

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.1>

УДК: 519.216.2; 519.216.22; 519.246.8; 533.722

## Q-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ КОЛЛИМИРОВАННОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА НА ВЫХОДЕ АТМОСФЕРНОЙ ТРАССЫ

А. В. Бланк, Н. А. Сухарева, М. В. Цыганов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Статья поступила в редакцию 21 июля 2020 г.

### Аннотация.

Описана методика анализа в рамках неэкстенсивной термодинамики Тсаллиса экспериментально регистрируемых временных разверток для векторов смещения и скорости дрейфа энергетического центра пучка. Определяются вариации энтропии Больцмана-Гиббса,  $q$ -деформированной энтропии Тсаллиса и числа доступных состояний статистического ансамбля регистрируемых положений энергетического центра коллимированного волнового пучка и его скорости дрейфа. Для определения типа аттракторов исследуемого стохастического процесса анализируются спектры показателей Ляпунова для позиционных параметров волнового пучка.

**Ключевые слова:** неэкстенсивная термодинамика,  $q$ -энтропия Тсаллиса, эс-кортные распределения, энергетические распределения, показатели Ляпунова.

### Abstract.

An analysis technique is described within of the non-extensive Tsallis thermodynamics for experimentally recorded time scans, for displacement vectors, and for the drift velocity of the beam energy center. The variations of the Boltzmann-Gibbs entropy, the  $q$ -deformed Tsallis entropy and the available states number of the statistical ensemble of the recorded positions of the collimated wave beam energy center and its drift velocity are determined. To determine the type of attractors of the studied stochastic process, the spectra of Lyapunov exponents for the positional parameters of the wave beam are analyzed.

**Key words:** non-extensive thermodynamics,  $q$ -entropy Tsallis, escort distribution, energy distribution, Lyapunov exponents.

## Введение

Традиционный подход, принятый в термодинамике Больцмана-Гиббса неприменим в анализе протяженных трасс, поскольку основное предположение о равнодоступности всех ячеек фазового объема некорректно из-за пространственной термической неоднородности, неравновесности и нестационарности среды распространения сигнального пучка. Фактически в классической термодинамике отсутствуют запрещенные состояния и выровнена вероятность посещения доступных. Естественным следствием подобных моделей будет каноническое распределение для вероятности населенности конкретного состояния как функции значения энергии [1;2].

Неравновесные, неоднородные и нестационарные системы имеют иной тип фазового пространства, допускающего взаимодействие с запаздыванием, нелокальные взаимодействия, мультифрактальную структуру [3;4]. Следствием модификации фазового пространства будет потеря аддитивности для ряда термодинамических характеристик, прежде всего для внутренней энергии, температуры и энтропии [5;6]. Наблюдаемые характеристики физических систем модифицируются, но в пределе перехода к непрерывному, гладкому и евклидовому фазовому пространству совпадают с традиционными [7–9].

Определим наблюдаемые свойства экспериментальных выборок:

- мультимодальность функций распределения позиционных характеристик коллимированного пучка на выходе трассы,
- кинетика вариации  $q$ -деформированной энтропии Тсаллиса в течение светлого времени суток, согласованная с метеоусловиями,
- информативность экспериментально определяемой  $q$ -энтропии как меры неравновесности и неэкстенсивности системы,
- профили эскортных распределений, позволяющие определять среднее по ансамблю разрешенных состояний значение измеряемых величин,
- $q$ -деформированные профили энергетических распределений для различных потенциалов,
- микровременные вариации максимального показателя Ляпунова, определяющие время стохастической квазистационарности системы,

- эволюция спектра показателей Ляпунова, свидетельствующая о сохранении глобальной стохастической структуры (гиперхаоса).

## 1 Ансамбль состояний коллимированного волнового пучка

В работе использованы экспериментальные серии, получаемые на протяженной трассе, детально описанной ранее в работах [10; 11]. Определим режимы экспериментального контроля:

- профиль используемого пучка – одномодовый непрерывный гауссов,
- мощность излучения – не более 200 Ватт, длина волны – 1064 нм,
- "длина пробега" коллимированного пучка – 1350 м,
- апертура регистрации через рассеивающее матовое стекло – 256x256 мм<sup>2</sup>,
- разрешение камеры технического зрения – 1 pt/мм,
- экспозиция кадра – от 10 мкс до 100 мкс в зависимости от условий,
- частота опроса – от 125 Гц до 3 кГц,
- длительность видеосерии – до 10000 кадров.

Каждая видеовыборка рассматривается как статистический ансамбль реализаций распределений интенсивности и кинематических характеристик энергетического центра волнового пучка. Определим набор контролируемых характеристик для каждого кадра и пары соседних кадров:

- радиус-вектор и его компоненты для положения энергетического центра пучка,
- если задача позволяет выставить целевую координату, контролируется смещение энергетического центра от целевой координаты,
- вектор скорости дрейфа энергетического центра,
- компоненты скорости дрейфа.

Для анализа статистических свойств регистрируемых видеовыборок определим сетку пространственной дискретизации, каждая из ячеек которой соответствует доступным состояниям для энергетического центра волнового пучка в плоскости регистрации. Шаг сетки по вертикали и горизонтали определим в 2 мм. Привязка к вертикали задается преимущественным направлением конвективных токов, порождаемых градиентом температуры. Горизонталь определяется направлением ветровой нагрузки. При известном распределении интенсивности волнового пучка в плоскости регистрации компоненты вектора смещения энергетического центра  $x_C$ ,  $y_C$  определяется следующим образом:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{256} c * I(c, r)}{\sum_{i=1}^{256} I(c, r)}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{256} r * I(c, r)}{\sum_{i=1}^{256} I(c, r)}, \quad (1)$$

здесь  $(c, r)$  – номера столбцов и строк в массиве кадра видеовыборки.

Практически все анализируемые выборки по обеим направлениям характеризуются мультимодальными распределениями, независимо от времени суток и типа анализируемой характеристики – смещения или скорости дрейфа.

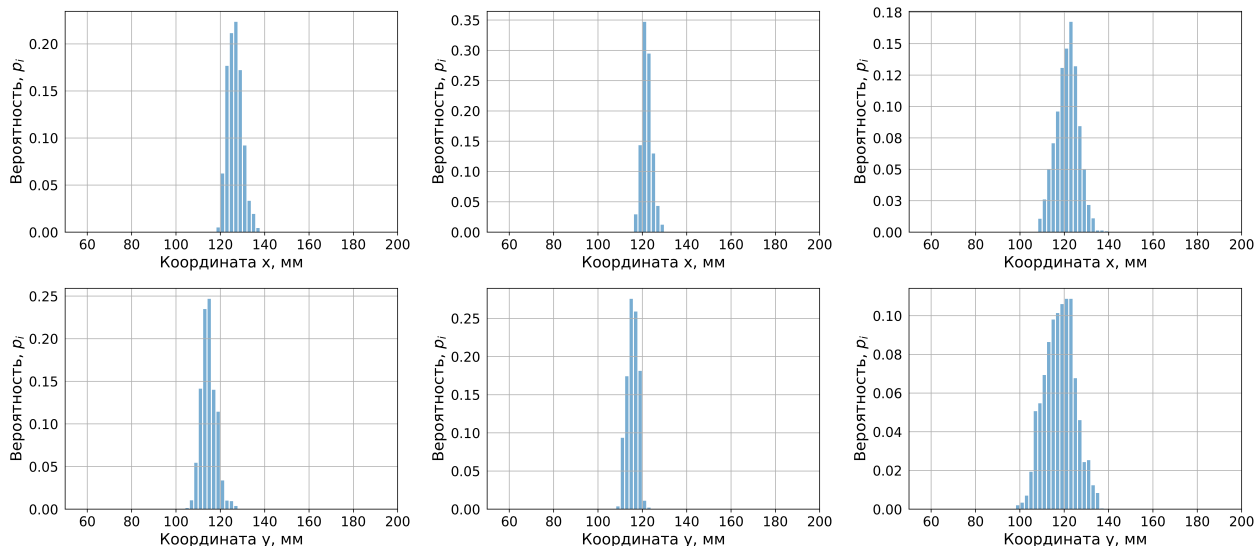


Рис. 1: Функции распределения вероятностей для горизонтальных (верхняя строка) и вертикальных (нижняя строка) смещений для 25, 26 и 27 мая, утренний режим

## 2 Энтропия Тсаллиса

Определим  $q$ -параметрическую энтропию Тсаллиса следующим образом [3; 12]:

$$S_q = -k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{1 - q}, \quad (2)$$

при  $q \rightarrow 1$  выражение переходит в формулу для энтропии Больцмана-Гиббса.

Оценку параметра "деформации"  $q$  можно в первом приближении выполнить, опираясь на значение среднего и дисперсии функции распределения по обратным температурам:

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2} = \frac{\sigma^2}{\beta_0^2} + 1. \quad (3)$$

где  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $T$  – абсолютная температура.

Оценка заведомо справедлива при малых значениях внутренней энергии по сравнению с "тепловым зазором" в исследуемой системе:

$$E \ll k(T_{max} - T_{min}), \Rightarrow B(E) = e^{-\beta_0 E} \left[ 1 + \frac{1}{2}(q - 1)\beta_0^2 E^2 + \dots \right]. \quad (4)$$

Рассмотрим восстановленные из серий экспериментальных выборок вариации энтропии Тсаллиса и энтропии Больцмана-Гиббса для трех последовательных дней конца мая 2019 года. Днем в течении трех дней было облачно, в вечернее время – пасмурно. В обработке использован набор временных рядов (по 4 на одну трехсекундную серию), соответствующих компонентам вектора смещения и вектора скорости энергетического центра коллимированного волнового пучка.

На Рис.2 использованы значения  $q$ -деформации от 0 до 1.5 с шагом 0.5. Приведем основные свойства полученных распределений:

- $q = 0$  – значение энтропии Тсаллиса на единицу меньше числа доступных состояний,
- $q = 0.5$  –  $q$ -деформация увеличивает вклад маловероятных состояний и уменьшает вклад высоковероятных, сумма соответствующих компонент становится больше единицы,
- $q = 1$  – значение энтропии Тсаллиса совпадает со значением энтропии Больцмана-Гиббса,
- $q = 1.5$  –  $q$ -деформация уменьшает вклад маловероятных состояний

и увеличивает вклад высоковероятных, сумма соответствующих компонент становится меньше единицы.

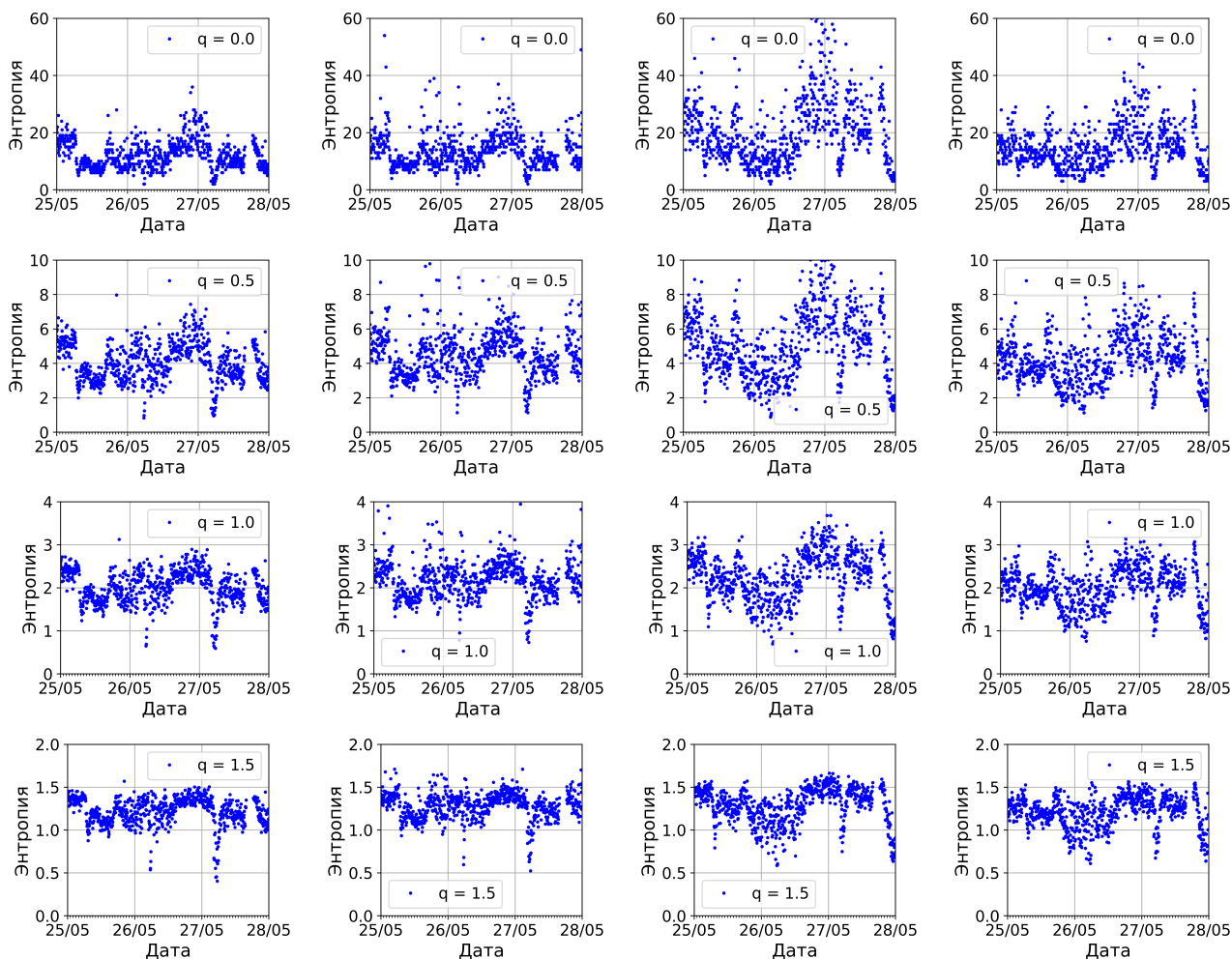


Рис. 2: Вариация  $q$ -энтропии при  $q=0, 0.5, 1.0$  и  $1.5$  для трехсуточных серий. Первый и второй столбцы – компоненты вектора смещения, третий и четвертый столбцы – компоненты вектора скорости дрейфа

Сильные вариации значений  $q$ -параметрической энтропии исследуемой системы могут быть связаны с её неаддитивностью для независимых систем. Например, для двухкомпонентной системы, состояния которой описываются совместным мультипликативным распределением [13; 14]:

$$p(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = p_1(\vec{r}_1)p_2(\vec{r}_2), \quad (5)$$

где  $p_1(\vec{r}_1)$ ,  $p_2(\vec{r}_2)$  относятся к независимым  $q$ -системам, энтропия суммарной системы определяется так:

$$S_q(p(\vec{r}_1; \vec{r}_2)) = S_q(p_1(\vec{r}_1)) + S_q(p_2(\vec{r}_2)) + \frac{1-q}{k_B} S_q(p_1(\vec{r}_1)) S_q(p_2(\vec{r}_2)) \quad (6)$$

Если рассматриваемые подсистемы зависимы, справедливо соотношение с привлечением условных вероятностных распределений:

$$S_q(p(\vec{r}_1; \vec{r}_2)) = S_q(p_1(\vec{r}_1)) + S_q(p_2(\vec{r}_2)|p_1(\vec{r}_1)) = S_q(p_2(\vec{r}_2)) + S_q(p_1(\vec{r}_1)|p_2(\vec{r}_2)). \quad (7)$$

Возможны режимы, при которых условная вероятность  $p_1(\vec{r}_1)|p_2(\vec{r}_2) = p_2(\vec{r}_2)$  или  $p_2(\vec{r}_2)|p_1(\vec{r}_1) = p_1(\vec{r}_1)$ . Для таких режимов вводится термин – "псевдоаддитивность" [2].

### 3 q-параметрические эскортные распределения

Проводимая q-деформация функции распределения вероятности нарушает исходные нормировки. Для компенсации подобных нарушений предложен аппарат эскортных характеристик, вычисляемых для каждого значения q. Определим эскортное распределение для q-деформированной вероятности так [2; 15]:

$$P_i(q) = \frac{p_i^q}{\sum_{i=1}^W p_i^q} = \frac{p_i^q}{Z_q} \quad (8)$$

здесь  $Z_q$  - обобщенная q-параметрическая статистическая сумма.

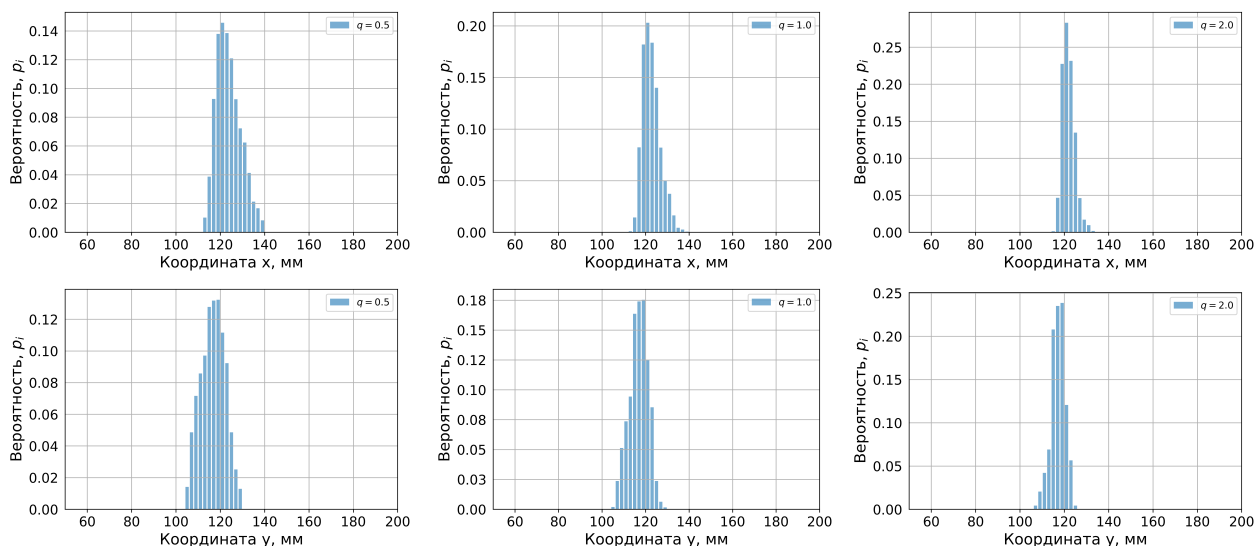


Рис. 3: Профили эскортных распределений для q=0.5 (слева) и q=2.0 (справа). Исходное распределение q=1.0 – в центре; в рамках одной видеосерии

q-деформированное нормированное распределение запишем в виде:

$$\sum_{i=1}^W P_i(q) = 1, \quad (9)$$

Опираясь на эскортное распределение вероятностей определим  $q$ -деформированное значение внутренней энергии системы:

$$\sum_{i=1}^W P_i(q) E_i = U_q, \quad (10)$$

где  $E_i$  - энергетические уровни системы.

Примеры  $q$ -деформированных эскортных распределений для  $q=0.5$ ,  $1.0$  и  $2.0$  представлены на рисунке ниже.

#### 4 $q$ -параметрические семейства энергетических распределений

Модификация профиля эскортных распределений вероятности при изменении  $q$ -параметра сопровождается изменением внутренней энергии системы при сохранении значений энергетических уровней [1; 15; 16]:

$$U_q = \frac{\sum p_i^q E_i}{\sum p_i^q}. \quad (11)$$

Запишем  $q$ -деформированное распределение по энергии:

$$\tilde{p}_i = \frac{1}{\tilde{Z}_q} \left[ 1 - (1 - q) \tilde{\beta}_q (E_i - U_q) \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (12)$$

здесь  $Z_q$  -  $q$ -деформированная статистическая сумма:

$$\tilde{Z}_q = \sum_{i=1}^W \left[ 1 - (1 - q) \tilde{\beta}_q (E_i - U_q) \right]^{\frac{q}{1-q}}, \quad (13)$$

$\beta_q$  -  $q$ -деформированное среднее значение обратной температуры:

$$\beta_q = \frac{\beta_0}{\sum_{i=1}^W p_i^q}. \quad (14)$$

Пусть "энергия деформации" коллимированного волнового пучка может быть разложена в ряд по степеням смещения от невозмущенного положения оси пучка

$$E_i = \kappa_1 \rho + \kappa_2 \rho^2 + \dots, \quad \rho = |x C_i - \overline{x C}|. \quad (15)$$

Определим  $q$ -деформированную внутреннюю энергию согласно (11) и построим семейство характеристик для линейного и квадратичного приближения



для гамильтониана.

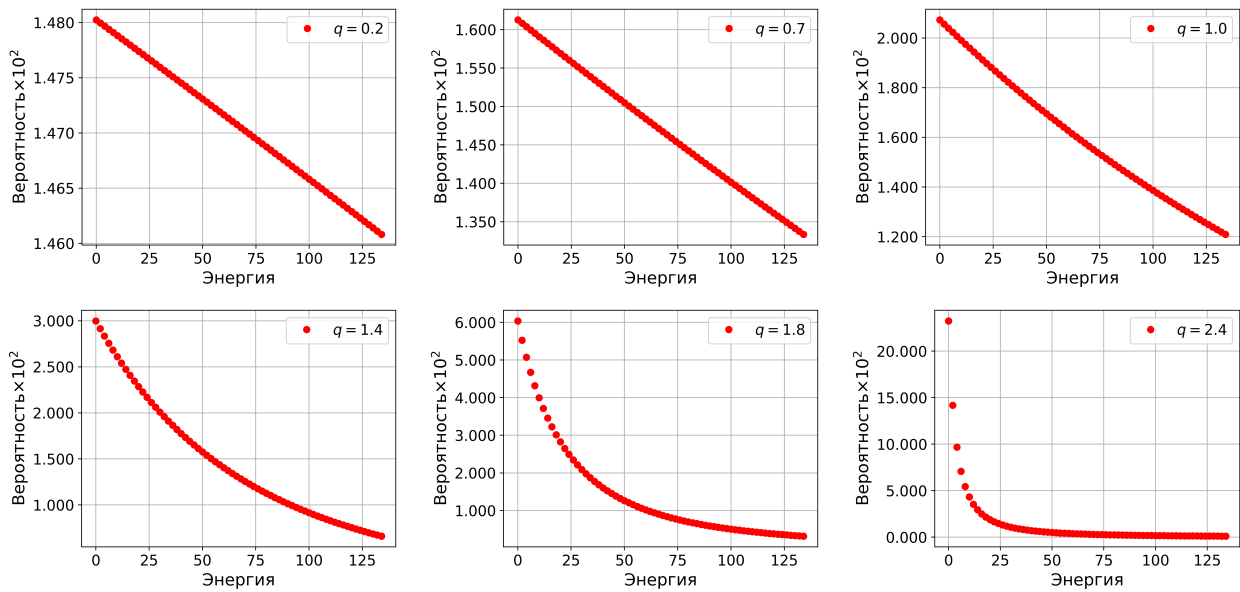


Рис. 4: q-параметрические энергетические распределения для гамильтониана вида  $H(\rho) \sim \kappa_1\rho$

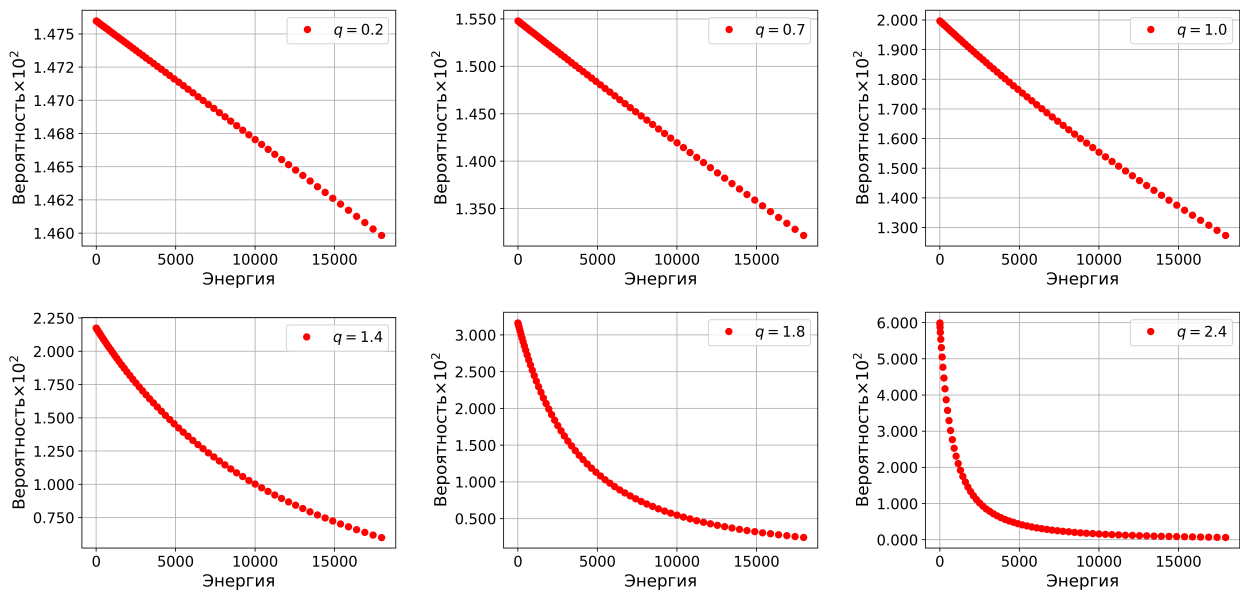


Рис. 5: q-параметрические энергетические распределения для гамильтониана вида  $H(\rho) \sim \kappa_2\rho^2$

Независимо от вида гамильтониана q-параметрическое семейство энергетических характеристик имеет ряд общих свойств:

- в диапазоне значений  $q \in [0, 0.8)$  зависимость населенности линейно падает с ростом энергии уровней, что согласуется со спектрами наблюдаемых флуктуационных процессов и типично для фрактальных и мультифрактальных систем,

- в диапазоне значений  $q \in [2, 2.7)$  зависимость приобретает вид гиперболы,
- в диапазоне значений  $q \in [0.9, 1.4)$  зависимость может быть аппроксимирована бoльцмановской экспонентой.

Фактически по форме энергетического распределения возможно определение значения  $q$ -деформации и определение степени термической неравновесности в системе по относительному значению дисперсии функции распределения температуры.

## 5 $q$ -параметрические уравнения в газодинамическом приближении

Рассмотрим атмосферную трассу как динамическую неэкстенсивную систему, в которой реализуется нестационарное распределение частиц в фазовом пространстве  $f(\vec{r}, \vec{v}; t)$ . Функция распределения вероятности нормирована, элемент объема фазового пространства  $\vec{z} = (\vec{r}, \vec{v})$ . Введем функционал энтропии, определяемый функцией распределения  $f(\vec{z}; t)$  [15]:

$$S_q[f] = -\frac{k_B}{1-q} \int (f(z) - (f(z))^q) dz \quad (16)$$

Пусть необходимо экспериментально определить значение макроскопической величины  $q$ -системы –  $\langle \Theta_q \rangle$ . Выполним усреднение соответствующей микроскопической величины по  $q$ -деформированному распределению.

$$\langle \Theta_q \rangle \equiv \int \Theta(\vec{r}; t) f(z)^q dz \quad (17)$$

Отметим, что в данном случае не выполняется перенормировка получаемого значения. Такой подход типичен для статистики Курадо-Тсаллиса [8].

Определим ряд  $q$ -параметров, определяющих движение газовых потоков:

–  $q$ -плотность числа частиц,

$$n_q(\vec{r}; t) \equiv \int f(z)^q d\vec{v}; \quad (18)$$

–  $q$ -плотность массовая

$$\rho_q(r; t) \equiv mn_q(\vec{r}; t), \quad (19)$$

где  $m$  – масса частицы;

$q$ -гидродинамическая скорость элемента объема,

$$\vec{u}_q(r; t) = \frac{1}{\rho_q(r; t)} \int m \vec{v} f(z)^q d\vec{v}; \quad (20)$$

удельная внутренняя  $q$ -энергия,

$$\vec{\varepsilon}_q(r; t) = \frac{1}{\rho_q(r; t)} \int \frac{m}{2} |\vec{v} - \vec{u}_q|^2 f(z)^q d\vec{v}. \quad (21)$$

Используя  $q$ -деформированные переменные можно получить систему  $q$ -гидродинамических уравнений:

$$\frac{d\rho_q}{dt} + \text{div}(\rho_q \vec{u}_q) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d(\rho_q \vec{u}_q)}{dt} + \text{Div}(\vec{P}_q + \rho_q \vec{u}_q \vec{u}_q) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d(\rho_q \varepsilon_q)}{dt} + \text{div}(\vec{J}_q + \rho_q \varepsilon_q \vec{u}_q) + \vec{P}_q : \text{Grad}(u_q) = 0, \quad (24)$$

здесь  $\vec{P}_q$  – тензор напряжений,  $\vec{J}_q$  – поток тепла. Детальное описание свойств решений системы уравнений дано в работе [15].

## 6 Показатели Ляпунова для временных рядов позиционных характеристик

Определение класса хаотического процесса выполним на основе спектра показателей Ляпунова эквидистантных временных рядов позиционных характеристик. Для определения размерности фазового пространства используем метод ближайших соседей [17] в сочетании с проверкой суррогатных данных. Для определения максимального показателя Ляпунова используется алгоритм Кантца [18]. На Рис.6 и Рис.7 представлены трехсекундные развертки для максимального показателя Ляпунова, полученные методом скользящего окна для отдельной видеовыборки [19].

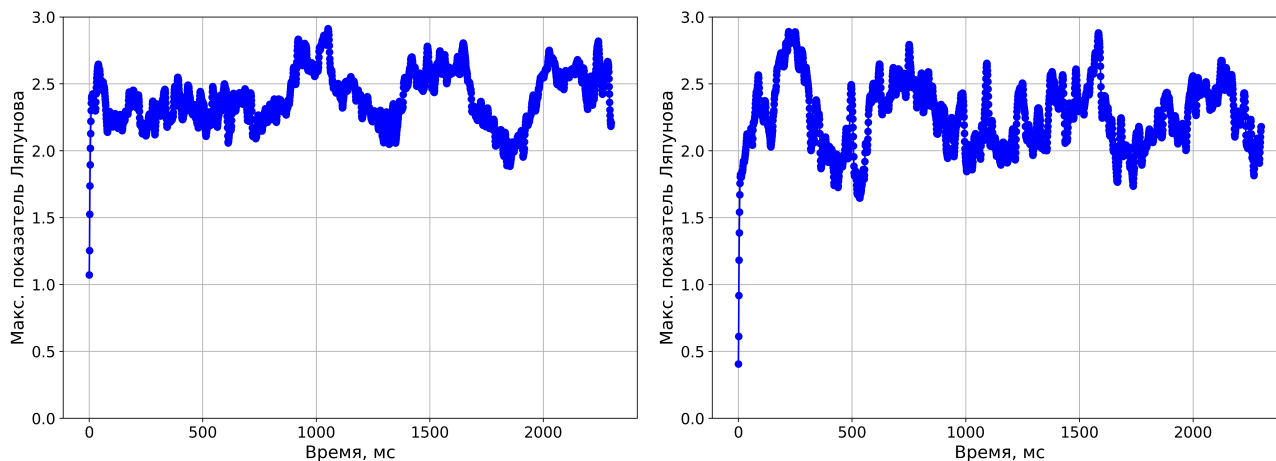


Рис. 6: Развертка значений показателей Ляпунова для смещений  $x_C$ ,  $y_C$  внутри одной видеосерии длительностью 3 с

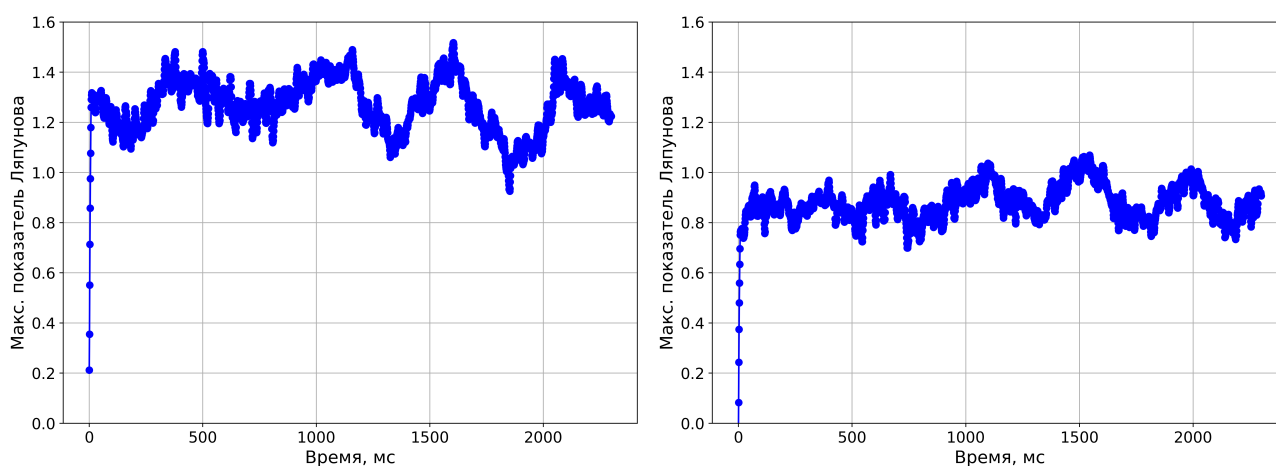


Рис. 7: Развертка значений показателей Ляпунова для скоростей дрейфа  $v_{xC}$ ,  $v_{yC}$  внутри одной видеосерии длительностью 3 с

Существенная нестационарность наблюдаемых значений максимального показателя Ляпунова указывает на гиперхаотический режим движения системы в фазовом пространстве. Для более точного ограничения класса доступных режимов рассмотрим полный спектр показателей Ляпунова описываемой системы в масштабе следования видеовыборок. Число показателей Ляпунова совпадает с числом степеней свободы в фазовом пространстве. Это число может меняться с изменением метеоусловий. На Рис.8 представлены значения размерностей фазового пространства для анализируемых параметров. На Рис.9 представлены трехсуточные развертки значений компонент спектра показателей Ляпунова.

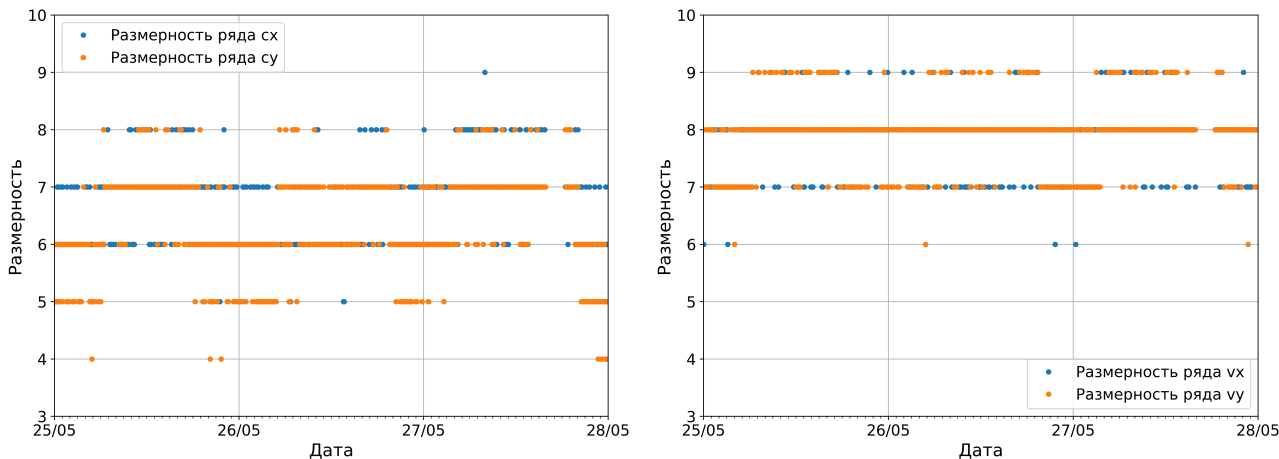


Рис. 8: Развертка значений размерности фазового пространства для различных позиционных параметров энергетического центра волнового пучка

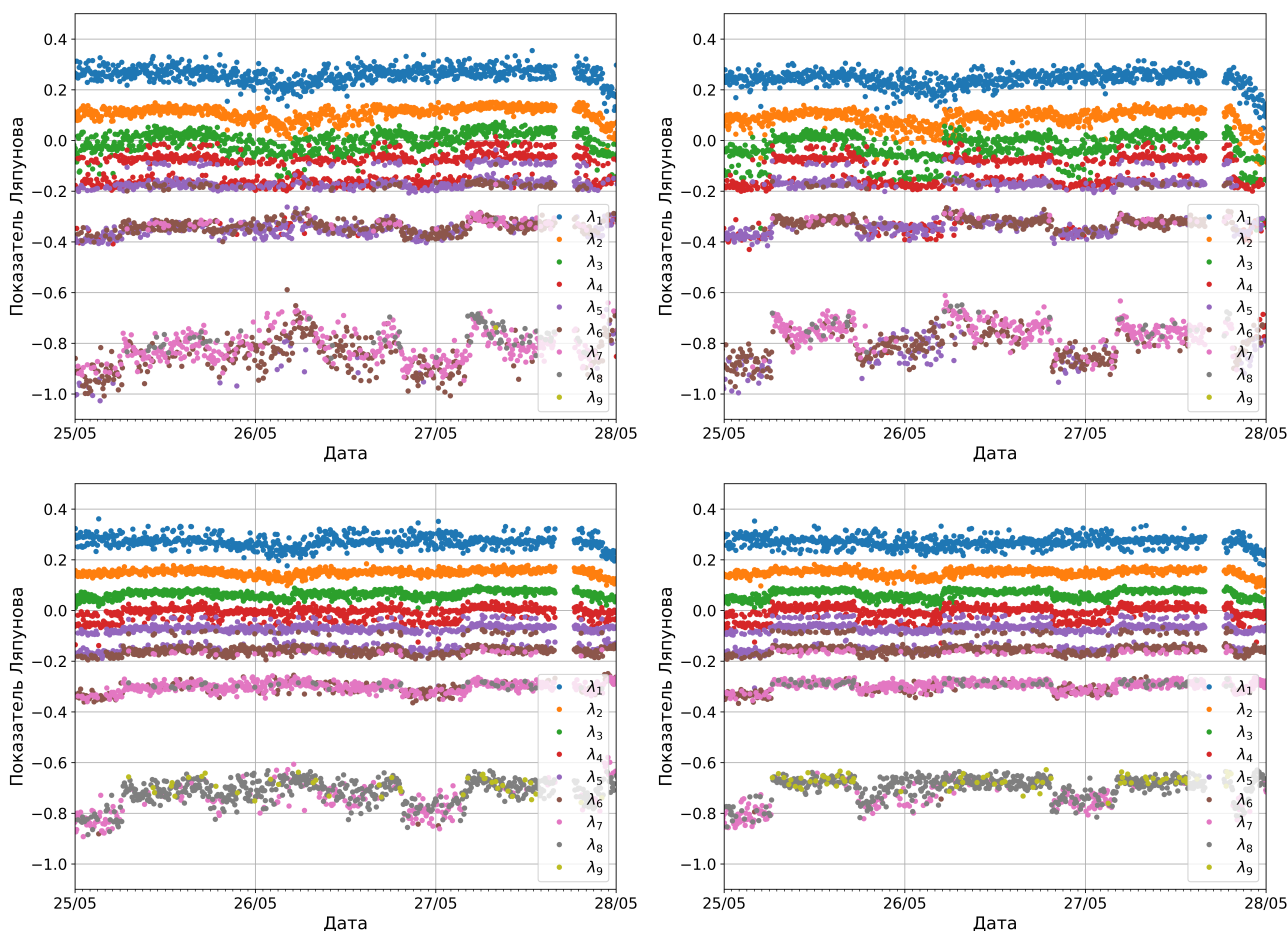


Рис. 9: Развертка значений показателей Ляпунова для позиционных смещений (верхний ряд) и для скоростей дрейфа (нижний ряд) энергетического центра волнового пучка

Практически во всех видеосериях спектр показателей Ляпунова содержит не менее двух положительно определенных компонент. Дополнительного экспериментального анализа требует обнаруженная относительно слабая вариация компонент в интервале времени наблюдения. В первом приближении

наблюдаемый спектр можно полагать квазистационарным и отражающим свойства конвективных потоков на выбранном временном интервале.

## Заключение

Сформулируем основные результаты выполненного экспериментального исследования:

- Многомодальная функция распределения для регистрируемых реализаций компонент вектора смещения и вектора дрейфа центра энерго-несущего коллимированного волнового пучка может быть обоснованием использования неэкстенсивной термодинамики Тсаллиса, позволяющей управлять долевым участием маловероятных и высоковероятных состояний. Термодинамика и кинетика сложных систем на основе  $q$ -деформированной энтропии Тсаллиса, где  $q$  – мера неаддитивности, прогнозирует асимптотически степенные статистические распределения, переходящие в пределе  $q \rightarrow 1$  в экспоненциальные распределения. Именно такие характеристики наблюдаются в экспериментальных сериях.
- $q$ -деформированная энтропия Тсаллиса для статистического ансамбля позиционных параметров информативна при оценке степени термической неравновесности многокомпонентной системы и может быть использована как мера нестационарности, пространственной неоднородности и неравновесности оптической трассы. При  $q \rightarrow 0$  значение энтропии Тсаллиса совпадает с числом доступных состояний исследуемого ансамбля, определяемых условиями пространственной дискретизации системы регистрации. Подобную характеристику целесообразно использовать для калибровки цифровых регистраторов.
- Рассмотренная методика анализа  $q$ -деформированных характеристик включает анализ эскортных распределений, кинетики вариации семейства  $q$ -энтропий и энергетических распределений. На основе эскортных распределений могут быть вычислены экспериментально наблюдаемые средние по ансамблю параметры, входящие в уравнения состояния и уравнение процесса – средние  $q$ -плотность частиц газа,  $q$ -скорость дрейфа газа в трубке тока,  $q$ -плотность внутренней энергии.

- На микромасштабах времени в сотни миллисекунд значение максимального показателя Ляпунова сильно варьируется. Однако при переходе к масштабам более 1 секунды вариации затухают и относительно слабо меняются во времени в светлое время суток. Наблюдаемые два положительных значения показателя Ляпунова позволяет отнести фазовые траектории позиционных характеристик к конкретному типу хаотического режима – гиперхаосу.

## Литература

1. Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Derivation of hydrodynamic and quasi-hydrodynamic equations for transport systems based on statistics of Tsallis. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. 2014. P.8–32.
2. Kolesnichenko A.V. To the construction of the thermodynamics of quantum nonextensive systems in the framework of the statistics of Tsallis. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. 2019. P.16–44.
3. Tsallis C. *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*. Springer-Verlag NewYork. 2009. 381 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>
4. Abe S. Stability of Tsallis entropy and instabilities of Renyi and normalized Tsallis entropies: A basis for q-exponential distributions. *Physical Review E*. 2002. Vol.66. No.4. P.046134.
5. Bashkirov A.G., Vityazev A.V. Information entropy and power-law distributions for chaotic systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol.277. No.1-2. P.136–145.
6. Bashkirov A.G. Renyi entropy as a statistical entropy for complex systems. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2006. Vol.149. No.2. P.1559–1573.
7. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of statistical physics*. 1988. Vol.52. No.1-2. P.479–487.

8. Curado Evaldo M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics. *Journal of Physics a: mathematical and general*. 1991. Vol.24. No.2. P.L69.
9. Mariz Ananias M. On the irreversible nature of the Tsallis and Renyi entropies. *Physics Letters A*. 1992. Vol. 165. No. 5-6. P.409–411.
10. Matsak I.S., Kapranov V.V., Tugaenko V.Yu. et al. Super narrow beam shaping system for remote power supply at long atmospheric paths. *Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XIX*. 2017. Vol.10090. P.100900U.
11. Babanin E.A., Suhareva N.A., Vokhnik O.M. et al. Positional characteristics of generalized decentered elliptical Gaussian beams propagating through extended atmospheric paths. *2017 Days on Diffraction (DD)*. 2017. P.24–30.
12. Umarov S., Tsallis C., Steinberg S. On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan journal of mathematics*. 2008. Vol. 76. No.1. P.307–328.
13. Zaripov R.G. Changes in the entropy and the Tsallis difference information during spontaneous decay and self-organization of nonextensive systems. *Russian Physics Journal*. 2001. Vol.44. No.11. P.1159–1165.
14. Zaripov R.G. On thermodynamic equilibrium of nonextensive systems. *Technical physics*. 2006. Vol.51. No.11. P.1393–1397.
15. Kolesnichenko A.V. To the construction of the thermodynamics of non-additive media on the basis of the statistics of Tsallis–Mendes–Plastino. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. 2018. P.23–28.
16. Kolesnichenko A.V. Modification in the framework of nonadditive Tsallis statistics of the gravitational instability criterions of astrophysical disks. *Matematicheskoe modelirovanie - Mathematical Simulation*. 2016. Vol.28. No.3. P.96–118. (In Russian)
17. Cao L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1997. Vol.110. No.1-2. P.43–50.



18. Rainer K.H., Schreiber T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1999. Vol.9. No.2. P.413–435.
19. Rosenstein M.T, Collins J.J, De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. Vol.65. No.1-2. P.117–134.

**Для цитирования:**

Бланк А. В., Сухарева Н. А., Цыганов М. В. Q-параметрические позиционные параметры коллимированного волнового пучка на выходе атмосферной трассы. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. № 8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.1>