

УДК 621.396.674

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. П. Беличенко, М. А. Пономарева

Национальный исследовательский Томский государственный университет

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

Статья поступила в редакцию 28 июля 2017 г.

Аннотация. Предложен оригинальный метод решения задач о нестационарном излучении электромагнитных волн кольцевыми и дисковыми источниками. Особенностью этого метода является нетрадиционное введение системы координат, связанной с источником. При этом решения задач получаются с использованием элементарного математического аппарата и допускают наглядную физическую интерпретацию. На основе сравнения данного метода с известными показаны его преимущества.

Ключевые слова: нестационарное излучение, кольцевой и дисковый источники.

Abstract. An original method of solving problems of non-stationary radiation of electromagnetic waves and circular disk sources is proposed. A feature of this method is non-traditional introduction of the coordinate system associated with the source. In this case, decisions of the tasks are obtained using elementary mathematical apparatus and allow a clear physical interpretation. Its advantages are shown on the base of the comparison of this method with known methods in the literature.

Key words: non-stationary radiation, loop and disk sources.

1. Введение

Задачи об излучении кольцевых и дисковых источников относятся к числу канонических электродинамических задач. Их решения в частотной области приводятся во многих монографиях, например [1]. Достаточно подробно обсуждена в литературе и структура возбуждаемых полей как в дальней, так и

ближней зонах. К задачам нестационарной электродинамики пристальное внимание исследователей обращено также уже продолжительное время [2]. Во многом это связано со все большим использованием сверхширокополосных сигналов, характеризуемых порой чрезвычайно широкой полосой занимаемых частот. В подобной ситуации использование традиционных подходов теоретического исследования, опирающихся на интегральные преобразования Фурье или Лапласа, оказывается неэффективным. Поэтому становится вполне понятным интерес к разработке новых методов описания существенно нестационарных электродинамических процессов.

Характерной чертой такого описания является получение решения непосредственно во временной области, причем неразделенного относительно временной переменной и одной из пространственных координат. Решения подобного вида получаются, например, при использовании хорошо известного метода Римана [3]. Весьма углубленно такой подход реализован при разработке метода модового базиса [4,5]. К настоящему времени этот метод использован при исследовании широкого круга задач, в том числе и нелинейных. В конечном счете, прием, связанный с отделением временной переменной и пространственной координаты в ядро интегрального преобразования [6,7], также приводит к неразделенному в переменных решению. Хотя такая процедура решения ряда нестационарных электродинамических задач реализована при использовании обобщенного соответствующим образом интегрального преобразования Мелера-Фока, имеются основания утверждать о возможности её применения в совокупности с другими интегральными преобразованиями.

Из задач нестационарной электродинамики особое значение имеет ключевая задача об излучении дискового источника. Различные аспекты решения и последующего его исследования получили широкое обсуждение как в зарубежной [8], так и в отечественной [9, 10] литературе. Вместе с тем, указывается [11,12] на имеющиеся недочеты в опубликованных работах, и предложен оригинальный подход к решению данной задачи. В его актив можно

отнести возможность достаточно четкой физической интерпретации результатов решения в коротковолновом приближении.

Цель данной работы связана с разработкой нового подхода для аналитического решения задач о нестационарном излучении кольцевых и дисковых источников. Предтечей данного подхода является проведенный нами подробный анализ основных этапов формального решения задачи о нестационарном излучении кольцевого источника, полученного еще в работе [13]. Здесь решающее значение имели подкупающая простота и наглядность окончательного решения. Как оказалось это решение может быть получено гораздо более простым и рациональным способом, в сравнении с [13]. После физической интерпретации решения и обсуждения результатов численных расчетов мы далее рассматриваем задачу об излучении дискового источника. Решение также получается в удобном для последующих расчетов виде. В нем временная переменная и пространственная координата неразделены. Более того, в полученных выражениях четко отражается различие в структуре возбуждаемого поля в случаях, когда точка наблюдения находится в «прожекторном столбе» и вне его.

2. Решение задачи о нестационарном излучении кольцевого источника во временной области

Аналитическое решение задачи о нестационарном излучении кольцевого источника (в случае симметричного распределения плотности тока по кольцу) было получено в [13]. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Имеется круглая рамка радиуса a с равномерно распределенным, произвольно изменяющимся во времени током. Центр рамки совмещен с началом цилиндрической системы координат ρ, φ, z , а сама она лежит в плоскости xOy . Вектор плотности стороннего тока в рамке имеет единственную отличную от нуля составляющую

$$j_{\varphi} = I(\tau)\delta(z)\delta(\rho - a). \quad (1)$$

элементарным функциям. В результате для E_φ получается [13] следующее представление

$$E_\varphi = \frac{Z_0 \cos \varphi'}{2\pi\rho \sin \varphi'}, \quad (2)$$

$$\cos \varphi' = \frac{\rho^2 + z^2 + a^2 - \tau^2}{2\rho a}, \quad (3)$$

$$\sin \varphi' = \frac{1}{2\rho a} \left[(\rho + a)^2 + z^2 - \tau^2 \right]^{1/2} \left[\tau^2 - z^2 - (\rho - a)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

$$z^2 + (\rho - a)^2 < \tau^2 < z^2 + (\rho + a)^2. \quad (5)$$

Решение, отвечающее случаю произвольной зависимости тока от времени, легко находится с использованием формулы (2) в виде интеграла Дюамеля [13]

$$E_\varphi = \frac{Z_0}{2\pi\rho} \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial I(\tau')}{\partial \tau'} \frac{\rho^2 + z^2 + a^2 - (\tau - \tau')^2}{\left[(\rho + a)^2 + z^2 - (\tau - \tau')^2 \right]^{1/2} \left[(\tau - \tau')^2 - z^2 - (\rho - a)^2 \right]^{1/2}} d\tau'. \quad (6)$$

Значения пределов интегрирования определяются следующими соотношениями:

$$T_2 = \tau - R_2, \quad (7)$$

$$T_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau - R_1 < 0 \\ \tau - R_1 & \text{при } \tau - R_1 > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Как можно видеть, что даже в простейшем случае импульсного возбуждения решение получается чрезвычайно сложным путем. Приходится использовать интегральные преобразования Фурье - Бесселя, метод Римана, а также применять теорию специальных функций. Однако анализ структуры решения подсказал более простой и наглядный подход.

3. Альтернативный метод решения задачи о нестационарном излучении кольцевого источника

Здесь мы изложим иной, совершенно элементарный подход к решению задачи о нестационарном излучении кольцевого источника. Зададим вектор плотности стороннего тока в рамке $j_\varphi = I(t)\delta(z)\delta(\rho - a)$. Здесь $I(t)$ – ток в

рамке. Началом отсчета времени является момент включения тока $t = 0$.

Отметим, прежде всего, что векторный потенциал поля кольцевого источника может быть найден с использованием формулы:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (9)$$

Поскольку в фиксированный момент времени плотность тока в любом сечении источника одинаковая, то одинаковым будет и ток. Два симметричных относительно оси x элемента тока $I(t)ad\varphi'$ с угловыми координатами $+\varphi'$ и $-\varphi'$ (рис. 1) создают в точке P плоскости xOz электромагнитное поле, которое полностью описывается векторным потенциалом с единственной составляющей

$$dA_\varphi = \frac{\mu_a a}{2\pi} \frac{I(t - s/c)}{s} \cos\varphi' d\varphi', \quad (10)$$

где s - расстояние от точки кольцевого источника с полярными координатами (a, φ') до точки наблюдения (рис. 1).

Для определения векторного потенциала полного поля в рамках обычного подхода следует произвести интегрирование по φ' в пределах от 0 до π

$$A_\varphi = \frac{\mu_a a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{I(t - s/c)}{s} \cos\varphi' d\varphi' = \frac{\mu_a a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{I\left(t - \frac{\sqrt{\xi^2 + z^2}}{c}\right)}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} \cos\varphi' d\varphi'. \quad (11)$$

Однако изложенное выше указывает на целесообразность, во-первых, выбора в качестве начала координат точки Q , а во-вторых, выбора в качестве переменной интегрирования ξ (рис. 1).

Замечая, что $\xi^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos\varphi'$ последовательно получаем

$$\cos\varphi' = \frac{\rho^2 + a^2 - \xi^2}{2a\rho}, \quad d\varphi' = \frac{2\xi d\xi}{[(\rho + a)^2 - \xi^2]^{1/2} [\xi^2 - (\rho - a)^2]^{1/2}}. \quad (12)$$

С учетом этого выражение для векторного потенциала принимает следующий вид

$$A_\varphi = \frac{\mu}{2\pi\rho} \int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{I\left(t - \frac{\sqrt{\xi^2 + z^2}}{c}\right)}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} \frac{(\rho^2 + a^2 - \xi^2)}{[(\rho + a)^2 - \xi^2]^{1/2} [\xi^2 - (\rho - a)^2]^{1/2}} \xi d\xi. \quad (13)$$

Выражения для компонент полей получаются отсюда с привлечением известных соотношений. Например, принимая во внимание условие калибровки Лоренца

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad (14)$$

связывающее векторный \mathbf{A} и скалярный Φ потенциалы, получаем

$$\mathbf{E}(\rho, z, t) = c^2 \int \operatorname{grad} \operatorname{div}\mathbf{A} dt - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (15)$$

Имея в виду, что в нашем случае $\mathbf{A}(0,0,A_\varphi)$, видим, что $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ (так как A_φ не зависит от φ). Поэтому

$$E_\varphi(\rho, z, t) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}. \quad (16)$$

Таким образом,

$$E_\varphi = \frac{\mu}{2\pi\rho} \int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{\partial I\left(t - \sqrt{\xi^2 + z^2}/c\right)}{\partial t} \frac{(\rho^2 + a^2 - \xi^2)}{[(\rho+a)^2 - \xi^2]^{1/2} [\xi^2 - (\rho-a)^2]^{1/2}} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} d\xi. \quad (17)$$

Введем далее в рассмотрение новую переменную интегрирования t' по формуле $\xi^2 + z^2 = (ct')^2$. Очевидно, она имеет смысл времени, затрачиваемого электромагнитной волной на прохождение пути от текущей точки кольцевого источника до точки наблюдения со скоростью света. Тогда

$$E_\varphi = \frac{Z_0}{2\pi\rho} \int_{R_2/c}^{R_1/c} \frac{\partial I(t-t')}{\partial t} \frac{(\rho^2 + a^2 + z^2 - (ct')^2)}{[(\rho+a)^2 + z^2 - (ct')^2]^{1/2} [(ct')^2 - z^2 - (\rho-a)^2]^{1/2}} dt' \quad (18)$$

Производя далее замену переменной интегрирования по формуле $t-t' = t''$, получаем

$$E_\varphi(\rho, z, t) = \frac{Z_0}{2\pi\rho} \int_{t-R_1/c}^{t-R_2/c} \frac{\partial I(t'')}{\partial t''} \frac{(\rho^2 + a^2 + z^2 - c^2(t-t'')^2)}{[(\rho+a)^2 + z^2 - c^2(t-t'')^2]^{1/2} [c^2(t-t'')^2 - z^2 - (\rho-a)^2]^{1/2}} dt''. \quad (19)$$

Полагая, наконец, в этом выражении $\tau = ct$, $\tau' = ct''$, находим

$$E_{\varphi}(\rho, z, \tau) = \frac{Z_0}{2\pi\rho} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dI(\tau')}{d\tau'} \frac{\rho^2 + a^2 + z^2 - (\tau - \tau')^2}{\left[(\rho + a)^2 + z^2 - (\tau - \tau')^2 \right]^{1/2} \left[(\tau - \tau')^2 - z^2 - (\rho - a)^2 \right]^{1/2}} d\tau', \quad (20)$$

Формула (20) полностью совпадает с формулой (6) и, как видно из рис. 1, отвечает случаю $\rho > a$, т.е. когда проекция точки наблюдения на плоскость xOy находится вне области, охватываемой в этой плоскости кольцевым источником. Проведя аналогичное рассмотрение, находим, что (20) остается в силе и при $\rho < a$. Следует только иметь в виду, что в обоих случаях при $t - R_1/c < 0$ нижний предел интегрирования должен иметь значение, равное нулю.

Этому результату можно дать простую геометрическую интерпретацию. Промежуток времени, в течение которого поле в точке наблюдения P отлично от нуля, начинается в момент прихода в нее импульса излучения от ближайшей точки кольца, а заканчивается после прихода импульса от наиболее удаленной его точки. В каждый фиксированный момент времени в точке P наблюдается импульс поля, порожденного двумя симметричными относительно оси x элементами кольца, угловое положение которых как раз и определяется углом φ' (рис. 1). Элементы кольца с угловыми координатами $\varphi' = 0$ и $\varphi' = \pi$ излучают импульсы типа дельта-функции Дирака. Суммарное излучение пар элементов кольца, симметричных относительно оси x , уменьшается по мере их удаления от этой оси. А импульсы элементов с координатами $\varphi' = \pm\pi/2$ вообще гасят друг друга. Все сказанное находится в полном согласии с физическими представлениями.

4. Результаты расчётов

На рис. 2а, 2б и 3 изображены зависимости при возбуждении кольцевого источника импульсом тока в виде функции Хевисайда. Как было отмечено выше, основной вклад в поле дают фрагменты источника, которые являются ближайшими и наиболее удаленными от точки наблюдения. Такая особенность поведения поля кольцевого источника оказывается характерной при различных параметрах задачи (см.рис. 2а, 2б, 3).

Результаты аналогичных расчетов представлены и в работе [15] для случая, когда кольцевой источник возбуждался импульсом тока вида $I(t) = I_0(1 - 2/\pi \cdot \arctg(t/\tau_0))/2$, в котором τ_0 – характерно время релаксации тока. Этот импульс представляет собой, в сущности, приближенную аппроксимацию функции Хевисайда. Это обстоятельство повлекло за собой отличие наших результатов от результатов работы [15]. Отметим, что используемая в [15] аппроксимация функции Хевисайда приводит к погрешностям при расчете поля в общем случае.

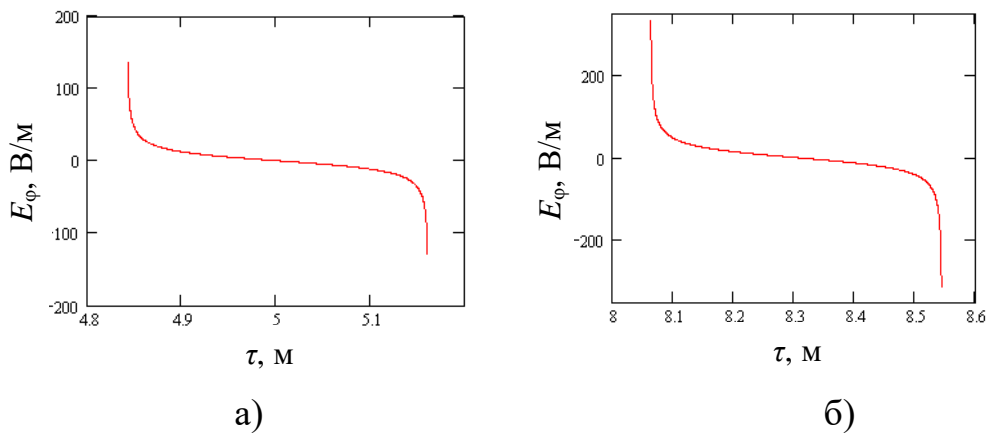


Рис. 2. Поле кольцевого источника при возбуждении импульсом тока в виде функции Хевисайда: а - $a = 0,2; \rho = 4; z = 3$; б - $a = 1; \rho = 2; z = 8$.

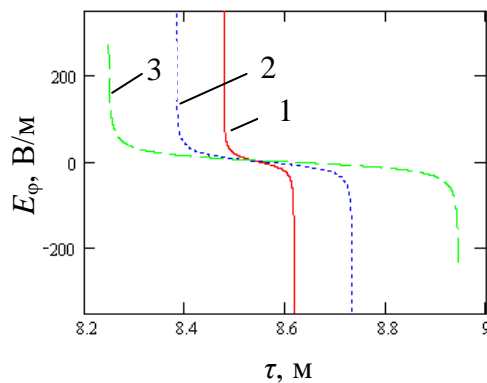


Рис. 3. Поле кольцевого источника при возбуждении импульсом тока в виде функции Хевисайда: $\rho = 3; z = 8$; (1 - $a = 0,2$; 2 - $0,5$; 3 - 1).

Дальнейшие расчеты производились с использованием формулы (20). При этом импульс тока в кольцевом источнике задавался в двух видах.

Первый импульс описывается формулой

$$I(\tau) = (\tau/T)^2 (1 - \tau/3T) \exp(-\tau/T) \quad (21)$$

где T - временной параметр, который выражается в единицах радиуса a/c .

Второй импульс имеет следующий вид:

$$I(\tau) = I_0 (\tau/V)^n (M^{n+1} \exp(-M(\tau/V)) - \exp(-\tau/V)) \quad (22)$$

где n, V, M – параметры, значениями которых определяются форма и эффективная длительность импульса.

На рисунке 4 представлена зависимость напряженности электрического поля кольцевого источника с радиусом $a = 1$ м от τ , рассчитанная в точке $P(2a, 0, 0)$. Импульс тока задавался в виде (21).

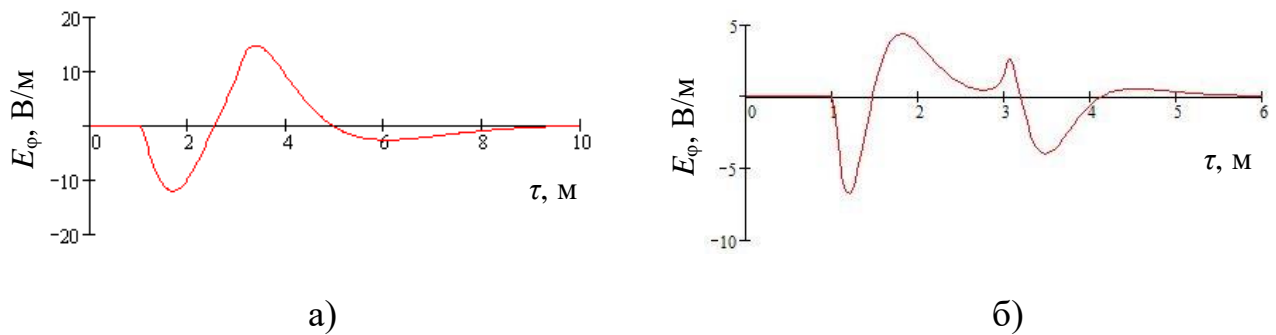


Рис. 4. Временная зависимость напряженности электрического поля от τ при различных значениях параметра T : а) $T = a/c$; б) $T = a/4c$.

Представленные на рис. 4 результаты полностью совпадают с аналогичными результатами работы [14], полученными в рамках метода модового базиса.

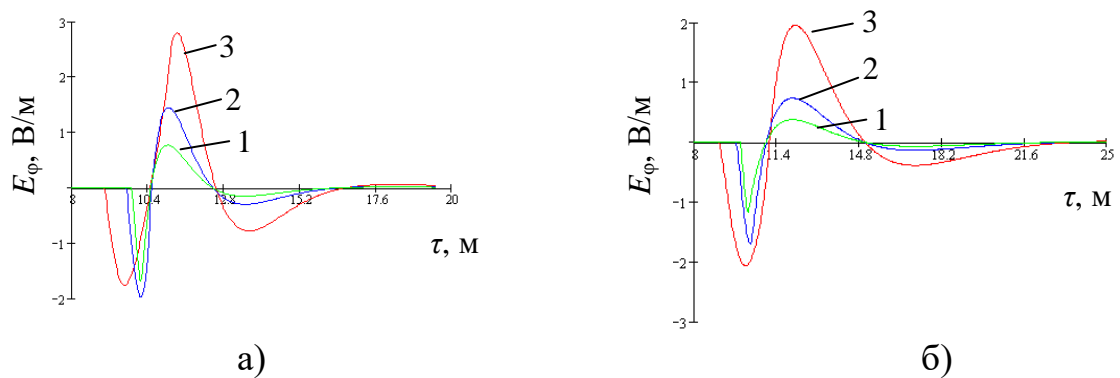


Рис. 5. Зависимость напряженности электрического поля от τ : а) $T = a/c$ б) $T = 2a/c$ ($1 - \theta = 10^\circ, 2 - 20^\circ, 3 - 90^\circ$).

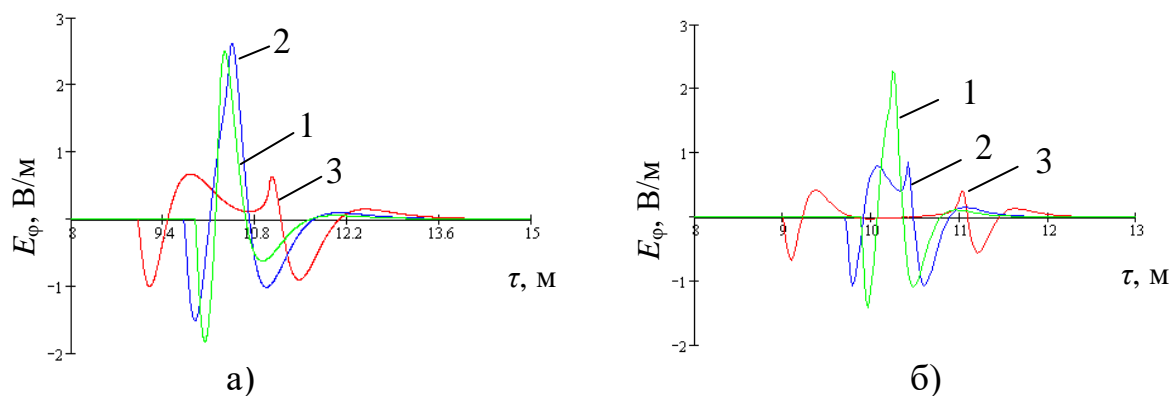


Рис. 6. Зависимость напряженности электрического поля от τ а) $T = a/4c$ б) $T = a/9c$ (1 – $\theta = 10^\circ$, 2 – 20° , 3 – 90°).

Как видно из приведенных выше рисунков, направление с максимальным значением излучаемого поля изменяется при изменении длительности импульса, что вполне согласуется с физическими представлениями.

Для случая, когда $T = a/c$ и $T = 2a/c$, максимальное значение излучения наблюдалось под углом $\theta = \pi/2$ (рис. 5а и 5б). Если же $T = a/4c$ и $T = a/9c$, то максимумы излучения наблюдаются под углами $\theta = \pi/9$ и $\theta = \pi/18$, соответственно, (см. рис. 6а и 6б). Таким образом, чем меньше длительность импульса, тем ближе к направлению OZ наблюдается максимальная амплитуда излучения. Но только в близких направлениях, так как строго по оси кольцо не излучает вследствие симметрии.

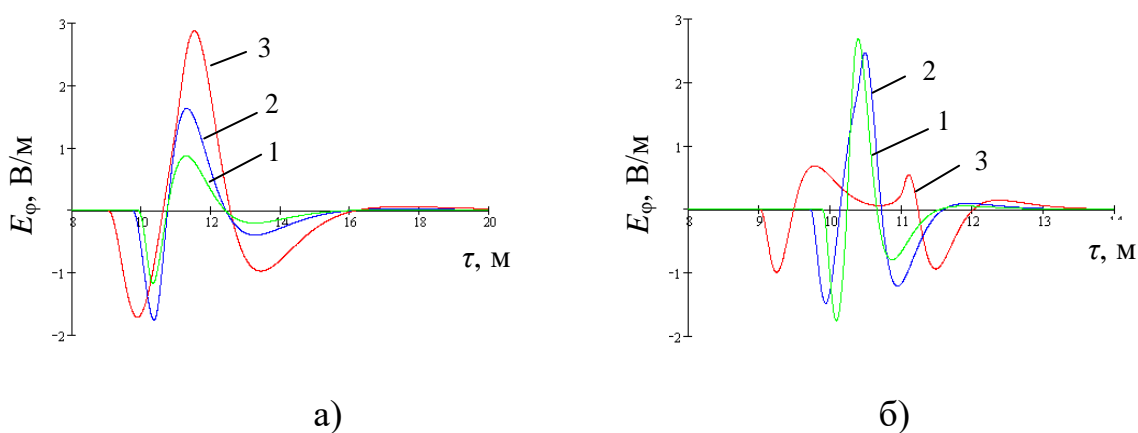


Рис. 7. Зависимость напряженности электрического поля от τ : а) $T = a/c$ б) $T = a/4c$ (1 – $\theta = 10^\circ$, 2 – 20° , 3 – 90°).

Исходя из полученных результатов, можно заключить, что существует возможность изменять направление максимального излучения поля. Аналогичные результаты (рис. 7а, 7б) получаются, если в качестве импульса тока использовать импульс вида (22).

В последующих расчетах показано как изменяется направление максимального излучения от характерных размеров кольцевого источника. При расчетах использовался импульс (21), $T = a/4c$, $OP = 10$ м (рис.8, 9).

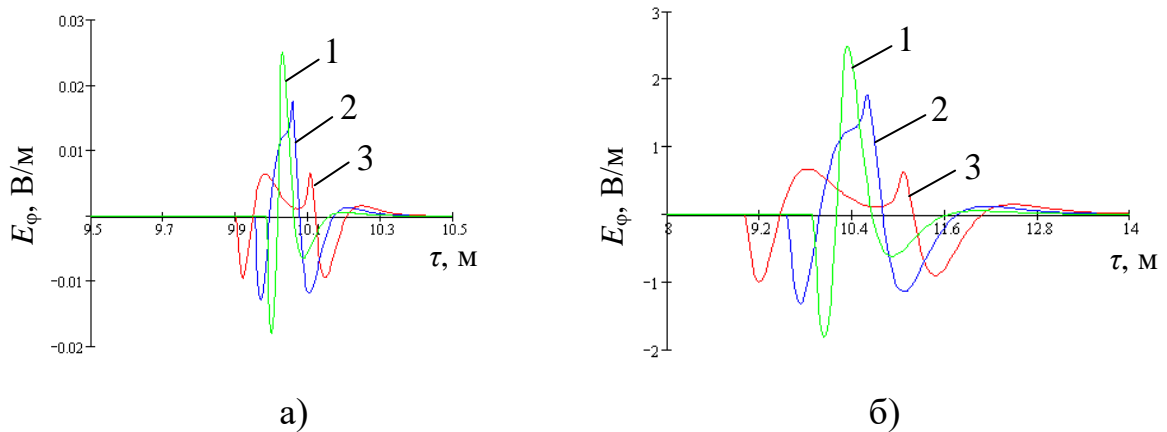


Рис. 8. Зависимость напряженности электрического поля от τ : а) $a = 0.1$ м. б) $a = 1$ м. ($1 - \theta = 10^\circ, 2 - 30^\circ, 3 - 90^\circ$).

Интересная особенность представленных результатов заключается в том, что для рассматриваемого диапазона изменения радиуса a кольцевого источника, в условиях его возбуждения импульсом (21) неизменной длительности, направление максимального излучения практически не изменяется.

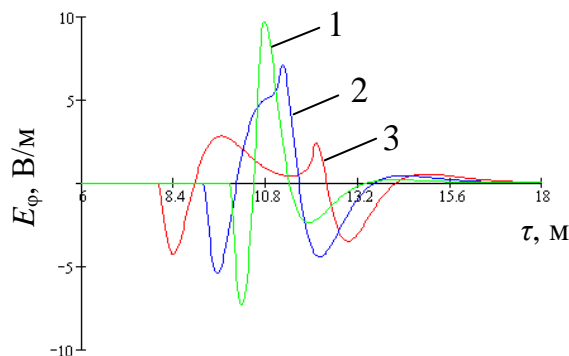


Рис. 9. Зависимость напряженности электрического поля от τ : $a = 2$ м. ($1 - \theta = 10^\circ, 2 - 30^\circ, 3 - 90^\circ$).

Рассмотренная задача имеет не только академический интерес. Так в [15] в рамках приближенного метода решалась проблема создания высоких значений плотности потока энергии в направлениях, близких к оси симметрии кольца. Оказалось, что при достаточно быстром убывании тока в кольце (меньшем времени распространения излучения между диаметрально противоположными точками источника) происходит эффективное и направленное излучение. Отмеченный эффект нашел практическое использование при изучении излучения кольцевых источников больших размеров. При этом моделировались различные нестационарных процессов: вторичные эффекты от разрядов молний, мощные электромагнитные воздействия на нелинейные среды, а также при контроле различных объектов [16].

5. Решение задачи о нестационарном излучении дискового источника

Рациональный подход может быть предложен и для решения задач, где в роли источников электромагнитного излучения выступают источники более сложной структуры. К ним относится задача о нестационарном излучении дискового источника. Решение этой задачи имеет большое практическое значение, например, при разработке концепции «электромагнитного снаряда» и изучения вопросов, связанных с фокусировкой электромагнитного излучения [17-20].

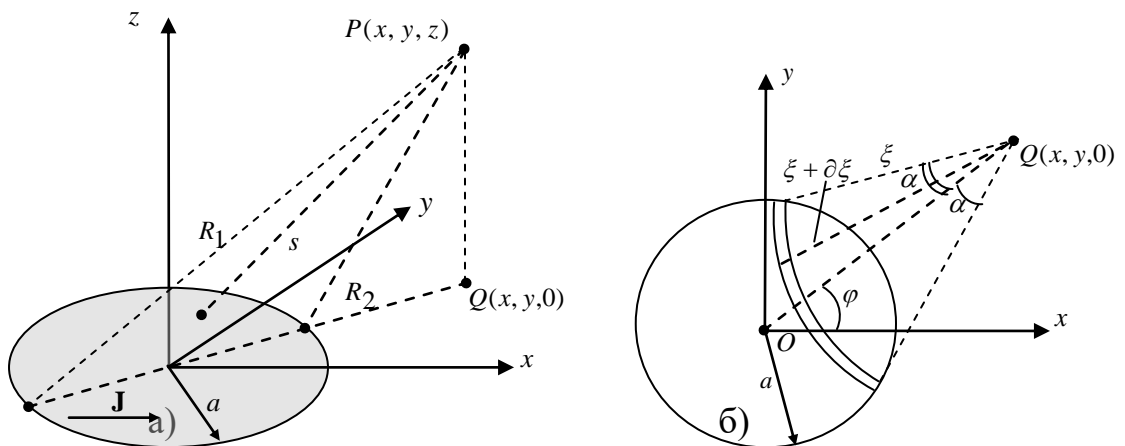


Рис. 10. К решению задачи об излучении дискового источника.

Пусть имеется источник в виде диска радиуса a , центр которого совмещен с началом декартовой системы координат x, y, z . Наряду с декартовой, будем использовать при необходимости цилиндрическую систему координат ρ, φ, z . Считаем сначала, что диск $\rho \leq a$ равномерно возбуждается монохроматическим током, текущим вдоль оси x . Считая поверхностную плотность J_x этого тока известной, определим поле диска в произвольной точке наблюдения $P(x, y, z)$ (рис. 10а).

Для этого воспользуемся известными представлениями [21], имея в виду что в нашем случае распределение тока не объемное, а плоскостное:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{x}'_0 J_x) \frac{1+ikr}{r^2} e^{-ikr} dx' dy'. \quad (23)$$

$$E_x = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi ik} \iint [F_1(r) J_x + (x-x')^2 F_2(r) J_x] dx' dy', \quad (24)$$

$$E_y = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi ik} \iint (x-x')(y-y') F_2(r) J_x dx' dy', \quad (25)$$

$$E_z = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi ik} \iint (x-x') z F_2(r) J_x dx' dy', \quad (26)$$

$$F_1(r) = \frac{-1 - ikr + k^2 r^2}{r^3} e^{-ikr}, \quad (27)$$

$$F_2(r) = \frac{3 + 3ikr - k^2 r^2}{r^5} e^{-ikr}, \quad (28)$$

Для перехода во временную область применим обратное преобразование Фурье к выражениям (23)-(26) и для упрощения последующей процедуры интегрирования по поверхности диска найдем сначала вклад в поле излучения элементарной искривленной площадки, заключенной между дугами окружностей с радиусами ξ и $\xi + d\xi$ (рис. 10б). Легко видеть, что все точки этой площадки равноудалены от точки наблюдения $P(x, y, z)$, а сама площадка имеет угловой размер 2α , где

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\xi^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho\xi}\right). \quad (29)$$

Поле, порожденное всем дисковым источником, можно найти, проводя интегрирование по ξ в пределах от $\xi = \rho - a$ до $\xi = \rho + a$. Вводя последовательно в рассмотрение новые переменным интегрирования t' , t'' и наконец τ' , подобно тому, как это было сделано при преобразовании формулы (17) в (20), получаем:

$$H_y = -\frac{Z_0}{4\pi} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c} \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} + J_x(\tau') \right] \frac{z}{(\tau - \tau')^2} \arccos\left(\frac{(\tau - \tau')^2 - z^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho\sqrt{(\tau - \tau')^2 - z^2}}\right) d\tau' \quad (30)$$

$$H_z = \frac{Z_0}{4\pi} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c} \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} + J_x(\tau') \right] \frac{(y - y')}{(\tau - \tau')^2} \arccos\left(\frac{(\tau - \tau')^2 - z^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho\sqrt{(\tau - \tau')^2 - z^2}}\right) d\tau', \quad (31)$$

$$\begin{aligned} E_x(t) = & -\frac{Z_0\sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi^2} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{(\tau - \tau')^3} \int J_x(\tau') d\tau' + \frac{1}{(\tau - \tau')^2} J_x(\tau') + \frac{1}{(\tau - \tau')} \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \right] \\ & \arccos\left(\frac{(\tau - \tau')^2 - z^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho\sqrt{(\tau - \tau')^2 - z^2}}\right) dt'' + \frac{Z_0\sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi^2} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c^2(\tau - \tau')^5} (x - x')^2 \int J_x(\tau') d\tau' + \right. \\ & \left. + \frac{3}{c^2(\tau - \tau')^4} (x - x')^2 J_x(\tau') + \frac{1}{(\tau - \tau')^3} (x - x')^2 \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \right] \arccos\left(\frac{(\tau - \tau')^2 - z^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho\sqrt{(\tau - \tau')^2 - z^2}}\right) d\tau' \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y(t) = & \frac{Z_0\sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi^2} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{c}{(c(t - t''))^5} (x - x')(y - y') \int J_x(t'') dt + \frac{3}{(c(t' - t''))^4} (x - x') \right. \\ & \left. (y - y') J_x(t'') + \frac{1}{(c^2(t - t''))^3} (x - x')(y - y') \frac{dJ_x(t'')}{dt} \right] \arccos\left(\frac{c^2(t - t'')^2 - z^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho\sqrt{c^2(t - t'')^2 - z^2}}\right) dt'' \quad (33) \end{aligned}$$

$$E_z = \frac{Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi^2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{c^2 (\tau - \tau')^5} (x - x') z \int J_x(\tau') d\tau' + \frac{3}{c^2 (\tau - \tau')^4} (x - x') z J_x(\tau') +$$

$$+ \frac{1}{(\tau - \tau')^3} (x - x') z \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \left] \arccos \left(\frac{(\tau - \tau')^2 - z^2 + \rho^2 - a^2}{2\rho \sqrt{(\tau - \tau')^2 - z^2}} \right) d\tau' \quad (34)$$

В случае, когда проекция точки наблюдения попадает на дисковый источник, необходимо порознь проанализировать вклады в суммарное поле двух участков диска. Круг радиуса $a - \rho$ с центром в точке $(\rho, y, 0)$ даёт следующий вклад

$$H_y = -\frac{Z_0}{4} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c} \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} + J_x(\tau') \right] \frac{z}{(\tau - \tau')^2} d\tau' \quad (35)$$

$$H_z = \frac{Z_0}{4} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c} \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} + J_x(\tau') \right] \frac{(y - y')}{(\tau - \tau')^2} d\tau', \quad (36)$$

$$E_x(t) = -\frac{Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{(\tau - \tau')^3} \int J_x(\tau') d\tau' + \frac{1}{(\tau - \tau')^2} J_x(\tau') + \frac{1}{(\tau - \tau')} \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \right] d\tau' + \frac{Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c^2 (\tau - \tau')^5} (x - x')^2 \int J_x(\tau') d\tau' + \frac{3}{c^2 (\tau - \tau')^4} (x - x')^2 J_x(\tau') + \frac{1}{(\tau - \tau')^3} (x - x')^2 \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \right] d\tau' \quad (37)$$

$$E_y = \frac{Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c^2 (\tau - \tau')^5} (x - x')(y - y') \int J_x(\tau') d\tau' + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{c^2 (\tau - \tau')^4} (x - x')(y - y') J_x(\tau') + \frac{1}{(\tau - \tau')^3} (x - x')(y - y') \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \right] d\tau' \quad (38)$$

$$E_z = \frac{Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon}}{8\pi} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{1}{c^2 (\tau - \tau')^5} (x - x') z \int J_x(\tau') d\tau' + \frac{3}{c^2 (\tau - \tau')^4} (x - x') z J_x(\tau') + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\tau - \tau')^3} (x - x') z \frac{dJ_x(\tau')}{d\tau'} \right] d\tau' \quad (39)$$

Расчет вклада оставшейся части поверхности диска приводит к выражениям родственным по структуре (30- 34) и его результаты здесь не приводятся.

Численные результаты были получены нами для компоненты E_θ электрического поля в дальней зоне, выражение для которой было найдено с использованием (30-31). При моделировании импульс тока задавался в следующем виде:

$$I(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{\tau - \tau_0}{L}\right)\right], \quad (40)$$

где $L = 0,241 \cdot 10^{-9}$, $\tau_0 = 0,6 \cdot 10^{-9}$.

На рисунке 11 показаны форма импульса тока, и его производная по времени, которая представляет собой симметричный биполярный импульс. Поле дискового источника иллюстрируется рисунком 12 для различных значений угла θ отсчитываемого от направления OZ в плоскости xOz . Результаты расчетов показывают, что в направлении $\theta = 0^\circ$ амплитуда поля принимает максимальное значение. Такое поведение поля наблюдается для различных значений радиуса диска a и длительности импульса. Также можно отметить, что излученное электромагнитное поле удовлетворяет условию равновесности.

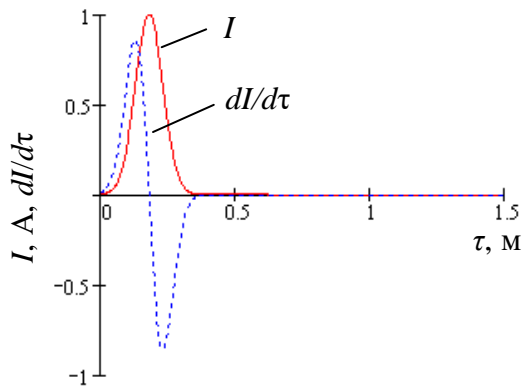


Рис. 11. Временная форма импульса (40) и его производная.

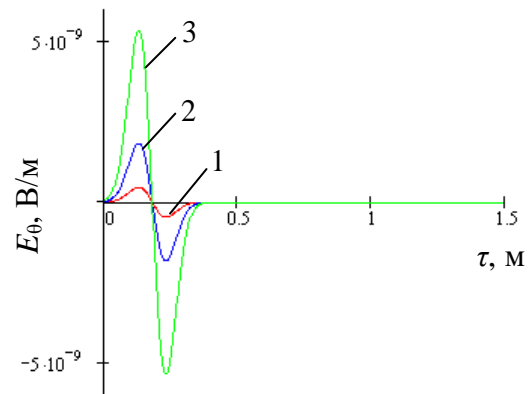


Рис. 12. Поле дискового источника $a = 1$, $\rho = 25$ ($1 - \theta = 5^\circ$, $2 - 20^\circ$, $3 - 90^\circ$)

Подобную картину поведения поля можно наблюдать и в случае задания импульса тока в дисковом источнике в виде (21), (22). Результаты таких расчетов приведены на рисунках 13-16.

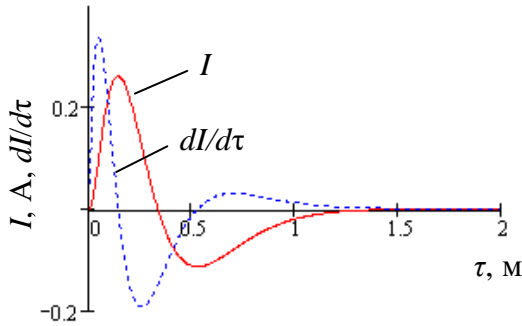


Рис. 13. Временная форма импульса (21) и его производная.

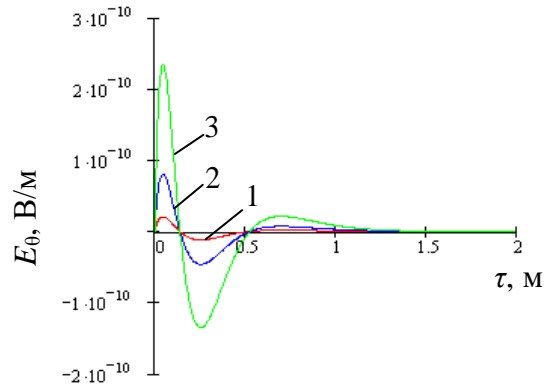


Рис. 14. Поле дискового источника $a = 1, \rho = 15 (1 - \theta = 5^\circ, 2 - 20^\circ, 3 - 90^\circ)$.

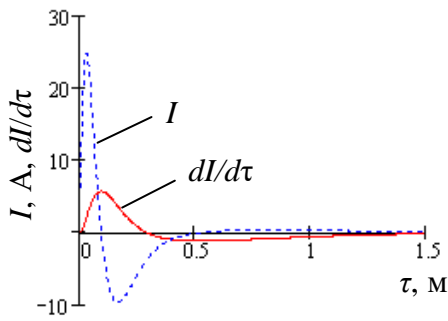


Рис. 15. Временная форма импульса (22) и его производная.

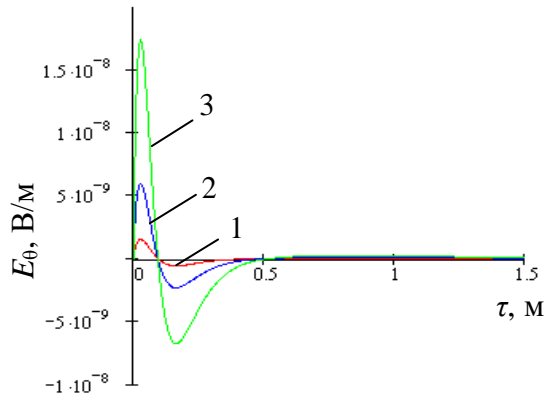


Рис. 16. Поле дискового источника. $a = 1, \rho = 15 (1 - \theta = 5^\circ, 2 - 20^\circ, 3 - 90^\circ)$.

6. Заключение

Приведены решения задач о нестационарном излучении кольцевого и дискового источников, которые используют специальную технику интегрирования порождающих излучение распределений токов. Ранее подобный подход в литературе не использовался. К его достоинствам можно отнести элементарность используемого математического аппарата и наглядность физической интерпретации решений задач. Можно ещё отметить характер представления решений: это интегралы в конечных пределах по

переменной, имеющей смысл времени, что обеспечивает их удобство для численных расчетов при произвольном временном изменении первичного возбуждения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-32-00458 мол_а.

Литература

1. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны: учебн.пособие для вузов. – М.: Сов.радио, 1971. – 664с.
2. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. – М.: Мир, 1978; Т.1. – 551 с., Т.2. – 557 с.
3. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444с.
4. Третьяков О. А. Метод модового базиса // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 6. С. 1071-1082.
5. Третьяков О. А. Эволюционные волноводные уравнения // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 5. С. 917-926.
6. Дорошенко В. А., Кравченко В. Ф. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах / Под ред. В.Ф. Кравченко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 272 с.
7. Беличенко В.П., Шестаков П.В. Альтернативные подходы к задаче о рассеянии конусом нестационарного поля точечного скалярного источника // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 8/2. – С. 68-70.
8. Wu T.T. Electromagnetic missiles // J. Appl. Phys. – 1985. – V. 57. – No 7. – P. 2370-2373.
9. Содин Л.Г. Характеристики импульсного излучения антенн (электромагнитного снаряда) // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т. 37. – № 5. – С. 849-857.

10. Содин Л.Г. Импульсное излучение антенн // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 2. – С. 166-174.

11. Кирьяшкин В.В., Чубинский Н.П. Исследование возможности коллимирования потоков электромагнитных волн сверхширокополосных сигналов // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – № 1. – С. 24-32.

12. Кирьяшкин В.В. Коллимирование потоков электромагнитных волн сверхширокополосных сигналов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Моск. Физ.-техн. институт, Москва 2002.

13. Борисов В.В. Излучение электромагнитного сигнала круговым током // Волны и дифракция. // Краткие тексты докладов X Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. – Винница, 1990. – С. 171-174.

14. Кочетов Б.А., Бутрым А.Ю. О сходимости модовых разложений по сферическим гармоникам во временной области // Вестник ХНУ. Серия “Радиофизика и электроника” – 2009. – №883. Вып.15. – С.41-44.

15. Афанасьев Ю.В., Климов В.В., Феоктистовы А.Л., Феоктистов Л.П. Излучение быстроубывающего кольцевого тока // ЖЭТФ. – 1992. – Т. 101. Вып.4. – С. 1118-1131.

16. Лебедев Е.Ф., Осташев В.Е., Петров С.Р. и др., Экспериментальная модель мощного эффективного широкополосного излучателя на основе магнитного диполя // Труды V Забабахинских научных чтений, Снежинск, РФЯЦ-ВНИИТФ, 21-25 сентября 1998 г., с. 384-391.

17. Содин Л.Г. Характеристики импульсного излучения антенн (электромагнитного снаряда) // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т. 37. – № 5. – С. 849-857.

18. Содин Л.Г. Импульсное излучение антенн // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 2. – С. 166-174.

19. Кирьяшкин В.В., Чубинский Н.П. Исследование возможности коллимирования потоков электромагнитных волн сверхширокополосных сигналов // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – № 1. – С. 24-32.

20. Михайлов Е.М., Головинский П.А. Описание дифракции и фокусировки ультракоротких импульсов на основе нестационарного метода Кирхгофа-Зоммерфельда // ЖЭТФ. – 2000. – Т. 117. – № 2. – С. 275-285.

21. Вычислительные методы в электродинамике/под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977, с.485

Ссылка на статью:

В. П. Беличенко, М. А. Пономарева. Рациональные методы решения канонических задач нестационарной электродинамики. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/2/text.pdf>