1 % от средней величины), меняющейся хаотическим образом в такт с шагом по времени. Такая «размазка» наблюдалась во всем промежутке времени запаздывания. Однако проверка показала, что эти осцилляции связаны с предельными возможностями разрядной сетки используемого компьютера, так как при переходе к режиму двойной точности осцилляции полностью сгладились. При расчете такую особенность надо учитывать, чтобы не принять ложные

осцилляции за истинные. В простейшем варианте все вновь появляющиеся осцилляции следует проверять в режиме двойной точности.

23. Некоторые замечания о возможном развитии работы

Главным результатом настоящей работы можно считать более или менее подробное рассмотрение кольцевого взаимодействия двух осцилляторов в связи с явлением запаздывания развития высокоамплитудного хаоса. Показана возможность успешной имитации таких явлений на основе единой функции кольцевого характера, допускающей расчет крайне простой и наглядный.

Отметим некоторые моменты, которые, по мнению авторов, следовало бы исследовать подробнее.

По-видимому, главной задачей, остающейся без решения, является модельное представление продолжительности интервала запаздывания. Такой вопрос уже обсуждался в работах [60, 61], однако он все еще требует более подробного рассмотрения.

Здесь этот вопрос может быть расширен не только на систему из двух осцилляторов, но и на кольцевые функции, а также дополнен исследованием интервала регулярности в системе Лоренца.

Далее следует отметить, что проведенное в разделах 6, 7 исследование системы Лоренца является весьма поверхностным, значительно менее подробным, чем выполненное в работах [59-61] исследование системы (28)-(29), поэтому многие особенности остаются невыясненными.

Так, предварительная проверка показывает, что режим регулярности и амплитуда последующего хаоса весьма мало зависят от начального смещения, так что почти не меняются при изменении смещения на порядок в ту и другую сторону. Изменение параметра σ на единицы процентов приводит к изменению длительности начального интервала регулярности в заметно большем отношении. В работе [5, стр.260-262] приведен обзор основных исследований поведения фазовых траекторий, выявлены критические значения параметров, приводящие к переходу обычного аттрактора в стохастический, однако начальный интервал регулярности оставлен без внимания.

Можно полагать, что определенным упрощающим действием было бы выделение из системы Лоренца, записанной в виде двух уравнений, «первичного ядра», подобного таковому, выделенному из системы для двух осцилляторов в работе [59]. Необходимым требованием на этом пути было бы сохранение режима первичной регулярности и следующего за ним режима хаоса в сочетании с предельным возможным упрощением системы.

По-видимому, интересно было бы также систематически проследить, как скажется на характере развития колебаний более высокая степень переменной x_1 в слагаемом нелинейной связи в системах типа (26)-(27) и (28)-(29) (то есть, например, в виде $x_1^\alpha x_2$, где $\alpha = 3, 4$ и более). Можно предполагать, что при четном значении α будет реализовываться режим запаздывания, а при нечетном – режим начальной регулярности. Авторы осмеливаются выразить надежду, что более подробное исследование системы Лоренца в плане интервала регулярности, а также обеих систем при более высоких степенях переменной x_1 , может составить предмет для отдельной работы.

Заключение

Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основной задачи является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Отмечено, что при определенных условиях колебания в таких системах принимают характер нестационарного высокоамплитудного хаоса, возбуждающегося со значительным запаздыванием после включения системы. Основное внимание уделено кольцевому характеру развития нестационарных колебаний, в том числе введены в рассмотрение кольцевые функции, реализующие эффект запаздывания в наиболее простом виде.

В основании настоящего исследования лежит полученная в первой части работы достаточно общая система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде степенных функций до третьего порядка. На основе сравнения входящих в систему коэффициентов с реальными параметрами физических задач, из нее была выделена фундаментальная система, отражающая основные свойства наблюдаемых в эксперименте явлений. В результате устранения второстепенных параметров из фундаментальной системы была выделена укороченная система – «первичное ядро», сохраняющее свойство нестационарного запаздывания и хаоса. Первое уравнение такой системы связано со смещением первого осциллятора и содержит вторую производную от такого смещения по времени, слагаемое кубической нелинейности и слагаемое нелинейной связи, пропорциональное произведению квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Второе уравнение связано со смещением второго осциллятора и содержит вторую производную от такого смещения по времени и слагаемое линейной связи, пропорциональное смещению первого осциллятора. При наличии во втором уравнении потенциального слагаемого система является колебательной, а при его отсутствии – релаксационной. При этом в обоих случаях запаздывание и высокоамплитудный хаос имеют одинаковый характер. Отмечено, что главную роль в образовании высокоамплитудного хаоса с запаздыванием играет слагаемое нелинейной связи первого осциллятора.

Выявлен кольцевой характер укороченной системы, состоящий в том, что определяемое первым уравнением смещение первого осциллятора воздействует на смещение второго осциллятора через линейную связь второго уравнения, а получаемое при этом смещение второго осциллятора снова возвращается в первое уравнение через слагаемое нелинейной связи первого уравнения. При этом полная связь уравнений между собой образует как бы «кольцо», замкнутое само на себя. Относительно первого осциллятора в этом кольце имеется «посредник» – второй осциллятор, который здесь играет подчиненную роль.

Было отмечено, что причиной хаоса и запаздывания является кольцевой характер системы уравнений, причем роль замыкания через кольцо может играть вспомогательная функция, моделирующая этот кольцевой характер.

Рассмотрено последовательное действие осцилляторов друг на друга в схеме разомкнутого кольца. Показано, что воздействие синусоидального сигнала постоянной амплитуды на второй осциллятор, имеющий потенциальную составляющую, приводит к возбуждению колебаний второго осциллятора, имеющих характер биений, частота которых равна разности частот возбуждающего сигнала и собственных колебаний второго осциллятора. Воздействие таких биений на первый осциллятор приводит к сильно запаздывающему возбуждению хаотических колебаний, причем время запаздывания может в несколько раз превышать период биений. Отмечено, что время запаздывания и характер хаоса напрямую с периодом биений не связаны, однако время запаздывания весьма чувствительно к фазе возбуждения относительно момента начала колебаний. Отмечено ограничение модели кольца, состоящее в том, что она успешно действует в рамках только одного прохода по кольцу. Другим ограничением является неприменимость модели в случае релаксационного характера второго осциллятора, то есть при отсутствии во втором уравнении потенциального слагаемого, так как это не допускает формирования биений.

Рассмотрена возможность существования кольца в классической системе Лоренца, допускающей хаотические колебания. Отмечено, что в классическом случае, когда такая система состоит из трех уравнений первого порядка, кольцевой ее характер в явном виде не просматривается. Путем замены переменных выполнено преобразование системы из трех уравнений первого порядка к эквивалентной системе из двух уравнений, одно из которых имеет второй порядок, а другое – первый. Показано, что преобразованная таким образом система Лоренца является частным случаем общей системы, полученной для задачи о двух осцилляторах. Для такой системы установлен кольцевой характер, при котором уравнение первого порядка для второго

осциллятора является «посредником» по отношению к уравнению второго порядка для первого осциллятора.

Для системы Лоренца, записанной в виде двух уравнений, рассмотрено развитие колебаний первого осциллятора во времени. Установлено, что колебания приобретают хаотический характер не сразу после включения возбуждения, а по прошествии определенного промежутка времени, в течение которого колебания имеют регулярный характер с постепенно возрастающей амплитудой. Отмечена аналогия между интервалом регулярности колебаний в системе Лоренца и интервалом запаздывания в системе для двух осцилляторов. Показано, что продолжительность каждого из этих интервалов может значительно (на порядок и более) превышать период собственных колебаний первого осциллятора. Отмечена родственность формирования таких интервалов в обеих системах, состоящая в наличии слагаемого нелинейной связи в уравнении для первого осциллятора. Отмечено, что различие в характере интервалов обусловлено тем, что нелинейная связь в системе Лоренца обусловлена смещением первого осциллятора в первой степени, а в системе для двух осцилляторов – во второй. Таким образом, показано, что классическая система Лоренца, записанная в виде двух уравнений, имеет кольцевой характер, подобный таковому в системе для двух осцилляторов, причем развитие высокоамплитудного хаоса в системе Лоренца сопровождается задержкой в виде интервала регулярности, подобной задержке в системе для двух осцилляторов в виде интервала запаздывания.

Рассмотрены возможные способы решения релаксационной системы уравнений для двух осцилляторов. В качестве первого отмечено использование подстановочной функции, преобразующей дифференциальные уравнения в алгебраические. В качестве второго отмечено численное решение пошаговым методом, наиболее употребительным из которых является метод Рунге-Кутты. Отмечено, что ввиду высокой сложности системы метод подстановки неприменим, так что пошаговый метод остается единственным возможным.

Показана возможность сведения релаксационной системы, содержащей два уравнения второго порядка, к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Выявлена крайне высокая сложность полученного уравнения, вынуждающая использование для решения пошагового метода.

Подробно рассмотрен кольцевой характер релаксационной системы для двух осцилляторов. Предложен алгоритм пошагового расчета, имеющий двухступенчатый характер, первая ступень которого состоит в прохождении первой половины кольца, образованной первым уравнением, а вторая – в прохождении второй половины кольца, образованной вторым уравнением.

Отмечена возможность представления системы из двух уравнений в виде, каждое из уравнений которого содержит выделенную из соответствующего уравнения собственную переменную, приравненную к остальной части того же уравнения. Для такого представления каждое из уравнений должно быть разрешено относительно одной из своих переменных. То есть из первого исходного уравнения смещение первого осциллятора должно быть выражено через смещение второго, а из второго исходного уравнения смещение второго осциллятора должно быть выражено через смещение первого. Отмечен кольцевой характер такого представления. Показано, что подстановка второй переменной из второго уравнения в первое приводит к уравнению, содержащему только первую переменную. Полученное при этом уравнение названо «кольцевым уравнением», а его решение – «кольцевой функцией». Показано, что кольцевое уравнение в левой части содержит только одну собственную переменную в явном виде, а в правой – достаточно сложную функцию от той же переменной. Отмечено, что кольцевое уравнение, будучи образованным из обоих исходных уравнений, должно сохранять те же свойства колебаний, что и исходная система.

Установлено, что ввиду сложности кольцевого уравнения, единственным способом его решения является пошаговый. При этом значение переменной на данном шаге определяется через функцию, содержащую ту же переменную, полученную на предыдущем шаге. Отмечена аналогия такого решения с

расчетом дискретных одномерных отображений. Выявлена значительная простота пошагового расчета отображений по сравнению с методом Рунге-Кутты, обусловленная отсутствием необходимости расчета производных.

На примере классического логистического отображения рассчитано развитие колебаний по шагам для ряда значений параметра, в том числе охватывающих регулярный затухающий, регулярный стационарный и хаотический режимы. Установлено, что для логистического отображения запаздывание по шагам отсутствует.

Отмечена возможность решения кольцевого уравнения, то есть расчета кольцевых функций, тем же пошаговым методом, каким рассчитываются отображения. Отмечено, что сложность дифференцирования кольцевой функции, то есть вычисления ее производной, затрудняет применение метода Рунге-Кутты, оставляя только пошаговый метод, аналогичный применяемому для расчета отображений. Относительно релаксационной системы для двух осцилляторов установлено, что представление в виде кольцевого уравнения возможно только для второго уравнения, имеющего релаксационный характер. Ввиду сложности такого представления предложена конструкция кольцевого уравнения, левая часть которого содержит исходную переменную, а правая – колебательную функцию от той же переменной, в наиболее простом случае – синус или косинус.

Предложены два вида кольцевых функций – первого и второго рода, в качестве дискретно меняющейся переменной использующих время. Левая часть колебательных функций того и другого рода представляет собой переменную – смещение первого осциллятора на данном шаге. Правая часть содержит тригонометрическую функцию (синус или косинус), аргумент которой представляет собой произведение обобщенной частоты на время, соответствующие предыдущему шагу. Для кольцевой функции первого рода обобщенная частота пропорциональна смещению осциллятора плюс единица. Для кольцевой функции второго рода обобщенная частота пропорциональна смещению осциллятора плюс значение частоты, полученное на предыдущем

шаге. Отмечено, что пропорциональность между частотой и амплитудой смещения, свойственная кольцевым функциям, аналогична линейному соотношению между теми же параметрами, имеющему место для колебательного уравнения с кубической нелинейностью, являющемуся основой уравнения для первого осциллятора в системе для двух осцилляторов.

Рассмотрена возможность имитации возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием на основе кольцевых функций. Рассмотрено развитие колебаний во времени, описываемое кольцевыми функциями первого рода на основе синуса и косинуса. Приведен алгоритм расчета, подобный таковому, применяемому для отображений. Показано, что колебания во времени развиваются в два этапа. В течение первого колебания представляют собой регулярную синусоиду, период которой определяется начальным значением частоты. В течение второго этапа на регулярную синусоиду накладываются колебания со значительно меньшим периодом, имеющие хаотический характер. В продолжение обоих этапов максимальная амплитуда колебаний равна единице, что определяется максимальным значением синуса или косинуса. Параметрический портрет, образованный парой функций, одна из которых соответствует синусу, а другая косинусу, представляет собой квадрат со сторонами в две единицы, сплошь замазанный траекториями, имеющими хаотический характер.

Рассмотрено развитие колебаний во времени, описываемое кольцевыми функциями второго рода на основе синуса и косинуса. Приведен алгоритм расчета, подобный таковому, применяемому для отображений. Показано, что колебания во времени развиваются в два этапа. В течение первого этапа после первого кратковременного выброса колебания прекращаются, причем смещение становится крайне малым, значительно меньшим единицы и на протяжении довольно длительного времени не меняется. Второй этап начинается с резкого выброса амплитуды вплоть до значения, равного единице, после чего развиваются регулярные колебания с крайне малым периодом, вскоре переходящие в хаос с единичной амплитудой, по времени

продолжающийся до бесконечности. Таким образом, первый этап представляет собой запаздывание, а второй – развитие высокоамплитудного хаоса, что подобно запаздыванию и развитию высокоамплитудного хаоса в системе из двух осцилляторов. Параметрический портрет, образованный парой функций, одна из которых соответствует синусу, а другая косинусу, представляет собой квадрат со сторонами в две единицы, сплошь замазанный траекториями, имеющими хаотический характер.

В результате проделанного рассмотрения показано, что кольцевые функции второго рода обеспечивают удобную имитацию запаздывания и развития высокоамплитудного хаоса в системе из двух осцилляторов.

Для кольцевой функции второго рода рассмотрено начало развития запаздывания высокоамплитудных колебаний, а также его окончание и переход к высокоамплитудному хаосу. Предложена модель, состоящая в борьбе между стремлением аргумента функции с течением времени уменьшиться до величины $\pi/2$ и ростом смещения, стремящегося этот аргумент увеличить, так что баланс между этими стремлениями продолжается достаточно долго, что и обеспечивает запаздывание развития колебаний. Выход из запаздывания и начало возбуждения высокоамплитудных колебаний происходит через нарушение такого баланса, обусловленного возбуждением колебаний треугольной формы, амплитуда которых, начиная с нуля, постепенно увеличивается до величины, достаточной для преодоления аргументом функции значения $\pi/2$, что приводит к лавинообразному росту амплитуды колебаний смещения. Таким образом, достижение аргумента кольцевой функции значения $\pi/2$ является критерием выхода из режима запаздывания и начала роста высокоамплитудного хаоса.

Приведены некоторые замечания о возможном развитии работы. В качестве важной задачи отмечена разработка модельного представления продолжительности интервала запаздывания. Этот вопрос может быть расширен не только на систему из двух осцилляторов, но и на кольцевые

функции, а также дополнен исследованием интервала регулярности в системе Лоренца. Отмечена также важность рассмотрения роли нелинейной связи высоких порядков, позволяющей обобщить полученные результаты на более широкий круг явлений.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

Литература

1. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. *Основы теории колебаний*. Москва, Наука. 1978.
2. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит. 2003.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. Москва, Наука. 1981.
4. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. Москва, Наука-Физматлит. 2000.
5. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. Москва, Наука. 1988.
6. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001.
7. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания*. Москва, Наука. 1987.
8. Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах*. Москва, Наука. 1990.
9. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. Москва, Физматлит, 2002.
10. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. *Генерация хаоса*. Москва, Техносфера. 2012.
11. Мелчер Дж., Эйрс В., Вертенен П. Удвоение частоты с 9000 до 18000 МГц при помощи ферритов. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных*

- сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.44-55.
12. Скомел Е., Медина М. Исследование преобразования частоты в намагниченном феррите. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.56-59.
13. Джаффе Д., Качерис Дж., Караянис Н. Ферритовый детектор СВЧ. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.23.
14. Simon J.C., Broussaud G. Detection with microwave ferrites. *Compt. Rend. Acad. Sci.* 1954. Vol. 238. No.24. P.2294.
15. Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное детектирование магнитоупругих колебаний в режиме амплитудной модуляции. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2019. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar19/7/text.pdf>.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.3.7>.
16. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнестрикционного преобразователя. Умножение частоты в режиме релаксации. *РЭ*. 2019. Т.64. №5. С.487-489.
17. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнестрикционного преобразователя. Умножение частоты в непрерывном режиме. *РЭ*. 2019. Т.64. №6. С.604-618.
18. Плешев Д.А., Асадуллин Ф.Ф., Оганезова Н.А., Власов В.С., Котов Л.Н., Щеглов В.И. Особенности динамики магнитной и упругой подсистем в тонкой ферритовой пленке при магнестрикционном преобразовании частот. *Известия РАН. Серия Физическая*. 2019. Т.83. №7. С.987-989.
19. Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Детектирование частотно-модулированного СВЧ сигнала с помощью магнестрикционного преобразователя. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul20/3/text.pdf>.

<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.3>.

20. Плешев Д.А., Котов Л.Н., Власов В.С., Щеглов В.И. *Преобразование частоты при акустическом резонансе в ферритах*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2019.
21. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.163.
22. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971.
23. Львов В.С. *Нелинейные спиновые волны*. Москва, Наука. 1987.
24. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. *УФН*. 1974. Т.114. №4. С.609.
25. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order. *Rev. Mod. Phys.* 2010. Vol.82. No.3. P.2731.
26. Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M., Huebl H., Gross R., Brandt M.S., Goennenwein S.T.B. Surface acoustic wave driven ferromagnetic resonance in nickel thin films: theory and experiment. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol.86. No.13. P.134415(13).
27. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. Vol.525. No.1-2. P.2.
28. Jäger J.V., Scherbakov A.V., Linnik T.I., Yakovlev D.R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S.A., Akimov A.V., Rushforth A.W., Bayer M. Picosecond inverse magnetostriction in garfenol thin films. *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol.103. No.3. P.032409(5).
29. Thevenard L., Gourdon C., Prieur J.Y., Von Bardeleben H.J., Vincent S., Becerra L., Largeau L., Duquesne J.Y. Surface-acoustic-wave-driven ferromagnetic resonance in (Ga,Mn)(As,P) epilayers. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol.90. No.9. P.094401(8).
30. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics. *J. Appl. Phys.* 2016. Vol.120. No.14. P.140901(16).

31. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V.S., Lomonosov A.M., Temnov V.V., Tobey R.I. Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol.94. No.2. P.024415(7).
32. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитоэластических волн. *ФТТ*. 2016. Т.58. №6. С.1093.
33. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
34. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Колебания намагниченности в магнитоупругой среде при ударном воздействии упругого смещения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2018. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2018.4.3>.
35. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Излучение электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии фемтосекундного импульса света. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.6.14>.
36. Comstock R.L., LeCraw R.C. Generation of microwave elastic vibrations in a disk by ferromagnetic resonance. *J. Appl. Phys.* 1963. Vol.34. No.10. P.3022.
37. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction. *JAP*. 1964. Vol.35. No.8. P.2382.
38. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: Мэзон У., ред. *Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки*. Москва, Мир. 1968. С.156.

39. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2009. Т.54. №7. С.863.
40. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2013. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.
41. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *РЭ*. 2014. Т.59. №5. С.482.
42. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. Гуревича А.Г. Москва, ИЛ. 1961. С.281.
43. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомодационный режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе. *Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие»*. Москва-Фирсановка, Издание МЭИ. 2009. С.100.
44. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гироманитным. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.248.
45. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2013. №11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.
46. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей

магнитоупругими свойствами. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.188.

47. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, «НИУ МЭИ». 2013. С.199.
48. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2014. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
49. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, ИНФРА-М. 2015. С.202.
50. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. *РЭ*. 2015. Т.60. №1. С.79.
51. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. *РЭ*. 2015. Т.60. №3. С.297.
52. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.

53. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.
54. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/7/text.pdf>. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.7>.
55. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.
56. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
57. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.
58. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамический потенциал как модель нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. *Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. Москва, ИНФРА-М. 2018. С.243-253.
59. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 1. Общие положения. Формирование упрощенной

системы. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4.
<http://jre.cplire.ru/jre/apr21/4/text.pdf>.

<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.4>.

60. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 2. Воздействие осцилляторов друг на друга. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4.
<http://jre.cplire.ru/jre/apr21/5/text.pdf>.

<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.5>.

61. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 3. Кольцевое взаимодействие. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4.
<http://jre.cplire.ru/jre/apr21/6/text.pdf>.

<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.6>.

62. Харкевич А.А. *Основы радиотехники*. Москва, Физматлит. 2007.

63. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1973.

Для цитирования:

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 4. Кольцевое взаимодействие. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №4.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.7>