

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.2>

УДК 537.874; 537.624

## ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИН-ВОЛНОВОГО РЕЗОНАНСА В ТОНКИХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ В ОТСУТСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ АНИЗОТРОПИИ

В. И. Щеглов

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 16 июня 2020 г.

**Аннотация.** Главным результатом настоящей работы является интерпретация возбуждения спин-волнового резонанса однородным переменным полем в случае отсутствия поверхностной анизотропии за счет жесткости спиновой цепочки, обусловленной неоднородным обменным взаимодействием. В рамках геометрии нормально намагниченной пленки рассмотрен классический вариант возбуждения спин-волнового резонанса на основе колебаний цепочки спинов, связанных обменным взаимодействием. Решена задача о колебаниях такой цепочки с учетом граничных условий, состоящих в равенстве нулю амплитуды колебаний на поверхностях пленки, что соответствует закреплению спинов на этих поверхностях. На основе анализа интеграла перекрытия показано, что возможно возбуждение только таких мод, при которых по толщине пленки укладывается нечетное число полуволен колебаний. Отмечена недостаточность модели поверхностной анизотропии для интерпретации ряда экспериментальных результатов. Отмечено, что во всех вариантах такой модели учет жесткости спиновой цепочки за счет обменного взаимодействия отсутствует. Предложена модель колебаний спиновой цепочки, основанная на учете жесткости спиновой цепочки без введения поверхностной анизотропии. В качестве упрощенной аналогии приведена механическая модель колебаний жесткой струны. Установлено, что проявление жесткости струны состоит в возникновении выпрямляющей силы, противодействующей изгибу струны. Показано, что выпрямляющая сила пропорциональна второй производной от

смещения струны по координате вдоль основного ее направления. Получено уравнение волнового типа для колебаний жесткой струны, содержащее вторые производные по координате и времени в сочетании с производной третьего порядка от смещения струны по координате. Отмечено, что производная третьего порядка соответствует выпрямляющей силе, препятствующей изгибу струны. Выполнено решение полученного уравнения третьего порядка методом разделения переменных. Предложены граничные условия, состоящие в отсутствии выпрямляющей силы, то есть в равенстве нулю второй производной от смещения по координате на концах струны. Показано, что учет предложенных граничных условий приводит к решению, представляющему собой дискретный набор мод, подобный таковому для струны с закрепленными концами, причем главное отличие состоит в отсутствии такого закрепления. Результаты, полученные на механической модели, применены для анализа колебаний цепочки спинов, связанных обменным взаимодействием, в нормально намагниченной тонкой пленке. Показано, что поле неоднородного обменного взаимодействия пропорционально второй производной от поперечной составляющей намагниченности по координате вдоль цепочки. Установлено, что такое поле является механизмом возникновения силы, выпрямляющей спиновую цепочку при ее изгибе. Предложены граничные условия, состоящие в отсутствии выпрямляющей силы, то есть в равенстве нулю на поверхностях пленки второй производной от поперечной намагниченности. На основе учета граничных условий, найден дискретный спектр мод колебаний, подобный таковому, полученному по модели поверхностной анизотропии, причем главное отличие состоит в отсутствии закрепления спинов на поверхностях пленки. Приведены некоторые рекомендации по дальнейшему развитию модели жесткой цепочки спинов.

**Ключевые слова:** спин-волновой резонанс, обменное взаимодействие; изгибная жесткость.

**Abstract.** The main result of this work is the interpretation of spin-wave resonance excitation by uniform alternating field in the case of the absence of surface anisotropy

but on the basis of hardness of spin chain which is brought by non-uniform exchange interaction. In the geometry of normal magnetized film we investigated the classic variant of spin-wave resonance excitation on the basis of vibrations of change consisted from spins which are connected by exchange interaction. The task is solved about the vibrations of this chain in connection with the boundary conditions which consist of equality to zero of amplitude of vibrations on the film surfaces. These conditions correspond to attachment on spins on these surfaces. Based on the analysis of the overlap integral, it is shown that excitation is possible only of those modes for which an odd number of half-waves of oscillations fit over the film thickness. The insufficiency of the surface anisotropy model for the interpretation of a number of experimental results is noted. It is noted that in all versions of this model, there is no account of the hardness of the spin chain due to the exchange interaction. A model of spin chain vibrations is proposed, based on taking into account the hardness of the spin chain without introducing surface anisotropy. As a simplified analogy, a mechanical model of vibrations of a hard string is presented. It was found that the manifestation of string hardness consists in the emergence of a straighten force opposing the bending of the string. It is shown that the rectifying force is proportional to the second derivative of the displacement of the string along the coordinate along its main direction. A wave-type equation is obtained for the vibrations of a hard string, which contains the second-order coordinate and time derivatives in combination with a third-order derivative of the string displacement along the coordinate. It is noted that the third-order derivative corresponds to a straighten force that prevents the string from bending. The solution of the obtained third-order equation is performed by the method of separation of variables. Boundary conditions are proposed, which consist in the absence of a straighten force, that is, in the equality to zero of the second derivative of the coordinate displacement at the ends of the string. It is shown that taking into account the proposed boundary conditions leads to a solution that is a discrete set of modes, similar to that for a string with fixed ends, the main difference being the absence of such a fixation. The results obtained on the mechanical model were applied for analyzing vibrations of a chain of spins

coupled by exchange interaction in a normally magnetized thin film. It is established that the field of non-uniform inhomogeneous exchange interaction is proportional to the second derivative of the transverse component of the magnetization along the coordinate along the chain. It was found that such a field is a mechanism for the generation of a force that straightens the spin chain during its bending. Boundary conditions are proposed, consisting in the absence of a straighten force, that is, in the equality to zero on the film surfaces of the second derivative of the transverse magnetization. Taking into account the boundary conditions, a discrete spectrum of vibration modes was found, similar to that obtained using the surface anisotropy model with the main difference being the absence of spin pinning on the film surfaces. Some recommendations are given for the further development of the hard spin chain model.

**Key words:** spin-wave resonance, exchange interaction, curvature hardness.

## Введение

Современные технологии обработки информации требуют освоения терагерцовых диапазонов частот и нанометровых размеров [1-9]. Разработка конкретных устройств при этом базируется на тонкопленочной технике, важнейшей из областей которой является использование тонких магнитных пленок [10-13]. Процессы быстрого перемагничивания, осуществляемые путем воздействия на пленку мощным импульсом света фемтосекундной длительности, позволяют возбудить упругие, магнитоупругие и спиновые волны [14-22]. Переориентация спина при переходе через границу между ферромагнетиком и антиферромагнетиком или немагнитной средой возбуждает электромагнитные волны, частоты которых достигают десятков терагерц [23-25]. Широкие перспективы для конструирования устройств обработки информации открываются при использовании спиновых волн в магнитных пленках [26-29].

В работах [30-34] приведены свойства таких волн, возбуждаемых в традиционной геометрии Дэймона-Эшбаха, то есть в касательно

намагниченной пленке, где распространяются спиновые волны дипольного характера. Стремление минимизировать размеры устройств и обеспечить их работу в более высокочастотных диапазонах стимулирует обращение к обменным спиновым волнам [35, стр.36-41, 36, стр.374-424, 37, стр.198-221]. В работах [38-41] рассмотрены волны типа Дэймона-Эшбаха с участием обменного взаимодействия, что по сравнению с дипольными волнами позволяет более чем на два порядка уменьшить размеры и повысить рабочие частоты устройств.

Главным затруднением здесь является возбуждение волн нанометровой длины, что связано с технологическими трудностями создания возбудителей, геометрические размеры которых были бы соизмеримы с длиной волны. Однако с давних времен практикуется возбуждение спиновых волн обменной природы однородным СВЧ полем в нормально намагниченных тонких магнитных пленках [42]. При этом длина возбуждаемой волны определяется толщиной пленки и уже в ранних работах составляла десятки нанометров (при толщине пленки в 500 нм в [42] возбуждалось до десяти гармоник).

Подробный обзор дальнейшего развития таких работ можно найти, например, в монографиях [36, стр.410-417, 37, стр.205-214]. Теоретическая трактовка этих работ базируется на модели поверхностной анизотропии, впервые предложенной в работе [43]. То есть полагается, что спин, расположенный на поверхности пленки, подвержен действию достаточно сильного поля анизотропии, которое препятствует его колебаниям, то есть вызывает «закрепление» спина на этой поверхности. Следует заметить, что такое предположение было введено без какого-либо независимого экспериментального обоснования, а оправдывалось только самим фактом возможности возбуждения спиновых волн обменного характера однородным СВЧ полем.

Во всех последующих работах, частично обобщенных в [36, стр.410-417, 37, стр.205-214], экспериментальные результаты трактовались лишь на основе такой модели, в том числе путем предположительного введения «частичного» и

«упругого» закрепления. То есть модель простого «жесткого» закрепления спина для объяснения ряда экспериментов оказывалась недостаточной, а предположение о «частичном» или «упругом» закреплении вводилось искусственно, чтобы как-то согласовать выводы модели с экспериментальными данными.

Дополнительно также следует отметить, что численная оценка величины анизотропии, требуемой для достаточного закрепления спина на поверхности, как правило, на порядок и более превышает значение анизотропии в основном объеме пленки, так что природа ее появления остается неясной.

В то же время, простые качественные соображения говорят о том, что спин на поверхности пленки должен быть не закреплен, а наоборот, более свободен, чем в ее объеме. Положение о большей свободе поверхностного спина следует из того, что внутри объема спин со всех сторон находится в окружении других спинов, «прикрепляющих» его к себе за счет обменного взаимодействия, тогда как на поверхностный спин действуют обменные силы только с одной стороны, соответствующей основному объему пленки, а с другой стороны, то есть со стороны свободного пространства, никаких сил нет.

В модели поверхностной анизотропии отсутствует учет обменного выстраивания спинов в одном направлении. Однако именно обменное взаимодействие затрудняет изгиб прямолинейной спиновой цепочки, создавая при изгибе определенную «выпрямляющую» силу. То есть и здесь модель поверхностной анизотропии оказывается недостаточной.

Настоящая работа посвящена рассмотрению колебаний спинов в тех же условиях, то есть в нормально намагниченной тонкой пленке, но без учета поверхностной анизотропии, а также с введением действующей на спиновую цепочку выпрямляющей силы. В основу описания обменного взаимодействия положена трактовка, приведенная в монографии [34, стр.144-166].

## **1. Общая геометрия задачи**

Общая геометрия задачи для магнитной пленки показана на рис. 1.

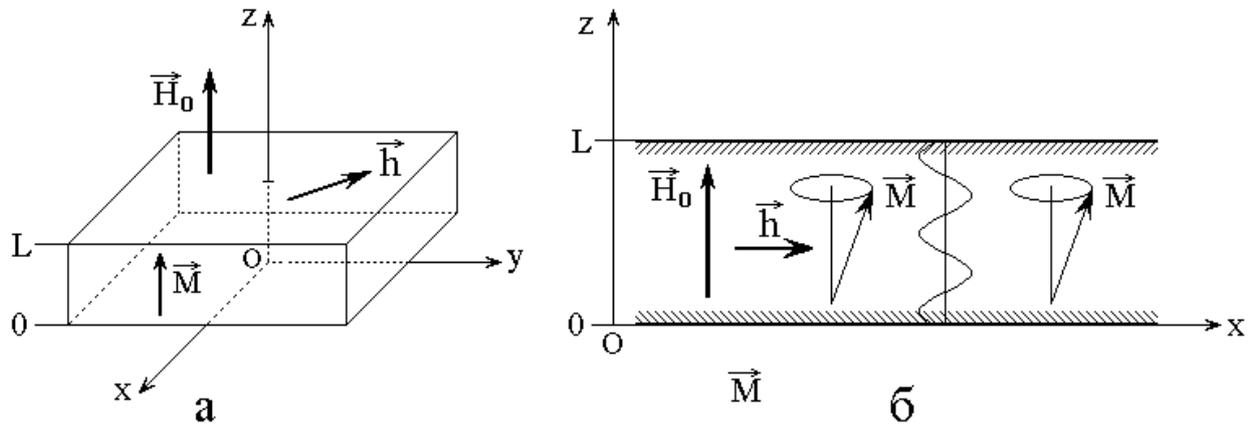


Рис.1. Общая геометрия задачи.  
 а – магнитная пленка, общий вид;  
 б – сечение пленки плоскостью  $Oxz$ .

Здесь слева (рис.1а) представлена магнитная пленка в общем виде. Система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oxy$  совпадает с нижней поверхностью пленки. При этом нижней поверхности соответствует координата  $z = 0$ , а верхней –  $z = L$ . То есть толщина пленки равна  $L$ . Постоянное поле  $\vec{H}_0$  перпендикулярно плоскости пленки, переменное  $\vec{h}$  приложено в плоскости пленки. Внешнее магнитное поле  $\vec{H}_0$  предполагается достаточным для выстраивания намагниченности перпендикулярно плоскости пленки (вдоль оси  $Oz$ ), то есть оно превышает поле размагничивания  $4\pi M_0$ , где  $M_0$  – намагниченность насыщения.

Справа (рис.1б) показан разрез той же пленки плоскостью  $Oxz$ . Волнистой линией посередине изображена спиновая волна, распространяющаяся вдоль оси  $Oz$  через всю толщину пленки от одной поверхности до другой. При этом предполагается, что переменное поле  $\vec{h}$  в плоскости пленки однородно, так что во всей пленке при одной и той же координате  $z$  намагниченность прецессирует в одинаковой фазе.

Спины, рассматриваемые как векторы намагниченности, во всей пленке связаны обменным взаимодействием, определяющим их выстраивание вдоль одной оси. Далее будет рассматриваться не весь массив спинов, а отдельная их цепочка, ориентированная вдоль оси  $Oz$ , проходящая от одной поверхности

пленки до другой. Возможность такого рассмотрения обоснована синфазностью колебаний намагниченности в пределах любой плоскости, параллельной  $Oxy$ . При этом обменное взаимодействие вынуждает спины внутри цепочки выстраиваться друг за другом в одну линию, в отсутствие переменного поля ориентированную точно вдоль оси  $Oz$ . Переменное поле может вызывать отклонение от такой линии. Такое отклонение и будет образовывать внутри цепочки спиновую волну, распространяющуюся вдоль оси  $Oz$ . Поперечные компоненты намагниченности в такой волне будут ориентированы вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , а их амплитуда будет меняться по координате  $Oz$ . Именно такая волна рассматривается далее.

## 2. Модель поверхностной анизотропии

Рассмотрим сначала модель поверхностной анизотропии, следуя ее классическому виду, впервые предложенному в работе [43].

В этой работе рассмотрен спин-волновой резонанс обменных волн в нормально намагниченной тонкой пленке. В качестве модели предложена перпендикулярная поверхности пленки линейная цепочка спинов, рассматриваемых как классические векторы намагниченности, связанные обменным взаимодействием.

Геометрия задачи подобна представленной на рис.1. Это – нормально намагниченная тонкая пленка, на которую воздействует однородное переменное поле в ее плоскости. Исследуется возбуждение колебаний спинов под воздействием переменного поля. Система координат  $Oxyz$  ориентирована таким образом, что плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью пленки, а ось  $Oz$  ей перпендикулярна. Постоянное поле приложено вдоль оси  $Oz$ , переменное поле приложено в плоскости  $Oxy$ . Колебания намагниченности в плоскости  $Oxy$  однородны, так что намагниченность зависит только от координаты  $z$ . Между спинами в пленке имеется обменное взаимодействие, выстраивающее их в одном направлении. Постоянное поле превышает поле размагничивания формы пленки, так что в стационарном состоянии намагниченность

ориентирована вдоль оси  $Oz$ . По толщине пленки возбуждаются стоячие волны намагниченности.

Главное предположение, составляющее основу работы [43] – наличие в пленке поверхностной анизотропии.

Рассматривается цепочка из спинов, выстроенная вдоль оси  $Oz$ . Крайний спин –  $\vec{S}_1$ , следующий за ним –  $\vec{S}_2$ . На спин  $\vec{S}_1$  действуют два поля: внешнее  $\vec{H}_0$  и поле поверхностной анизотропии  $\vec{H}_a$ . На спин  $\vec{S}_2$  действует только внешнее поле, а поле анизотропии не действует. Спины связаны обменным взаимодействием.

Записывается уравнение движения для первого спина [43]:

$$\frac{\partial \vec{S}_1}{\partial t} = \frac{2J}{\hbar} [\vec{S}_1 \times \vec{S}_2] + \gamma [\vec{S}_1 \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_a)], \quad (1)$$

где  $J$  – интеграл обмена (однородного обменного взаимодействия),  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\gamma$  – гиромагнитная постоянная.

Раскрываем по компонентам:

$$\frac{\partial S_1^x}{\partial t} = \frac{2J}{\hbar} (S_1^y - S_2^y) S^z + \gamma S_1^y (H_0 + H_a); \quad (2)$$

$$\frac{\partial S_1^y}{\partial t} = -\frac{2J}{\hbar} (S_1^x - S_2^x) S^z - \gamma S_1^x (H_0 + H_a), \quad (3)$$

где через  $S^z$  обозначена компонента спина по оси  $Oz$ , в линейном приближении одинаковая для обоих спинов, близкая к единице (или к намагниченности насыщения).

Введем обозначения:

$$\omega_l = \gamma (H_0 + H_a); \quad (4)$$

$$\omega_e = \frac{2JS}{\hbar}, \quad (5)$$

где через  $S$  обозначена та же компонента по оси  $Oz$ , у которой индекс « $z$ » опущен за ненадобностью.

С этими обозначениями получаем:

$$\frac{\partial S_1^x}{\partial t} = \omega_e (S_1^y - S_2^y) + \omega_l S_1^y; \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_1^y}{\partial t} = -\omega_e (S_1^x - S_2^x) - \omega_l S_1^x, \quad (7)$$

Представим  $S_2^y$  и  $S_2^x$  в виде разложений в ряды по параметру решетки  $a$  и ограничимся их первыми членами:

$$S_2^y \approx S_1^y + a \frac{\partial S_1^y}{\partial z}; \quad (8)$$

$$S_2^x \approx S_1^x + a \frac{\partial S_1^x}{\partial z}. \quad (9)$$

**Замечание.** В работе [43] учтены также последующие члены рядов со вторыми производными, однако это ничего принципиально нового не дает, а только увеличивает громоздкость выкладок, поэтому здесь ограничиваемся членами с первыми производными.

Подставляя (8), (9) в (6), (7), получаем:

$$\frac{\partial S_1^x}{\partial t} = -a\omega_e \frac{\partial S_1^y}{\partial z} + \omega_l S_1^y; \quad (10)$$

$$\frac{\partial S_1^y}{\partial t} = a\omega_e \frac{\partial S_1^x}{\partial z} - \omega_l S_1^x. \quad (11)$$

Исключим из этих выражений  $S_1^y$ . Для этого сначала продифференцируем (10) по времени и в первом слагаемом справа изменим порядок дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 S_I^x}{\partial t^2} = -a\omega_e \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial S_I^y}{\partial t} \right) + \omega_I \frac{\partial S_I^y}{\partial t}. \quad (12)$$

Теперь подставим (11) в полученное выражение:

$$\frac{\partial^2 S_I^x}{\partial t^2} = -a\omega_e \frac{\partial}{\partial t} \left( a\omega_e \frac{\partial S_I^x}{\partial z} - \omega_I S_I^x \right) + \omega_I \left( a\omega_e \frac{\partial S_I^x}{\partial z} - \omega_I S_I^x \right). \quad (13)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\frac{\partial^2 S_I^x}{\partial t^2} = -a^2 \omega_e^2 \frac{\partial^2 S_I^x}{\partial z^2} + 2\omega_e \omega_I \frac{\partial S_I^x}{\partial z} - \omega_I^2 S_I^x. \quad (14)$$

Это выражение с точностью до первых членов разложений (8) и (9) совпадает с формулой (10) в работе [43].

Полученное выражение представляет собой уравнение для первого спина, который находится в поле поверхностной анизотропии.

Далее в работе [43, форм.(12)] предлагается «принять для внутренних спинов цепочки решение вида»:

$$S_I^x = e^{i\omega t} (\alpha \sin k z + \beta \cos k z). \quad (15)$$

Для упрощения записи опустим далее индексы « $I$ » и « $x$ », то есть запишем (15) в виде:

$$S = e^{i\omega t} (\alpha \sin k z + \beta \cos k z), \quad (16)$$

где под  $S$  подразумеваются поперечные, то есть ориентированные вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ , компоненты спина внутри цепочки.

Найдем производные:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} (\alpha \sin k z + \beta \cos k z); \quad (17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = k e^{i\omega t} (\alpha \cos k z - \beta \sin k z); \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -k^2 e^{i\omega t} (\alpha \sin k z + \beta \cos k z). \quad (19)$$

Подставляя (17)-(19) в (14) и разделяя на  $e^{i\omega t}$ , получаем:

$$-\omega^2 (\alpha \sin k z + \beta \cos k z) = a^2 k^2 \omega_e^2 (\alpha \sin k z + \beta \cos k z) + 2 a k \omega_e \omega_1 (\alpha \cos k z - \beta \sin k z) - \omega_1^2 (\alpha \sin k z + \beta \cos k z). \quad (20)$$

Далее, поскольку рассматривается крайний спин цепочки, следует положить в этой формуле  $z = 0$ , откуда получаем:

$$-\omega^2 \beta = a^2 k^2 \omega_e^2 \beta + 2 a k \omega_e \omega_1 \alpha - \omega_1^2 \beta. \quad (21)$$

Разделяя на  $\alpha$  и выделяя  $\beta/\alpha$ , получаем:

$$\left( \omega_1^2 - \omega^2 - a^2 k^2 \omega_e^2 \right) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) = 2 a k \omega_e \omega_1. \quad (22)$$

Выражая  $\beta/\alpha$ , находим:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2 a k \omega_e \omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2 - a^2 k^2 \omega_e^2}. \quad (23)$$

Это выражение с точностью до первых членов разложений (8) и (9) совпадает с формулой (14) в статье [43].

Далее в работе [43] предложены два приближения.

Первое из них имеет вид:

$$\omega_1 \gg \omega, \quad (24)$$

то есть поле анизотропии достаточно велико по сравнению с полем резонанса внутри цепочки, где можно полагать  $\omega \approx \gamma H_0$ .

Второе содержит волновое число, обратное длине волны, которая близка к толщине пластины (при небольшом числе полуволен по ее толщине) и предполагает, что это волновое число невелико, то есть толщина пластины достаточно велика. Это приближение имеет вид:

$$\omega_1 \gg \omega_e k a. \quad (25)$$

Это соотношение предполагает, что поле анизотропии настолько велико, что оно пересиливает огромное поле обмена, умноженное на довольно малую постоянную решетки, которая в свою очередь умножается на не очень большое волновое число.

При таких приближениях в знаменателе формулы (23) остается только первое слагаемое, так что она принимает вид:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2ak\omega_e}{\omega_1}. \quad (26)$$

При этом, учитывая второе приближение (25), получаем:

$$\frac{\beta}{\alpha} \ll 1, \quad (27)$$

то есть  $\beta \ll \alpha$ , в результате чего выражение (16) принимает вид:

$$S = e^{i\omega t} \alpha \sin k z. \quad (28)$$

То есть колебания намагниченности описываются синусоидой, нули которой совпадают с поверхностями пленки. Требование нулевых значений намагниченности на поверхностях соответствует закреплению спинов на этих поверхностях за счет поверхностной анизотропии.

Граничные условия, соответствующие закреплению спинов на поверхностях пластины толщины  $L$ , то есть при  $z = 0$  и  $z = L$ , имеют вид:

$$S|_{z=0} = 0; \quad (29)$$

$$S|_{z=L} = 0. \quad (30)$$

Подставляя (28) в эти условия получаем дискретный ряд допустимых значений волнового числа:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad (31)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – последовательные целые числа.

При этом координатная составляющая решения (28) принимает вид:

$$S^{x,y} = \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right). \quad (32)$$

Эта формула говорит о том, что амплитуда допустимых колебаний намагниченности распределена по толщине пленки согласно синусу, нули которого приходятся на поверхности пленки.

### 3. Тензор магнитной восприимчивости

Дальнейший шаг расчета состоит в рассмотрении возбуждения намагниченности однородным переменным полем, приложенным в плоскости пленки, то есть имеющим компоненты  $h_x$  и  $h_y$  с зависимостью от времени вида  $e^{i\omega t}$ .

Поскольку по нормали к пленке приложено достаточно сильное постоянное поле, то намагниченность в стационарном состоянии ориентирована вдоль оси  $Oz$ , а переменное поле в плоскости пленки вызывает появление переменных компонент намагниченности  $m_x$  и  $m_y$  в той же плоскости. Расчет выполняется в соответствии с обычным уравнением Ландау-Лифшица с учетом динамического размагничивания и обмена. Результатом такого расчета является выражение для динамической намагниченности:

$$\vec{m} = \vec{\chi}_d \cdot \vec{h}, \quad (33)$$

где  $\vec{\chi}_d$  – тензор динамической восприимчивости обычного вида, характерного для безграничной среды, пример которого приведен в монографии [34, стр.160, форм.(7.116)-(7.121)].

Так, полагая в цитированной формуле  $k_{x,y} = 0$  (как того требует геометрия рассматриваемой задачи), получаем:

$$\vec{\chi}_d = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\gamma M_0 (\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} & \frac{i \omega \gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} \\ \hline \frac{i \omega \gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} & \frac{\gamma M_0 (\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} \end{array} \right), \quad (34)$$

где введены обозначения:

$$\omega_H = \gamma H_0; \quad (35)$$

$$\omega_E = \gamma q k^2 M_0. \quad (36)$$

При этом:

$$m_x = \frac{\gamma M_0 (\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_x + \frac{i \omega \gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_y; \quad (37)$$

$$m_y = - \frac{i \omega \gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_x + \frac{\gamma M_0 (\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_y, \quad (38)$$

а резонансная частота определяется выражением:

$$\omega = \omega_H + \omega_E, \quad (39)$$

или:

$$\omega = \gamma \left\{ H_0 + q M_0 \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 \right\}, \quad (40)$$

то есть зависит от числа полуволин  $n$ , укладывающихся по толщине пленки.

#### 4. Интеграл перекрытия в модели поверхностной анизотропии

Тензор (34) получен в предположении однородного распределения намагниченности по оси  $Oz$ . Однако из (32) следует, что такое распределение, благодаря закреплению спинов на поверхностях пленки, является неоднородным, то есть определяется синусом, зависящим от  $z$ . При этом намагниченность (33) с тензором (34) можно считать «локальной», то есть такое ее значение имеет место только в точке, определяемой заданной координатой  $z$ . В то же время, полная эффективность возбуждения спин-волнового резонанса определяется не локальной намагниченностью в одной точке, а суммарной, то есть интегральной намагниченностью, распределенной по всей толщине пленки от нуля до  $L$ .

Определим требуемую эффективность путем интегрирования плотности энергии взаимодействия намагниченности с возбуждающим полем по всей толщине пленки.

В общем случае плотность энергии взаимодействия намагниченности  $\vec{M}$  с внешним полем  $\vec{H}$  имеет вид [33, стр.38, форм.(2.4)]:

$$U_H = -\vec{M} \cdot \vec{H} = -(M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z). \quad (41)$$

Переменное поле будем считать ориентированным в плоскости пленки  $Oxy$  и по ее толщине однородным, то есть не зависящим от координаты  $z$ :

$$\vec{H} = \{h_x, h_y, 0\}. \quad (42)$$

Намагниченность положим в виде:

$$\vec{M} = \{m_x(z), m_y(z), M_0\}, \quad (43)$$

где через  $m_{x,y}$  обозначена динамическая часть намагниченности, малая по сравнению с  $M_0$ .

В рассматриваемой задаче зависимость намагниченности от  $z$  определяется формулой (32):

$$m_{x,y} = m_{\perp} \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right), \quad (44)$$

где через  $m_{\perp}$  обозначена амплитуда отклонения намагниченности от оси  $Oz$  (поперечная составляющая намагниченности).

Таким образом, получаем:

$$U_H = -\{m_x(z) \cdot h_x + m_y(z) \cdot h_y\}. \quad (45)$$

Если задана координата  $z$ , то такое взаимодействие можно считать локальным. Из формулы (44) можно видеть, что при  $z = 0$  и  $z = L$  величина  $U$  равна нулю, а при промежуточных значениях  $z$  меняется в соответствии с осцилляцией синусоиды.

Для получения эффективности суммарного взаимодействия по всей толщине пленки следует (45) проинтегрировать по всем возможным значениям этой координаты  $z$  от нуля до  $L$ , то есть найти так называемый «интеграл перекрытия»:

$$J_S = \int_0^L [m_x(z) \cdot h_x + m_y(z) \cdot h_y] dz. \quad (46)$$

Чтобы не загромождать формулы излишними индексами, а также учитывая постоянство  $h_{x,y}$  по координате  $z$ , рассмотрим более простое вспомогательное выражение:

$$J_{Sn} = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right) dz. \quad (47)$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$J_{Sn} = \begin{cases} \frac{2L}{\pi n} & \rightarrow n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \rightarrow n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (48)$$

Таким образом, взаимодействие имеет место при нечетных значениях  $n$  и отсутствует при четных.

Формулу (48) можно записать в обобщенном виде:

$$J_{Sp} = \frac{2L}{\pi(2p-1)}, \quad (49)$$

где  $p = 1, 2, 3, \dots$

При этом

$$\begin{aligned} U_H &= -J_{Sp} \{ m_{x0} h_x + m_{y0} h_y \} = \\ &= -\frac{2L}{\pi(2p-1)} \{ m_{x0} h_x + m_{y0} h_y \}, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $m_{x0}$  и  $m_{y0}$  определяются формулами (37) и (38).

Итак, резюмируя данные настоящего раздела, можно видеть, что роль интеграла перекрытия состоит в выборе из полного решения вида (32) или (44), где волновое число определяется формулой (31) при любом значении  $n$ , только

тех решений, которые могут возбуждаться переменным полем, приложенным в плоскости пленки, что требует выполнения условия

$$n = 2p - 1, \quad (51)$$

то есть вместо (44) получаем:

$$m_{x,y} = m_{\perp} \sin \left[ \frac{\pi (2p - 1)}{L} z \right], \quad (52)$$

где  $p = 1, 2, 3, \dots$  – произвольное целое число.

Такие колебания являются резонансными, а их частоты определяются соотношением (40), в котором  $n$  надо заменить на  $p$  в соответствии с (51):

$$\omega = \gamma \left\{ \dot{I}_0 + qM_0 \left[ \frac{\pi (2p - 1)}{L} \right]^2 \right\}. \quad (53)$$

Таким образом, возбуждаются только те моды, полуволна которых укладывается по толщине пленки  $(2p - 1)$  раз, то есть нечетное их число. Частота таких мод определяется формулой (53). При этом эффективность возбуждения (50), то есть амплитуда возбуждаемых мод, по мере увеличения  $p$  падает по закону обратной пропорциональности. То есть, чем больше полуволн укладывается по толщине пленки, тем возбуждение хуже. Спектр колебаний намагниченности, определяемый таким распределением частот и амплитуд, вполне удовлетворительно согласуется со свойствами спин-волнового резонанса, наблюдаемыми в эксперименте [42].

## 5. Развитие модели поверхностной анизотропии

После того, как модель поверхностной анизотропии дала приемлемое описание первых экспериментальных результатов по спин-волновому резонансу в тонких пленках [42], началось активное ее использование для множества других экспериментов в самых разнообразных условиях. Достаточно подробный обзор таких исследований с многочисленными ссылками можно найти в монографиях [36, стр.404-417], [37, стр.205-214].

Для детальной интерпретации дискретного характера спин-волнового резонанса простые граничные условия (29)-(30), предполагающие закрепление

спинов на поверхностях пленки, оказались недостаточными и были предложены более общие граничные условия вида:

$$\alpha \frac{\partial m}{\partial z} + \beta m \Big|_{z=0,L} = 0, \quad (54)$$

где  $m$  – переменная часть намагниченности в предположении малых ее колебаний,  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, определяющие удельное соотношение роли первого и второго слагаемых этого выражения в поведении спинов на поверхности пленки. В общем случае намагниченность имеет векторный характер, однако здесь для простоты этим пренебрегаем. Вывод таких условий приведен в цитированных монографиях в несколько отличающемся друг от друга виде, однако приводящем к одинаковым конечным результатам [36, стр.407-410], [37, стр.205-208].

**Замечание.** В конкретном виде параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в цитированных монографиях имеется определенное разночтение. Так, в [36, стр.410, форм.(8.3.20)] граничное условие записано в виде:

$$\xi \frac{\partial m}{\partial z} + m = 0, \quad (55)$$

где [36, стр.409, форм.(8.3.18)]:

$$\xi = \frac{qM_0^2}{2K_S}, \quad (56)$$

где  $K_S$  – «поверхностная плотность энергии взаимодействий, учитываемая эффективным полем» поверхностной анизотропии, то есть, грубо говоря, константа такой анизотропии, а для параметра  $\xi$  явное название отсутствует.

С другой стороны, в [37, стр.207, форм.(7.39)] подобное условие записано в виде:

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \xi m = 0, \quad (57)$$

где  $\xi$  – «параметр закрепления» магнитных моментов на поверхности [37, стр.207, форм.(7.37)], равный:

$$\xi = \frac{2 K_S}{q M_0^2}, \quad (58)$$

где величина  $K_S$  прямо названа «константой поверхностной анизотропии». Можно видеть, что формулы (56) и (58), используя в левой части одно и то же буквенное обозначение, описывают величины, взаимно обратные друг другу.

Несмотря на отмеченное разночтение, основной характер этих условий, обобщенных в виде (54), является достаточно универсальным.

Так при  $\alpha = 0$  из (54) получаем:

$$m|_{z=0,L} = 0, \quad (59)$$

что соответствует полному закреплению спинов на поверхности, принятому в работе [43].

При  $\beta = 0$  из того же условия (54) получаем:

$$\left. \frac{\partial m}{\partial z} \right|_{z=0,L} = 0, \quad (60)$$

что соответствует полностью свободным спинам на поверхности, то есть отсутствию какой-либо «поверхностной анизотропии». Этот случай рассмотрен ранее [43] в работе [44].

В математической трактовке, например, относительно достаточно общей задачи о колебаниях струны или пружины, эти условия соответствуют струне с закрепленными (59) и свободными (60) концами, а полное условие (54) – наиболее общему случаю так называемого «упругого закрепления» [45, стр.39-41, форм.(50)-(54)].

Таким образом, условие типа (54) отражает достаточно широкий спектр различных состояний поверхности, что и позволяет удовлетворить разнообразным спектрам спин-волновых резонансных колебаний, полученным

в работах, цитированных в [36] и [37], путем надлежащего выбора «параметров закрепления»  $\alpha$  и  $\beta$ .

## 6. Оценка величины поверхностной анизотропии

Оценим величину анизотропии, требуемой для эффективного закрепления спинов на поверхностях. Будем исходить из основной трактовки такого закрепления, предложенной в работе [43].

Выразим частоты  $\omega_e$  и  $\omega_l$  через соответствующие поля:  $\omega_e = \gamma H_e$ ,  $\omega_l = \gamma H_a$  (в пренебрежении  $H_0$ ), где  $H_e$  – поле однородного обменного взаимодействия («обменное поле» или «поле Вейсса»), а  $H_a$  – поле поверхностной анизотропии. При этом (26) принимает вид:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2akH_e}{H_a}. \quad (61)$$

Из условия (27), пренебрегая коэффициентом «2», получаем:

$$H_a \gg akH_e. \quad (62)$$

Оценим требуемую величину  $H_a$  при типичных параметрах эксперимента. Положим обменное поле  $H_e \approx 10^7$  Э [46, стр.83, 262], а постоянную решетки  $a \approx 10^{-8}$  см. Толщину пленки возьмем равной 1 мкм. При этом, полагая, что по толщине пленки укладывается одна полуволна стоячих колебаний, получаем волновое число порядка  $k \approx 10^4$  см<sup>-1</sup>. Подставляя эти значения в (2В), получаем  $H_a \gg 10^3$  Э, то есть поле анизотропии должно составлять порядка 10000 Э и более.

Поле анизотропии оценим с помощью формулы [36, стр.85, форм.(2.2.10), 33, стр.171, форм.(4.119)]:

$$H_a = \frac{2K_1}{M_0}, \quad (63)$$

где  $K_1$  – константа кубической анизотропии.

**Замечание.** Во второй из приведенных ссылок формула для поля анизотропии (4.119) не содержит коэффициента «2», как оно дано в виде  $H_{AI}$  по первой ссылке в формуле (2.2.10). Это связано с тем, что приведенные в той же первой ссылке ориентационные зависимости частоты ферромагнитного резонанса (стр.95, рис.2.2.8, рис.2.2.9) используют в качестве базового именно поле  $H_{AI}$  без такого коэффициента. Однако там же двумя строками ниже сказано, что «величину  $2H_{AI}$  называют часто полем анизотропии». Более того, получение поля анизотропии путем дифференцирования плотности энергии по компонентам намагниченности [33, стр.186, форм.(4.186)], например, с использованием формул (4.117) или (4.118), приведенных на стр.171 в [33], приводит к выражению, содержащему коэффициент «2». Поэтому в настоящей работе будем придерживаться для поля анизотропии выражения, содержащего коэффициент «2», то есть (63).

Оценим поля анизотропии в материалах, типичных для экспериментов по спин-волновому резонансу. Достаточно часто используются пленки железа, никеля и пермаллоя, имеющие кубическую структуру. Воспользуемся данными, приведенными в [46, стр.59, 281]. Так, намагниченность  $M_0$  для железа положим равной 1700 Гс, для никеля – 500 Гс, для пермаллоя – 880 Гс. Константы анизотропии для тех же материалов будем считать равными  $4 \cdot 10^5$  эрг см<sup>-3</sup>,  $4 \cdot 10^4$  эрг см<sup>-3</sup> и  $3,5 \cdot 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>. При помощи формулы (63) получаем поля анизотропии: для железа – 470 Э, для никеля – 160 Э, для пермаллоя – 8 Э. Эти поля анизотропии – в объеме материала. Все они значительно ниже требуемой величины поля анизотропии на поверхности  $H_a \sim 10000$  Э. То есть можно полагать, что для реализации модели поверхностного закрепления спинов, поле поверхностной анизотропии для железа и никеля должно превышать поле анизотропии в объеме этих материалов не менее чем на один-два порядка величины, а для пермаллоя не менее чем на три порядка.

Более приемлемые величины полей анизотропии имеют место для смешанных ферритов-гранатов [33, стр.227, табл.5.1]. Так для феррита состава  $(EuEr)_3(FeGa)_5O_{12}$  поле анизотропии составляет от 5000 до 9000 Э. Однако для наилучшего с точки зрения резонансных свойств феррита, железоиттриевого граната  $Y_3Fe_5O_{12}$ , поле анизотропии составляет всего около 40 Э [33, стр.172], что для удовлетворения неравенства (62) явно недостаточно. Тем не менее, в железоиттриевом гранате спин-волновой резонанс прекрасно наблюдается [47], что говорит о недостаточности модели поверхностной анизотропии в этом случае.

## 7. Обсуждение модели поверхностной анизотропии

Описанная в предыдущих разделах модель поверхностной анизотропии, в том числе с дальнейшим развитием, позволила описать значительное количество экспериментальных результатов. Однако, как в самой модели, так и в развитом варианте, содержатся некоторые моменты, вызывающие определенное неудовлетворение.

По статье [43], где эта модель была впервые предложена, остается довольно произвольным предположение о существовании самой «поверхностной анизотропии», как таковой, то есть о различии действующих на спин сил на поверхности пленки и внутри ее объема. В самом деле, на спин, находящийся внутри цепочки, действуют два соседних спина, расположенных в той же цепочке по обе стороны от первого. Однако на спин, находящийся на поверхности, то есть на конце цепочки, действует только один спин, так как он соседствует с единственным принадлежащим цепочке спином, а по другую сторону от него находится открытое пространство, где никаких действующих на спин сил нет. Таким образом, внутренний спин находится в более тесном окружении, чем внешний, то есть он «закреплен» значительно сильнее, чем тот, который находится на поверхности. Однако модель поверхностной анизотропии предполагает, что «закреплен» именно внешний спин.

Обращаясь к аналогии со струной [45], можно сказать, что модель поверхностной анизотропии соответствует струне с закрепленными концами, тогда как более свободное положение внешнего спина по сравнению с внутренним соответствует струне со свободными концами.

Граничные условия, соответствующие высвобождению спинов на поверхностях пластины, вместо (29) и (30) принимают вид:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (64)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=L} = 0. \quad (65)$$

Положим решение уравнения (14) в наиболее общем виде, совпадающим с (16):

$$S = e^{i\omega t} (\alpha \sin k z + \beta \cos k z). \quad (66)$$

Производная этого выражения имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = k e^{i\omega t} (\alpha \cos k z - \beta \sin k z). \quad (67)$$

Подставляя (67) в граничные условия (29) и (30), из первого получаем

$$\alpha = 0, \quad (68)$$

а из второго:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad (69)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – последовательные целые числа.

Таким образом, координатная составляющая решения (66) принимает вид:

$$S^{x,y} = \cos\left(\frac{\pi n}{L} z\right). \quad (70)$$

что отличается от (32) заменой синуса на косинус.

Интеграл перекрытия вместо (47) принимает вид:

$$J_{Sn} = \int_0^L \cos\left(\frac{\pi n}{L} z\right) dz. \quad (71)$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$J_{Sn} = \frac{L}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right) \Big|_{z=0}^{z=L} = 0. \quad (72)$$

Таким образом, предположение о свободных спинах на поверхностях пленки приводит к отсутствию возможности возбуждения колебаний намагниченности однородным переменным полем, приложенным в плоскости той же пленки.

Итак, получаем, что необходимым условием возможности возбуждения является распределение намагниченности по толщине пленки в соответствии с функцией синуса, а не косинуса. Можно полагать, что именно такое положение дел, то есть необходимость получения синуса, побудило принять в статье [43] предположение о закреплении спинов, то есть о существовании поверхностной анизотропии.

Другим моментом, вызывающим определенное неудовлетворение, является некоторое несоответствие числовой оценки поверхностной анизотропии, значению анизотропии в объеме пленки. Примеры такого несоответствия приведены в предыдущем разделе. Следует заметить однако, что развитие модели, рассмотренное в разделе 5, в известной степени позволило подогнать модель под экспериментальные результаты, что потребовало определенного подбора значений параметров закрепления. С другой стороны, какие-либо независимые экспериментальные указания на существование и измерение величины поверхностной анизотропии, кроме классического спин-волнового резонанса, по-видимому, отсутствуют. Таким образом, можно полагать, что вопрос о наличии или отсутствии закрепления спинов на поверхностях пленки, как механизма, обеспечивающего интерпретацию явления спин-волнового резонанса, на сегодняшний день остается открытым.

В настоящей работе далее предпринята попытка построения модели, описывающей явление спин-волнового резонанса без привлечения поверхностной анизотропии, то есть в предположении не закрепленных, а свободных концов цепочки спинов. При этом введено в рассмотрение свойство жесткости спиновой цепочки, состоящее в том, что, благодаря обменному взаимодействию, спины внутри цепочки стремятся выстроиться по прямой линии вдоль одной оси, а всякое отклонение спинов от этой оси внутри цепочки вызывает сильное противодействие, обеспечиваемое силами неоднородного обмена. Таким образом, спиновая цепочка проявляет определенное свойство жесткости, препятствующей ее изгибу. Для построения такой модели рассмотрим сначала механическую аналогию на примере известной задачи о колебаниях струны [45, стр.23-27], в которой положим свойства струны жесткими относительно изгиба, то есть будем полагать, что при всяком изгибе струны возникает выпрямляющая сила, противодействующая этому изгибу.

### **8. Модель жесткой струны**

Главным объектом рассмотрения в описанной выше модели поверхностной анизотропии является прямая цепочка спинов, выстроенная от одной поверхности пленки до другой. При этом концы цепочки на поверхностях закреплены, а внутреннее устройство цепочки не рассматривается, кроме, разумеется, предположения (15) (или (16)), отражающего лишь волну, распространяющуюся вдоль цепочки. Представление решения в таком виде, вообще говоря, является универсальным и может быть применено к цепочке с любым внутренним устройством. В то же время, решение предполагает локальные отклонения спинов от прямой линии в соответствии с синусом или косинусом. То есть цепочка должна как-то изгибаться. Вполне естественно предположить, что изгиб цепочки вызывает силы обменного взаимодействия, такому изгибу препятствующие. То есть цепочка является как бы «жесткой» и в той или иной степени сопротивляется изгибу.

С другой стороны, цепочку, закрепленную на обоих концах, можно рассматривать как эквивалент натянутой струны, поперечные колебания которой также описываются смещениями, перпендикулярными линии, вдоль которой эта струна натянута. В классическом варианте задача о колебаниях струны рассматривается в предположении, что «струна не сопротивляется изгибу» [45, стр.23, второй абзац снизу]. Однако можно полагать, что отмеченная выше «жесткость» цепочки спинов эквивалентна жесткости струны, которая теперь изгибу сопротивляется.

Поэтому, с методической стороны, сначала обратимся к более простой в идеологическом отношении вспомогательной задаче, а именно – к рассмотрению механической модели струны, обладающей определенной жесткостью, то есть сопротивляющейся изгибу.

## 9. Сопротивление изгибу жесткой струны

Далее будут рассматриваться колебания струны вокруг равновесного положения, которое она имеет в состоянии покоя. Так как скорость распространения возмущений по струне конечна, то в процессе колебаний струна претерпевает изгибы в различных ее частях. Будем считать струну достаточно жесткой, так что ее изгиб вызывает определенное сопротивление, то есть при изгибе струны возникает сила, препятствующая этому изгибу. Положим, что сила сопротивления изгибу в заданной точке тем сильнее, чем больше изгиб в этой точке. В геометрическом отношении изгиб струны соответствует локальной кривизне ее профиля [48, стр.551-553]. Для простоты начального рассмотрения положим, что струна изогнута только в одном месте, то есть на локальном участке конечной протяженности, а по обе стороны от этого участка струна остается прямой.

Рассмотрим общую схему локального изгиба жесткой струны, представленную на рис.2. Система координат  $Ox$  ориентирована таким образом, что ось  $Ox$  соответствует начальному положению струны в отсутствие изгиба, а ось  $Oy$  отражает смещение точек струны в поперечном

направлении. Функция зависимости смещения струны от координаты  $x$  обозначена через  $u(x)$ .

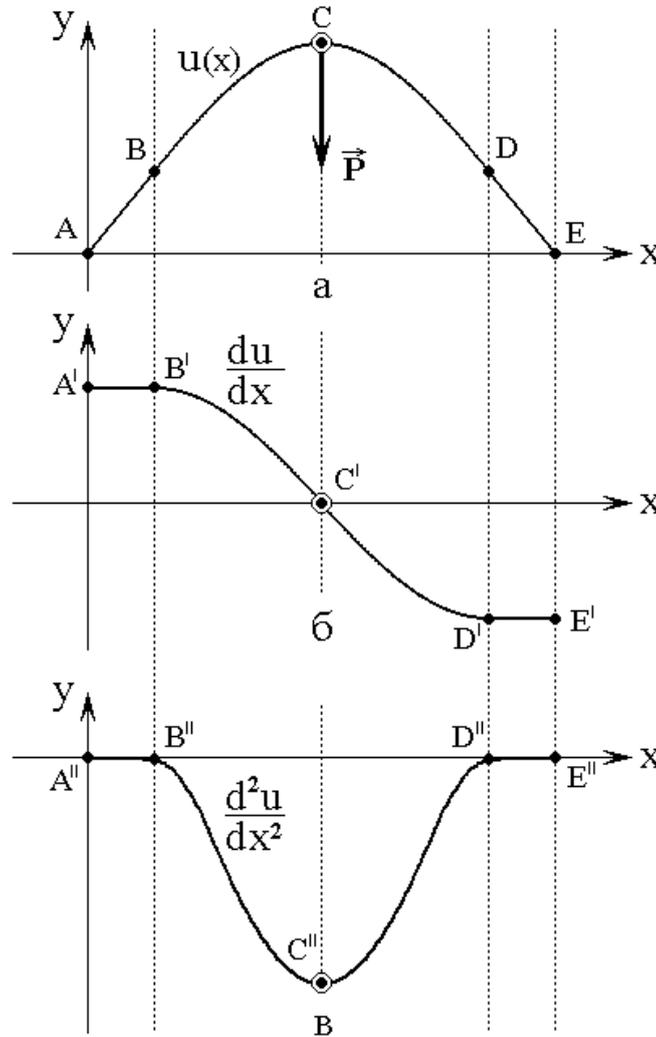


Рис.2. Схема формирования второй производной при изгибе струны.  
 а – профиль (конфигурация) изогнутой струны;  
 б – первая производная от профиля струны;  
 в – вторая производная от профиля струны.

На рис.2а показан профиль (конфигурация) частично изогнутой струны. Предполагается, что максимальный изгиб, то есть максимальная кривизна профиля имеет место в центральной части струны. Полагаем, что на участках АВ и DE изгиб отсутствует, эти участки прямые. На участке ВС изгиб нарастает, на участке CD изгиб спадает. Максимальный изгиб, то есть максимальная кривизна профиля струны имеет место в точке С. В этой точке

действует сила сопротивления изгибу  $\vec{P}$ , направленная таким образом, чтобы уменьшить кривизну профиля, то есть в отрицательном направлении оси  $Oy$  (по рисунку вниз).

На рис.2б показана первая производная от конфигурации струны по координате  $x$ , то есть  $du/dx$ . Можно видеть, что на участках  $A'B'$  и  $D'E'$  производная постоянна, что обусловлено линейностью нарастания профиля  $u(x)$  на этих участках (рис.2а). На участке  $A'B'$  производная  $du/dx$  положительна, на участке  $D'E'$  отрицательна. Между этими участками, то есть от точки  $B'$  до точки  $D'$  производная спадает, причем в точке  $C'$  проходит через нуль. В этой же точке  $C'$  крутизна спада производной максимальна, что отражает резкий переход кривой на рис.2а от нарастания к убыванию.

На рис.2в показана вторая производная от конфигурации струны по координате, то есть  $d^2u/dx^2$ . Можно видеть, что на участках  $A''B''$  и  $D''E''$  производная равна нулю, что обусловлено постоянством первой производной (рис.2б) на этих участках. Между этими участками, то есть от точки  $B''$  до точки  $D''$  вторая производная везде отрицательна, что отражает спад первой производной в этой области. Наиболее глубокий минимум имеет место в точке  $C''$ , где наклон зависимости первой производной по координате  $x$  максимален. Можно видеть, что этот минимум второй производной приходится как раз на точку максимальной кривизны профиля на рис.2а, то есть на ту точку, где сопротивление струны изгибу максимально.

Предположим далее, что сила  $\vec{P}$ , с которой струна сопротивляется изгибу в данной точке, прямо пропорциональна второй производной от профиля струны в этой же точке.

**Замечание.** Следует заметить, что предположение о прямой пропорциональности силы сопротивления второй производной является, вообще говоря, произвольным, то есть пропорциональность может быть не прямой, а определяться каким-то другим законом степенного или иного вида. Однако можно полагать, что в разложении в степенной ряд любой зависимости

член первого порядка всегда присутствует с тем или иным коэффициентом, то есть упомянутое предположение можно считать правомерным с точностью до линейного приближения, рамками которого ограничимся далее.

Таким образом, полагаем, что сопротивление жесткой струны изгибу можно описать путем введения в рассмотрение силы  $P$ , пропорциональной второй производной от зависимости смещения струны по координате, то есть:

$$P = r \frac{d^2 u}{d x^2}, \quad (73)$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления изгибу, который можно назвать «константой изгибной жесткости» струны.

Можно полагать, что в общем случае направление действия силы  $\vec{P}$  определяется нормалью к касательной, проведенной к кривой  $u(x)$  в точке максимальной ее кривизны, то есть вместо (73) следует записать:

$$\vec{P} = r \frac{d^2 u}{d x^2} \cdot \vec{n}, \quad (74)$$

где  $\vec{n}$  – вектор указанной нормали.

В проделанном рассмотрении (рис.2) положено, что точка максимального изгиба  $C$  приходится на максимальное отклонение струны от равновесного положения. Однако в общем случае значительный, в том числе наиболее резкий изгиб может иметь место не в точке максимума функции  $u(x)$ , а в стороне от такого максимума, например, где эта функция монотонно возрастает или убывает. В этом случае точка максимальной кривизны может также не совпадать с максимумом функции  $u(x)$ , то есть сильный излом может быть где-то сбоку, а окрестность максимума достаточно плавной. В этом случае для определения кривизны следует использовать формулу [48, стр.556]:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}. \quad (75)$$

где  $k$  – значение кривизны в точке  $x$ .

Заметим однако, что в представленном на рис.2 случае первая производная в точке  $C'$  равна нулю, так что формула (75) приобретает вид:

$$k(x \rightarrow \tilde{N}) = f''(x \rightarrow \tilde{N}), \quad (76)$$

что с точностью до постоянного множителя соответствует (73).

Кроме того, в окрестности изгиба можно повернуть систему координат таким образом, чтобы точка максимального изгиба совпадала с точкой максимума функции  $u(x)$ . В этом случае значение кривизны останется прежним (так как это – свойство кривой, а не системы координат), а первая производная опять обратится в нуль.

В случае малого изгиба струны также можно положить:

$$f'(x) \ll 1, \quad (77)$$

так что знаменатель формулы (75) опять обращается в единицу.

Итак, чтобы не усложнять дальнейшего рассмотрения, ограничимся случаем малого изгиба, так что для силы, препятствующей изгибу, примем выражение (73), а направление силы  $\vec{P}$  будем считать перпендикулярным равновесному положению струны, то есть по рис.2 – вдоль оси  $Oy$ .

## 10. Волновое уравнение с третьей производной

Получим теперь уравнение колебаний жесткой струны, сопротивляющейся изгибу. При выводе будем следовать методу, используемому для струны в отсутствие сопротивления изгибу [45, стр.23-26], который дополним учетом силы сопротивления изгибу, пропорциональной второй производной от профиля струны.

Обратимся к рис.3, где показаны силы, действующие на малый участок струны между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

На этом рисунке буквами А и В обозначена часть профиля струны, представляющая интерес для рассмотрения. Описываемая далее картина полностью характерна для всего протяжения струны, а рассматриваемый здесь участок между точками 1 и 2 выбран исходя из наглядности рисунка в качестве типичного примера.

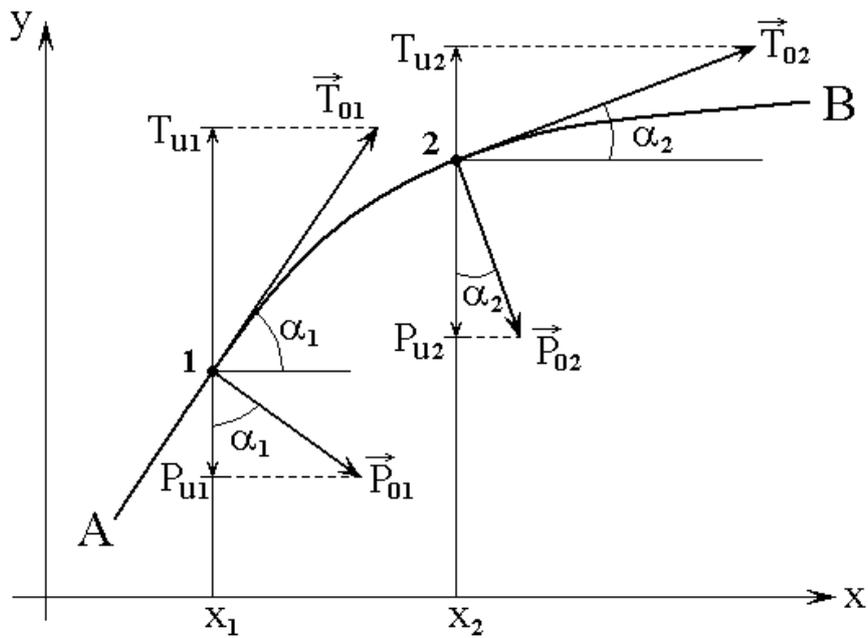


Рис.3. Силы, действующие на малый участок струны между точками 1 и 2. АВ – профиль струны.

Характер расположения сил натяжения и противодействия изгибу одинаков на всем протяжении струны, поэтому в дальнейшем рассмотрении будем указывать индексы «1» и «2» только там, где это будет необходимо. Будем полагать отклонения струны от положения равновесия достаточно малым, так что углы  $\alpha_{1,2}$  также можно считать малыми.

Итак, составляющая силы натяжения вдоль оси  $Oy$  при малом  $\alpha$  имеет вид:

$$T_u = T_0 \sin \alpha \cong T_0 \operatorname{tg} \alpha = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (78)$$

то есть:

$$T_u = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (79)$$

Составляющая силы противодействия изгибу вдоль оси  $Oy$  пропорциональна второй производной от профиля струны, то есть при малом значении  $\alpha$  имеет вид:

$$P_u = -P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (80)$$

Здесь величины  $T_0$  и  $P_0$  – положительны.

Сила на участке  $(x_1; x_2)$  вдоль оси  $Oy$  складывается из двух сил – натяжения и противодействия изгибу:

$$V_{x1,2} = (T_u|_{x2} - T_u|_{x1}) - (P_u|_{x2} - P_u|_{x1}). \quad (81)$$

С помощью (78) и (80) записываем:

$$V_{x1,2} = T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x1} \right) - P_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x1} \right). \quad (82)$$

Запишем первую скобку через среднее значение на участке  $(x_1; x_2)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x1,x2} \right) \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \Delta x, \quad (83)$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Аналогично для второй скобки получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x1,x2} \right) \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \Delta x. \quad (84)$$

Подставляя (83) и (84) в (82), получаем силу в виде:

$$V_{x1,2} = \left( T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \cdot \Delta x. \quad (85)$$

Импульс силы за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  равен:

$$\delta V_{x1,2} = \left( T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \cdot \Delta x \Delta t. \quad (86)$$

Найдем теперь изменение количества движения того же участка за то же время. Прежде всего учтем, что масса участка равна:

$$m_{x1,2} = \rho \cdot \Delta x, \quad (87)$$

где  $\rho$  – плотность на единицу длины, которую считаем по всей длине струны постоянной.

Количество движения в момент времени  $t_1$  равно:

$$U_{t1} = m_{x1,2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t1} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t1} \cdot \Delta x, \quad (88)$$

где производная  $\partial u / \partial t$  соответствует скорости.

Аналогично количество движения в момент времени  $t_2$  равно:

$$U_{t2} = m_{x1,2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t2} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t2} \cdot \Delta x. \quad (89)$$

Изменение количества движения за время  $t_2 - t_1$  равно:

$$\delta U_{t1,2} = U_{t2} - U_{t1} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t2} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t1} \right) \cdot \Delta x. \quad (90)$$

Запишем выражение в скобках через среднее значение на интервале времени  $(t_1; t_2)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t2} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t1} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t1,t2} \right) \cdot (t_2 - t_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \Delta t. \quad (91)$$

где  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Подставляя это выражение в (90), получаем:

$$\delta U_{t1,2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \Delta t \Delta x. \quad (92)$$

Согласно известному закону механики, изменение количества движения равно импульсу силы [49, стр.96, форм.(26.1)], то есть:

$$\delta V_{x1,2} = \delta U_{t1,2}, \quad (93)$$

Раскрывая обе части этого равенства в соответствии с (86) и (92), получаем:

$$\left( T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \cdot \Delta x \Delta t = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \Delta t \Delta x. \quad (94)$$

Сокращая обе части на  $\Delta x \Delta t$ , разделяя на  $\rho$ , перенося все в левую часть и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (95)$$

Введем обозначения:

$$p = \frac{T_0}{\rho}; \quad (96)$$

$$r = \frac{P_0}{\rho}. \quad (97)$$

С этими обозначениями (95) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (98)$$

Это – искомое волновое уравнение с третьей производной, отражающей сопротивление струны изгибу.

Будем полагать, что на концах струны сила (80), противодействующая изгибу, то есть выпрямляющая струну, отсутствует. То есть вторая производная от смещения струны  $u$  по оси  $Ox$  равна нулю. Таким образом, граничные условия на концах струны будут соответствовать равенству нулю именно такой второй производной.

### 11. Колебания смещения в жесткой струне

Рассмотрим решение уравнения типа (98) в общем виде. Итак, обращаемся к уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad (99)$$

где параметры  $p$  и  $r$  (по физическому смыслу, в соответствии с (96) и (97)) предполагаются действительными и положительными.

Положим граничные условия, как отсутствие выпрямляющей силы на концах струны, следующими:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad (100)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (101)$$

Решаем методом разделения переменных [45, стр.83-88], то есть будем искать решение в виде:

$$U = X(x) \cdot T(t). \quad (102)$$

Подставляя (102) в исходное уравнение (99) и разделяя на  $X T$ , получаем:

$$\frac{T''}{T} - p \frac{X''}{X} + r \frac{X'''}{X} = 0. \quad (103)$$

Выполним разделение переменных и введем постоянную разделения  $\mu$ , которую полагаем действительной:

$$\frac{T''}{T} = p \frac{X''}{X} - r \frac{X'''}{X} = -\mu^2. \quad (104)$$

Уравнение для  $T$  имеет вид:

$$T'' + \mu^2 T = 0. \quad (105)$$

Ищем решение в виде:

$$T = e^{\eta t}. \quad (106)$$

Подставляя в уравнение для  $T$ , получаем уравнение для  $\eta$ :

$$\eta^2 + \mu^2 = 0, \quad (107)$$

откуда находим:

$$\eta = \pm i \mu. \quad (108)$$

Полное решение уравнения (105) имеет вид:

$$T = Ae^{i\mu t} + Be^{-i\mu t}. \quad (109)$$

В этом выражении параметр  $\mu$  заранее не известен. В классическом методе разделения переменных [45, стр.84-86, форм.(9), (13),(15)] этот параметр определяется через собственное решение уравнения для  $X$  с граничными условиями (100)-(101). Поэтому, следуя классической схеме, обратимся сначала к следующему из (104) уравнению для  $X$  :

$$p \frac{X''}{X} - r \frac{X'''}{X} = -\mu^2. \quad (110)$$

Разделяя на  $r$ , умножая на  $X$  и вводя более удобный порядок слагаемых, получаем:

$$X''' - \frac{p}{r} \cdot X'' - \frac{\mu^2}{r} \cdot X = 0. \quad (111)$$

Введем обозначения:

$$g = -\frac{p}{r}; \quad (112)$$

$$h = -\frac{\mu^2}{r}. \quad (113)$$

Можно видеть, что в силу положительности  $p$  и  $r$  параметры  $g$  и  $h$  являются отрицательными.

С этими обозначениями уравнение (111) принимает вид:

$$X''' + g X'' + h X = 0. \quad (114)$$

Ищем решение в виде:

$$X = e^{\lambda x}. \quad (115)$$

Подставляя это выражение в уравнение для  $X$ , получаем уравнение для  $\lambda$  :

$$\lambda^3 + g\lambda^2 + h = 0. \quad (116)$$

Это – уравнение третьей степени. В его решении будем следовать методике, приведенной в [33, стр.63-71]. Прежде всего устраним член второй степени, для чего введем новую переменную:

$$y = \lambda - \varepsilon. \quad (117)$$

При этом:

$$\lambda = y + \varepsilon. \quad (118)$$

Общее уравнение третьей степени имеет вид [33, форм.(2.150)]:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0. \quad (119)$$

Согласно [33, стр.63-64], вводя замену переменной:

$$x = y + \varepsilon, \quad (120)$$

это уравнение можно привести к виду [33, форм.(2.158)]:

$$y^3 + ay + b = 0, \quad (121)$$

где, согласно [33, форм.(2.159), (2.160)], имеем:

$$a = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}; \quad (122)$$

$$b = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}. \quad (123)$$

При этом параметр  $\varepsilon$  определяется выражением:

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{3a_0}. \quad (124)$$

Запишем уравнение (119) относительно  $\lambda$ :

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (125)$$

Из сравнения этого уравнения с (116), можно видеть, что:

$$a_0 = 1; \quad (126)$$

$$a_1 = g; \quad (127)$$

$$a_2 = 0; \quad (128)$$

$$a_3 = h. \quad (129)$$

Подставляя эти параметры в (122)-(123), получаем:

$$a = -\frac{g^2}{3}; \quad (130)$$

$$b = \frac{2g^3 + 27h}{27}; \quad (131)$$

$$\varepsilon = -\frac{g}{3}. \quad (132)$$

Для дальнейшего рассмотрения будет необходима запись этих параметров через  $p$  и  $r$ , так что в соответствии с (112)-(113) получаем:

$$a = -\frac{p^2}{3r^2}; \quad (133)$$

$$b = -\frac{1}{27r^3} (2p^3 + 27\mu^2 r^2); \quad (134)$$

$$\varepsilon = \frac{p}{3r}. \quad (135)$$

Итак, уравнение для  $y$  имеет вид (121):

$$y^3 + ay + b = 0, \quad (136)$$

где  $a$  и  $b$  определяются формулами (133) и (134).

Детерминант этого уравнения равен [33, форм.(2.174)]:

$$D = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}. \quad (137)$$

Подставляя (130), (131) и выполняя упрощение, получаем:

$$D = \frac{h}{4 \cdot 27} (4g^3 + 27h). \quad (138)$$

С учетом (112) и (113), запишем это же выражение в виде:

$$D = \frac{\mu^2}{27 \cdot 4r^4} (4p^3 + 27\mu^2 r^2). \quad (139)$$

Можно видеть, что в силу положительности  $p$ , а также четности степеней всех остальных параметров, детерминант (138) или (139) в целом является положительным.

Положительность детерминанта позволяет использовать для решения уравнения (136) метод Кардано [33, стр.64-65].

Согласно этому методу, решение уравнения (136) имеет вид [33, форм.(2.171)-(2.173)]:

$$y = u + v, \quad (140)$$

где:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}}; \quad (141)$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}}, \quad (142)$$

причем  $b$  и  $D$  определяются формулами (131) и (138).

Итак, формулы (140)-(142) дают решение уравнения (136), имеющее вид (140). При этом решение уравнения для  $\lambda$  (116) определяется формулой (118). В общем случае уравнение (116), будучи третьей степени, имеет три решения [33, стр.66, форм.(2.182)-(2.184)]:

$$\lambda_1 = \varepsilon + u + v; \quad (143)$$

$$\lambda_2 = \varepsilon + \omega u + \omega^2 v; \quad (144)$$

$$\lambda_3 = \varepsilon + \omega^2 u + \omega v, \quad (145)$$

где [33, форм.(2.175)-(2.176)]:

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad (146)$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \quad (147)$$

Классический метод Кардано дает одно решение (143), являющееся действительным (в силу действительности  $p$  и  $r$ , а также положительности  $D$ ), а решения (144) и (145) являются комплексными.

Подставляя (146)-(147) в (144)-(145), приводим (143)-(145) к виду:

$$\lambda_1 = \varepsilon + u + v; \quad (148)$$

$$\lambda_2 = \left[ \varepsilon - \frac{1}{2}(u + v) \right] + i \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v); \quad (149)$$

$$\lambda_3 = \left[ \varepsilon - \frac{1}{2}(u + v) \right] - i \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v). \quad (150)$$

Введем обозначения:

$$P = \varepsilon + u + v; \quad (151)$$

$$Q = \varepsilon - \frac{1}{2}(u + v); \quad (152)$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v). \quad (153)$$

В силу действительности  $\varepsilon$ ,  $u$  и  $v$  параметры  $P$ ,  $Q$  и  $R$  также являются действительными.

При этом формулы (148)-(150) принимают вид:

$$\lambda_1 = P; \quad (154)$$

$$\lambda_2 = Q + iR; \quad (155)$$

$$\lambda_3 = Q - iR. \quad (156)$$

Таким образом, согласно (115), решение уравнения (114) имеет вид:

$$X = A e^{P x} + B e^{(Q + iR)x} + C e^{(Q - iR)x}, \quad (157)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – постоянные, которые должны быть определены из граничных условий.

Для рассматриваемой задачи о колебаниях струны наибольший интерес представляют комплексные решения, так как именно они обеспечивают

периодичность функции смещения струны  $U$  по координате  $x$ . Граничных условий два, а постоянных – три, поэтому одну из них можно задать произвольно. Оставляя оба колебательных решения, положим  $A = 0$ . При этом решение принимает вид:

$$X = B e^{(Q + iR)x} + C e^{(Q - iR)x}. \quad (158)$$

Для подстановки в граничные условия требуется вторая производная. Дифференцируя (158) по  $x$  два раза, получаем:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = (Q + iR)^2 B e^{(Q + iR)x} + (Q - iR)^2 C e^{(Q - iR)x}. \quad (159)$$

Согласно (100), (101), граничные условия для  $X$  имеют вид:

$$\left. \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad (160)$$

$$\left. \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (161)$$

Подставляя (159) в граничные условия (160), (161), получаем:

$$(Q + iR)^2 B + (Q - iR)^2 C = 0; \quad (162)$$

$$(Q + iR)^2 B e^{(Q + iR)l} + (Q - iR)^2 C e^{(Q - iR)l} = 0. \quad (163)$$

Это – система уравнений для определения  $B$  и  $C$ . Условие нетривиальности решения требует равенства нулю ее детерминанта. Найдем этот детерминант:

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{vmatrix} (Q + iR)^2 & (Q - iR)^2 \\ (Q + iR)^2 e^{(Q + iR)l} & (Q - iR)^2 e^{(Q - iR)l} \end{vmatrix} = \\ &= (Q + iR)^2 (Q - iR)^2 e^{Ql} (e^{-iRl} - e^{iRl}) = \\ &= -2i(Q + iR)^2 (Q - iR)^2 e^{Ql} \sin(Rl). \end{aligned} \quad (164)$$

Из условия

$$D_0 = 0 \quad (165)$$

получаем:

$$\sin(Rl) = 0, \quad (166)$$

так что:

$$Rl = \pi n, \quad (167)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  – целое число.

Отсюда получаем:

$$R_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (168)$$

где индекс « $n$ » введен, чтобы подчеркнуть множественность собственных значений параметра  $R$ .

Условие нетривиальности решения  $D_0 = 0$  означает, что уравнения (162) и (163) не являются независимыми, то есть одну из постоянных можно исключить. С помощью первого уравнения (162) выразим  $C$  через  $B$ :

$$C = -\frac{(Q + iR)^2}{(Q - iR)^2} B. \quad (169)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (163), можно убедиться, что оно приводится к виду:

$$B(e^{iRl} - e^{-iRl}) = 0, \quad (170)$$

то есть в силу равенства (166), эквивалентного условию  $D_0 = 0$ , удовлетворяется тождественно.

Подставим теперь (169) в решение (158):

$$X = B e^{(Q + iR)x} - \frac{(Q + iR)^2}{(Q - iR)^2} B e^{(Q - iR)x}. \quad (171)$$

В таком виде решение зависит только от одной постоянной  $B$ . Вынося общие множители за скобки, получаем:

$$X = B e^{Qx} \left[ e^{iRx} - \frac{(Q + iR)^2}{(Q - iR)^2} e^{-iRx} \right]. \quad (172)$$

Чтобы выделить периодическое решение, надо показатель первой экспоненты (за скобками) положить равным нулю, то есть принять условие:

$$Q = 0. \quad (173)$$

В этом случае решение принимает вид:

$$\begin{aligned} X &= B \left[ e^{iRx} - \frac{(iR)^2}{(-iR)^2} e^{-iRx} \right] = \\ &= B (e^{iRx} - e^{-iRx}) = 2iB \sin(Rx). \end{aligned} \quad (174)$$

Подставляя значение  $R$  в соответствии с (168), получаем:

$$X_n = 2iB \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (175)$$

откуда, учитывая произвольность амплитудного множителя и полагая его равным единице (что допустимо благодаря тому, что начальные условия в исходной задаче не заданы), получаем:

$$X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (176)$$

## 12. Спектр резонансных частот колебаний жесткой струны

Итак, координатная часть исходной задачи (99)-(101) решена, то есть найдено распределение смещения струны по координате, определяемое собственными функциями  $X_n$  (176) при собственных значениях  $R_n$  (168). Обратимся теперь к нахождению параметра  $\mu$ , согласно (109), определяющему зависимость решения полной задачи (99)-(101) от времени, в соответствии с полным решением вида (102).

Как показано выше, составляющая  $X$  полного решения (102) представляет собой дискретный набор собственных функций (176), определяемый набором собственных значений  $R_n$ , соответствующих целым числам  $n$ . Из этого следует, что параметр  $\mu$ , присутствующий в уравнении (111), также будет иметь дискретные значения. То есть, подставляя решение (176) в уравнение (111) и разрешая полученное выражение относительно  $\mu$ ,

можно получить дискретный ряд значений  $\mu_n$ , соответствующих тем же целым числам  $n$ . Однако при этом получаются довольно сложные тригонометрические выкладки, поэтому обратимся к более простому приему.

Итак, выше на  $u$  и  $v$  получены два условия (153) и (173), с учетом явного вида выражения для  $Q$  (152), имеющие вид:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v), \quad (177)$$

$$\varepsilon - \frac{1}{2}(u + v) = 0, \quad (178)$$

где  $R$  определяется выражением (168):

$$R_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (179)$$

а  $\varepsilon$  – выражением (132) с учетом (112):

$$\varepsilon = \frac{p}{3r}. \quad (180)$$

Из (178) выразим  $v$ :

$$v = 2\varepsilon - u. \quad (181)$$

Подставляя это выражение в (177) и находя  $u$  с учетом (112) и (113), получаем:

$$u = \frac{\sqrt{3}\pi n}{3l} + \frac{p}{3r}. \quad (182)$$

Введем вспомогательное обозначение:

$$G = \frac{\sqrt{3}\pi n}{3l} + \frac{p}{3r}. \quad (183)$$

При этом (182) принимает вид:

$$u = G. \quad (184)$$

Согласно (141), имеем:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}}, \quad (185)$$

где в соответствии с (131) и (138) с учетом (112) и (113), имеем:

$$-\frac{b}{2} = \frac{1}{2 \cdot 27 r^3} (2 p^3 + 27 \mu^2 r^2); \quad (186)$$

$$\sqrt{D} = \frac{\mu}{6 r^2} \sqrt{\frac{1}{3} (4 p^3 + 27 \mu^2 r^2)}. \quad (187)$$

Из условия (184) с учетом (185), получаем:

$$G^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D}. \quad (188)$$

Подставляя в это выражение (186) и (187), раскрывая скобки, приводя подобные члены и выделяя  $\mu^2$ , получаем уравнение для  $\mu$  в виде:

$$(27 G^3 r^3 - p^3)^2 - 27^2 G^3 r^5 \mu^2 = 0. \quad (189)$$

Из этого уравнения находим:

$$\mu = \frac{27 G^3 r^3 - p^3}{27 G r^2 \sqrt{G r}}, \quad (190)$$

где  $G$  определяется выражением (183), имеющим дискретный характер, то есть:

$$G = G_n = \frac{\sqrt{3} \pi n}{3l} + \frac{p}{3r}, \quad (191)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  – целое число.

Таким образом,  $\mu$  также имеет дискретный характер, определяемый параметром  $n$ . Непосредственная подстановка (183) позволяет представить эту зависимость  $\mu$  от  $n$  в явном виде:

$$\mu_n = \frac{27 \left( \frac{\sqrt{3} \pi n}{3l} + \frac{p}{3r} \right)^3 r^3 - p^3}{27 \left( \frac{\sqrt{3} \pi n}{3l} + \frac{p}{3r} \right) r^2 \sqrt{\left( \frac{\sqrt{3} \pi n}{3l} + \frac{p}{3r} \right) r}}. \quad (192)$$

По физическому смыслу задачи в соответствии с зависимостью от времени вида (109) параметр  $\mu$  представляет собой частоту свободных колебаний системы, описываемой уравнением (99). В общем случае частота должна быть положительной, поэтому представляет интерес проверить знак полученного выражения для  $\mu$  при различных значениях параметра  $n$ .

Можно видеть, что выражение (190), а также следующее из него (192), содержат в числителе разность двух положительных слагаемых, а все остальные составляющие этих выражений положительны. Поэтому обратим внимание только на знак числителя выражения (190).

Из структуры выражения для  $G_n$  (191) видно, что в силу положительности  $p$ ,  $l$  и  $r$  оно положительно при любом значении  $n \geq 1$ , причем его величина тем больше, чем большее значение принимает параметр  $n$ .

Рассмотрим сначала значение  $n = 1$ . При этом  $G$  принимает вид:

$$G \rightarrow G_1 = \frac{\sqrt{3} \pi}{3l} + \frac{p}{3r}, \quad (193)$$

Согласно сказанному выше эта величина является положительной.

Пользуясь этим выражением, находим числитель дроби (190):

$$27G^3r^3 - p^3 = \frac{3r^3}{l} \left( \frac{\sqrt{3} \pi^2}{l^2} + \frac{3\pi^2 p}{lr} + \frac{3p^2}{r^2} \right). \quad (194)$$

Можно видеть, что в силу положительности  $p$ ,  $l$  и  $r$ , а также  $G$ , это выражение положительно. Увеличение параметра  $n$  больше единицы может

привести только к его увеличению, откуда следует, что величина  $\mu_n$ , определяющая частоту собственных колебаний рассматриваемой системы при любом значении  $n$ , всегда является положительной.

Таким образом, выражение (192) представляет собой набор частот, определяемых волновым числом (168), то есть дисперсионное соотношение, дискретность которого задается последовательным рядом целых значений  $n$ . Это выражение определяет сетку резонансных частот, соответствующих волновым числам вида (168) при заданном значении  $n$ . Заметим, что здесь соотношение (192) получилось дискретным по той причине, что для его вывода использовался дискретный ряд волновых чисел (168), определяемый граничными условиями (160)-(161).

Для получения полного дисперсионного соотношения в непрерывном виде следует решение (158) подставить непосредственно в уравнение (114), где параметр  $h$  будет определяться через  $\mu$  в соответствии с (113). Следующим шагом должно быть разрешение полученного соотношения относительно  $\mu$ . Можно видеть, что степень такого уравнения будет определяться структурой параметра  $D$ , определяемого через  $\mu$  по формуле (139). Далее этот параметр войдет под знаком корня шестой степени в выражения (141) и (142), из которых затем будут получены выражения (152) и (153), входящие в решение (158) в виде показателей экспонент. Далее, при подстановке (158) в (114) за счет третьей производной эти выражения будут возведены в третью степень, что и даст, в конечном счете, уравнение для  $\mu$ . Можно видеть, что такое решение будет, по меньшей мере, крайне громоздким, если вообще разрешимым аналитически, что тоже не ясно. Поэтому в рамках настоящей работы ограничимся выражением (192), определяющим частоту резонансных колебаний волны, длина которой определяется волновым числом (168).

### 13. Замечание о роли интеграла перекрытия в задаче о струне

В разделе 11 получено решение задачи о колебаниях жесткой струны в виде (176):

$$X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (195)$$

Можно видеть, что это решение по форме совпадает с таковым, полученным для цепочки спинов в модели поверхностной анизотропии (32) или (44). То есть и здесь граничные условия требуют укладывания по длине струны целого числа полувольт. Таким образом, далее применим тот же метод вычисления интеграла перекрытия, что реализован в разделе 4. Возбуждение струны при этом должно осуществляться однородным по координате вдоль струны периодическим во времени воздействие. При этом опять будут выделены только те решения, которые требуют выполнения соотношения (51), то есть решение будет иметь вид, подобный (52). Принципиальное отличие от модели поверхностной анизотропии состоит в выборе резонансных частот таких колебаний. Так, в модели поверхностной анизотропии частоты определяются соотношением (53), а в модели жесткой струны соотношением (192), где  $n$  также должно быть заменено нечетным числом, например  $n = 2m - 1$ , где  $m$  – целое число (здесь в отличие от (51) вместо  $p$  использовано обозначение  $m$ , чтобы избежать путаницы с коэффициентом при второй производной в уравнении (99)).

Таким образом, принципиальное различие между моделью жесткой струны и моделью поверхностной анизотропии состоит только в получении резонансных частот возбуждаемых колебаний. Относительно же распределения колебаний по длине струны или по толщине магнитной пленки различия нет. То есть вычисление интеграла перекрытия в обоих случаях будет аналогичным. Поэтому в рамках настоящей работы мы не будем вычислять интеграл перекрытия для жесткой струны, а перейдем далее к рассмотрению магнитной пленки на основании модели жесткой цепочки спинов.

#### **14. Эффективные поля, действующие на цепочку спинов в магнитной пленке**

В работе [43] основные рассуждения выполнены на модели цепочки спинов, перпендикулярной плоскости пленки и проходящей от одной ее поверхности до другой. Примем ту же модель, то есть положим распределение

намагниченности вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  однородным, а неоднородной по оси  $Oz$  будем считать поперечную составляющую намагниченности. Понятие «поверхностной анизотропии», введенное в работе [43], далее использовать не будем.

Положим, что на намагниченность внутри пленки действует суммарное поле:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_M + \vec{h} + \vec{H}_{ex}, \quad (196)$$

где:  $\vec{H}_0$  – внешнее поле, перпендикулярное плоскости пленки;

$$\vec{H}_M = -4\pi\vec{M}_0 \quad (197)$$

– поле размагничивания пленки относительно постоянного поля;  $\vec{h}$  – переменное поле;  $\vec{H}_{ex}$  – поле неоднородного обменного взаимодействия.

Введем единое обозначение для постоянного поля, перпендикулярного плоскости пленки:

$$\vec{H}_N = \vec{H}_0 + \vec{H}_M = \vec{H}_0 - 4\pi\vec{M}_0, \quad (198)$$

которое следует из известной формулы Киттеля [36, стр.54, форм.(1.4.20), 37, стр.34, форм.(1.99)]. Это поле имеет только одну компоненту вдоль оси  $Oz$ :

$$H_N = H_0 - 4\pi M_0. \quad (199)$$

Положим, что переменное поле приложено в плоскости пленки, так что имеет вид:

$$\vec{h} = \{h_x, h_y, 0\}. \quad (200)$$

Поле  $\vec{H}_{ex}$  найдем из плотности энергии обменного взаимодействия [34, стр.147, форм.(7.18)]:

$$U_{ex} = \frac{q}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q}{2} \left\{ \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial M_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial M_y}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial M_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial M_z}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (201)
 \end{aligned}$$

Общее выражение для эффективного поля имеет вид [36, стр.68, 37, стр.42]:

$$\vec{H}_e = -\frac{\partial U_e}{\partial \vec{M}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[ \frac{\partial U_e}{\partial \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_p} \right)} \right]. \quad (202)$$

Для обменного поля плотность энергии (201) определяется только производными от намагниченности по координатам, поэтому первое слагаемое в формуле (202) равно нулю. Раскрывая второе слагаемое по процедуре, описанной в [34, стр.147-150], получаем:

$$\vec{H}_{ex} = q \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{M}. \quad (203)$$

При заданной геометрии поля по осям  $Ox$  и  $Oy$  однородные, так что производные по этим координатам равны нулю. В результате получаем компоненты поля обменного взаимодействия в виде:

$$(H_{ex})_x = q \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}; \quad (204)$$

$$(H_{ex})_y = q \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}; \quad (205)$$

$$(H_{ex})_z = q \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}. \quad (206)$$

### 15. Механизм выпрямления спиновой цепочки

Отклонение спинов внутри цепочки от оси  $Oz$  вызывает возникновение сил, стремящихся уменьшить такое отклонение.

Возможны два механизма, обеспечивающие такое уменьшение.

Прежде всего следует отметить дипольный механизм, связанный с воздействием постоянного поля. Такое поле стремится повернуть спин к своему направлению, то есть действует на всю цепочку в целом, не создавая в ней противодействия изгибу. Сила его воздействия определяется магнитным дипольным взаимодействием, которое значительно меньше обменного.

Главным фактором, обеспечивающим жесткость спиновой цепочки, является возникновение сильного обменного поля при небольшом ее искривлении. Этот фактор действует на цепочку, уже ориентированную дипольным полем, заставляя все спины выстраиваться друг за другом в одну линию, то есть выпрямляет цепочку, что эквивалентно возрастанию ее жесткости.

Схема образования силы, вызывающей такое выстраивание, показана на рис.4.

Здесь по вертикальной оси отложена координата  $z$ , в соответствии с общей геометрией, перпендикулярная плоскости пленки. На трех эпюрах показано отклонение намагниченности от этой оси (а), первая производная от величины такого отклонения (б) и вторая производная от того же отклонения (в). Согласно (204)-(206), вторая производная компоненты намагниченности, перпендикулярной оси цепочки, вызывает сильное обменное поле  $\vec{H}_{ex}$ , направление которого противоположно направлению этой компоненты (рис.4в). Это поле создает силу  $\vec{F}$ , действующую на отклоненную намагниченность, стремясь вернуть ее на место (рис.4а). Таким образом,

жесткость спиновой цепочки обеспечивается второй производной от компоненты намагниченности, перпендикулярной оси этой цепочки.

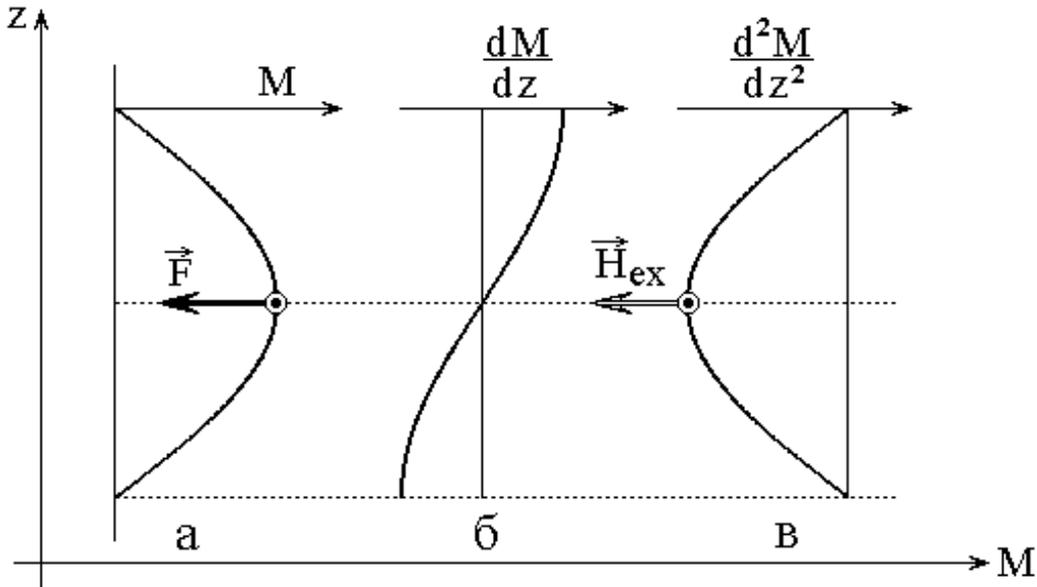


Рис.4. Схема образования обменной силы, выпрямляющей спиновую цепочку.

а – зависимость поперечной компоненты намагниченности  $M_{x,y}$  от координаты  $z$  вдоль цепочки;

б – зависимость первой производной поперечной компоненты намагниченности  $M_{x,y}$  по координате  $z$  от той же координаты  $z$  вдоль цепочки;

в – зависимость второй производной поперечной компоненты намагниченности  $M_{x,y}$  по координате  $z$  от той же координаты  $z$  вдоль цепочки.

Из сравнения рис.4 с рис.2 можно видеть, что механизм образования выпрямляющей силы для спиновой цепочки с математической стороны тождественен механизму выпрямления жесткой струны. То есть в обоих случаях выпрямляющая сила пропорциональна второй производной по координате вдоль оси от переменной, перпендикулярной этой оси. Граничные условия для жесткой струны состоят в равенстве нулю выпрямляющей силы на концах струны. Можно считать, что и в задаче о жесткой спиновой цепочке граничные условия также будут состоять в отсутствии выпрямляющей силы на концах цепочки. Поскольку, как видно из рис.4, выпрямляющая сила  $\vec{F}$  пропорциональна полю обменного взаимодействия  $\vec{H}_{ex}$ , то будем считать далее, что граничные условия на концах спиновой цепочки состоят в равенстве

нулю обменного поля вида (204)-(206) или в линейном приближении (204)-(205).

### 16. Прецессия намагниченности спиновой цепочки

Будем решать задачу в линейном приближении, то есть положим, что в принятой геометрии вектор намагниченности имеет вид:

$$\vec{M} = \{ m_x, m_y, M_0 \}, \quad (207)$$

где  $m_{x,y} \ll M_0$ .

При этом отличными от нуля остаются только две компоненты обменного поля:

$$(H_{ex})_x = q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2}; \quad (208)$$

$$(H_{ex})_y = q \frac{\partial^2 m_y}{\partial z^2}. \quad (209)$$

Раскрывая уравнение Ландау-Лифшица [31, стр.41, форм.(2.28), (2.29)] по координатам, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma (M_y H_z - M_z H_y); \quad (210)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma (M_z H_x - M_x H_z). \quad (211)$$

Рассмотрим сначала свободные колебания намагниченность, то есть положим переменное поле равным нулю  $\vec{h} = 0$ .

Подставляя в (210)-(211) компоненты намагниченности и поля, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left( m_y H_N - M_0 q \frac{\partial^2 m_y}{\partial z^2} \right); \quad (212)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left( M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - m_x H_N \right). \quad (213)$$

Исключим из первого уравнения  $m_y$ , для чего сначала продифференцируем (212) по  $t$ :

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = -\gamma \left( H_N \left( \frac{\partial m_y}{\partial t} \right) - M_0 q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial m_y}{\partial t} \right) \right), \quad (214)$$

поле чего подставим в это выражение производную  $\partial m_y / \partial t$  в соответствии с (213):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = & -\gamma \left\{ H_N \left[ -\gamma \left( M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - m_x H_N \right) \right] - \right. \\ & \left. - M_0 q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ -\gamma \left( M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - m_x H_N \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (215)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = -\gamma^2 M_0^2 q^2 \frac{\partial^4 m_x}{\partial z^4} + 2\gamma^2 H_N M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - \gamma^2 H_N^2 m_x. \quad (216)$$

Это уравнение – волнового типа. Его возможное решение имеет вид:

$$m_x = m_0 \cdot e^{i(\omega t - k z)}. \quad (217)$$

Подставляя это решение в уравнение, сокращая общий множитель и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$\omega^2 = \gamma^2 H_N^2 + 2\gamma^2 H_N M_0 q k^2 + \gamma^2 M_0^2 q^2 k^4. \quad (218)$$

Правая часть этого выражения является полным квадратом. Извлекая квадратный корень, получаем:

$$\omega = \gamma H_N + \gamma M_0 q k^2. \quad (219)$$

Это выражение с точностью до обозначения (198) представляет собой известный квадратичный закон дисперсии обменных волн [36, стр.378, форм.(8.1.15) с учетом (8.1.8), 37, стр.199, форм.(7.6) с учетом (7.5)].

## 17. Решение с учетом граничных условий

Будем полагать, что цепочка спинов, перпендикулярная плоскости пленки, проходит через всю ее толщину, причем на всем своем протяжении стремится оставаться прямой. Такое стремление к выпрямлению обеспечивается обменным полем. На поверхностях пленки, где цепочка заканчивается, обменное поле, как выпрямляющая сила, перестает действовать, так как со стороны свободного пространства спинов далее нет. Поэтому можно считать, что на поверхностях пленки обменное поле обращается в нуль. Таким образом, граничные условия можно записать в виде:

$$(H_{ex})_x \Big|_{z=0} = 0; \quad (220)$$

$$(H_{ex})_x \Big|_{z=L} = 0. \quad (221)$$

Учитывая (208), (209), получаем:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0; \quad (222)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = 0. \quad (223)$$

Запишем решение (217) в эквивалентном виде:

$$m_x = A \cos(kz) + B \sin(kz), \quad (224)$$

где  $A$  и  $B$  – коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Дифференцируя, находим:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} = -k^2 [A \cos(kz) + B \sin(kz)]. \quad (225)$$

Подставляя (225) в первое граничное условие (при  $z = 0$ ), получаем:

$$-qk^2 A = 0, \quad (226)$$

то есть  $A = 0$ .

Подставляя во второе граничное условие (при  $z = L$ ), получаем:

$$-qk^2 B \sin(kL) = 0, \quad (227)$$

откуда

$$kL = \pi n \quad (228)$$

или

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad (229)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, в соответствии с (224), получаем решение в окончательном виде:

$$m_x = m_{x0} \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right), \quad (230)$$

где  $m_{x0}$  – амплитуда, определяемая внешним возбуждением.

Решение вида (230) получено для компоненты намагниченности вдоль оси  $Ox$ . Нетрудно убедиться, что в силу симметрии задачи относительно компонент  $m_x$  и  $m_y$ , для другой компоненты  $m_y$  получается решение такого же вида. При этом из системы (212)-(213) надо исключить не  $m_y$ , а  $m_x$ , то есть продифференцировать по времени не (212), а (213), после чего подставить в полученное выражение (212). Граничные условия (222), (223) также должны быть написаны не для  $m_x$ , а для  $m_y$ . В остальном решение полностью аналогично и приводит к такому же выражению (230) с заменой индекса « $x$ » на индекс « $y$ ».

## 18. Интеграл перекрытия

Рассмотрим теперь, в какой степени возможно возбуждение полученных колебаний намагниченности однородным переменным полем вида (200), приложенным в плоскости пленки.

Можно видеть, что полученное решение (230) с точностью до амплитудного коэффициента совпадает с решением (32), полученным на основании модели поверхностной анизотропии.

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны приведенным выше (41)-(45) и здесь не приводятся ввиду их тождественности. В результате получается интеграл перекрытия вида (46):

$$J_S = \int_0^L [m_x(z) \cdot h_x + m_y(z) \cdot h_y] dz. \quad (231)$$

С учетом (230), плотность энергии взаимодействия намагниченности с переменным полем, определяющая эффективность возбуждения, принимает вид:

$$U_H = - \{ m_{x0}h_x + m_{y0}h_y \} \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right) dz. \quad (232)$$

Введем обозначение:

$$J_{Sn} = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right) dz. \quad (233)$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$J_{Sn} = \begin{cases} \frac{2L}{\pi n} \rightarrow n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 \rightarrow n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (234)$$

Таким образом, взаимодействие имеет место при нечетных значениях  $n$  и отсутствует при четных.

Аналогично (49), формулу (234) можно записать в обобщенном виде:

$$J_{Sp} = \frac{2L}{\pi(2p-1)}, \quad (235)$$

где  $p = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, плотность энергии взаимодействия намагниченности с переменным полем, определяющая эффективность возбуждения, имеет вид:

$$U_H = - J_{Sp} \{ m_{x0}h_x + m_{y0}h_y \}. \quad (236)$$

или с учетом (235):

$$U_H = - \frac{2L}{\pi(2p-1)} \{ m_{x0} h_x + m_{y0} h_y \}. \quad (237)$$

Таким образом, эффективно будут возбуждаться моды с волновыми числами вида:

$$k_p = \frac{\pi(2p-1)}{L}, \quad (238)$$

где  $p = 1, 2, 3, \dots$

Спектр частот таких мод, в соответствии с (219), имеет вид:

$$\omega_p = \gamma H_N + \gamma M_0 q \left[ \frac{\pi(2p-1)}{L} \right]^2. \quad (239)$$

Можно видеть, что выражение (237) полностью совпадает с полученным по модели поверхностной анизотропии выражением (50), однако здесь (237) получено без привлечения такой модели.

В силу тождественности формул (50) и (237), спектр колебаний намагниченности, определяемый формулой (237) будет тем же самым, что и спектр, определяемый формулой (50), так что с той же степенью достоверности сможет описать экспериментальные результаты, приведенные в работе [42].

**Замечание.** Заметим однако, что привлечение предложенной модели для интерпретации экспериментальных результатов, использующих развитие модели поверхностной анизотропии (раздел 5), требует более подробного рассмотрения, возможно, на основе комбинации обеих моделей, то есть с привлечением обобщенного граничного условия вида:

$$\alpha m + \beta \frac{\partial m}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \Big|_{z=0,L} = 0. \quad (240)$$

Для оценки реалистичности подобного условия, по-видимому, потребуется более подробное исследование свойств поверхности, в первую очередь, в эксперименте. Можно полагать, что довольно полезным здесь будет

предварительное изучение механической аналогии со струной, сопротивляющейся изгибу, подобное приведенному в разделах 8-13.

### 19. Некоторые дополнительные замечания

В рамках настоящей работы, по сути дела, решены две задачи: первая – колебания струны, сопротивляющейся изгибу и вторая – колебания спиновой цепочки, также сопротивляющейся изгибу.

В обоих случаях в качестве граничных условий используется равенство нулю второй производной от основной переменной, причем решение получается в виде синуса, что обеспечивает ненулевое значение интеграла перекрытия.

Полученный так синус предполагает нулевые значения переменной на обеих поверхностях, что совпадет с моделью закрепления.

Однако при начальной формулировке обеих приведенных здесь задач граничного условия о равенстве нулю переменной (смещения струны или амплитуды намагниченности) на поверхностях нет, поэтому такая переменная может принимать какие угодно значения, определяемые другими конкретными условиями задачи.

Например, в задаче о жесткой струне, в процессе колебаний могут оставаться на месте не концы струны, а какие-то симметрично расположенные точки относительно ее центра или даже сам центр. При этом выход синуса на концы обеспечит колебания этих концов во времени с частотой, определяемой резонансными условиями, а амплитуда таких колебаний во времени будет оставаться постоянной. В этом случае ни сама функция, ни ее первая производная по координате, нулю равняться не будет, то есть ни о каком закреплении речь не идет.

Заметим, что определенную возможность в этом плане предоставляет тот факт, что волновое уравнение (114) разрешается через уравнение третьей степени (116), имеющего три решения, два из которых (155) и (156), будучи комплексными, дают синус, а третье (154) является действительным и обеспечивает смещение этого синуса, зависящее от координаты  $x$  вдоль струны по экспоненциальному закону вида  $A \cdot \exp(Px)$ . Параметр  $P$  дается

формулой (151), в свою очередь определяемой коэффициентами исходного уравнения (99), а величина постоянного коэффициента  $A$  должна быть определена из каких-то других условий, налагаемых конкретной задачей. В настоящем рассмотрении положено  $\dot{A} = 0$ , поэтому решение и получилось в виде синуса с нулями на концах. Однако, как сказано выше, такие нули никак не означают какого-либо «закрепления». Таким образом, при надлежащем выборе  $P$  и коэффициента  $A$  (где  $A \neq 0$ ), конечные точки струны вполне могут колебаться во времени, а первая производная от конфигурации струны по координате также будет задаваться выбором этих параметров.

С другой стороны, полные граничные условия задачи, содержащие условия (100), (101) в виде одного из слагаемых, могут быть такими, что экспоненциальная зависимость, соответствующая первому слагаемому выражения (157), не даст возможности удовлетворить таким условиям. В таком случае решение следует искать в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет условиям (100) и (101), а другая – добавкам к этим условиям, содержащимся в полных граничных условиях. При этом обе задачи могут быть решены независимо, а полное решение будет суперпозицией решения этих задач (возможно, в виде ряда по собственным функциям основной задачи, то есть по синусам). Иными словами, следует использовать прием разделения задач подобного типа, реализацию которого можно найти в работе [50], посвященной возбуждению мощного гиперзвука. Применительно к струне в общем виде этот прием описан в учебной монографии [45, стр.103].

Сказанное выше относится к задаче о колебаниях жесткой струны, где алгебраическое уравнение, разрешающее соответствующее дифференциальное, имеет третий порядок. В задаче о колебаниях жесткой цепочки спинов уравнение, подобное (14), имеет вид (216) (с учетом зависимости от времени вида  $e^{i\omega t}$ ), которое содержит вторую и четвертую производные по координате. Поэтому поиск решения в виде (115) приводит к биквадратному относительно  $k$  уравнению (218), которое дает сразу дисперсионное соотношение (219).

В то же время, подстановка решения вида (224), представляющего собой развернутый вид решения (115), в граничные условия (222), (223) дает сразу значение для  $k$  вида (229), которое и обеспечивает, в конечном счете, желаемый синус (230). Таким образом, поскольку разрешающее алгебраическое уравнение имеет здесь лишь второй порядок вместо третьего, решение в виде экспоненты с действительным показателем типа первого слагаемого в формуле (157), здесь отсутствует.

Тем не менее, получаемый синус (230) и здесь никак не означает «закрепление» спинов. То есть концы цепочки спинов здесь являются в известной степени свободными и только подчиняются граничным условиям (222), (223). Поэтому и здесь могут быть заданы более полные граничные условия, содержащие как саму намагниченность, так и ее первую производную. В этом случае, как и в случае жесткой струны, следует идти по пути разделения задачи на две с последующим решением их по отдельности. То есть использовать тот же прием, что применен в работе [50] и схематично описан в монографии [45, стр.103].

Заметим, что на этом пути возможно введение комбинированных граничных условий типа предложенных выше (240). Более подробное рассмотрение всего класса подобных задач можно полагать в качестве предмета для отдельного исследования.

### **Заключение**

Главным результатом настоящей работы является интерпретация возбуждения спин-волнового резонанса однородным переменным полем в случае отсутствия поверхностной анизотропии за счет жесткости спиновой цепочки, обусловленной неоднородным обменным взаимодействием.

Для получения такого результата проделано следующее.

Выполнен краткий обзор литературы, касающейся возбуждения спин-волнового резонанса в тонких магнитных пленках однородным переменным полем, а также интерпретации такого возбуждения на основе модели поверхностной анизотропии. Отмечена неполнота модели, состоящая в

отсутствии учета обусловленного неоднородным обменным взаимодействием жесткого характера изгибных колебаний спинов по толщине пленки.

В рамках геометрии нормально намагниченной пленки рассмотрен классический вариант возбуждения спин-волнового резонанса. На основе рассмотрения цепочки спинов, связанных обменным взаимодействием, решена граничная задача о колебаниях намагниченности внутри пленки с учетом граничных условий, состоящих в равенстве нулю амплитуды колебаний на поверхностях пленки. Отмечено, что такие граничные условия соответствуют закреплению спинов на поверхностях пленки. Рассчитан интеграл перекрытия между колебаниями намагниченности и переменного поля, приложенного в плоскости пленки. На основе анализа интеграла перекрытия показано, что возможно возбуждение только таких мод, при которых по толщине пленки укладывается нечетное число полуволн колебаний.

Отмечена недостаточность модели поверхностной анизотропии для интерпретации ряда экспериментальных результатов, в том числе для спектров возбуждения спин-волновых резонансов и чрезмерно большой величины поверхностной анизотропии, на порядок и более превышающей анизотропию в объеме пленки.

В качестве развития модели поверхностной анизотропии приведены граничные условия, учитывающие не только жесткое закрепление, но также и частичное высвобождение спинов и их упругое закрепление. Отмечено, что во всех вариантах усовершенствования модели учет жесткости спиновой цепочки за счет обменного взаимодействия отсутствует.

Предложена модель колебаний спиновой цепочки, состоящая в учете жесткости такой цепочки без обращения к понятию поверхностной анизотропии.

В качестве упрощенной аналогии приведена механическая модель колебаний жесткой струны. Рассмотрено проявление жесткости струны, состоящее в возникновении выпрямляющей силы, противодействующей изгибу. Показано, что выпрямляющая сила пропорциональна второй

производной от смещения струны по координате вдоль основного ее направления. Получено уравнение колебаний струны волнового типа, содержащее вторые производные по координате и времени в сочетании с производной третьего порядка от смещения струны по координате. Отмечено, что производная третьего порядка как раз описывает выпрямляющую силу, препятствующую изгибу струны. Полученное уравнение третьего порядка решено методом разделения переменных.

Предложены граничные условия, состоящие в отсутствии выпрямляющей силы, то есть в равенстве нулю второй производной от смещения по координате на концах струны. Показано, что учет этих условий приводит к решению, представляющему собой дискретный набор мод, подобный таковому для струны с закрепленными концами, причем главное отличие состоит в отсутствии закрепления. Получен спектр резонансных мод колебаний струны, выявлен его дискретный характер, рассмотрена схема получения полного дисперсионного соотношения. Отмечено, что рассмотрение интеграла перекрытия приводит к отбору резонансных колебаний, соответствующих укладыванию по длине струны нечетного числа полуволен.

Результаты, полученные на механической модели, применены для анализа колебаний цепочки спинов, связанных обменным взаимодействием, в нормально намагниченной тонкой пленке. Показано, что поле неоднородного обмена пропорционально второй производной от поперечной составляющей намагниченности по координате вдоль цепочки. Установлено, что такое поле является механизмом возникновения силы, выпрямляющей спиновую цепочку при ее изгибе.

Предложены граничные условия, состоящие в отсутствии выпрямляющей силы, то есть в равенстве нулю на поверхностях пленки второй производной от поперечной намагниченности по координате вдоль цепочки. Рассмотрена прецессия намагниченности внутри пленки, получен тензор восприимчивости, описывающий спиновые колебания поперечной намагниченности по толщине пленки. На основе учета граничных условий, установлен дискретный характер

мод колебаний, подобный таковому, полученному по модели поверхностной анизотропии, причем главное отличие состоит в отсутствии закрепления спинов на поверхностях пленки. Рассмотрен интеграл перекрытия намагниченности в таких модах с переменным полем, приложенным в плоскости пленки. Показано, что интеграл перекрытия приводит к отбору мод, соответствующих укладыванию нечетного числа полувольт по толщине пленки. Получен спектр частот колебаний, соответствующих модам, отобранным на основе интеграла перекрытия.

Отмечено, что предложенная модель жесткой цепочки спинов описывает те же экспериментальные результаты по возбуждению спин-волнового резонанса однородным переменным полем, что и модель поверхностной анизотропии, однако без использования такой модели, то есть в отсутствие поверхностной анизотропии как таковой. Приведены некоторые рекомендации по дальнейшему развитию модели жесткой цепочки спинов, в том числе возможной ее комбинации с моделью поверхностной анизотропии.

### **Благодарность**

Автор признателен В.И.Зубкову за помощь на начальных этапах работы, В.С.Власову за предоставление ряда литературных ссылок и постоянный стимулирующий интерес к работе, В.Г.Шаврову за активное стимулирующее внимание и обсуждение работы.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

### **Литература**

1. Суздаев И.П. Нанотехнология. Физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. М.: КомКнига. 2006.
2. Рит М. Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2005.

3. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот. // ЖТФ. 2013. Т.83. №1. С.3.
4. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М.: УРСС. 2001.
5. Виноградов А.П., Дорофеев А.В., Зухди С. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов. // УФН. 2008. Т.178. №5. С.511.
6. Веселаго В.Г. Волны в метаматериалах: их роль в современной физике. // УФН. 2011. Т.181. №11. С.1201.
7. Голованов О.С., Макеева Г.С., Ринкевич А.Б. Взаимодействие электромагнитных волн с периодическими решетками микро- и нанолент графена в терагерцовом диапазоне. // ЖТФ. 2016. Т.86. №2. С.119.
8. Макеева Г.С., Голованов О.А. Математическое моделирование электронноуправляемых устройств терагерцового диапазона на основе графена и углеродных нанотрубок. Пенза: Изд. ПГУ. 2018.
9. Макеева Г.С., Голованов О.С., Ринкевич А.Б. Вероятностная модель и электродинамический анализ резонансного взаимодействия электромагнитных волн с 3D-магнитными нанокompозитами. // РЭ. 2014. Т.59. №2. С.152.
10. Slonczewski J.C. Current-driven excitation of magnetic multilayers. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1996. Vol.159. No.1. P.L1-L7.
11. Serga A.A., Chumak A.V., Hillebrands B. YIG magnonics. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264002(16).
12. Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D. Magnonics. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. No.26. P.264001(14).
13. Berger L. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current. // Phys. Rev. B. 1996. Vol.54. No.13. P.9353-9358.
14. Beaurepaire E., Merle J.C., Daunois A., Bigot J.Y. Ultrafast spin dynamics in ferromagnetic nickel. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol.76. No.22. P.4250-4253.
15. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order. // Rev. Mod. Phys. 2010. Vol.82. No.3. P.2731-2784.

16. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics. // *Journ. Appl. Phys.* 2016. Vol.120. No.14. P.140901(16).
17. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. // *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. Vol.525. No.1-2. P.2-30.
18. Ka Shen, Bauer G.E.W. Laser-induced spatiotemporal dynamics of magnetic films. // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol.115. No.19. P.197201(5).
19. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн. // *ФТТ*. 2016. Т.58. №6. С.1093.
20. Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M., Huebl H., Gross R., Brandt M.S., Goennenwein S.T.B. Surface acoustic wave driven ferromagnetic resonance in nickel thin films: theory and experiment. // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol.86. No.13. P.134415(13).
21. Thevenard L., Gourdon C., Prieur J.Y., Von Bardeleben H.J., Vincent S., Becerra L., Largeau L., Duquesne J.Y. Surface-acoustic-wave-driven ferromagnetic resonance in (Ga,Mn)(As,P) epilayers. // *Phys. Rev. B*. 2014. Vol.90. No.9. P.094401(8).
22. Chang C.L., Tamming R.R., Broomhall T.J., Janusonis J., Fry P.W., Tobey R.I., Hayward T.J. Selective excitation of localized spin-wave modes by optically pumped surface acoustic waves. // *Phys. Rev. Applied*. 2018. Vol.10. No.3. P.034068(8).
23. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Крикунов А.И., Панас А.И., Эпштейн Э.М. Создаваемая током инверсная заселенность спиновых подзон в магнитных переходах. // *ПЖЭТФ*. 2007. Т.85. №3. С.192.
24. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Маликов И.В., Михайлов Г.М., Панас А.И., Чигарёв С.Г., Эпштейн Э.М. Спин-инжекционное терагерцовое излучение в магнитных переходах. // *ПЖЭТФ*. 2011. Т.93. №5. С.289.

25. Вилков Е.А., Михайлов Г.М., Никитов С.А., Сафин А.Р., Чигарев С.Г., Фомин Л.А., Черных А.В. Уравнение кинетики спиновой поляризации неравновесных электронов проводимости в магнитных переходах. // Сборник трудов XXIII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2018)». МИРЭА. Москва: Буки Веди. 2018. С.298.
26. Kim S.-K. Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometer-scale patterned magnetic elements. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264004(25).
27. Khitun A., Bao M., Wang K.L. Magnonic logic circuits. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264005(10).
28. Au Y., Ahmad E., Dmytriiev O., Dvornik M., Davison T., Kruglyak V.V. Resonant microwave-to-spin-wave transducer. // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol.100. No.18. P.182404(5).
29. Au Y., Davison T., Ahmad E., Keatley P.S., Hicken R.J., Kruglyak V.V. Excitation of propagating spin waves with global uniform microwave fields. // Appl. Phys. Lett. 2011. Vol.98. No.12. P.122506(3).
30. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol.19. No.3/4. P.308.
31. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: Физматлит. 2016.
32. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: Физматлит. 2017.
33. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: Физматлит. 2018.
34. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит. 2019.
35. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос.Изд. физ.-мат.лит. 1960.

36. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
37. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
38. Щеглов В.И. Влияние поля размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №2. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.2.3>
39. Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 1. Поперечное волновое число. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №7. Режим доступа: <https://doi.org/10/30398/1684-1719.2019.7.3>
40. Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 2. Дисперсионное соотношение. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.9.8>
41. Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 3. Особые случаи дисперсии. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №11. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.11.4>
42. Сивей М., Танненвальд П. Непосредственное наблюдение спин-волнового резонанса. // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г.Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С.594.
43. Киттель Ч. Возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках однородным СВЧ полем. // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г.Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С.585.

44. Ament W.S., Rado G.T. // Phys. Rev. 1955. Vol.97. No.6. P.1558.
45. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.
46. Вонсовский С.В., Шур Я.С. Ферромагнетизм. М.: ОГИЗ Гостехиздат. 1948.
47. Луговской А.В., Щеглов В.И. Спектр обменных и безобменных спин-волновых возбуждений в пленках ферритов-гранатов. // РЭ. 1982. Т.27. №3. С.518.
48. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть I. М.:Наука. 1965.
49. Стрелков С.П. Механика. М.: Наука. 1965.
50. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863.

**Для цитирования:**

Щеглов В.И. Возбуждение спин-волнового резонанса в тонких магнитных пленках в отсутствие поверхностной анизотропии. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.2>