

УДК 537.86

## ТЕОРИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ РИМАНА-ЗИЛЬБЕРШТЕЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ АНТЕННОЙ ТЕХНИКИ

Б. Л. Коган, И. В. Белькович

Национальный исследовательский университет  
«Московский энергетический институт»,  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д.14

Статья поступила в редакцию 5 октября 2018 г.

**Аннотация.** Строгий векторный расчет электромагнитного поля антенн электрически больших размеров – трудоемкая задача, требующая значительных вычислительных ресурсов. Существует множество асимптотических методов, упрощающих задачу, однако имеющих значительные допущения и неточности. В статье изложены теоретические основы и решение некоторых практических задач с применением нестандартных векторов электромагнетизма – векторов Римана-Зильберштейна, являющимися линейной комбинацией векторов напряженности электрического и магнитного поля. В однородном пространстве применение векторов Римана-Зильберштейна сводит систему уравнений Максвелла к двум независимым уравнениям, при этом каждый вектор описывает поле идеальной круговой поляризации. Один из наиболее эффективных методов строгого численного и аналитического решения уравнений Максвелла – разложение по элементарным мультиполям. В данной статье описан метод разложения электромагнитного поля, представленного в терминах векторов Р-З, в ряд по векторным сферическим гармоникам в спиральном базисе. Такое разложение имеет более простое математическое описание по сравнению с классическим мультипольным разложением, разложение симметрично, имеет ясный физический смысл. Метод применяется для решения задачи дифракции поля в зеркальных антеннах. Количество вычислительной работы по сравнению с методами, оперирующими классическими векторами  $E$  и  $H$ , уменьшается за счет независимости векторов Римана-Зильберштейна. Цель данной работы – показать преимущества

применения векторов Р-3 по сравнению с классической теорией электромагнитного поля и изложить эффективный аппарат расчета электромагнитного поля.

**Ключевые слова:** антенны, апертурные антенны, вычислительная электродинамика, электромагнитное поле, излучение волн, сферические гармоники.

**Abstract.** Exact vector solution of Maxwell's equations describing an electromagnetic field in electrically large tasks as large antennas or beam-waveguides are always time-consuming, requiring substantial computational resources. There exist many asymptotic methods simplifying the problem but having significant assumptions and inaccuracies. In this paper, a theoretical foundation and solution of some practical problems utilizing unconventional electromagnetics vectors are presented. The vectors are the Riemann-Silberstein vectors (the RS vectors), which are a linear combination of the electric and magnetic field vectors. In homogeneous space, utilizing the RS vectors Maxwell's Equations are converted into a system of two independent equations, with each vector describing the total electromagnetic field of an ideal circular polarization. One of the most effective methods of rigorous numerical and analytical solution of Maxwell's equations is multipole series expansion. The method of electromagnetic field expansion into a series of vector spherical harmonics of the Riemann-Silberstein vectors in helical coordinates is presented in the paper. Such expansion has a simpler mathematical representation compared to the traditional multipole expansion, it is symmetric and has a clear physical meaning. Solution of field scattering and diffraction problems of aperture antennas is described. The amount of computational work compared to the traditional method of TE and TM multipole expansion is reduced due to the initial independence of the Riemann-Silberstein vectors and the direct vector spherical expansion.

**Key words:** Antennas, aperture antennas, computational electromagnetics, electromagnetic fields, electromagnetic radiation, spherical harmonics, spherical wave expansion.

## 1. Введение

Классическая электродинамика построена на уравнениях Максвелла, описывающих связь между векторами электрического и магнитного поля. Для полного описания электромагнитного поля в общем случае требуется найти напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ . При этом известно и широко применяется свойство уравнений Максвелла в статическом случае распадаться на два независимых уравнения для электрического и магнитного полей. Это свойство используется при построении квазистатического низкочастотного асимптотического решения.

Значительно менее распространено в электродинамике применение свойства уравнений Максвелла распадаться на два независимых уравнения, справедливое на всех частотах, включая СВЧ. Это свойство основано на инвариантности уравнений с использованием линейной комбинации векторов электрического и магнитного поля – векторов Римана-Зильберштейна (векторы Р-З). Подобно статическому асимптотическому решению, векторы Р-З упрощают представление электромагнитного поля и сводят систему уравнений Максвелла в однородном пространстве к двум независимым уравнениям, каждый из которых описывает полное электромагнитное поле. Помимо преимущества независимости векторов, представление полей в терминах векторов Римана-Зильберштейна позволяет построить удобный и эффективный аппарат разложения полей в ряд по векторным сферическим гармоникам – мультиполям.

Такой подход позволяет получать точное решение в векторном виде для сложных излучающих систем, что актуально в связи с развитием антенной и СВЧ-техники, переходу к более высоким частотам, так как это требует эффективных методов анализа и расчета электромагнитных полей. Точные и быстрые методы особенно необходимы для задач анализа полей электрически больших антенных систем, таких как зеркальные антенны и лучеводы. Традиционно такие задачи решаются асимптотическими методами – методом геометрической оптики (ГО), геометрической теории дифракции (ГТД), или

методом физической оптики (ФО). Для расчета полей лучеводов применяется метод параболического уравнения (ПУ) и его решение – гауссовы пучки. Все эти методы основаны на приближениях и, как правило, позволяют получить точное решение в направлениях, близких к максимуму излучения. Мы формулируем подход, основанный на фундаментальном свойстве независимости векторов поля и простом мультипольном разложении, что в совокупности дает значительные преимущества для решения прикладных задач.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд гармонических полей в линейной изотропной среде:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}^m; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{j}^e; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^m; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho^e. \end{cases} \quad (1)$$

Векторы Р-З представляют собой линейную комбинацию векторов электрического и магнитного поля

$$\mathbf{F}_{\pm} = 0.5(1/\sqrt{z}\mathbf{E}_{\mp} + i\sqrt{z}\mathbf{H}), \quad (2)$$

где  $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – волновое сопротивление. Подставляя (2) в (1) из первого и второго уравнений (1) получаем систему уравнений Максвелла для векторов Римана-Зильберштейна

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}_{\pm} \mp kn\mathbf{F}_{\pm} + 0.5[\operatorname{grad}(\ln Z), \mathbf{F}_{\mp}] = \mathbf{j}_{\pm}, \quad (3)$$

где  $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ ,  $n = \sqrt{\mu\varepsilon/\mu_0\varepsilon_0}$ . В выражении (3) в левой части третье слагаемое с изменённым порядком индексов векторов Р-З определяет взаимную связь между векторами  $\mathbf{F}_{+}$  и  $\mathbf{F}_{-}$ . Из (3) следует, что в среде с пространственно-однородным импедансом ( $\operatorname{grad} z \equiv 0$ ) уравнения Максвелла преобразуются в систему двух независимых уравнений с соответствующими источниками возбуждения

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}_{\pm} \mp k \mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{j}_{\pm}, \quad (4)$$

В правых частях (3) и (4) эквивалентные плотности сторонних токов

$$\mathbf{j}_{\pm} = -0.5 \left( 1/\sqrt{z} \mathbf{j}^m \pm i\sqrt{z} \mathbf{j}^e \right). \quad (5)$$

Помимо выражения (4) из третьего и четвертого уравнений системы (1), являющихся формами закона Гаусса, можно также получить уравнения Максвелла для векторов Р-З:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_{\pm} = \pm ic\rho_{\pm}, \quad (6)$$

где эквивалентные плотности зарядов

$$\rho_{\pm} = -0.5 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \rho^e \pm i\sqrt{z} \rho^m \right). \quad (7)$$

Выражение (6) можно также получить непосредственно из первого уравнения Максвелла (4) для векторов Р-З. Выражение (4) представляет собой два независимых уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов Римана-Зильберштейна в однородном пространстве. Каждый вектор  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению первого порядка. Единицы измерения векторов:

$$[\mathbf{F}] = \frac{\sqrt{B \cdot A}}{\text{Ом}}, [\mathbf{j}] = \frac{\sqrt{B \cdot A}}{\text{Ом} \cdot \text{м}}. \quad (8)$$

Вектор Пойнтинга записывается для векторов Р-З в виде

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] = -\frac{i}{2} \cdot \left( [\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*] - [\mathbf{F}_-, \mathbf{F}_-^*] \right) + \frac{i}{2} \cdot \left( [\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_-^*] + [\mathbf{F}_-^*, \mathbf{F}_+] \right). \quad (9)$$

Первое выражение в правой части (9) всегда реально, второе – всегда мнимое. Мнимая часть возникает лишь тогда, когда полное поле отличается от поля круговой поляризации. Реальная (активная) часть представляет собой сумму векторов Пойнтинга для векторов Римана-Зильберштейна правой и левой круговой поляризации. Таким образом, векторы  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  распространяются в пространстве независимо друг от друга, и направленная мощность складывается по правилу сложения векторов. В однородном пространстве

каждый вектор  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  описывает полное электромагнитное поле идеальной круговой поляризации. Векторы не взаимодействуют между собой. Источник  $\mathbf{j}_+$  возбуждает в дальней зоне (ДЗ) волну круговой поляризации правого направления вращения во всех направлениях, источник  $\mathbf{j}_-$  возбуждает левополяризованную волну.

В этом заключается фундаментальное свойство независимости векторов Р-З, позволяющее упрощать процедуру решения задач электродинамики. Цель данной работы – развить теорию и практику применения векторов Римана-Зильберштейна для описания электромагнитных полей, показать преимущества такого подхода, получить методы и алгоритмы, применимые к широкому спектру задач антенной техники. В качестве примеров с применением векторов Р-З решается задача расчета электромагнитного поля апертурных антенн.

## 2. Историческая справка

Формулировка уравнений Максвелла в терминах векторов Римана-Зильберштейна впервые появилась в 1907 году в работе Зильберштейна [1]. Название «векторы Римана-Зильберштейна» введено польским физиком Бялыницким-Бирулей в его работах по квантовой электродинамике [2, 3]. Согласно ему, Зильберштейн основывал свою идею на лекциях Римана по уравнениям в частных производных, отредактированных и опубликованных в 1901 году Вебером [4].

Теория векторов Римана-Зильберштейна схожа с известными векторными полями Бельтрами. Такие поля были введены в 1889 г. Бельтрами в [5] для задач гидродинамики. В своей работе Бельтрами исследовал поля, удовлетворяющие условию  $rot\mathbf{F} + \lambda\mathbf{F} = 0$ , и указал на схожие свойства таких полей с электромагнитными полями, описываемыми уравнениями Максвелла. Стоит отметить, что впервые такие поля были введены и изучены русским ученым-механиком Громекой в своей докторской диссертации за 8 лет до публикации работы Бельтрами [6]. Диссертация была опубликована на русском языке и неизвестна за границей.

После работы Зильберштейна аналогичные соображения неоднократно появлялись в работах по электромагнетизму в течение 20-го века. Фон Лауэ [7] и Минковский [8] применяли их в своих работах по теории относительности. Английский математик Бейтмен в книге [9] использовал бивекторную форму электромагнитного поля  $\mathbf{M} = 0.5(1/\sqrt{Z} \mathbf{E} \mp i\sqrt{Z} \mathbf{H})$  в сочетании с гиперкомплексным исчислением, в котором  $\pm 1$  используется в качестве дополнительной образующей гиперкомплексных чисел. Аналогичный подход (но с другой образующей чисел) был применен Левином в его работе по волноводам [10]. В [11] Рамси рассмотрены решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие условию  $\mathbf{E} = \pm i \eta \mathbf{H}$ , при этом автор также не вводит индекс для векторов поля. Это решение было применено к частотно-независимым антеннам. Развитие теории полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, как комплексных полей Бельтрами было продолжено индийским ученым Лахтакией в [12]. В этой и нескольких других работах автора были введены векторы поля Бельтрами и описана теория этих полей применительно к киральным средам. Автор также получил решения для сферической задачи и распространил теорию на векторные сферические волновые функции для орторомбического диэлектрико-магнитного материала с гиротропными магнитоэлектрическими свойствами [13].

Векторы Римана-Зильберштейна в теории антенн применялись одним из авторов начиная с 1970-х годов, изначально для задачи распространения волн круговой поляризации в гофрированных волноводах и рупорах. Позднее подход был развит в [14, 15, 16], где подробно исследованы и описаны источники возникновения кроссполяризованного поля. В этих работах впервые были введены векторные сферические гармоники векторов Римана-Зильберштейна в спиральной системе координат. Теоретические основы применения векторов Римана-Зильберштейна в вычислительной электродинамике были описаны в [17, 18, 19]. В [20] для введённых векторов используется название «векторы Фарадея», но название «векторы Римана-Зильберштейна» исторически более

точное. В [21, 22, 23] авторы развили теорию и привели результаты решения некоторых задач с применением разложения в ряд по векторным сферическим гармоникам векторов Р-З.

Помимо вышеприведенных работ аналогичный подход неоднократно применялся и исследовался в течение 20-го века. Однако метод описания электромагнитных полей векторами Римана-Зильберштейна применялся для решения конкретных проблем и не был полноценно исследован, не разработаны математический аппарат и теоретическая база. Этим определяется главная задача и новизна данной работы.

В статье приводятся основные соотношения для электромагнитного поля, выраженного векторами Римана-Зильберштейна. Выводятся теоремы и формулы расчета полей, основанных на соображениях физической оптики. Также вводится векторное сферическое разложение электромагнитного поля в ряд, которое позволяет упростить и ускорить расчеты для инженерных задач. Такое представление требует введения специальных сферических функций и переход к спиральной системе координат. В определенных случаях только один из двух независимых векторов является необходимым для описания полного электромагнитного поля, таким образом сокращается количество вычислительной работы. В рамках нашей теории мы также развиваем так называемый метод согласования с источником – метод разложения на сферические волны, в котором коэффициенты разложения определяются непосредственно по источникам излучения, заданных на произвольной поверхности.

### **3. Основные соотношения электромагнитного поля, представленного векторами Римана-Зильберштейна**

В данном разделе мы выразим через векторы Римана-Зильберштейна основные соотношения и тождества, применяемые в классической электродинамике для полей, выраженных векторами напряженности электрического и магнитного поля.



### 3.1. Теорема Пойнтинга.

Для начала получим теорему Пойнтинга, являющуюся законом сохранения энергии электромагнитного поля. Так как векторы независимы, закон сохранения энергии выполняется отдельно для каждого вектора. Для вектора  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_+^*$  умножим скалярно уравнения Максвелла соответственно на  $\mathbf{F}_+^*$  и  $\mathbf{F}_+$ :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{F}_+ = -k\mathbf{F}_+ + \mathbf{j}_+ | \cdot (\mathbf{F}_+^*) \\ \operatorname{rot} \mathbf{F}_+^* = -k\mathbf{F}_+^* + \mathbf{j}_+^* | \cdot (\mathbf{F}_+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}_+^* \operatorname{rot} \mathbf{F}_+ = -k\mathbf{F}_+^* \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_+^* \mathbf{j}_+ \\ \mathbf{F}_+ \operatorname{rot} \mathbf{F}_+^* = -k\mathbf{F}_+ \mathbf{F}_+^* + \mathbf{F}_+ \mathbf{j}_+^* \end{cases} \quad (10)$$

Разность первого и второго уравнений

$$\mathbf{F}_+^* \operatorname{rot} \mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_+ \operatorname{rot} \mathbf{F}_+^* = (\mathbf{F}_+, \mathbf{j}_+^*)^* - (\mathbf{F}_+, \mathbf{j}_+), \quad (11)$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*] = -2i \operatorname{Im}(\mathbf{F}_+, \mathbf{j}_+^*). \quad (12)$$

Проинтегрируем получившееся уравнение по объему  $V$ , окруженному замкнутой поверхностью  $S$ , содержащему все источники, и применим теорему Гаусса

$$\frac{i}{2} \oiint_S ([\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*], \mathbf{n}) da = \operatorname{Im} \iiint_V (\mathbf{j}_+, \mathbf{F}_+^*) dv. \quad (13)$$

Мы получили выражение теоремы Пойнтинга для комплексных амплитуд векторов Римана-Зильберштейна. Поверхностный интеграл в левой части представляет собой поток энергии электромагнитного поля, проходящей через поверхность  $S$ . В правой части энергия в объеме  $V$ , излучаемая сторонними токами. Аналогичное соотношение может быть получено для вектора левой круговой поляризации  $\mathbf{F}_-$ , т.е. закон сохранения энергии выполняется для каждого вектора независимо от другого:

$$\frac{i}{2} \oiint_S ([\mathbf{F}_-, \mathbf{F}_-^*], \mathbf{n}) da = \operatorname{Im} \iiint_V (\mathbf{j}_-, \mathbf{F}_-^*) dv. \quad (14)$$

### 3.2. Граничные условия.

Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме получим выражение, связывающее тангенциальные составляющие поля по поверхности с краем и по её краю,

$$\oint_C \mathbf{F}_{\pm} dr = \iint_S (\pm k \mathbf{F}_{\pm} + \mathbf{j}_{\pm}) ds. \quad (15)$$

В качестве пути интегрирования примем прямоугольный путь, пересекающий границу раздела. Уменьшая размеры сторон прямоугольника и переходя к пределу первое слагаемое правой части (15) стремится к нулю. Если проводимости сред конечны, то поверхностные токи отсутствуют, и плотность стороннего тока в (15) также стремится к нулю

$$[\mathbf{n}, (\mathbf{F}_{\pm 2} - \mathbf{F}_{\pm 1})] = 0. \quad (16)$$

Если проводимость стремится к бесконечности, то вводится плотность поверхностных токов  $\mathbf{J}_{\pm}$  как предел  $\mathbf{j}_{\pm} \Delta l$  при  $\Delta l \rightarrow 0$  и  $\mathbf{j}_{\pm} \rightarrow \infty$

$$[\mathbf{n}, (\mathbf{F}_{\pm 2} - \mathbf{F}_{\pm 1})] = \mathbf{J}_{\pm}. \quad (17)$$

Из второго уравнения Максвелла также можно получить граничное условие для нормальных компонент поля, однако мы его не применяем и поэтому не приводим.

### 3.3. Векторный потенциал и поле диполя Герца круговой поляризации.

Можно показать, что в свободном пространстве электромагнитное поле, удовлетворяющее уравнению Максвелла (4), по аналогии с классической теорией выражается через векторный потенциал соответствующей круговой поляризации

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm k \mathbf{A}_{\pm} + \text{rot} \mathbf{A}_{\pm} \pm \frac{1}{k} \text{grad div} \mathbf{A}_{\pm}. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в (4) получаем, что векторные потенциалы  $\mathbf{A}_{\pm}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\pm} + k^2 \mathbf{A}_{\pm} = -\mathbf{j}_{\pm}. \quad (19)$$

Решение неоднородного уравнения Гельмгольца – свертка

$$\mathbf{A}_{\pm}(p) = \iiint_V G_{pq} \cdot \mathbf{j}_{\pm}(q) dv_q, \quad (20)$$

где  $q$  – точка источника,  $p$  – точка наблюдения. Интегрирование в (20) ведется по всему объему, в котором находятся токи.  $G_{pq}$  – скалярная функция Грина свободного пространства

$$G_{pq} = \frac{\exp(-ikr_{pq})}{4\pi r_{pq}}. \quad (21)$$

Поле элементарного диполя Герца, расположенного в точке  $q$  и направленного вдоль вектора  $\mathbf{a}$ , получается путем подстановки выражения для векторного потенциала в (18) и применением тождеств векторного анализа

$$\mathbf{F}_{\pm} = \frac{\partial G_{pq}}{\partial r} [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 G_{pq}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial G_{pq}}{\partial r} \right) [\mathbf{r}^0 [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]] - \frac{2}{r} \frac{\partial G_{pq}}{\partial r} \mathbf{a} \right\}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial G_{pq}}{\partial r} = G_{pq} \left( -ik - \frac{1}{r_{pq}} \right); \quad \frac{\partial^2 G_{pq}}{\partial r^2} = G_{pq} \left( -k^2 + \frac{2ik}{r_{pq}} + \frac{2}{r_{pq}^2} \right);$$

где  $\mathbf{r}^0$  – единичный вектор, направленный от точки истока  $q$  к точке наблюдения  $p$ . Или в другом виде

$$\mathbf{F}_{\pm} = -k \left\{ i \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \pm \left\{ \left( 1 - \frac{3i}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} \right) (\mathbf{r}^0, \mathbf{a}) \mathbf{r}^0 - \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \mathbf{a} \right\} \right\} G_{pq}. \quad (23)$$

Полный вывод полученного выражения содержится в Приложении 1. Например, поле диполя, направленного вдоль оси Z:

$$\mathbf{F}_{\pm} = kG \left\{ \pm \frac{2}{kr} \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta \mathbf{e}_r \mp \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \right\}. \quad (24)$$

В дальней зоне (при  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{e}_r, kr \gg 1$ ) в выражениях (22-24) остаются только поперечные составляющие поля.

### 3.4. Лемма Лоренца.

Одно из важных и полезных соотношений для граничных задач электродинамики – лемма Лоренца, устанавливающая связь между двумя источниками в объеме  $V$  и создаваемыми ими полями. Пусть  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  — одноимённые векторы Р-З, либо оба вектора правой поляризации, либо оба

левой. Случай с двумя разноимёнными векторами Р-З рассматривать не имеет смысла, так как они удовлетворяют разным уравнениям и не взаимодействуют между собой. Векторы определены в области с границей  $S$  и удовлетворяют в этой области уравнению Максвелла с соответствующими источниками. Запишем уравнения Максвелла для каждого из векторов и умножим скалярно первое уравнение на  $\mathbf{F}_2$ , а второе на  $\mathbf{F}_1$  и вычтем из первой строки вторую

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{F}_1 + k\mathbf{F}_1 = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{F}_2 \\ \operatorname{rot}\mathbf{F}_2 + k\mathbf{F}_2 = \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \end{cases} \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_2 \operatorname{rot}\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \operatorname{rot}\mathbf{F}_2 = (\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{F}_1), \quad (26)$$

или

$$\operatorname{div}[\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] = (\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{F}_1). \quad (27)$$

По теореме Остроградского-Гаусса для произвольной области и ограничивающей его поверхности  $S$  получаем выражение леммы Лоренца:

$$\oiint_S ([\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2], \mathbf{n}) ds = \iiint_V \{(\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{F}_1)\} dv \quad (28)$$

Здесь  $V$  – замкнутый объём с границей  $S$ ,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности. Лемма Лоренца применяется, например, при составлении интегральных уравнений. Ниже мы с помощью леммы Лоренца выведем теорему эквивалентности для векторов Р-З.

### 3.5. Принципы физической оптики – теорема эквивалентности и формула Стрэттона-Чу.

Физическая оптика (ФО) – аналитический метод, позволяющий решать задачи рассеяния и дифракции на электрически больших объектах. Метод ФО базируется на принципе Гюйгенса-Френеля, впервые открытым Гюйгенсом в 1690г. для построения огибающей волнового фронта и сформулированном Френелем [24] с учетом интерференции полей элементарных источников волнового фронта. Кирхгоф применил сформулированную Гельмгольцем интегральную формулировку метода для задач дифракции [25]. В методе

Кирхгофа поверхность  $S$  стягивается вокруг дифрагирующего тела, при этом поле на теневой (неосвещенной) стороне считается равным нулю, то есть имеется разрыв поля при переходе через границу свет-тень.

Формулировки метода Кирхгофа, применяемые в инженерной практике, были получены в первой половине XX века в работах Рубиновича [26], Коттлера [27], Лармора [28], Лава [29], Игнатовского [30], Макдональда [31].

Щелкунов сформулировал несколько фундаментальных теорем электродинамики [32, 33]. В частности, он сформулировал упомянутую выше теорему и назвал ее «принцип эквивалентности», при этом автор выражает поля через векторные потенциалы, которые в свою очередь выражаются через токи на поверхности. Формулировка принципа эквивалентности: на поверхности  $S$  может быть найдено такое распределение электрических и магнитных токов, которые за пределами поверхности возбуждают такое же поле, как и поле от реальных заданных источников внутри  $S$ ; а также которые внутри  $S$  создают такое же поле, как и создаваемое реальными источниками вне  $S$ .

В известной статье Стрэттона и Чу [34] авторы обобщили выводы Коттлера и приспособили их для инженерных вычислений, таким образом создав удобный аппарат расчета полей в приближении ФО. Формула Стрэттона-Чу является широко распространенным выражением для расчета полей по заданным источникам в задачах дифракции.

Для вывода выражения поля внутри замкнутой поверхности через составляющие этого поля на поверхности мы применяем лемму Лоренца. В (28) положим  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$  – поле с источниками в объёме  $V$ , удовлетворяющее внутри поверхности  $S$  уравнению Максвелла (4) и условию излучения на бесконечности,  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_D$  – поле элементарного диполя, сосредоточенного в точке  $\mathbf{r}_0$ , которая может быть либо строго внутренней, либо строго наружной относительно границы  $S$ , (то есть, расстояние от этой точки до границы  $S$  строго больше некоторого положительного числа  $\varepsilon$ ),  $\mathbf{a}$  – единичный вектор вдоль диполя. Уравнение поля диполя:

$$\text{rot } \mathbf{F}_2 \mp k \mathbf{F}_2 = \mathbf{a} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (29)$$

Решение уравнения с такой правой частью называют функцией Грина. Здесь и везде далее мы будем рассматривать внешнюю задачу – нахождение поля вне области, содержащей источник, хотя все выражения справедливы и для внутренней задачи. Полный вывод выражений для всех случаев приведен в Приложении 1. Применим лемму Лоренца и подставим в нее выражения для полей диполя

$$\oiint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{F}_D], \mathbf{n}) ds = \iiint_V \{(\mathbf{j}, \mathbf{F}_D) - (\mathbf{j}_D, \mathbf{F})\} dv, \quad (30)$$

$$-\oiint_S (\mathbf{F}_D, [\mathbf{F}, \mathbf{n}]) ds = \iiint_V (\mathbf{j}, \mathbf{F}_D) dv - \iiint_V (\mathbf{a} \delta(p - q), \mathbf{F}) dv. \quad (31)$$

или

$$(\mathbf{a}, \mathbf{F}(p)) = \oiint_S (\mathbf{F}_D, \mathbf{J}) ds + \iiint_V (\mathbf{j}, \mathbf{F}_D) dv. \quad (32)$$

где  $\mathbf{J} = [\mathbf{F}, \mathbf{n}]$  - вектор, содержащий тангенциальные составляющие поля, называемый эквивалентной плотностью поверхностного тока. Подставляя (23) в (32) и проводя векторные преобразования получаем

$$(-ik) \left\{ \oiint_S (-ik) G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \mathbf{b}(\rho, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{J}) ds_{\mathbf{r}} + \iiint_V G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \mathbf{b}(\rho, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{j}) dv_{\mathbf{r}} \right\} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0), & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S; \\ 0, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S \end{cases};$$

$$\mathbf{b}(\rho, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{J}) = \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0] \pm \left(i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2}\right) (\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0) \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0) \mp \frac{2}{k\rho} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \mathbf{J}; \quad (33)$$

$$\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}; G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}.$$

Полагая при выводе наличие разрыва поля на части поверхности, можно получить аналог формулы Стрэттона-Чу [34] для незамкнутых поверхностей:

$$(\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) = \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \iint_S ([\mathbf{F}, [\text{grad } \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp$$

$$\mp \frac{1}{k} \iint_S (\mathbf{n}, \text{rot} \{(\text{grad } \psi, \mathbf{a}) \mathbf{F}\}) ds \pm \frac{1}{k} \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a}) (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{F}) ds \quad (34)$$

Или, применяя к области разрыва теорему Стокса, получаем формулу Стрэттона-Чу с контурным интегралом, впервые введенным Коттлером [27] для незамкнутых поверхностей

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = k \iint_S \left\{ \mp [\mathbf{n}, \mathbf{F}] + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \left( [[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{r}_{r,r_0}^0] - (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \mathbf{r}_{r,r_0}^0 \right) \right\} G_{r,r_0} ds_r \pm \pm i \oint_L \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) G_{r,r_0} \mathbf{r}_{r,r_0}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}_r); \quad (35)$$

В формуле (35) нормаль внутренняя, направление обхода контура должно быть согласовано с ориентацией поверхности: обход в интеграле по контуру происходит так, что если смотреть с конца вектора нормали, то при обходе контура поверхность должна оставаться слева от края.

В формуле Стрэттона-Чу искомое поле выражается через касательные и нормальные составляющие поля на поверхности, а также через интеграл по контуру поверхности. Результат таким образом получается более точный для точек наблюдения, расположенных вблизи незамкнутых поверхностей, содержащих источники излучения, таких как апертура, поверхность рефлектора и т.д.

#### 4. Метод разложения на сферические волны

Метод разложения электромагнитного поля в ряд по сферическим гармоникам – один из широко применяемых и эффективных методов для решения многочисленных задач антенной и СВЧ техники. Сферические волны – мультиполи – представляют собой элементарные решения уравнений Максвелла для свободного пространства, получаемые разделением переменных в сферической системе координат. Метод разложения на электромагнитные мультиполи основан на том, что электромагнитное поле может быть выражено в виде линейной комбинации множества ортогональных решений в соответствующей системе координат – в виде ряда Фурье. Преимущество метода заключается в том, что, однажды определив коэффициенты разложения по источникам поля, заданным на поверхности, можно определить поле в

практически любой точке пространства. Исключение составляют лишь некоторые особые случаи, про которые будет сказано далее.

Метод широко используется для расчета полей антенн, пересчета ближнего поля в поле в дальней зоне и расчета диаграммы направленности излучения, расчетов взаимного импеданса, а также в других задачах антенной техники. Традиционная теория электромагнитных мультиполей, сформулированная Ми и Дебаем в начале 20 века, описывает поле, выраженное векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , через сферические ТЕ (магнитные) и ТМ (электрические) волны [35, 36, 37]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{lm} &= \sum_{l,m} \left\{ a_E(l,m) f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) - \frac{i}{k} a_M(l,m) [\nabla, g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi)] \right\} \\ \mathbf{B}_{lm} &= \sum_{l,m} \left\{ \frac{i}{k} a_E(l,m) [\nabla, f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi)] + a_M(l,m) g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

где  $a_E, a_M$  – коэффициенты разложения по соответствующим волнам,  $f_l, g_l$  – радиальные функции,  $\mathbf{X}_{lm}$  – угловые векторные сферические гармоники, связанные со скалярными угловыми гармониками  $Y_{lm}$  соотношением

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (37)$$

где скалярные сферические гармоники

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (38)$$

$\mathbf{L}$  - оператор орбитальный углового момента в квантовой механике

$$\mathbf{L} = \frac{1}{i} [\mathbf{r}, \nabla]. \quad (39)$$

Коэффициенты разложения по сферическим волнам в (36) традиционно определяются в соответствии с теоремой эквивалентности – по касательным составляющим поля на поверхности сферы минимального радиуса, содержащей все источники излучения. Вудом [38, 39] был разработан другой подход, основанный на согласовании разложения с полем источника излучения. В этом подходе коэффициенты разложения определяются напрямую по полю или токам на поверхности излучения, при этом в общем случае необходимо знание



как касательных, так и нормальных составляющих поля. Метод согласования с источником удобен в ряде инженерных задач, так как отсутствует необходимость определения поля на сфере. Метод определения коэффициентов разложения по касательным составляющим поля на сфере удобен, например, при экспериментальных измерениях в безэховой камере в ближней зоне с дальнейшим пересчетом поля в дальнюю зону.

Более общий и эффективный аппарат сферических функций был создан в теории представлений групп [40, 41, 42]. Сферические гармоники векторов Римана-Зильберштейна в спиральных координатах просто выражается через D-функции Вигнера, которые были введены в квантовой механике в 1930-х годах для формализации вычислений с векторными и тензорными многомерными физическими объектами. Эти функции имеют хорошо разработанное математическое описание, как показано в книгах [41, 42, 43].

Выражения для разложения поля в ряд по электрическим и магнитным мультиполям (36) включают радиальные и векторные сферические функции, а также производные этих функций с некоторыми коэффициентами. Как будет показано далее, разложение поля в ряд по векторным сферическим гармоникам проще и удобнее, включает в себя только дифференцирование сферических функций Бесселя.

#### *4.1. Математические основы – спиральный базис и обобщенные векторные сферические гармоники.*

В теории векторов Римана-Зильберштейна удобно оперировать системами координат, описывающими вращения векторов. Для описания полей применяются как стандартные – декартовы, сферические, цилиндрические системы координат, так и специфические – циклические (вместо цилиндрических) и спиральные (вместо сферических) координаты. Ниже будут указаны основные формулы, характеризующие системы координат. При этом для циклических и спиральных систем координат из-за их комплексности необходимо отличать ковариантные и контравариантные орты и векторы.

Для описания и вывода формул для сферических гармоник векторов Р-З нам необходимо будет ввести вышеуказанные системы координат, определить скалярное и векторное произведение, а также ввести обобщенные сферические гармоники.

*Циклические орты* будут применяться в задачах распространения волн, где традиционно применяются цилиндрические координаты. Циклические ковариантные орты [43]

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \end{cases} \quad (40)$$

Циклические контравариантные орты

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases} \quad (41)$$

*Спиральные орты* будут применяться в дальнейшем вместо сферических.

Спиральные ковариантные орты

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}'_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\varphi) \end{cases} \quad (42)$$

Спиральные контравариантные орты

$$\begin{cases} \mathbf{e}'^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{e}'^0 = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}'^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi) \end{cases} \quad (43)$$

Произвольный вектор может быть представлен в циклических и спиральных координатах в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{-\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{-\mu} \mathbf{e}^{\mu} \quad (44)$$

Связь между компонентами векторов (ковариантными и контрвариантными) в различных системах координат такая же, как и связь между соответствующими ортами. Допустим, имеется вектор  $\mathbf{F}$ , заданный в циклических или спиральных координатах. Используем *ковариантные* компоненты в *контравариантном* базисе, то есть

$$\mathbf{F} = F_{+1} \mathbf{e}^{+1} + F_0 \mathbf{e}^0 + F_{-1} \mathbf{e}^{-1} \quad (45)$$

Сопряжённый вектор имеет следующее выражение в спиральном базисе:

$$\mathbf{F}^* = F_{+1}^* (\mathbf{e}^{+1})^* + F_0^* (\mathbf{e}^0)^* + F_{-1}^* (\mathbf{e}^{-1})^* = -F_{-1}^* \mathbf{e}^{+1} + F_0^* \mathbf{e}^0 - F_{+1}^* \mathbf{e}^{-1} \quad (46)$$

Скалярное и векторное произведение в циклических и спиральных координатах

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \sum_{\mu} A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu} B^{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{-\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{-\mu} B^{\mu} \\ (\mathbf{A}, \mathbf{B}^*) &= A_{-1} B_{-1}^* + A_0 B_0 + A_{+1} B_{+1}^* \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= i \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{+1} & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_{-1} \\ A_{+1} & A_0 & A_{-1} \\ B_{+1} & B_0 & B_{-1} \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{+1} & \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^{-1} \\ A^{+1} & A^0 & A^{-1} \\ B^{+1} & B^0 & B^{-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= i(A_0 B_{+1} - A_{+1} B_0) \mathbf{e}^{+1} + i(A_{-1} B_{+1} - A_{+1} B_{-1}) \mathbf{e}^0 + i(A_{-1} B_0 - A_0 B_{-1}) \mathbf{e}^{-1} \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}^*] &= -i(A_0 B_{-1}^* + A_{+1} B_0^*) \mathbf{e}^{+1} - i(A_{-1} B_{-1}^* - A_{+1} B_{+1}^*) \mathbf{e}^0 + i(A_{-1} B_0^* + A_0 B_{+1}^*) \mathbf{e}^{-1} \end{aligned}$$

Вращение объектов в трехмерном пространстве определяется тремя углами Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$ , где углы  $\varphi, \theta$  определяют сферические координаты положения новой системы координат, угол  $\psi$  – это угол поворота объектов относительно новой оси (рис.1). Для инвариантного выражения физических величин используются так называемые «матричные элементы неприводимых представлений группы вращения». Они выражаются через углы Эйлера [43] и включают специальные сферические функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$

$$P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-i(m\varphi+l\psi)}, \quad n \geq \max(|m|, |l|). \quad (48)$$

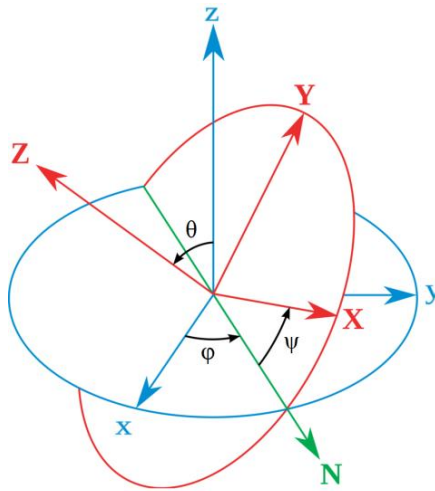


Рис. 1. Углы Эйлера поворота системы координат.

В спектральном частотном представлении угол  $\psi$  не используется, он соответствует вращению в зависимости от времени  $\psi = \omega t$ , а индекс  $l$  определяет векторную составляющую, которая вращается согласованно или противоположно поперечной составляющей в дальней зоне, либо не вращается, подобно радиальной составляющей. Функции  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  мы называем *обобщенными сферическими гармониками*. Совокупность гармоник с индексами  $l=0, \pm 1$  формируют одну векторную сферическую гармонику. Функции  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  формируют полный ортогональный базис функций для компонент произвольной квадратично-интегрируемой векторной функции  $\mathbf{F} = F_{+1}\mathbf{e}^{+1} + F_0\mathbf{e}^0 + F_{-1}\mathbf{e}^{-1}$ , определенной на сфере. Условие ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i(m_1-m_2)\varphi} P_{m_1,l}^{n_1}(\cos \vartheta) (P_{m_2,l}^{n_2}(\cos \vartheta))^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi / (2n_1 + 1) \delta_{m_1,m_2}^{n_1,n_2}. \quad (49)$$

Функции  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  связаны с D-функциями Вигнера [43]:

$$\begin{aligned} P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} &= (-i)^{m-l} \cdot D_{m,l}^n(\varphi, \vartheta) \\ P_{m,l}^n(\cos \vartheta) &= (-i)^{m-l} \cdot d_{m,l}^n(\vartheta) \end{aligned} \quad (50)$$

D-функции Вигнера, или функции  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  – это полный набор матричных элементов неприводимых представлений группы вращений

евклидоваго пространства любой размерности, применяемые для нахождения собственных функций линейных задач любых тензорных объектов для соответствующих значений индекса  $l$ ). В нашем случае мы применяем их для самого простого случая – векторов в трехмерном пространстве.

Таким образом, в представлении поля рядом сферических гармоник векторов Р-З в спиральном базисе для угловых зависимостей по  $\theta$  применяются ортогональные сферические функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$ . В скалярном случае ( $l=0$ ) они с точностью до постоянного множителя совпадают с присоединенными функциями Лежандра

$$P_n^m(z) = i^m \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_{m,0}^n(z). \quad (51)$$

Функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$  определяются в явном виде, для них определены соотношения симметрии, рекуррентные соотношения и соотношение ортогональности

$$P_{m,l}^n(z) = P_{-m,-l}^n(z), \quad (52)$$

$$\sqrt{1-z^2} \frac{dP_{m,l}^n(z)}{dz} \pm \frac{lz-m}{\sqrt{1-z^2}} P_{m,l}^n(z) = -i\sqrt{(n \mp l)(n \pm l + 1)} P_{m,l \pm 1}^n(z), \quad (53)$$

Для полного представления произвольной векторной функции применяются сферические функции с индексами  $l = -1, 0, +1$ . Функции с индексом  $l=+1$  соответствуют составляющей  $\mathbf{e}'_{+1}$  в спиральном базисе, и, как будет показано далее, волне правой круговой поляризации, распространяющейся в направлении  $\mathbf{r}$ . Индекс  $l=-1$  соответствует волне той же круговой поляризации в направлении  $-\mathbf{r}$ .

В связи с тем, что функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$  не определены в специализированных математических пакетах типа MATLAB, а явное выражение требует значительных вычислительных ресурсов, требуется построение эффективного алгоритма вычисления функций. Мы используем

алгоритм, основанный на вычислении диагональных функций и применения рекуррентных формул в несколько шагов (рис. 2):

- 1) Определение гармоник с индексами  $l=+1$  и всех  $n, m$  с использованием явных выражений диагональных функций и рекуррентных соотношений;
- 2) Вычисление функций для  $l=-1$  и всех  $n, m$  с использованием формулы симметрии;
- 3) Расчет функций для  $l=0$  и всех  $n, m$  по рекуррентной формуле.

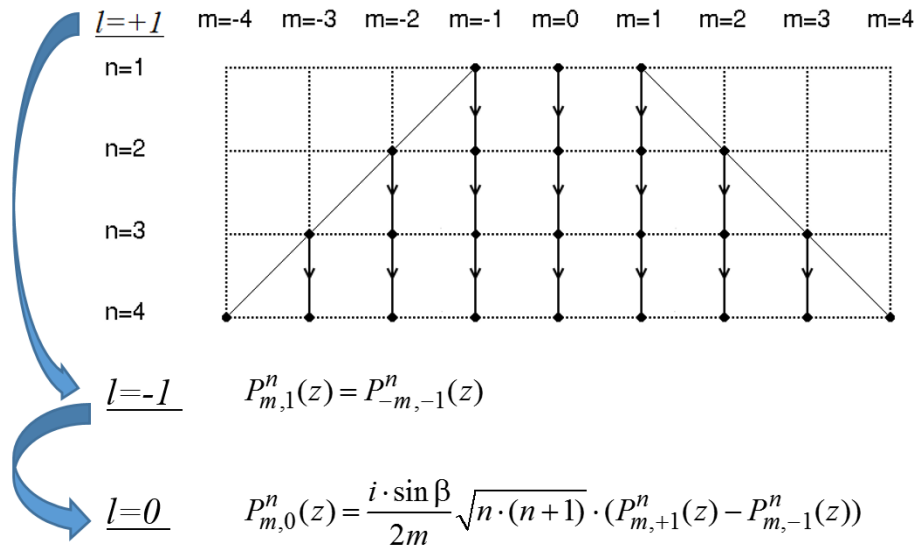


Рис. 2. Алгоритм вычисления функций  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$ .

Пространственная зависимость полного набора векторных сферических гармоник  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  для первых трех  $n$ , рассчитанных по данному алгоритму, наглядно представлена на рис. 4.

Для иллюстрации физического смысла составляющих векторов Р-3, выраженных в спиральном базисе, рассмотрим распространение сферической волны, имеющей только поперечные компоненты, для определенности правой круговой поляризации. Будем искать решение однородных уравнений Максвелла в дальней зоне в виде

$$\mathbf{F}_+ = \mathbf{f}^+ \frac{e^{-ikr}}{r} = (F_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (54)$$

Подставляя это поле в уравнение Максвелла, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F}_+ - k\mathbf{F}_+ &= \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( F_\varphi \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - kF_\vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( F_\vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - kF_\varphi \right] \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \sqrt{2}k \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\vartheta + i\mathbf{e}_\varphi) F_\vartheta + i \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\vartheta - i\mathbf{e}_\varphi) F_\varphi \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \end{aligned} \quad (55)$$

Таким образом, в случае равенства комплексных амплитуд (для идеально поляризованной волны)  $|F_\vartheta| = |F_\varphi|$  решение с точностью до постоянного множителя представляется в виде

$$\mathbf{F}_+ = (\mathbf{e}'_{+1} + i\mathbf{e}'_{-1}) \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad (56)$$

Теперь можно интерпретировать физическую сущность спиральных компонент векторов Римана-Зильберштейна. Для этого рассмотрим сечение сферического волновода, изображенное на рис. 3. Для вектора правой круговой поляризации  $\mathbf{F}_+$  составляющая  $F_{+1}$  является «прямой» волной, распространяющейся вдоль увеличения координаты  $r$  в сферическом волноводе. Составляющая  $F_{-1}$  имеет смысл «отраженной» волны, распространяющейся вдоль убывания координаты  $r$  в сферическом волноводе. Составляющая  $F_0$  – продольная составляющая, «бегущая» волна по поверхности сферы – сечения волновода.

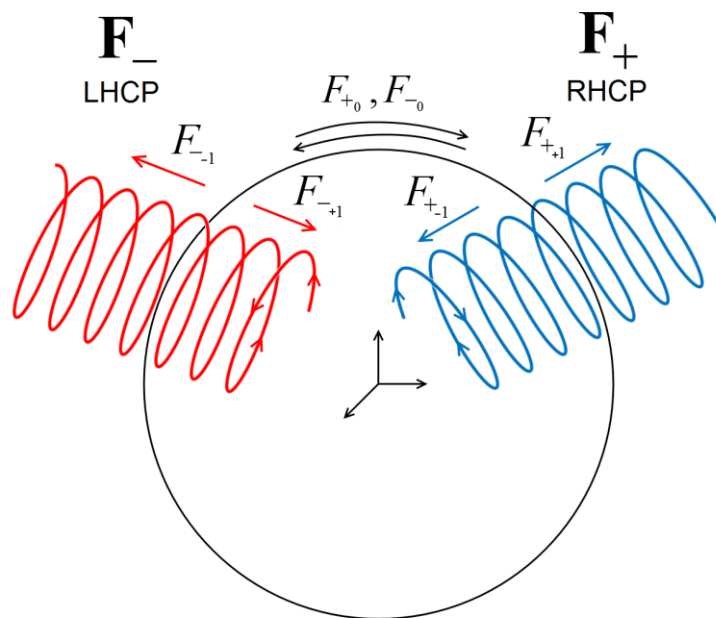


Рис. 3. Иллюстрация физического смысла распространяющихся в сферическом волноводе спиральных составляющих векторов Римана-Зильберштейна.

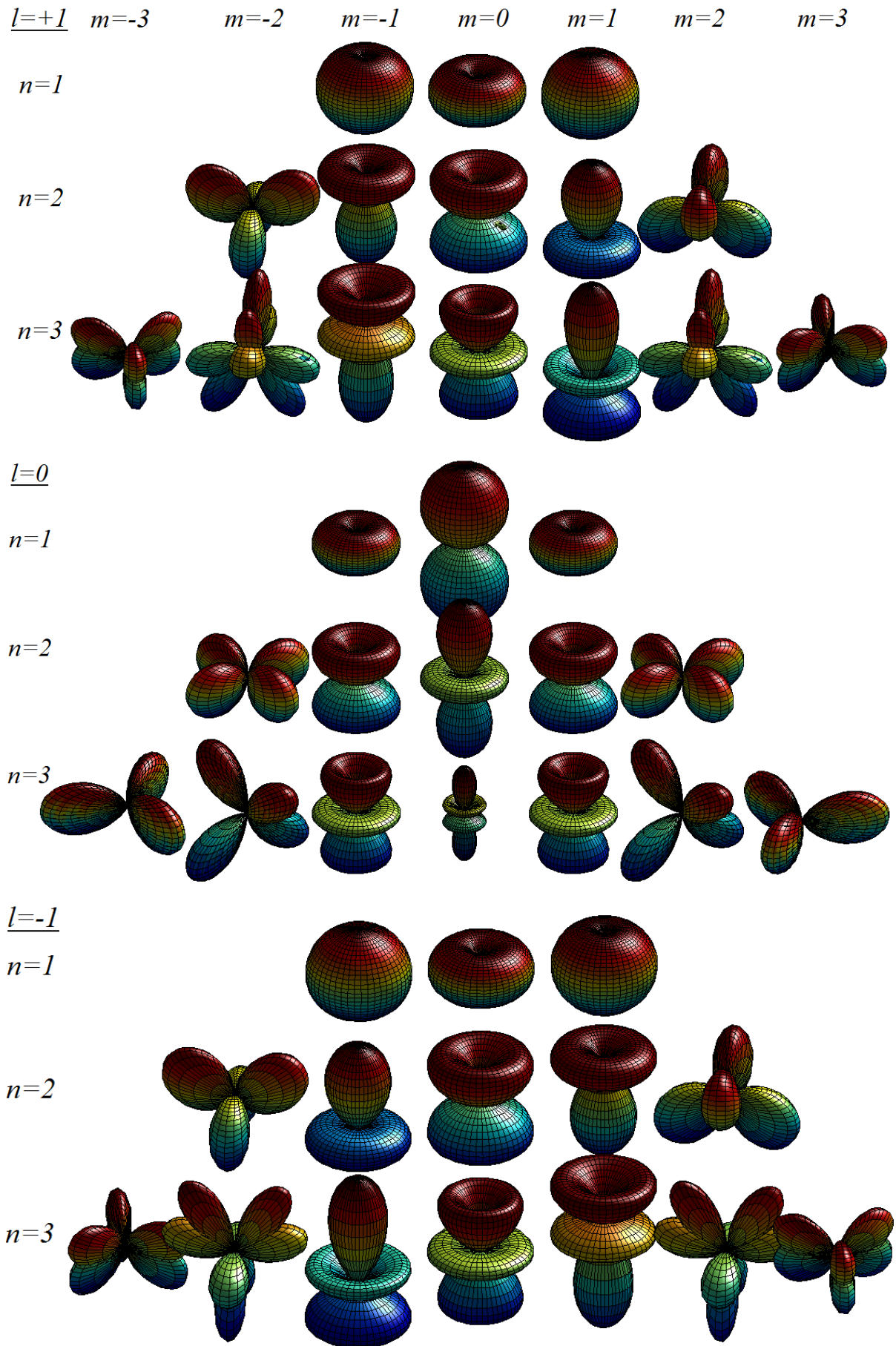


Рис. 4. Векторные сферические гармоники  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta)e^{-im\varphi}\}$ .



Сферический волновод неоднородный для распространяющихся в нем волн, в волноводе возникают отражённые волны. Они тем интенсивнее, чем меньше текущий радиус (по сравнению с длиной волны). У векторной функции составляющая  $F_{-1}$  – это отражённая волна расходящейся волны правой круговой поляризации. Она быстро убывает с увеличением радиуса. Когда радиус мал по сравнению с длиной волны электромагнитная волна имеет продольную составляющую (она замыкается на сфере).

Отдельно отметим выражения мультиполей для  $n=1$ . Первые функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$

$$\begin{array}{ccc} \underline{n=1, m=+1} & \underline{n=1, m=0} & \underline{n=1, m=-1} \\ \begin{pmatrix} P_{1,1}^1(\cos \vartheta) \\ P_{1,0}^1(\cos \vartheta) \\ P_{1,-1}^1(\cos \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \vartheta}{2} \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1-\cos \vartheta}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_{0,1}^1(\cos \vartheta) \\ P_{0,0}^1(\cos \vartheta) \\ P_{0,-1}^1(\cos \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \cos \vartheta \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_{-1,1}^1(\cos \vartheta) \\ P_{-1,0}^1(\cos \vartheta) \\ P_{-1,-1}^1(\cos \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1-\cos \vartheta}{2} \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\cos \vartheta}{2} \end{pmatrix} \end{array} \quad (57)$$

При  $n=1, m=+1$  выражения для сферических мультиполей:

- $m = 1$  – элемент Гюйгенса, излучающий в направлении оси  $Z$ ;
- $m = -1$  – элемент Гюйгенса, излучающий в направлении оси  $-Z$ ;
- $m = 0$  – элементарный диполь.

#### 4.2. Решение уравнений Максвелла в спиральном базисе

Теперь, получив необходимый математический аппарат описания электромагнитных полей в спиральном базисе и введя сферические функции, перейдем к решению уравнений Максвелла в свободном пространстве в спиральных координатах. Решение методом разделения переменных [19, 20]

$$\mathbf{F}_{\pm} = \begin{pmatrix} b_1(r) P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ b_0(r) P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \\ b_{-1}(r) P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \end{pmatrix} e^{-im\varphi} \quad (58)$$

Подстановка выражения (58) в уравнения Максвелла (4) и использование свойств сферических функций приводит к сферическому уравнению Бесселя

относительно  $b_0(r)$ . Полный вывод приведен в Приложении 2. Окончательное выражение для фундаментального решения – векторной сферической гармоники

$$\mathbf{F}_{\pm} = e^{-im\varphi} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \mp ik \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \frac{i\sqrt{2n(n+1)}}{r} \\ -P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \pm ik \right) \end{pmatrix} z_n(kr) \quad (59)$$

где  $z_n(kr)$  - сферическая функция Бесселя. Дифференциальный оператор в скобках обозначим  $D_{\pm}$

$$D_{\pm} = \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \pm ik \right) z_n(kr). \quad (60)$$

Решение, удовлетворяющее условию излучения, включает в себя сферическую функцию Ханкеля второго рода. Используя обратное преобразование, от векторов  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$ , можно перейти к традиционным векторам  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и получить выражения для электрических и магнитных мультиполей.

Для вывода выражения в дальней зоне необходимо подействовать дифференциальным оператором  $D_{\pm}$  на асимптотическое выражение функции Ханкеля второго рода.

$$h_n^{(2)}(kr) \underset{kr \rightarrow \infty}{=} \frac{e^{-ikr}}{kr} i^{n+1}; \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \pm ik \right) h_n^{(2)}(kr) \underset{kr \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} 0 \\ 2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \end{cases} \quad (61)$$

Таким образом, выражение для векторных сферических гармоник в дальней зоне имеет лишь одну ненулевую составляющую:

$$\mathbf{F}_+ = 2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\varphi}; \quad \mathbf{F}_- = -2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \end{pmatrix} e^{-im\varphi} \quad (62)$$

Теперь можно получить полное выражение полей элементарных мультиполей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла

$\underline{n=1, m=+1}$  – элемент Гюйгенса, излучающий в направлении оси  $Z$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{2i}{kr} + 2 \right) \\ \sqrt{2} \sin \vartheta \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{i}{kr} \right) \\ -\frac{1 - \cos \vartheta}{2} \frac{1}{(kr)^2} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{kr} e^{-i\varphi} \quad (63)$$

$\underline{n=1, m=0}$  – диполь, ось которого совпадает с осью  $Z$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{2i}{kr} + 2 \right) \\ 2 \cos \vartheta \left( \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right) \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \frac{1}{(kr)^2} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad (64)$$

$\underline{n=1, m=-1}$  – элемент Гюйгенса, излучающий в направлении оси  $-Z$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{1 - \cos \vartheta}{2} \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{2i}{kr} + 2 \right) \\ \sqrt{2} \sin \vartheta \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{i}{kr} \right) \\ \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \frac{1}{(kr)^2} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{kr} e^{i\varphi} \quad (65)$$

#### 4.3. Коэффициенты разложения поля в ряд по сферическим мультиполям

Произвольную векторную функцию в свободном пространстве вне или внутри некоторой сферы, удовлетворяющую уравнениям Максвелла, можно представить в виде ряда по сферическим гармоникам:

$$\mathbf{F}_{\pm}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_{m=-n}^n C_{m\pm}^n \mathbf{F}_{m\pm}^n \quad (66)$$

Коэффициенты разложения можно определить несколькими способами в зависимости от поверхности, на которой задаются источники – по касательным составляющие исходного поля на сфере или полю на произвольной

поверхности. Полный вывод выражений для обоих случаев приведен в Приложении 3.

В первом случае выражение для коэффициентов разложения на сфере

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{16\pi} \iint_{S_2} (F_{+1} F_{m,+1}^{n*} - F_{-1} F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (67)$$

где составляющие сферических гармоник  $F_{m,\pm 1}^{n*}$  определяются согласно (59).

В случае определения коэффициентов по полю на произвольной поверхности (например, отражающая поверхность рефлектора) в выражение также входят нормальные составляющие поля

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{8\pi i} \iint_{S_1} (\mathbf{J}, \mathbf{F}_{m\pm}^{n*}) ds \quad (68)$$

Такой метод расчета поля, при котором коэффициенты разложения рассчитываются непосредственно исходя из токов на поверхности излучения, назван Вудом методом согласования с источником излучения [39]. Поверхность, по которой определяются коэффициенты, называется согласующей поверхностью. Метод имеет очевидное преимущество по сравнению с общим разложением на сфере. Это возможность напрямую рассчитывать поле, зная токи на поверхности источников, например, рефлекторов в зеркальных и лучеводных системах. Количество учитываемых гармоник в ряде при этом минимально.

Стоит отметить, что ряд сходится в области, внешней по отношению к сфере минимального радиуса, содержащей все источники излучения. Это связано со свойством излучения сферических гармоник. Задачу расчета поля в области, внешней по отношению к сфере минимального радиуса, содержащей все источники излучения, будем называть внешней задачей. В этом случае в качестве радиальных функций для расчета коэффициентов применяются сферические функции Бесселя, а в искомое разложение входят сферические функции Ханкеля второго рода.

При расчете поля в области, внутренней по отношению к сфере максимального радиуса, вне которой содержатся все источники излучения – применяется ряд гармоник, в котором в качестве радиальных функций для расчета коэффициентов применяются сферические функции Ханкеля второго рода, а в разложении поля входят сферические функции Бесселя. Такая задача является внутренней.

Отдельного обсуждения требует выбор необходимого числа членов ряда для оценки его сходимости. Такой критерий будет приведен ниже.

## 5. Расчет полей апертурных антенн.

### 5.1. Расчет поля апертуры.

В данном разделе будет получено решение важной задачи – задачи излучения от плоской апертуры разными методами. Будем рассматривать плоскую круглую апертуру с равномерным распределением поля как наиболее простую и показательную, однако описанный подход можно распространить на апертуру любой формы с любым законом распределения.

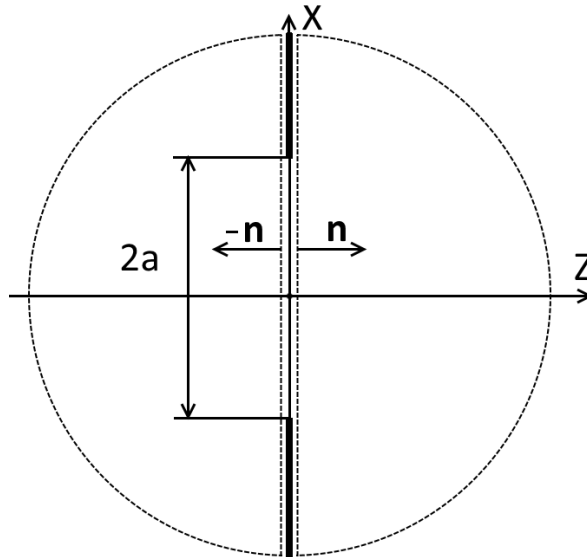


Рис. 5. Задача излучения апертуры.

Задача об излучении плоской круглой апертуры с равномерным распределением поля можно традиционно сводится к следующей задаче. На круглую диафрагму в плоском экране падает плоская волна (рис. 5). Считаем, что экран поглощает все падающее на него электромагнитное поле, то есть на обратной стороне экрана поле равняется нулю. Поле в апертуре при этом

считаем неискаженным отражением от стенок. Такая постановка задачи не является строгой, так как равенство нулю функции на одной из сторон означает равенство нулю функции во всем объеме. Однако для инженерных расчетов такое упрощение допустимо, на чем и основан метод физической оптики.

Зададим падающее поле правой круговой поляризации

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-ikz}; \mathbf{H} = \frac{1}{W}[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \left(-\frac{i}{W}\mathbf{e}_x - \frac{1}{W}\mathbf{e}_y\right)e^{-ikz} \quad (69)$$

Такое поле действительно соответствует волне правой круговой поляризации, распространяющейся в положительном направлении оси  $Z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\pm} &= 0.5 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \mathbf{E} \pm i\sqrt{z} \mathbf{H} \right) = 0.5 \left( \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} \pm i\sqrt{z} \left( -\frac{i}{z} \mathbf{e}_x - \frac{1}{z} \mathbf{e}_y \right) \right) e^{-ikz} = \\ &= 0.5 \left( \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} \pm \left( \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} \right) \right) e^{-ikz} = \begin{cases} \mathbf{F}_+ = \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} e^{-ikz} \\ \mathbf{F}_- = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (70)$$

Вектор Пойнтинга направлен вдоль оси  $Z$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \cdot ([\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]) = -\frac{i}{2} \cdot ([\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*]) = \frac{1}{2z} e^{-2ikz} \mathbf{e}_z \quad (71)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{J} = [\mathbf{n}, \mathbf{F}] = i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y; \quad (\mathbf{n}, \mathbf{F}) = 0; \quad (72)$$

Определим поле на оси  $Z$ . Для вывода аналитического выражения применим формулу Стрэттона-Чу. Вывод представлен в Приложении 4, окончательное выражение

$$\mathbf{F}(p) = \left( \frac{1 + \text{sign}(z)}{2} e^{-ik|z|} + \left[ -\frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{a^2}{4(a^2 + z^2)} \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \right] e^{-ik\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \{1, -i, 0\} \quad (73)$$

Рассчитаем поле на оси  $Z$  несколькими методами, а именно: аналитически по формуле (73), численно методом интегрирования Кирхгофа с применением теоремы эквивалентности, численно по формуле Стрэттона-Чу и методом согласования с источником. Для этого произведем триангуляцию поверхности апертуры (рис. 6) и численно вычислим интегралы и коэффициенты разложения. Результаты расчетов нормированного амплитудного множителя

поля для апертур разного радиуса показаны на рис 7. Расчеты поля от апертуры методом физической оптики были получены, например, в [44], где авторами были получены идентичные результаты.

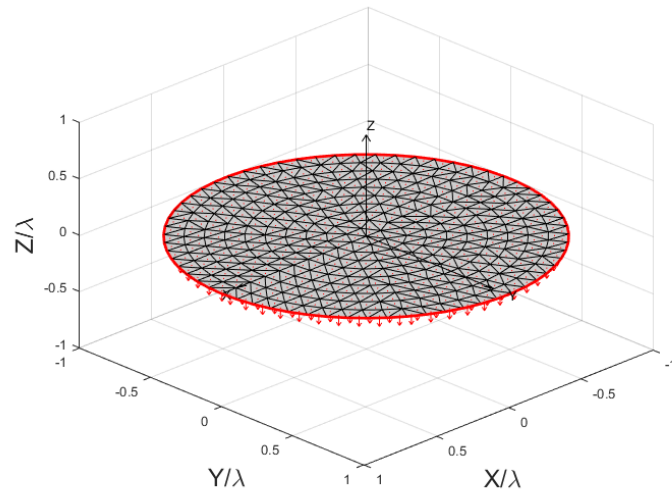


Рис. 6. Триангулированная апертура радиуса  $a=\lambda$  в плоскости  $XY$ .

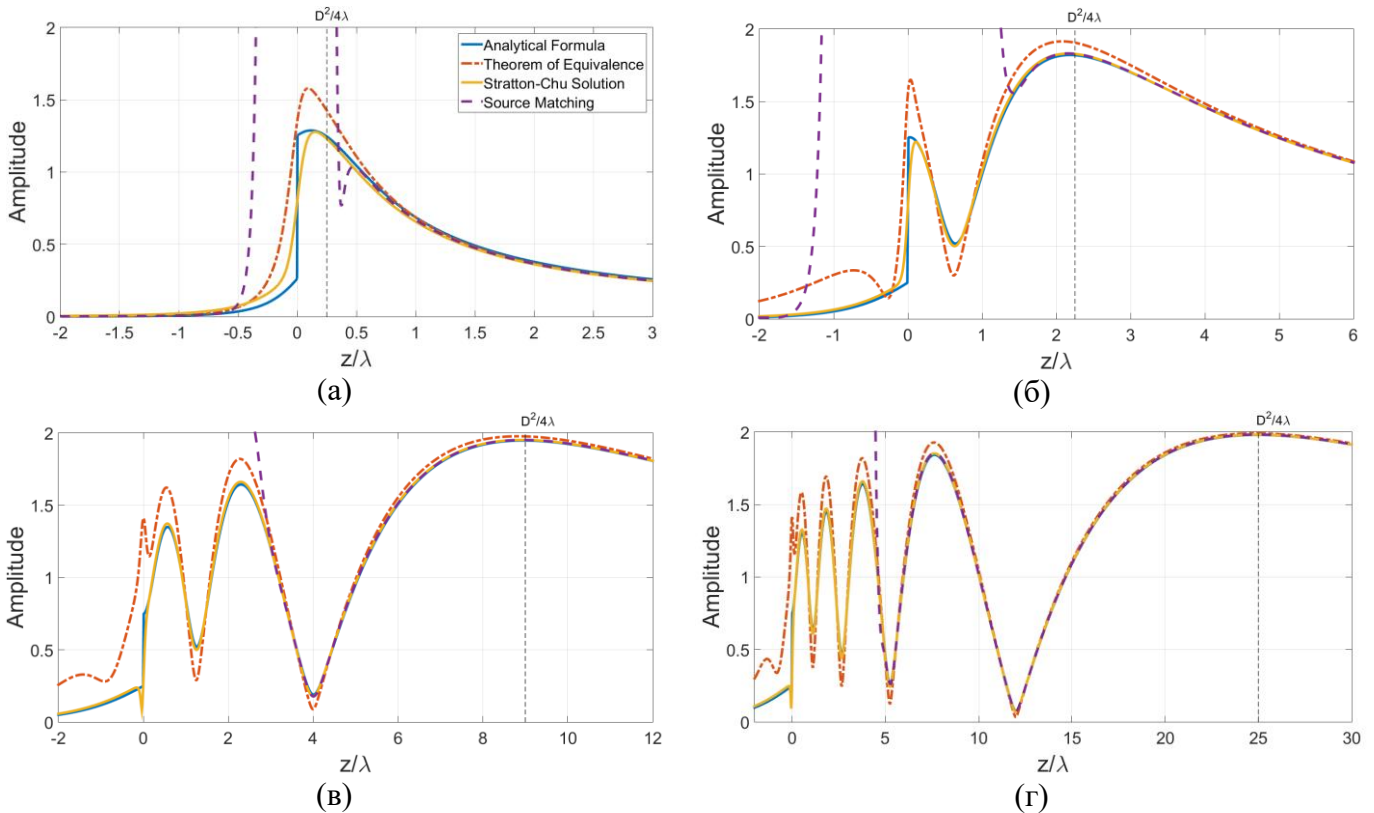


Рис. 7. Результаты расчета нормированной амплитуды поля на оси  $Z$  разными методами – по формуле, полученной аналитически; по теореме эквивалентности; по формуле Стрэттона-Чу; методом согласования с источником.  $a=\lambda/2$  (а);  $a=3\lambda/2$  (б);  $a=3\lambda$  (в);  $a=5\lambda$  (г).

Из результатов расчета видно, что в освещённой зоне поле не сразу начинает убывать. В ближней зоне при удалении от апертуры сначала идут

резкие колебания амплитуды и фазы. Число колебаний зависит от диаметра апертуры. Убывание поля на оси в освещённой зоне начинается с расстояния  $D^2/4\lambda$ . Как и предполагалось, формула Стрэттона-Чу дает более точный результат, чем теорема эквивалентности. Также можно заметить, что, как и было указано ранее, в методе согласования с источником ряд гармоник сходится внутри минимальной сферы, содержащей источник, т.е. радиуса  $a$  для нашего случая. Далее рассмотрим излучение круглой апертуры радиуса  $10\lambda$ . На рис. 8 показаны графики распределения интенсивности излучения в поперечной плоскости на нескольких расстояниях  $z_0$  от апертуры. Показано изменение дифракционной картины при переходе из ближней зоны в дальнюю. Результаты идентичны данным, приведенными в [44], однако в этой работе авторами было получено распределение для квадратной апертуры.

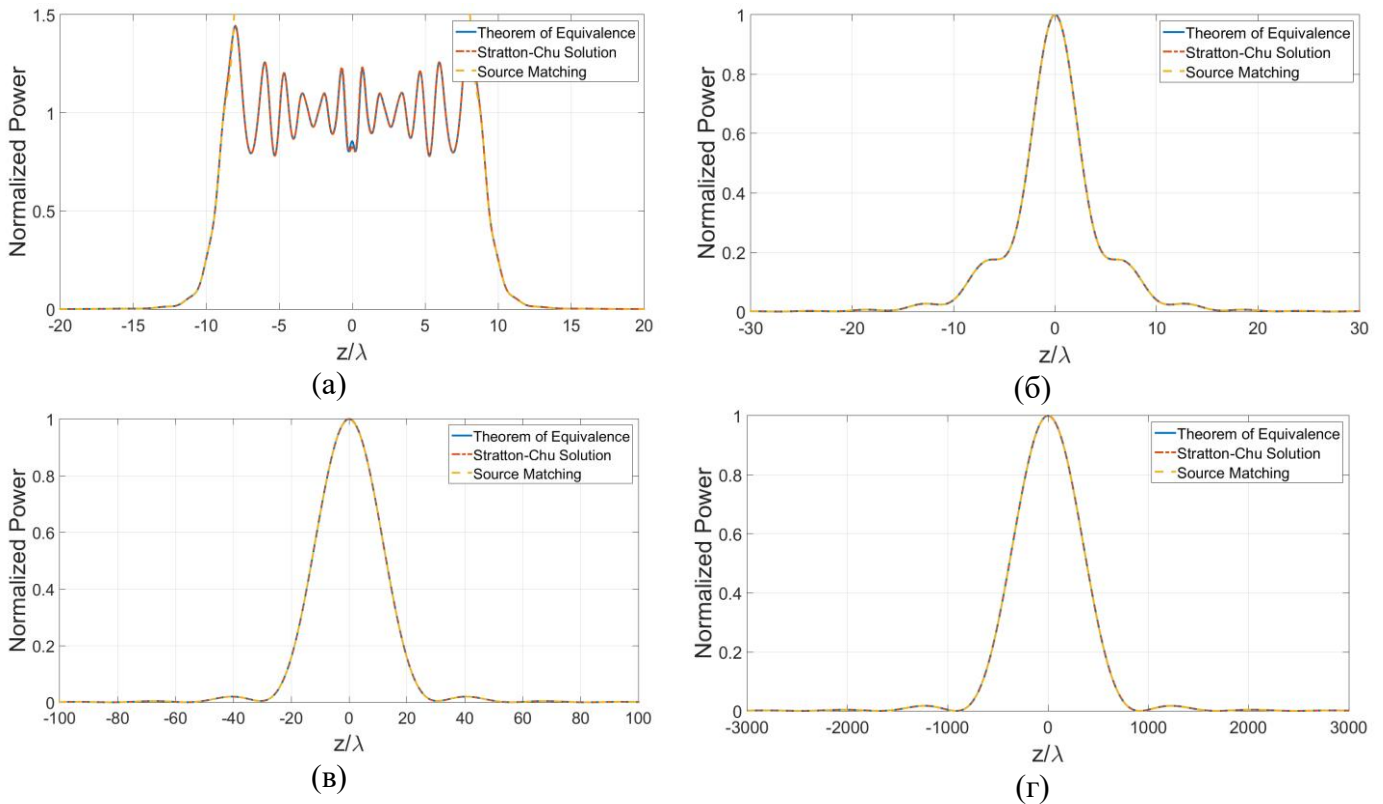


Рис. 8. Результаты расчета разными методами нормированной амплитуды составляющей вектора Пойнтинга  $P_z$  на оси X, перпендикулярной оси излучения Z, на разных расстояниях  $z_0$  от плоскости апертуры. Радиус апертуры  $a=10\lambda$ .  
 $z_0=5\lambda$  (а);  $z_0=100\lambda$  (б);  $z_0=500\lambda$  (в);  $z_0=15000\lambda$  (г).

Для демонстрации картины поля, излучаемого апертурой, рассчитаем составляющие поля на сфере и в плоскости, перпендикулярной плоскости



апертуры. Вектор Пойнтинга от апертуры радиуса  $a=\lambda$  на сфере радиуса  $4\lambda$  изображен на рис. 9. Составляющие вектора Пойнтинга в спиральном базисе, рассчитанные по формуле Стрэттона-Чу, изображены на рис. 10. Из картины виден физический смысл составляющих в спиральном базисе:  $F_{+,+1}$  представляет собой волну правой круговой поляризации, распространяющуюся в направлении увеличения координаты  $r$ , это «прямая» волна;  $F_{+,-1}$  представляет собой волну правой круговой поляризации, распространяющуюся в направлении  $-r$ , это «отраженная» волна;  $F_{+,0}$  это радиальная составляющая. Радиальная составляющая вектора Пойнтинга равна разности мощностей спиральных составляющих поля, то есть полезная излучаемая мощность есть разность между мощностью «прямой» волны и «отраженной» волны. Поток мощности одной составляющей направлен наружу, а другой внутрь сферы. Таким образом, излучение от апертуры аналогично распространению гауссова пучка с перешейком в области апертуры. Сравнение модуля радиальной составляющей вектора Пойнтинга на сфере, рассчитанной разными методами, приведено на рис. 11.

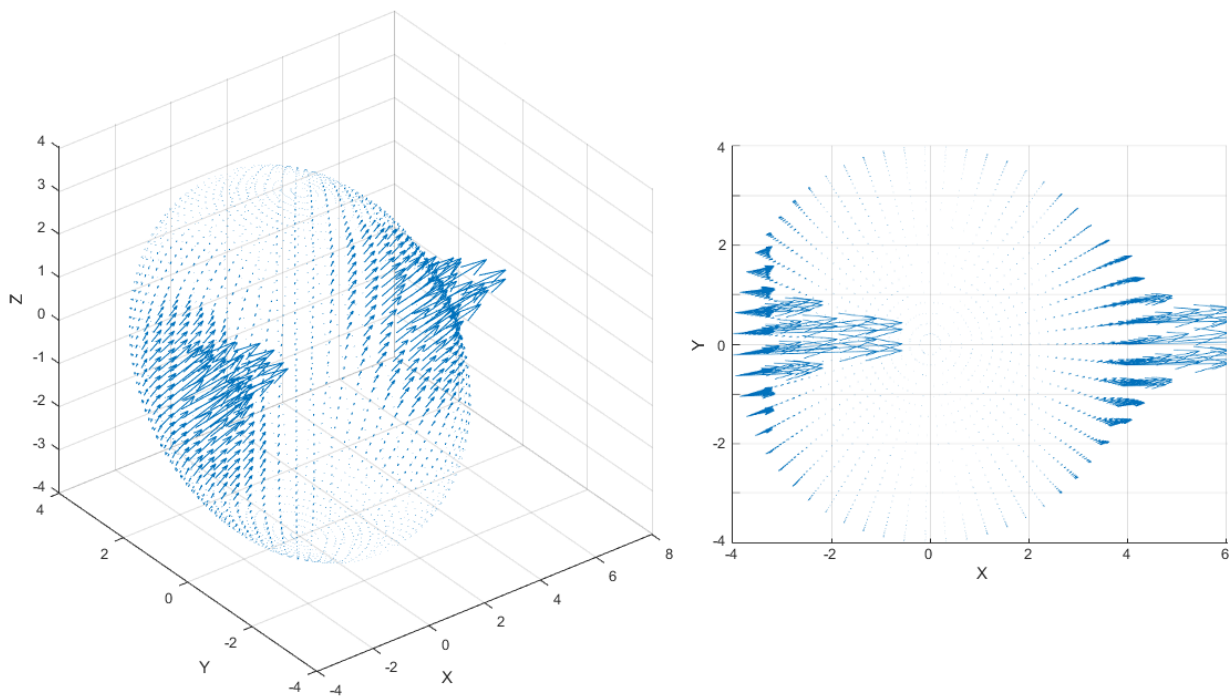


Рис. 9. Вектор Пойнтинга на сфере.

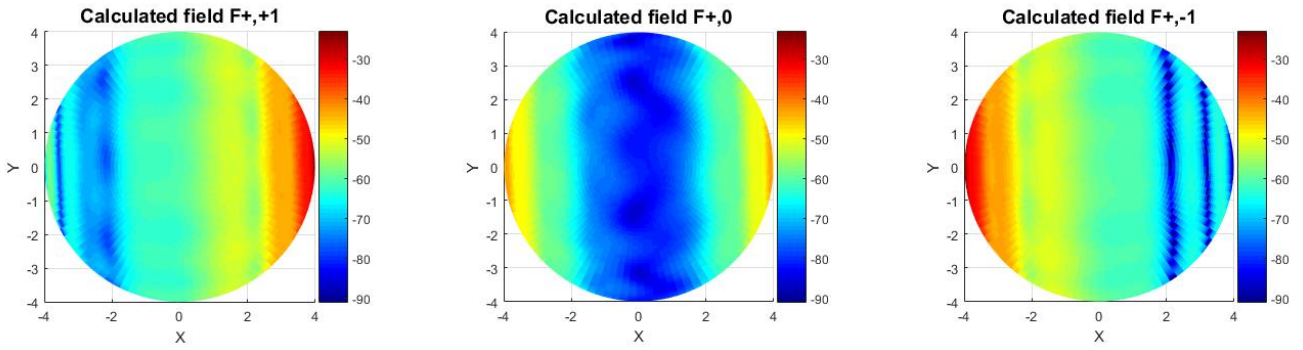


Рис. 10. Составляющие вектора Пойнтинга [дБ] в спиральном базисе от апертуры  $a=\lambda$  на сфере  $4\lambda$ .

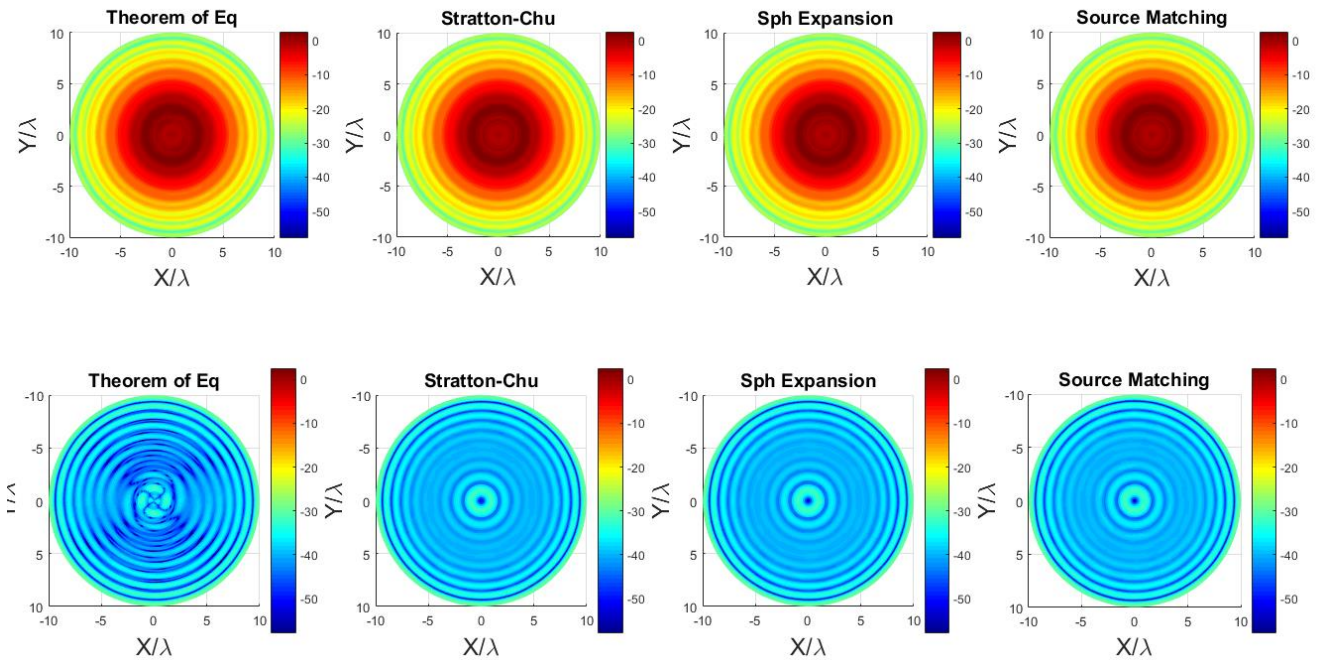


Рис. 11. Вектор Пойнтинга  $P_r$  на сфере в БЗ. Первый столбец – теорема эквивалентности; второй – формула Страттона-Чу; третий – разложение поля, полученного по формуле Страттона-Чу на сфере, в ряд; четвертый – метод согласования с источником. Верхний ряд – верхняя полусфера (сектор углов  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ ), нижний ряд – нижняя полусфера ( $90^\circ < \theta < 270^\circ$ ).

Интерес также представляет распределение поля в поперечной плоскости при удалении от апертуры. Результаты расчета для разных апертур методом согласования с источником представлены на рис. 12. На рисунках виден процесс изменения дифракционной картины – переход от поля в ближней зоне к излучению в дальней зоне, имеющему сферический фронт.

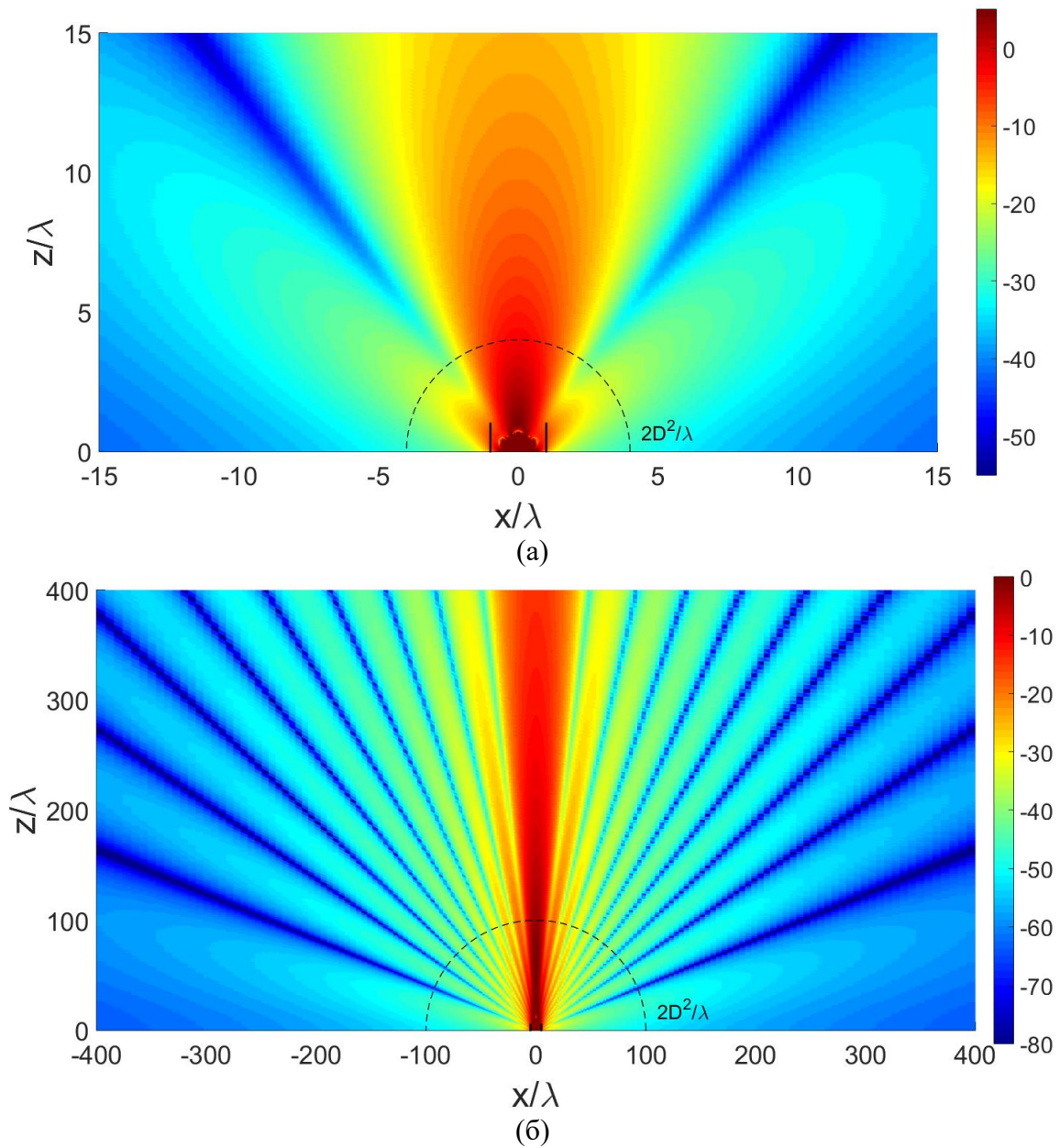
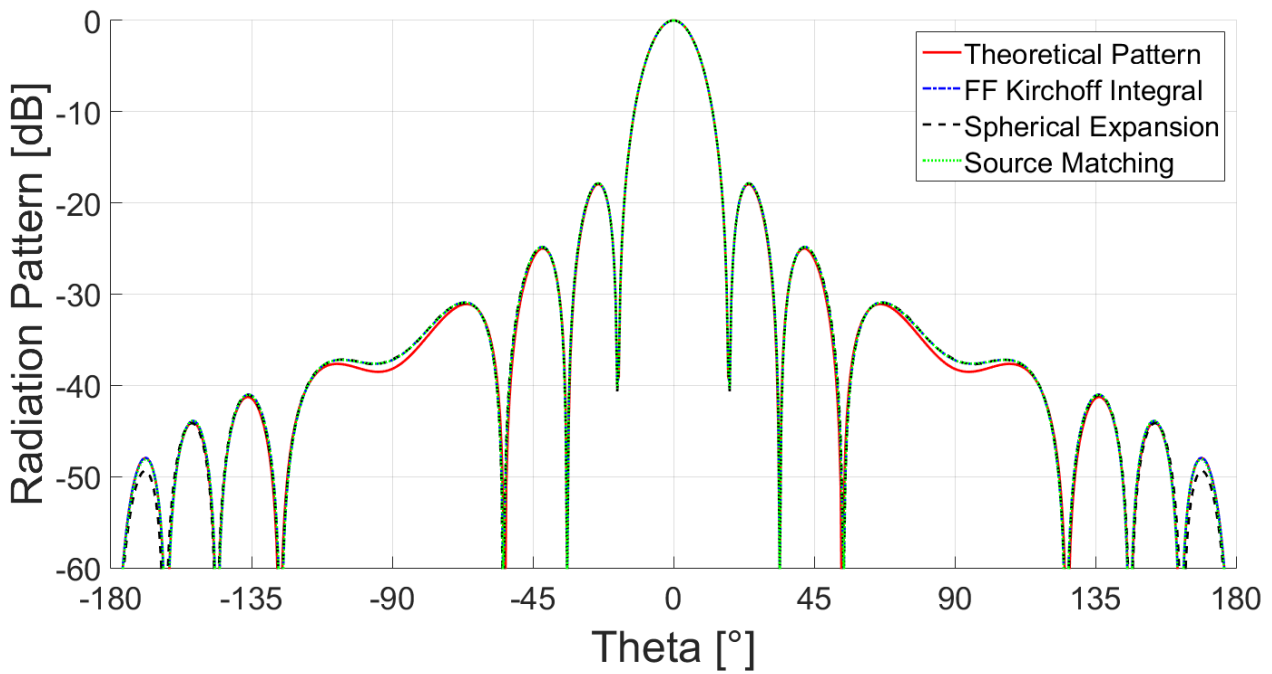


Рис. 12. Распределение вектора Пойнтинга  $P_r$  в поперечной плоскости, рассчитанное методом согласования с источником. Апертура  $a=\lambda$  (а); апертура  $a=5\lambda$  (б).

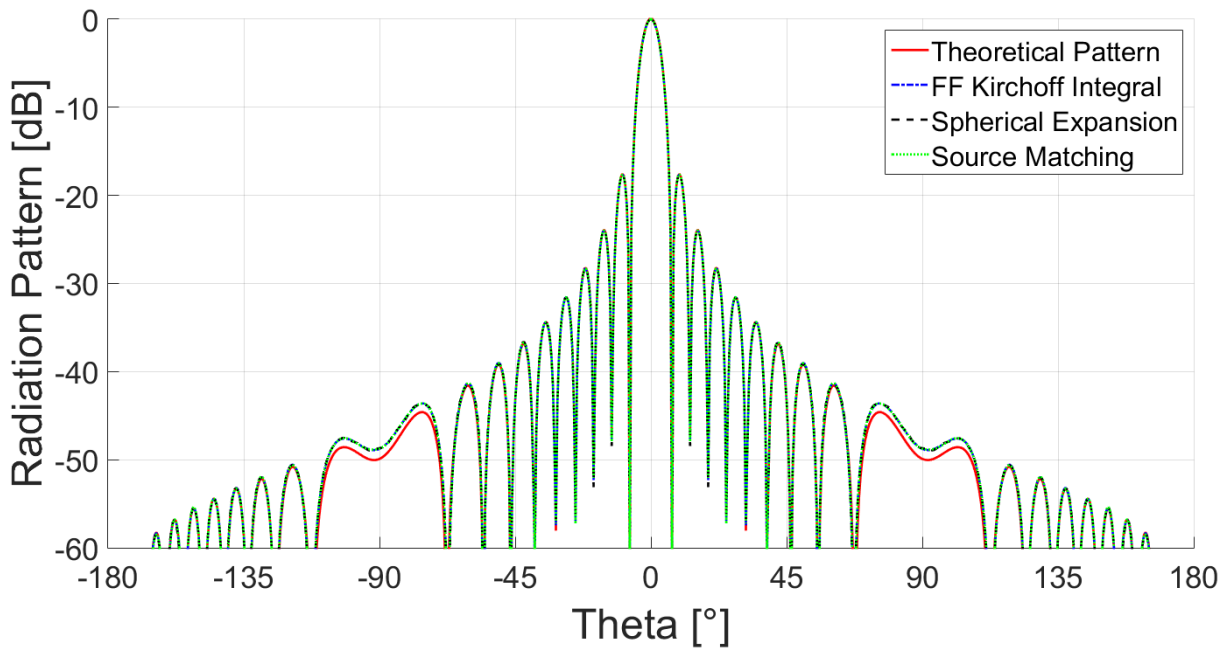
Рассчитаем также поле от апертуры в ДЗ. Аналитическое выражение

$$F(\theta) = 2 \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \quad (74)$$

Результаты расчета методами интегрирования Кирхгофа с применением теоремы эквивалентности, методом согласования с источником, разложением поля в БЗ на сфере и пересчет ряда в ДЗ, а также по аналитической формуле представлены на рис. 13.



(a)



(б)

Рис. 13. Нормированная амплитуда поля в ДЗ. Апертура  $a=2\lambda$  (а); апертура  $a=5\lambda$  (б).

### 5.2. Излучение рупорных и зеркальных антенн

Как и для полей апертуры, будем рассчитывать излучаемые и рассеиваемые поля антенн в терминах векторов Р-З с помощью 2-х основных методов:

- интеграл Кирхгофа (теорема эквивалентности, формула Стрэттона-Чу);
- применение разложения поля в ряд по векторным сферическим гармоникам (по полю на сфере и методом согласования с источником).

Рассмотрим излучение рупорной антенны. В качестве примера возьмем известный рупор с симметричной диаграммой направленности – рупор Поттера. Недостаток такого облучателя в узкополосности, однако для нашего анализа излучения на одной частоте широкополосность не имеет принципиального значения. Расчетная частота  $f=12.5$  ГГц, диаметр апертуры рупора порядка одной длины волны.

Для проведения расчетов необходимо задание сторонних токов – исходного поля, и граничных условий. Задачу возбуждения рупора мы рассматривать не будем, так как для нас важно в первую очередь распространение волн в свободном пространстве и рассеяние. Таким образом, задание исходного поля возможно, например, определением значений поля на сфере или поля в апертуре. Последнее довольно точно описывается аппроксимационными формулами. Однако для сохранения точности и сравнения возьмем в качестве исходных полей данные, полученные строгим расчетом – решением уравнений Максвелла численными методами.

Зададим на входе рупора левую круговую поляризацию. Для полноты картины и сравнения результатов будем проводить расчеты следующими методами:

- 1) метод интегральных уравнений с решением методом моментов в Altair FEKO;
- 2) метод конечных элементов в ANSYS HFSS;
- 3) расчет полей по источникам на сфере, взятым из решения FEKO;
- 4) расчет полей по источникам в апертуре, взятым из решения HFSS.

Результаты расчетов ближнего поля в FEKO и HFSS представлены на рис. 14-15. Для дальнейшей обработки и пересчета полей необходимо извлечь из программ полученные результаты. Произведем разложение полученных полей в ряд: метод разложения поля в ряд по источникам на сфере из FEKO и метод согласования с источником для поля апертуры из HFSS. Ряд ограничивается числом гармоник  $N=40$  для первого случая и  $N=26$  для второго случая. Хотя в обоих случаях для учета неоднородностей поля ближней зоны в качестве



исходных поверхностей взяты поверхности не минимально возможных размеров, для метода согласования с источником число членов ряда минимально.

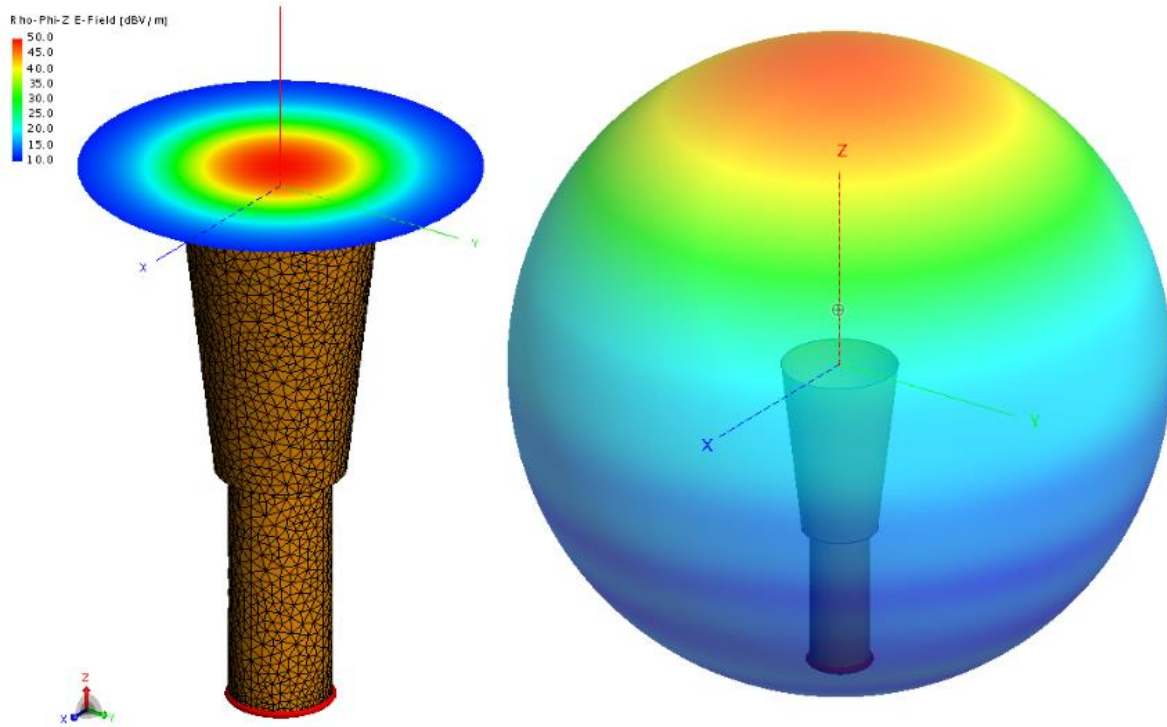


Рис. 14. Ближнее поле  $E$  рупора Поттера в апертуре и на сфере, рассчитанное в FEKO.

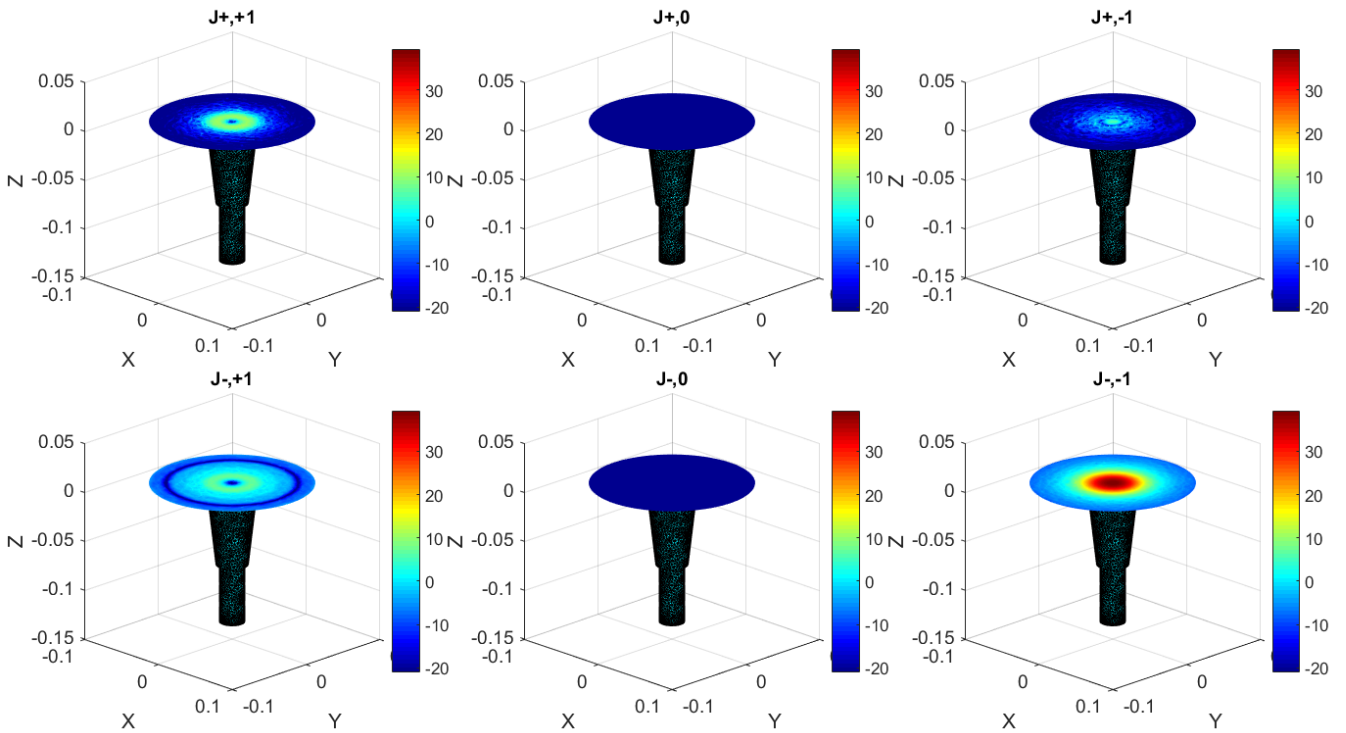


Рис. 15. Составляющие эквивалентного тока  $J=[n,F]$ , [дБ] в циклических координатах, пересчитанные из исходного поля в HFSS.

Получив коэффициенты разложения поля в ряд, можно определить поле в любой точке пространства как сумму ряда сферических гармоник. Для оценки результатов определим поле в дальней зоне – диаграммы направленности рупора. Результаты и сравнение всех четырех расчетных случаев представлены на рис. 16. Как видно, расчет в FEKO и разложение на сфере (синие и красные кривые) совпадают практически полностью. Это говорит о том, что полученное численным методом строгое решение электродинамической задачи на сфере содержит полную информацию об излучаемом поле. Решение в HFSS отличается от решения FEKO и, кроме того, разложение поля апертуры из HFSS в ряд отличается от исходного поля. Это может быть вызвано тем, что в пересчете поля апертуры не учитываются токи затекания на внешнюю поверхность рупора.

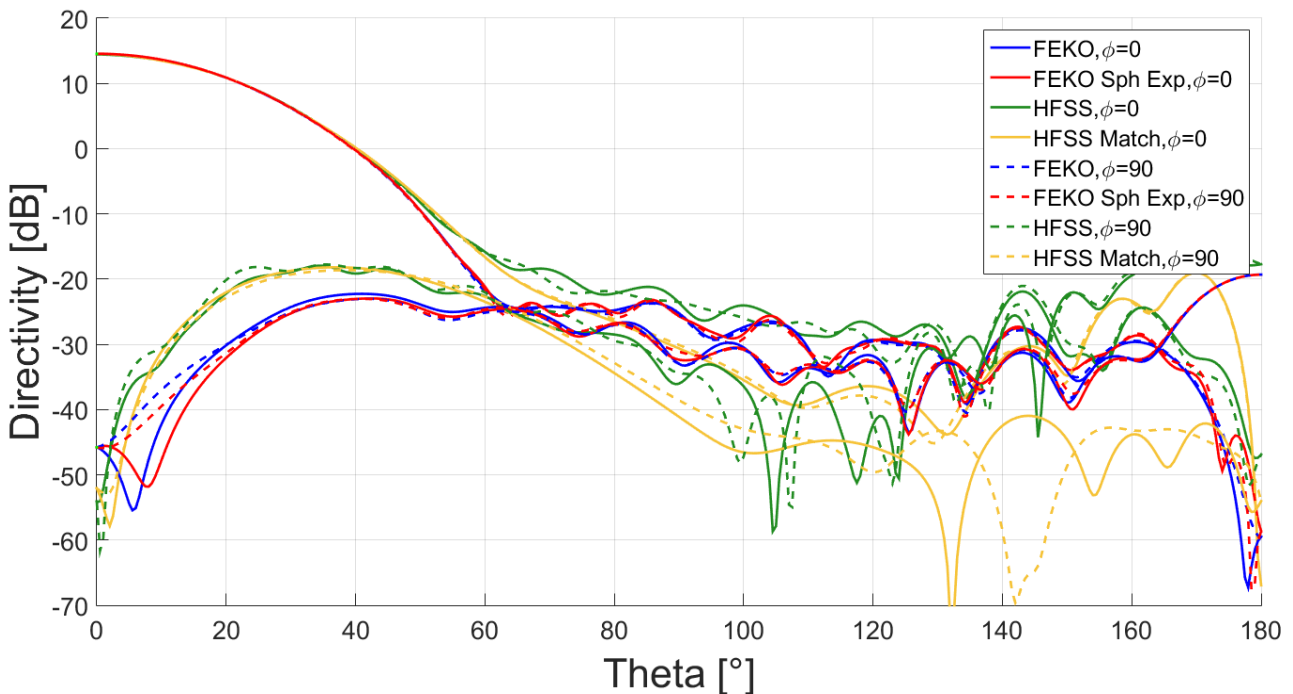


Рис. 16. Диаграммы направленности рупора, посчитанные разными методами. Представлены ДН по основной поляризации (LHCP) и кроссполяризации (RHCP).

Из приведенных результатов также видно, что рупор Поттера, как и предполагалось, обладает симметричной диаграммой направленности и может быть использован как облучатель зеркальной антенны с низким уровнем кроссполяризации.

Перейдем теперь к анализу полей рассеяния на параболическом рефлекторе, облучаемом рассмотренным рупором. Возьмем рефлектор с

параметрами: фокусное расстояние  $F=16\lambda$ , диаметр  $D=20\lambda$ . Угол раствора  $2\psi_0=69.4^\circ$ , что соответствует уровню облучения края зеркала рупором -11дБ.

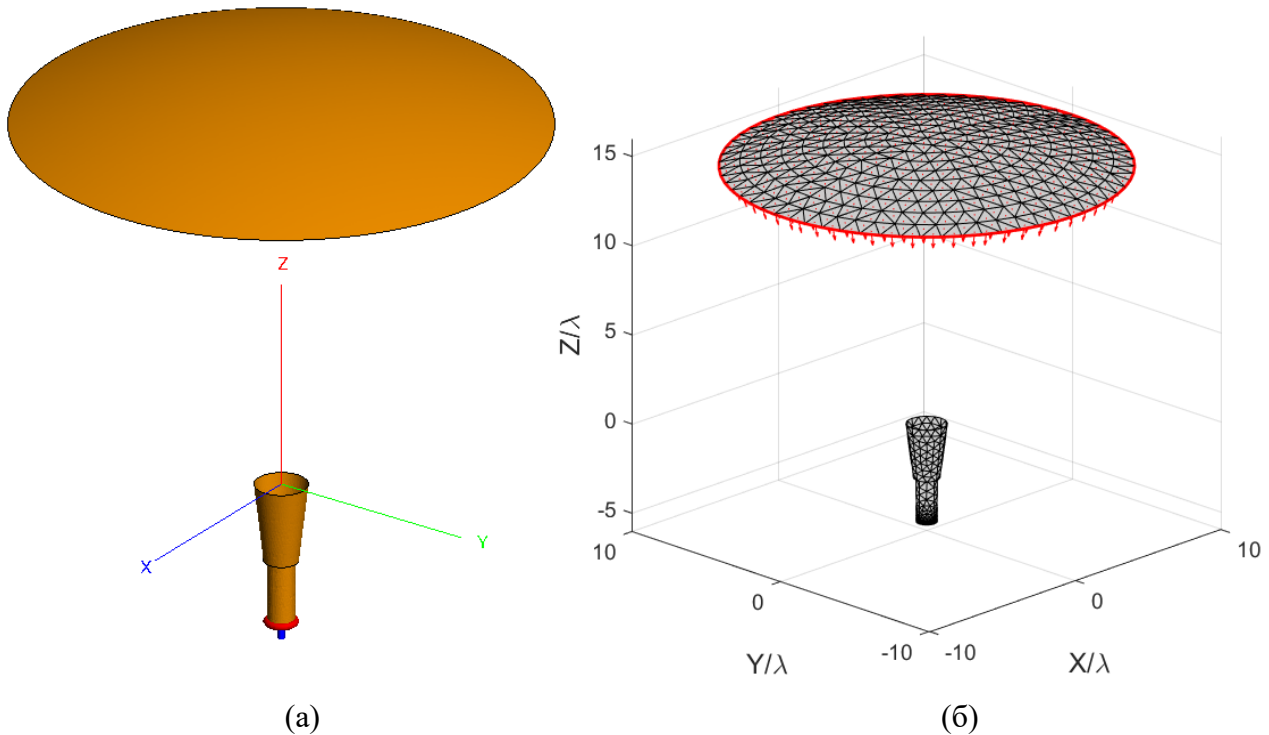


Рис. 17. Геометрия однозеркальной антенны с облучателем – рупором Поттера. Модель в FEKO (а) и триангулированная модель для расчета (б).

Расчет производится в несколько шагов. Основные этапы расчета:

- 1) Расчет поля облучателя (было проведено ранее).
  - 1.1 расчет полного поля численными методами на минимальной сфере, окружающей рупор, перевод составляющих в спиральные координаты;
  - 1.2 расчет коэффициентов разложения поля облучателя на сфере с центром координат в фокусе рефлектора.
- 2) Расчет наведенных токов на поверхности рефлектора.
  - 2.1 по полученным коэффициентам суммирование ряда – расчет поля на рефлекторе;
  - 2.2 перевод в декартовы координаты и применение ГУ – расчет поверхностных токов по формуле  $\mathbf{J}_{\pm} = [\mathbf{n}, (\mathbf{F}_{\pm 2} - \mathbf{F}_{\pm 1})]$ .
- 3) Расчет полей рефлектора.
  - 3.1 смещение центра координат в вершину рефлектора;



- 3.2 расчет коэффициентов разложения поля рефлектора методом согласования с источником;
- 3.3 полное ближнее поле является суммой рядов полей рефлектора и рупора в единой системе координат;
- 3.4 поле в ДЗ является суммой рядов полей рефлектора и рупора, умноженное на множитель  $e^{ikF \cos(\theta)}$ .

Отдельно стоит отметить выбор центра координат при расчете методом согласования с источником на этапе 3. В [39] приведен подробный анализ критериев выбора центра координат. В нашем случае оптимальным является выбор центра координат в вершине рефлектора, так как число членов ряда в этом случае минимально.

Геометрия задачи этапа 2 изображена на рис. 18. Рефлектор облучается ближним полем источников на сфере, являющихся эквивалентными источниками поля рупора. Результат расчета спиральных составляющих плотности поверхностного тока представлен на рис. 19. Видно, что ток на краю параболоида составляет порядка -11дБ от поля в центре, поле симметрично, кроссполаризационная составляющая мала.

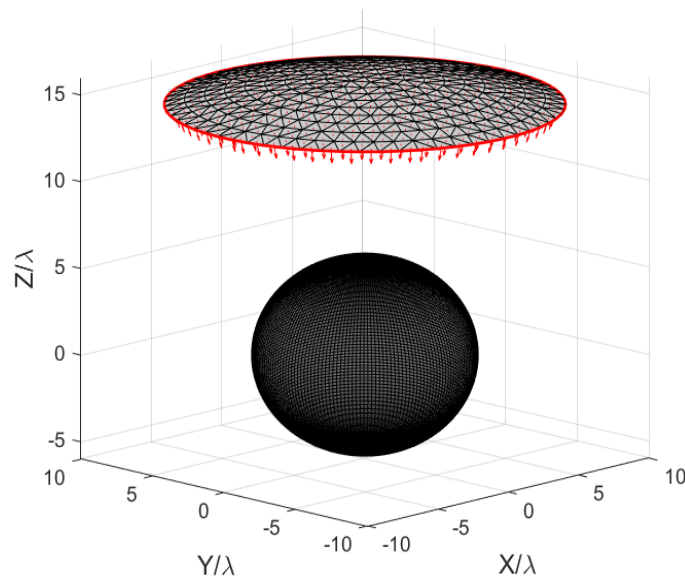


Рис. 18. Геометрия задачи определения поверхностных токов; источник – поле рупора на сфере. Центр координат в фокусе, совмещенном с фазовым центром облучателя.

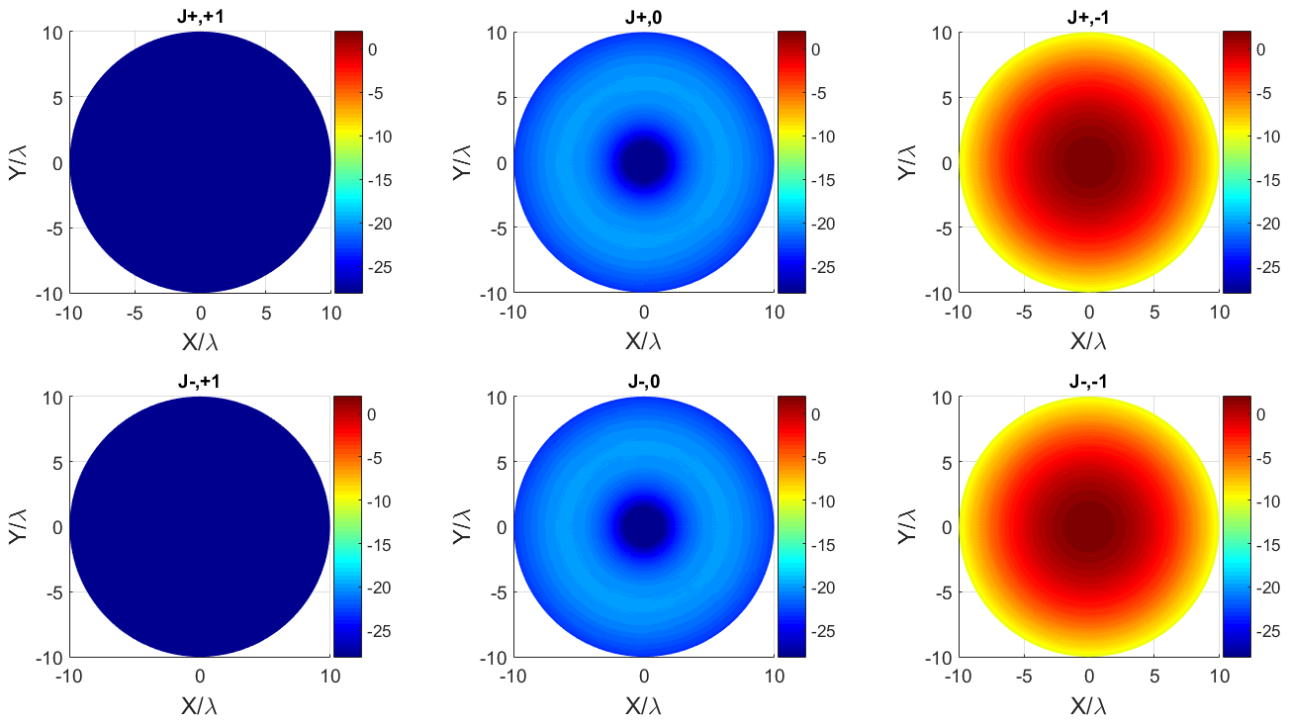


Рис. 19. Составляющие плотности поверхностного тока на поверхности рефлектора.

Следующий шаг – смещение центра координат в вершину рефлектора, расчет коэффициентов разложения по декартовым составляющим токов по формуле (68). Суммарное поле рассчитывается как сумма поля, излучаемого токами на поверхности рефлектора как сумма ряда векторных сферических гармоник, и поля исходного поля – ряда гармоник, излучаемых рупором:

$$\mathbf{F}_{\pm\Sigma} = \mathbf{F}_{\pm\text{рефл}} + \mathbf{F}_{\pm\text{рун}} = \sum_{n=1}^{N_{\text{рефл}}} \sum_{m=-n}^n C_{m\pm\text{рефл}}^n \mathbf{F}_{m\pm}^n + \sum_{n=1}^{N_{\text{рун}}} \sum_{m=-n}^n C_{m\pm\text{рун}}^n \mathbf{F}_{m\pm}^n \quad (75)$$

где  $\mathbf{F}_{m\pm}^n$  и  $\mathbf{F}_{m\pm}^m$  - векторные сферические гармоники с соответствующими центрами координат, взятые на поверхности, на которой рассчитывается поле. На рис. 20 изображено поле, рассчитанное в ФЕКО методом интегральных уравнений, вместе с исходным полем рупора на сфере и возбуждающими токами на поверхности рефлектора. Уровень заднего излучения, обусловленного дифракцией, составляет порядка -25дБ. Поле в ближней зоне на сфере радиуса  $25\lambda$ , рассчитанное в ФЕКО, по формуле Стрэттона-Чу и методом согласования с источником, показано на рис. 21. На рис. 22 изображено распределение радиальной составляющей векторов Пойнтинга  $\mathbf{P}_+$  и  $\mathbf{P}_-$  на сфере в передней и задней полуплоскости. Видно хорошее совпадение результатов расчетов. В целом можно констатировать, что разложение в ряд по

сферическим волнам дает более близкое к точному решение, так как для этого метода единственное допущение, приводящее к неточностям – расчет поверхностного тока в соответствии с принципом физической оптики.

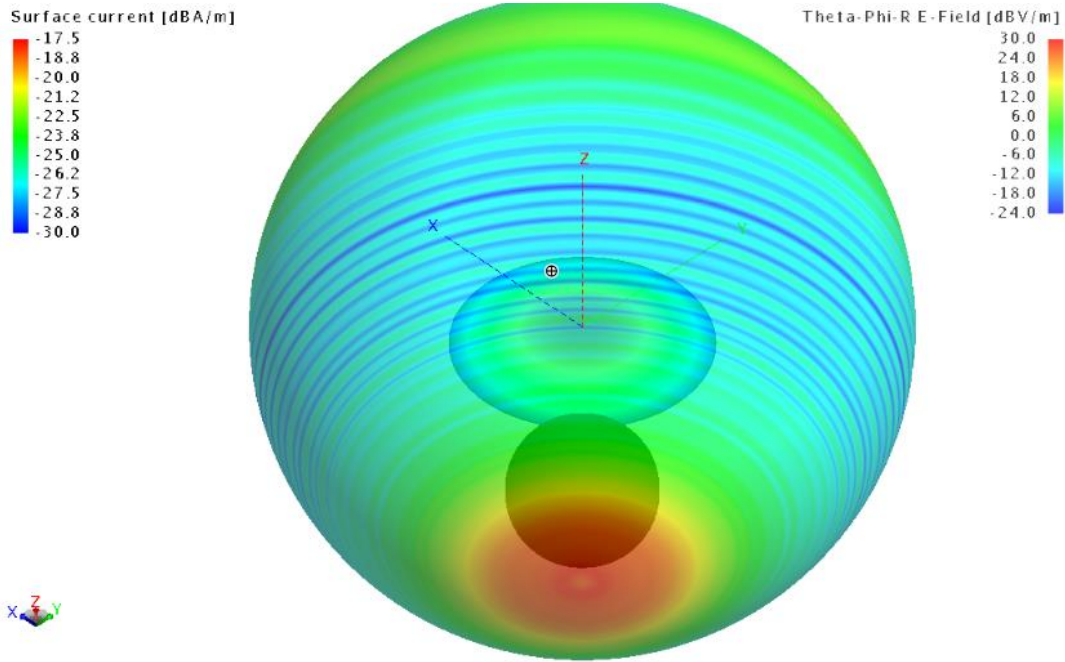


Рис. 20. Ближнее поле рефлектора на сфере радиуса  $25\lambda$ .

Рис. 21.

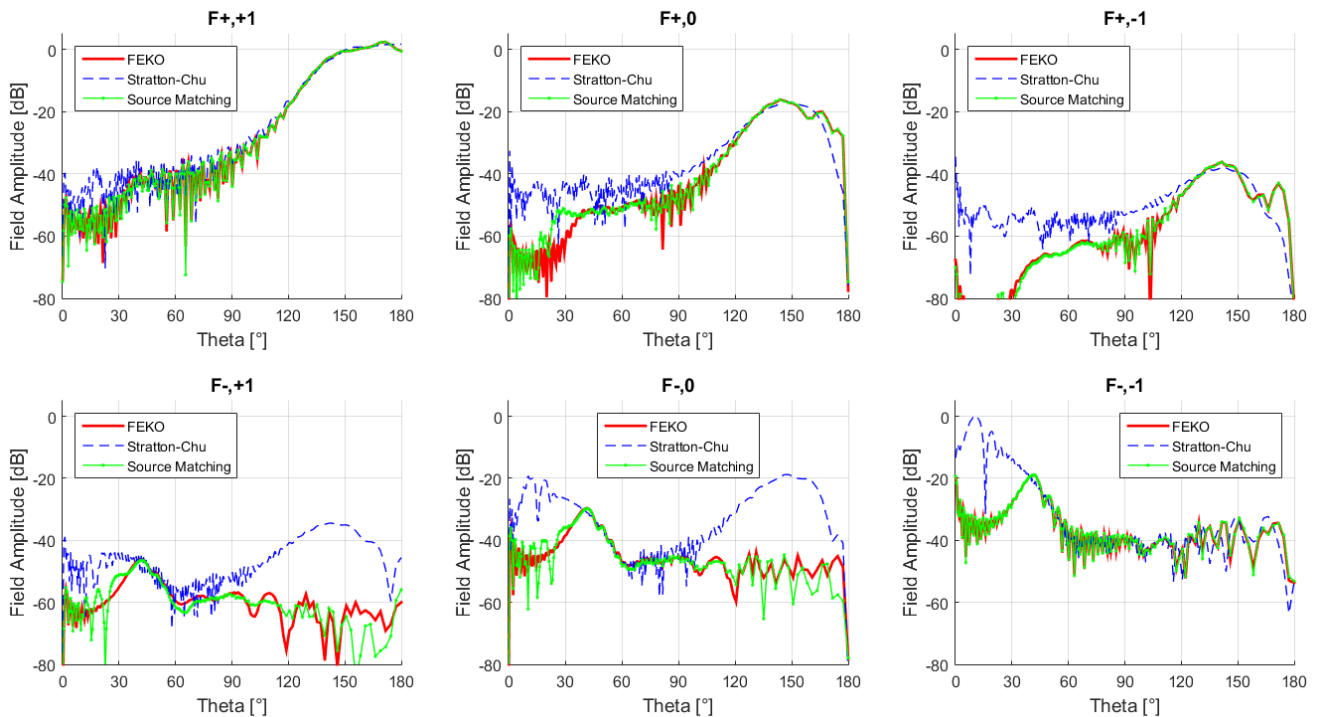


Рис. 22. Составляющие рассчитанного разными методами ближнего поля рефлектора на сфере радиуса  $25\lambda$  в терминах векторов Р-3. Основная составляющая –  $F_{+,+1}$ .

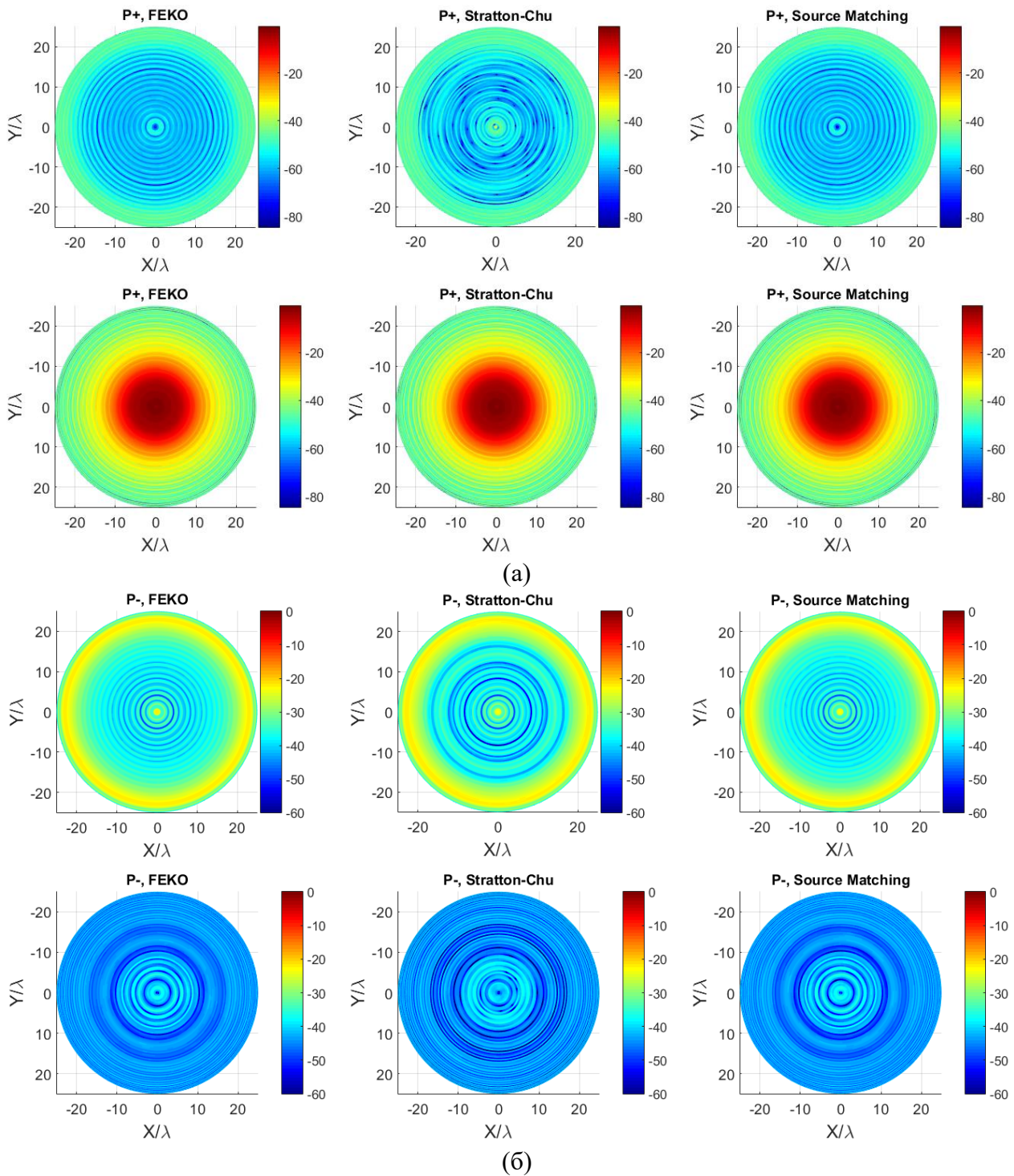
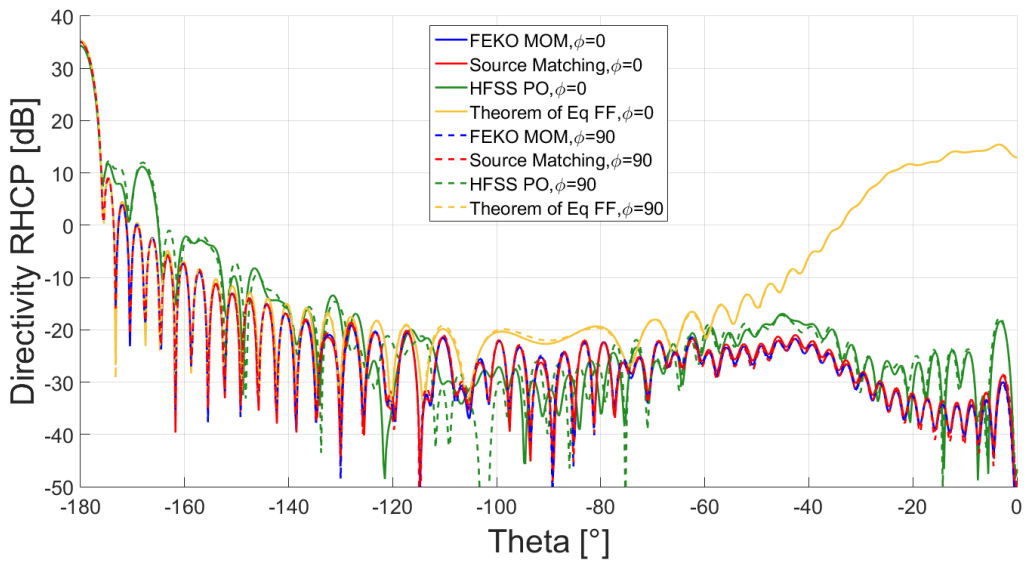


Рис. 23. Радиальная составляющая вектора Пойнтинга на сфере в БЗ. Вектор  $\mathbf{P}_+$  (б); вектор  $\mathbf{P}_-$  (а).  
 Левый столбец – метод интегральных уравнений в FEKO, средний столбец – формула Страттона-Чу, правый столбец – метод согласования с источником.  
 Верхний ряд – сектор  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ , нижний ряд –  $-90^\circ < \theta < 270^\circ$ .

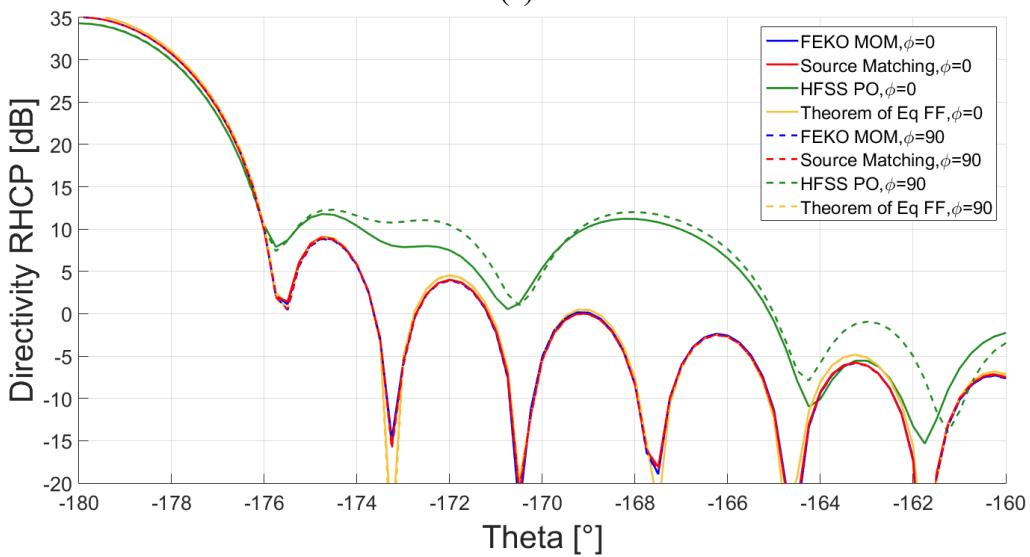
Поле в ДЗ находится как сумма полей рефлектора и поля рупора, умноженное на фазовый множитель, учитывающий смещение фазового центра рупора относительно рефлектора:

$$\mathbf{F}_{\pm\Sigma} = \mathbf{F}_{\pm\text{refл}} + \mathbf{F}_{\pm\text{рун}} e^{ikF \cos(\theta)} \quad (76)$$

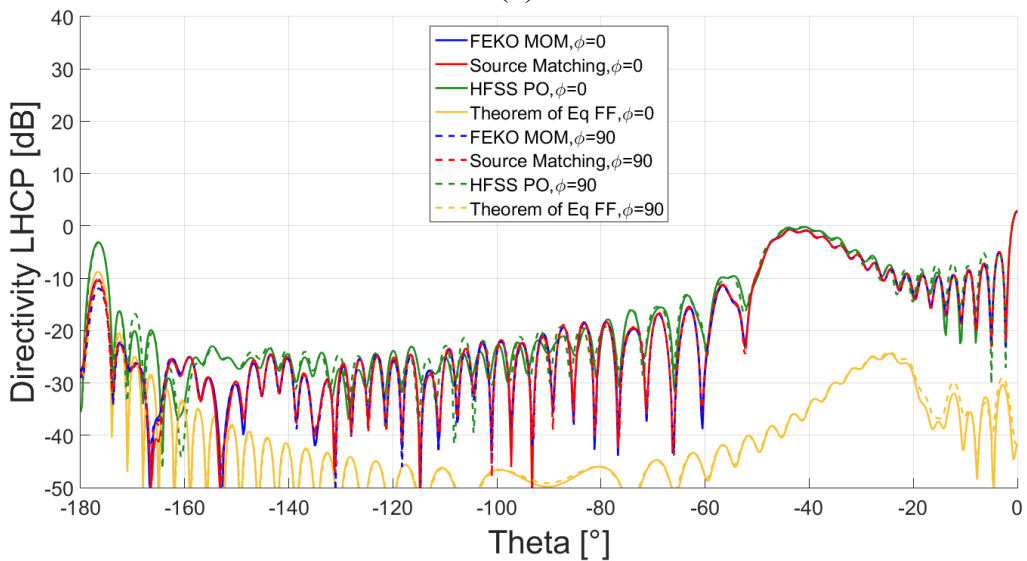




(a)



(б)



(в)

Рис. 24. Поле рефлектора в ДЗ – диаграммы направленности (КНД). ДН по правой круговой поляризации в широком секторе углов (а), в секторе углов, близких к главному максимуму (б), ДН по левой круговой поляризации (в).

На рис. 23 представлены расчеты диаграмм направленности по основной и по кросс поляризации 4-мя методами – метод интегральных уравнений в FEKO, метод согласования с источником векторов P-3, метод конечных элементов с применением гибридных граничных условий FE-VI и IE Regions в HFSS и с применением выражения теоремы эквивалентности в ДЗ. В таблицу 1 сведены результаты расчета коэффициента усиления и коэффициента использования поверхности (КИП). В оценке КИП не учтены только потери за счет неидеальности профиля зеркала (среднеквадратическое отклонение профиля зеркала от теоретического) и потери за счет затенения зеркала облучателем и его опорой.

Метод/параметр	Коэффициент усиления	КИП
FEKO, метод интегральных уравнений	34.977 дБ	0.7968
Согласование с источником	34.983 дБ	0.7980
HFSS, МКЭ с применением гибридных граничных условий	34.44 дБ	0.7039
Метод ФО для векторов P-3	34.86 дБ	0.7761

Исходя из результатов, можно сделать ряд выводов:

- результаты расчетов методом согласования с источником и методом интегральных уравнений в FEKO сходятся. Это объясняется тем, что в качестве источника для расчета коэффициентов ряда были заданы токи, рассчитанные по полному полю рупора на сфере из FEKO;
- метод интеграла Кирхгофа дает точный результат только в области, близкой к направлению максимального излучения;
- присутствует расхождение между результатами расчетов в FEKO и в HFSS. Исходя из опыта, FEKO больше адаптирован для расчетов электрически больших структур. Однако стоит отметить, что выбранный метод расчета в HFSS позволяет считать рефлектор вместе с рупором. Современные программные пакеты электродинамического моделирования идут по пути унификации расчетных методов, создания гибких гибридных методов для расчета сложных структур.

Таким образом, представленный в статье метод разложения поля в ряд по сферическим волнам пригоден для расчета полей рассеяния, в том числе на электрически больших структурах. Отдельного анализа требует количество вычислительных операций и время расчета разными методами, а также влияние заданной точности на расчетное время, однако этот вопрос выходит за рамки статьи.

### 5.3. Критерий выбора гармоник – ограничения ряда.

Рассчитав коэффициенты разложения поля в ряд и суммируя члены ряда, в определенный момент с увеличением индекса  $n$  ряд начинает расходиться из-за неограниченного увеличения радиальной функции – функции Ханкеля. Это связано с излучением реактивных полей – явление сверхнаправленности, и вызвано свойствами диаграмм направленности антенн. На практике необходимо оценивать реальные излучаемые поля с какой-то степенью точности. Для этого необходимо ввести критерий ограничения ряда. Общепринятый критерий выбора числа членов ряда, принятый, например, в работах [45, 46]:

- для внешней задачи

$$N = kr_{\min} \quad (77)$$

где  $r_{\min}$  – радиус сферы минимального радиуса, охватывающей все источники.

- для внутренней задачи

$$N = 1.5kr_{\max} \quad (78)$$

где  $r_{\max}$  – радиус сферы максимального радиуса, не содержащей источники излучения.

Иногда к этим выражениям добавляется еще некоторое число членов ряда  $n_1$ , зависящее от необходимой точности и от расположения точек источника относительно центра координат. В книге [39] сформулирован достаточно полный критерий оценки необходимой точности: ряд следует ограничить, если оба последних его члена хотя бы в  $10^{-5}$  раз меньше последней суммы всех

составляющих поля. В качестве оцениваемой характеристики берется мощность гармоники:

$$P_m^n = |C_m^n|^2 \quad (79)$$

Таким образом, выбор количества членов ряда  $N$ , при котором ряд следует ограничить, записывается следующим образом

$$K_N = \frac{\sum_{n=N-2}^N \sum_{m=-n}^n P_m^n}{\sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=-n}^n P_m^n}; \quad K_{N-1} = \frac{\sum_{n=N-2}^{N-1} \sum_{m=-n}^n P_m^n}{\sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=-n}^n P_m^n}; \quad \begin{cases} K_N < 10^{-5} \\ K_{N-1} < 10^{-5} \end{cases} \quad (80)$$

Для вычисления разложения на сфере достаточно применить критерий (77), при этом  $r_{\min}$  – радиус сферы разложения.

Рассмотрим свойства сходимости ряда метода согласования с источником на примере расчета полей апертурных излучателей, описанных ранее. На рис. 24-25 представлена зависимость отношения суммарной мощности гармоник от номера члена ряда. Начиная с индекса, примерно соответствующего критерию (77), мощность гармоник начинает быстро убывать. Это говорит о правильности выбранного нами критерия ограничения ряда.

## 6. Заключение

В статье представлен нетрадиционный метод представления электромагнитного поля с использованием векторов Римана-Зильберштейна, являющимися линейной комбинацией векторов электрического и магнитного полей и описывают поля идеальной круговой поляризации. Показано, что при определенных условиях, которые выполняются для множества задач антенной техники, векторы Р-З распространяются независимо друг от друга, и уравнения Максвелла распадаются на два независимых уравнения. Аналогичная идея перехода к векторам круговой поляризации для описания электромагнитных полей была отмечена в течение 20-го века, однако такой подход не нашел широкого применения для инженерных задач в теории антенн.



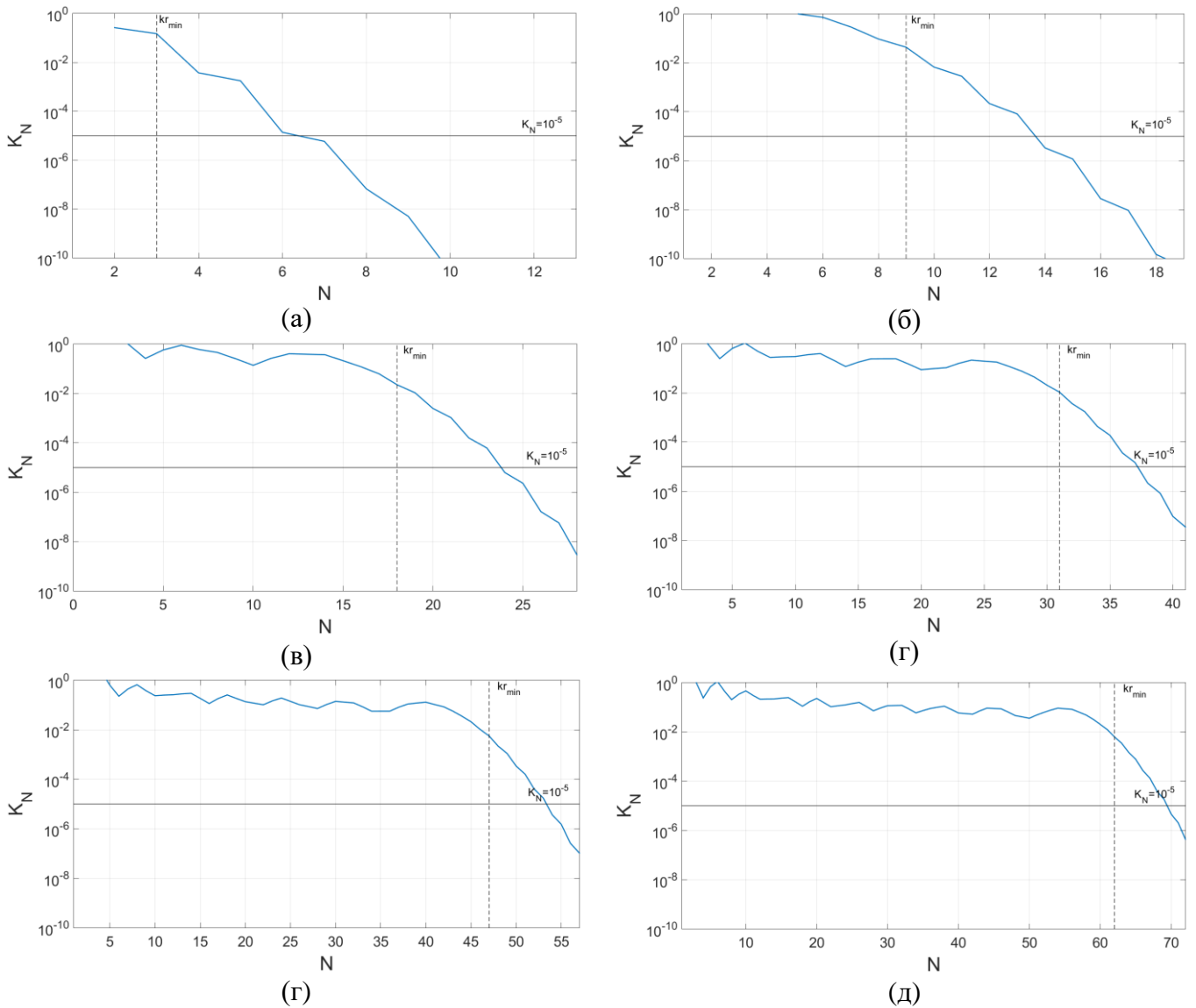


Рис. 24. Результаты оценки сходимости по критерию мощности гармоник для плоской круглой равномерной апертуры.  $a = \lambda/2$  (а);  $a = 3\lambda/2$  (б);  $a = 3\lambda$  (в);  $a = 5\lambda$  (г);  $a = 15\lambda/2$  (д);  $a = 20\lambda$  (е).

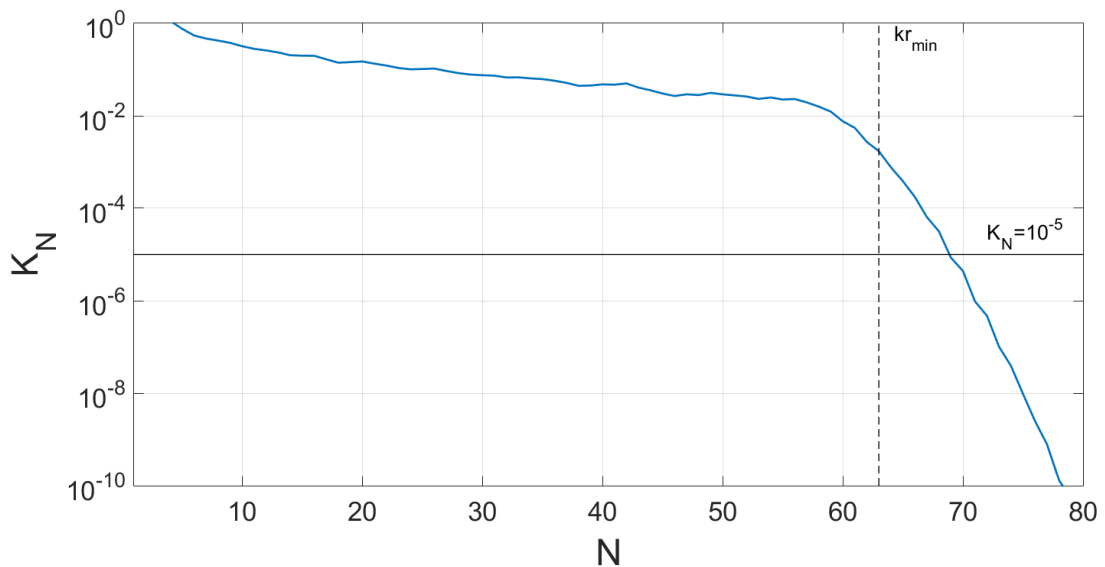


Рис. 25. Результаты оценки сходимости по критерию мощности гармоник для задачи рассеяния на параболическом рефлекторе диаметром  $20\lambda$ ,  $kr_{min} = 63$ .

В работе мы развиваем теорию векторов Р-З и выводим общие выражения и тождества электромагнитного поля, такие как лемма Лоренца, интеграл Кирхгофа в различных формулировках. Затем вводятся векторные сферические гармоники в спиральной системе координат. Простота применения и симметрия разложения поля в ряд показана на примерах излучения апертуры и рупорной антенны, а также рассеяния на параболическом зеркале.

Для метода разложения поля в ряд по собственным волнам в спиральном базисе получены соотношения, позволяющие рассчитывать коэффициенты непосредственно по составляющим поля на поверхности источника. Такой метод по аналогии с работами Вуда назван методом согласования с источником. Он позволяет значительно упростить процедуру расчета полей рассеивающих поверхностей, например, зеркальных антенн и лучеводов.

Для определенных задач число вычислений интегралов в разложении уменьшается вдвое по сравнению с традиционным разложением на ТЕ и ТМ волны за счет независимости векторов (например, для задач с круговой или линейной поляризацией, являющейся суммой двух круговых поляризаций с равными амплитудами, когда отсутствует необходимость определения кроссполяризационной составляющей). В наборе векторных сферических гармоник векторов Р-З исключена избыточность за счет отсутствия первой постоянной гармоники, не являющейся диаграммой направленности реальной антенны. Разложение осуществляется непосредственно по сферическим гармоникам, заданным в явном виде, без необходимости введения скалярных гармоник, проведения математических операций дифференцирования над ними и т.д.

Преимущество метода разложения поля в ряд заключается в том, что, однажды определив коэффициенты на поверхности источника, можно определить поле в любой точке пространства. Также возможно решение обратной задачи – получение поля в ближней зоне по диаграмме направленности. Более того, при известной форме поверхности источника

возможно решение задачи синтеза излучающих токов. Это может быть полезно, например, при анализе причин искажений характеристик излучения.

Таким образом, преимущества применения векторов Римана-Зильберштейна основаны на двух свойствах:

- 1) независимость векторов правой и левой круговой поляризации в однородном пространстве;
- 2) простое, симметричное и физически ясное разложение векторов Р-З в ряд векторных сферических гармоник в спиральном базисе.

Все вышеперечисленное имеет большой нераскрытый потенциал для задач вычислительной электродинамики.

**Приложение 1.** Вывод выражений поля диполя (круговой поляризации), интеграла Кирхгофа.

- 1) Поле диполя. Найдём выражение поля элементарного диполя, направленного вдоль вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{a}\delta(p - q). \quad \text{П1.1}$$

Из формулы (22) следует выражение для векторного потенциала диполя  $\mathbf{A} = \mathbf{a}\psi_{pq}$ . Подставляя это выражение в (П1.1), получаем

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm k\mathbf{a}\psi_{pq} + \text{rot}(\mathbf{a}\psi_{pq}) \pm \frac{1}{k} \text{grad div}(\mathbf{a}\psi_{pq}), \quad \text{П1.2}$$

или

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm k\mathbf{a}\psi_{pq} + [\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \text{grad}(\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}). \quad \text{П1.3}$$

Преобразуем слагаемые с дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}) &= (\mathbf{a}, \text{grad}) \text{grad}\psi_{pq}; \\ \text{rot}(\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}) &= (\mathbf{a}, \text{grad}) \text{grad}\psi_{pq} - \mathbf{a}\nabla^2\psi_{pq}. \end{aligned} \quad \text{П1.4}$$

Подставляя (П1.4) в (П1.3), получаем:

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm \frac{1}{k} \mathbf{a}(\nabla^2\psi_{pq} + k^2\psi_{pq}) + [\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \text{rot}[\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}]. \quad \text{П1.5}$$

Вне области, содержащей источник, первое слагаемое можно отбросить, получим следующее выражение для поля элементарного диполя:

$$\mathbf{F}_{\pm} = \left[ \text{grad} \psi_{pq}, \mathbf{a} \right] \pm \frac{1}{k} \text{rot} \left[ \text{grad} \psi_{pq}, \mathbf{a} \right]. \quad \text{П1.6}$$

Преобразуем последнее выражение, используя явный вид функции Грина  $\psi_{pq}$ :

$$\text{grad} \psi_{pq} = \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \mathbf{r}^0, \quad \text{П1.7}$$

где  $\mathbf{r}^0$  – единичный вектор, направленный от точки «источка»  $q$  к точке наблюдения  $p$ . При вычислении применяем следующие формулы векторного анализа:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{a}\varphi) &= \varphi \text{rota} - [\mathbf{a}, \text{grad}\varphi]; \\ \text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= (\mathbf{b}, \text{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \text{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div}\mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div}\mathbf{a}. \end{aligned} \quad \text{П1.8}$$

С учётом первой из этих формул получим:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[ \text{grad} \psi_{pq}, \mathbf{a} \right] &= \text{rot} \left( \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \right) = \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \text{rot} [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] - \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}], \text{grad} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \text{rot} \left( \frac{1}{r} [\mathbf{r}, \mathbf{a}] \right) - \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}], \mathbf{r}^0 \right]. \end{aligned} \quad \text{П1.9}$$

Вычислим первое слагаемое в правой части (П1.9) с ротором:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( \frac{1}{r} [\mathbf{r}, \mathbf{a}] \right) &= \frac{1}{r} \text{rot} [\mathbf{r}, \mathbf{a}] - \left[ [\mathbf{r}, \mathbf{a}], \text{grad} \frac{1}{r} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ (\mathbf{a}, \text{grad})\mathbf{r} + (\mathbf{r}, \text{grad})\mathbf{a} + \mathbf{r} \text{div}\mathbf{a} - \mathbf{a} \text{div}\mathbf{r} \right\} + \frac{1}{r} \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \mathbf{r}^0 \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ (\mathbf{a}, \text{grad})\mathbf{r} - \mathbf{a} \text{div}\mathbf{r} + \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \mathbf{r}^0 \right] \right\} = \frac{1}{r} \left( -2\mathbf{a} + \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \mathbf{r}^0 \right] \right); \end{aligned} \quad \text{П1.10}$$

Выражение (П1.9) с учетом (П1.10):

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[ \text{grad} \psi_{pq}, \mathbf{a} \right] &= \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \frac{1}{r} \left( -2\mathbf{a} + \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \mathbf{r}^0 \right] \right) - \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}], \mathbf{r}^0 \right] = \\ &= -\frac{2}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \mathbf{a} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} \right) \left[ [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}], \mathbf{r}^0 \right]. \end{aligned} \quad \text{П1.11}$$

В итоге получаем следующее выражение поля диполя Герца:

$$\mathbf{F}_{\pm} = \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \right) [\mathbf{r}^0 [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]] - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \mathbf{a} \right\}; \quad \text{П1.12}$$

$$\frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} = \psi_{pq} \left( -ik - \frac{1}{r_{pq}} \right); \quad \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} = \psi_{pq} \left( -k^2 + \frac{2ik}{r_{pq}} + \frac{2}{r_{pq}^2} \right).$$

Или более развернуто:

$$\mathbf{F}_{\pm} = -k \left\{ i \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \pm \left\{ \left( 1 - \frac{3i}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} \right) (\mathbf{r}^0, \mathbf{a}) \mathbf{r}^0 - \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \mathbf{a} \right\} \right\} \psi_{pq}. \quad \text{П1.13}$$

Получим выражение поля диполя, направленного вдоль оси Z:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_z = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta; \quad \mathbf{r}^0 = \mathbf{e}_r; \quad \text{П1.14}$$

$$[\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] = -\sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi; \quad [\mathbf{r}^0, [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]] = \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\pm} &= -\psi_r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta - \frac{2\psi_r}{r} (\cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \right\} = \\ &= \mp \frac{2\psi_r}{kr} \cos \vartheta \mathbf{e}_r \pm \frac{1}{k} \left( \psi_{rr} + \frac{\psi_r}{r} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta - \psi_r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi = \\ &= k\psi \left\{ \pm \frac{2}{kr} \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta \mathbf{e}_r \mp \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \right\}. \end{aligned} \quad \text{П1.15}$$

## 2) Выражение интеграла Кирхгофа – теорема эквивалентности

Для вывода выражений применяем лемму Лоренца. Положим  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$  — поле с источниками в объёме  $V$ , удовлетворяющее внутри поверхности  $S$  уравнению  $\text{rot } \mathbf{F} \mp k\mathbf{F} = \mathbf{j}$  и условию излучения на бесконечности,  $\mathbf{F}_2$  — поле элементарного диполя, сосредоточенного в точке  $\mathbf{r}_0$ , которая может быть либо строго внутренней, либо строго наружной относительно границы  $S$  (то есть расстояние от этой точки до границы  $S$  строго больше некоторого положительного числа  $\varepsilon$ ),  $\mathbf{a}$  — единичный вектор вдоль диполя. Уравнение поля диполя:  $\text{rot } \mathbf{F}_2 \mp k\mathbf{F}_2 = \mathbf{a}\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ . Решение уравнения с такой правой частью называют функцией Грина. Обозначим его  $\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ .

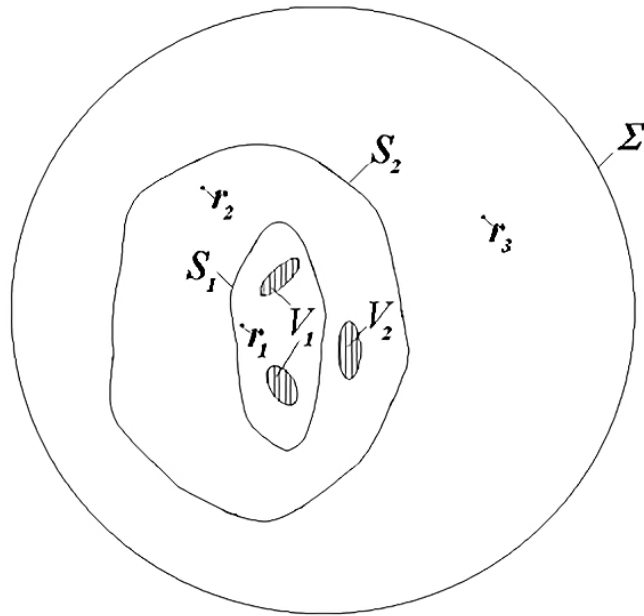


Рис. П1.1. Области, в которых определены функции.

В пространстве выделим несколько областей: область, ограниченную поверхностью  $S_1$  (рис. П1.1), в которой содержатся источники поля  $\mathbf{F}$  (быть может, не все), сосредоточенные в объёмах  $V_1$  и внутренняя точка  $\mathbf{r}_1$ , область, ограниченную поверхностью  $S_2 \supset S_1$ , в которой содержатся остальные источники поля  $\mathbf{F}$  в объёме  $V_2$  и внутренняя точка  $\mathbf{r}_2 \notin S_1$ , а также область, ограниченную сферой достаточно большого радиуса  $\Sigma$  с внутренней точкой  $\mathbf{r}_3 \notin S_2$ . В точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  будем вычислять поле  $\mathbf{F}$  и помещать в эти точки диполь, являющийся источником поля  $\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), n = 1, 2, 3$ . Поверхности не должны проходить через источники полей.

а) Сначала применим лемму Лоренца к области, ограниченной сферой  $\Sigma$  радиуса  $|\mathbf{r}|$ , с внутренней точкой  $\mathbf{r}_1$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds &= \iiint_{V_{\Sigma} \supset V_1 + V_2} \{(\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) - (\mathbf{a} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \mathbf{F})\} dv = \\ &= \iiint_{V_1 + V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv - (\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) \end{aligned} \quad \text{П1.16}$$

Преобразуя, получаем

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = - \oint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds + \iiint_{V_1 + V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv. \quad \text{П1.17}$$

Интегрирование производится по переменной  $\mathbf{r}$ . Устремим радиус сферы к бесконечности и оценим поверхностный интеграл. Поведение спиральных составляющих полей  $\mathbf{F}_+ = f_{+1}\mathbf{e}^{+1} + f_0\mathbf{e}^0 + f_{-1}\mathbf{e}^{-1}$ , удовлетворяющих условию излучения, на большом расстоянии от источника определяется соотношениями:

$$f_{+1} = O\left(\frac{1}{r}\right), f_0 = O\left(\frac{1}{r^2}\right), f_{-1} = O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \text{П1.18}$$

Такие же соотношения верны для функции Грина. Применяя выражение векторного произведения в спиральном базисе (51), векторное произведение для  $\mathbf{F}_+$  (П1.15) можно оценить как

$$[\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] = O\left(\frac{1}{r^3}\right)\mathbf{e}^1 + O\left(\frac{1}{r^4}\right)\mathbf{e}^0 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\mathbf{e}^{-1} \quad \text{П1.19}$$

Такая же оценка справедлива и для  $\mathbf{F}_-$ . Поэтому

$$\left| \iint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds \right| = O\left(\frac{1}{r^3}\right)r^2 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{то есть на бесконечности этот}$$

интеграл стремится к нулю. Следовательно

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \infty} (\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = \iiint_{V_1+V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.20}$$

Но по теореме единственности решение уравнения  $\text{rot } \mathbf{F} \mp k\mathbf{F} = \mathbf{j}$  в заданной точке не меняется при изменении радиуса сферы, значит

$$\iint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds \equiv 0, \quad \text{если сфера охватывает все источники поля } \mathbf{F} \text{ и}$$

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = \iiint_{V_1+V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.21}$$

что и следовало ожидать для функции Грина.

Применение леммы Лоренца к поверхности  $S_2$  приводит к равенству:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds + \iiint_{V_1+V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.22}$$

из которого, в соответствии с той же теоремой единственности, можно сделать вывод, что  $\iint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds \equiv 0$  независимо от формы поверхности, если поверхность охватывает все источники поля.

б) Применим лемму Лоренца к поверхности  $S_1$ . В этом случае объёмный интеграл будет содержать интегрирование только по  $V_1$ .

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = -\iint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds + \iiint_{V_1} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.23}$$

Из этого следует равенство:

$$-\iint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds = \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.24}$$

Значит, действие поверхностного интеграла на значение поля во внутренней точке поверхности эквивалентно действию источников поля, находящихся вне поверхности интегрирования.

с) Применим лемму Лоренца к нахождению поля в точке  $r_2$ , находящейся в области между поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Внутренней нормалью к этой области будет внешняя нормаль для  $S_1$  и внутренняя для  $S_2$ , а объёмный интеграл будет распространяться на источники в  $V_2$ :

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_2), \mathbf{a}) = -\iint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds - \iint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds + \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.25}$$

Так как источники поля вне второго поверхностного интеграла отсутствуют, а поле ищется во внутренней точке  $r_2$ , этот интеграл обращается в нуль

$$\iint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds = 0 \quad \text{П1.26}$$

и справедливо:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_2), \mathbf{a}) = -\iint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds + \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \mathbf{j}) dv \quad \text{П1.27}$$



Таким образом, в соответствии с принципом эквивалентности действие поверхностного интеграла в этом случае эквивалентно действию внутренних источников к поверхности  $S_1$ .

д) Применим лемму Лоренца к нахождению поля вне поверхности  $S_2$ , содержащей все источники поля. Получим:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_3), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_3)], \bar{\mathbf{n}}) ds \quad \text{П1.28}$$

Для любой точки внутри этой поверхности этот интеграл обращается в нуль  $\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1,2})], \bar{\mathbf{n}}) ds = 0$ . Таким образом:

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) ds = \begin{cases} (\mathbf{F}(\mathbf{r}_0), \mathbf{a}), & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_2 \\ 0, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_2 \end{cases} \quad \text{П1.29}$$

$$\oiint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) ds = \begin{cases} (\mathbf{F}(\mathbf{r}_0), \mathbf{a}) - \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \mathbf{j}) dv, & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_1 \\ -\iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \mathbf{j}) dv, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_1 \end{cases} \quad \text{П1.30}$$

то есть, интеграл терпит такой разрыв при переходе точки наблюдения через поверхность, которая содержит все (или не все) источники поля.

е) Преобразуем (П1.30), с помощью явного выражения функции Грина. Воспользуемся явным выражением функции Грина:

$$\mathbf{G}_{a\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} \right) [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}] - \frac{2}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} \mathbf{a} \right\};$$

$$\frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} = \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( -ik - \frac{1}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \right); \quad \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r^2} = \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( -k^2 + \frac{2ik}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} + \frac{2}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^2} \right); \quad \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}; \quad \text{П1.31}$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}; \quad r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|;$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\mathbf{a}\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = & (-ik)\psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \left[\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}\right] \mp \\ & \mp (-ik)\psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left\{ \left(i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2}\right) \left[\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 \left[\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}\right]\right] + \frac{2}{k\rho} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \mathbf{a} \right\}; \end{aligned} \quad \text{П1.32}$$

Выразим теперь смешанное произведение в подинтегральном выражении поверхностного интеграла:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_{\mathbf{a}\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) = & (-ik)\psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) \mp \right. \\ & \mp \left. \left(i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2}\right) ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]]], \mathbf{n}) \mp \frac{2}{k\rho} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \right\}; \\ ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) = & ([\mathbf{n}, \mathbf{F}], [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]) = ([\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}], \mathbf{J}) = ([\mathbf{J}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0], \mathbf{a}); \\ ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]]], \mathbf{n}) = & ([\mathbf{n}, \mathbf{F}], [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]]) = -(\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0) \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}); \\ ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) = & ([\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{a}) = (\mathbf{J}, \mathbf{a}); \end{aligned} \quad \text{П1.33}$$

где  $\mathbf{J} = [\mathbf{n}, \mathbf{F}]$  - плотность эквивалентного поверхностного тока. Подставляя эти выражения в интегральное выражение леммы Лоренца, получаем:

$$\begin{aligned} \oint_S ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]] \psi_{r, \mathbf{n}}) ds \pm \frac{1}{k} \oint_S ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}^0, [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]]]) \left(\psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r}\right), \mathbf{n} ds \mp \\ \mp \frac{2}{k} \oint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}] \frac{\psi_r}{r}, \mathbf{n}) ds = - \iiint_V (\mathbf{a}, \mathbf{F}) \delta(p - q) dv_q \end{aligned} \quad \text{П1.34}$$

$$\begin{aligned} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_{\mathbf{a}\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) = & (-ik) \oint_{S_2} \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} \left\{ \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0] \pm \right. \\ & \left. \pm \left(i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2}\right) (\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0) \mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0) \mp \frac{2}{k\rho} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \mathbf{J} \right\}, \mathbf{a} ds; \end{aligned} \quad \text{П1.35}$$

Теперь можно записать окончательное выражение интеграла Кирхгофа:

$$b(\rho, \mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{J}) = \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0] \pm \left(i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2}\right) \left(\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0) \mathbf{r}_{r,r_0}^0\right) \mp \frac{2}{k\rho} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \mathbf{J};$$

$$\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \quad \mathbf{r}_{r,r_0}^0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}; \quad \Psi_{r,r_0} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho};$$

П1.36

$$\oint\!\!\!\oint_{S_1} (-ik) \Psi_{r,r_0} b(\rho, \mathbf{r}^0, \mathbf{J}) ds_r + \iiint_{V_2} (-ik) \Psi_{r,r_0} b(\rho, \mathbf{r}^0, \mathbf{j}) dv_r = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0), & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_1 \\ 0, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_1 \end{cases}$$

$$\oint\!\!\!\oint_{S_2} (-ik) \Psi_{r,r_0} b(\rho, \mathbf{r}^0, \mathbf{J}) ds_r = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0), & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_2 \\ 0, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_2 \end{cases}$$

### 3) Выражение интеграла Кирхгофа в дальней зоне

Из выражения (П1.36) при подстановке  $\mathbf{r}_{r,r_0}^0 = -\mathbf{e}_r$  следует формула для векторных составляющих поля в дальней зоне (диаграммы направленности):

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_{r_0}) = ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \oint\!\!\!\oint_{S_2} \left\{ [\mathbf{J}, \mathbf{e}_{r_0}] \mp i(\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_{r_0}) \right\} e^{ik(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds$$

П1.37

Для заданной точки наблюдения в дальней зоне сферическая система координат с полярным направлением  $\mathbf{e}_{r_0}$  не зависит от точки истока.

$$\mathbf{F}_{\pm}(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_{r_0}) \approx ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \oint\!\!\!\oint_S \left\{ (J_{\varphi} \mathbf{e}_9 - J_9 \mathbf{e}_{\varphi}) \mp i(J_9 \mathbf{e}_9 + J_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}) \right\} \exp(ik(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}')) ds' =$$

$$= ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \oint\!\!\!\oint_S \left\{ (J_{\varphi} \mp iJ_9) \mathbf{e}_9 + (-J_9 \mp iJ_{\varphi}) \mathbf{e}_{\varphi} \right\} \exp(ik(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}')) ds'$$

П1.38

Векторы Р-З в дальней зоне идеально поляризованы по кругу, поэтому в спиральном базисе диаграмма направленности каждого вектора Р-З должна иметь лишь одну ненулевую составляющую. Переходя к спиральным составляющим (46), получаем поле в дальней зоне, выраженное через спиральные составляющие поля на поверхности  $S$ :

$$\mathbf{F}_{\pm}(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}^0) = \left( \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \oint\!\!\!\oint_S J_{\pm 1} \exp(ik(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}')) dS \right) \mathbf{e}^{\pm 1};$$

П1.39

### 4) Формула Стрэттона - Чу.

В формуле Стрэттона-Чу излучаемые поля выражаются через касательные и нормальные составляющие поля на поверхности. Формула

справедлива для незамкнутых поверхностей. Так же, как и в предыдущем выводе, в лемме Лоренца выберем поле  $\mathbf{F}_2$  в виде поля электрического диполя:

$$\mathbf{F}_{2\pm} = \pm k\mathbf{a}\psi_{pq} + [\mathit{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \mathit{grad}(\mathit{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}); \quad \text{П1.40}$$

Получим выражение для поля в области, свободной от источников:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) = \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \\ \iint_S ([\mathbf{F}, [\mathit{grad}\psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp \frac{1}{k} \iint_S ([\mathbf{F}, \mathit{grad}(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})], \mathbf{n}) ds \end{aligned} \quad \text{П1.41}$$

Напомним, что  $\mathbf{n}$  – внутренняя нормаль. Преобразуем последнее слагаемое, для этого воспользуемся тождеством:

$$\mathit{rot}\{(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\} = (\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})\mathit{rot}\mathbf{F} + [\mathit{grad}(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a}), \mathbf{F}] \quad \text{П1.42}$$

$$[\mathbf{F}, \mathit{grad}(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})] = \mathit{rot}\{(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\} - (\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})\mathit{rot}\mathbf{F} \quad \text{П1.43}$$

Получим последнее слагаемое (П1.43) в виде:

$$\iint_S ([\mathbf{F}, \mathit{grad}(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})], \mathbf{n}) ds = \iint_S (\mathbf{n}, \mathit{rot}\{(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\}) ds - \iint_S (\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \mathit{rot}\mathbf{F}) ds \quad \text{П1.44}$$

Подставим это выражение в (П1.41):

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) = \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \iint_S ([\mathbf{F}, [\mathit{grad}\psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp \\ \mp \frac{1}{k} \iint_S (\mathbf{n}, \mathit{rot}\{(\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\}) ds \pm \frac{1}{k} \iint_S (\mathit{grad}\psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \mathit{rot}\mathbf{F}) ds \end{aligned} \quad \text{П1.45}$$

Воспользуемся тем, что для любого гладкого векторного поля  $\mathbf{X}$  в области, включающей замкнутую поверхность  $S$  (без края):  $\iint_S (\mathbf{n}, \mathit{rot}\mathbf{X}) ds \equiv 0$ .

Если векторное поле на части поверхности является краевым значением гладкого векторного поля, а на другой части тождественно равно нулю, тогда по теореме Стокса

$$\iint_S (\mathbf{n}, \mathit{rot}\mathbf{X}) ds = \oint_L (\mathbf{X}, d\mathbf{l}) \quad \text{П1.46}$$

где кривая  $L$  – край разрыва. Выражением (П1.45) переписывается с учётом этого в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) = & \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \iint_S ([\mathbf{F}, [\text{grad } \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp \\
 & \mp \frac{1}{k} \oint_L (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) \pm \frac{1}{k} \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{F}) ds
 \end{aligned}
 \tag{П1.47}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в первом слагаемом в правой части (П1.47) круговой перестановкой смешанного произведения  $([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) = ([\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{a})$ , во втором слагаемом также сделаем круговые перестановки в смешанном произведении:  $([\mathbf{F}, [\text{grad } \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) = ([\text{grad } \psi, \mathbf{a}], [\mathbf{n}, \mathbf{F}]) = ([[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \text{grad } \psi] \mathbf{a})$ . Предполагая, что поверхность  $S$  не проходит через источники поля, заменим  $\text{rot} \mathbf{F}$  в последнем слагаемом в (П1.47) с помощью уравнения Максвелла  $\text{rot} \mathbf{F} = \pm k \mathbf{F}$ , тогда последнее слагаемое превратится в

$$\pm \frac{1}{k} \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{F}) ds = \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \mathbf{F}) ds
 \tag{П1.48}$$

Так как вектор  $\mathbf{a}$  произвольный, можно избавиться от него в (П1.47), преобразовав это выражение с учётом предыдущих равенств:

$$\mathbf{F}(p) = \mp k \iint_S [\mathbf{n}, \mathbf{F}] \psi ds - \iint_S [[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \text{grad } \psi] ds \mp \frac{1}{k} \oint_L \text{grad } \psi (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) + \iint_S (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \text{grad } \psi ds
 \tag{П1.49}$$

Это и есть формула Стрэттона-Чу, выраженная в терминах векторов Р-3. Перепишем её, выразив градиент функции Грина (напомним ещё раз, что нормаль внутренняя, направление обхода контура должно быть согласовано с ориентацией поверхности: обход в интеграле по контуру происходит так, что если смотреть с конца вектора нормали, то при обходе контура поверхность должна оставаться слева от края):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(p) = & k \iint_S \left\{ \mp [\mathbf{n}, \mathbf{F}] + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) ([[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{r}_{p,q}^0] - (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \mathbf{r}_{p,q}^0) \right\} \psi_{pq} ds_q \pm \\
 & \pm i \oint_L \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \psi_{pq} \mathbf{r}_{p,q}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}_q); \quad \rho = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|; \quad \mathbf{r}_{p,q}^0 = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|}; \quad \psi_{pq} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho};
 \end{aligned}
 \tag{П1.50}$$

**Приложение 2.** Вывод выражения сферических гармоник – решения уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла для векторов Римана-Зильберштейна:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}_{\pm} \mp k\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{j}_{\pm} \quad \text{П2.1}$$

Выражение для ротора в сферических координатах имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \\ \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_{\vartheta} \\ F_{\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{П2.2}$$

Предполагая использование введённых выше векторных сферических гармоник круговой поляризации, перейдём от касательных составляющих  $\vartheta, \varphi$  к спиральным сферическим компонентам [43]:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_{\vartheta} \\ f_{\varphi} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = f_1 \mathbf{e}^1 + f_0 \mathbf{e}^0 + f_{-1} \mathbf{e}^{-1}; \quad \text{П2.3}$$

Преобразованное выражение ротора в спиральном базисе примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \\ \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \quad \text{П2.4}$$

$$= \begin{pmatrix} i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & 0 \\ \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) & 0 & \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( -\frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \\ 0 & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & -i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \end{pmatrix}$$

Будем искать мультипольное решение для вектора  $\mathbf{F}$  в следующей форме:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} b_1(r)P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ b_0(r)P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \\ b_{-1}(r)P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \end{pmatrix} e^{-im\varphi} \quad \text{П2.5}$$

где  $P_{m,m'}^n$  – средние части функций Гельфанда-Виленкина  $t_{m,m'}^n(\varphi, \vartheta, \psi) = e^{-im\varphi} P_{m,m'}^n(\vartheta) e^{-im'\psi}$ , связанных с D-функциями Вигнера простой зависимостью:  $t_{m,m'}^n = (-i)^{m-m'} D_{m,m'}^n$ .

Подставим эти выражения в уравнение (П2.1), предварительно заменив в выражении ротора (П2.4) оператор дифференцирования по  $\varphi$  на множитель  $(-im)$ :

$$\text{rot} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & 0 \\ \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( -m + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) & 0 & \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( m + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \\ 0 & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \end{pmatrix}; \quad \text{П2.6}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left( i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_1 P_{m,1}^n + \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_0 P_{m,+1}^n = 0 \\ \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-m + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_1 P_{m,1}^n \mp k b_0 P_{m,0}^n + \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{m + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_{-1} P_{m,-1}^n = 0 \\ \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_0 P_{m,0}^n + \left( -i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_{-1} P_{m,-1}^n = 0 \end{cases} \quad \text{П2.7}$$

Воспользуемся рекуррентными формулами [42] для вычисления действия дифференциальных операторов с дифференцированием по переменной  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-z^2} \frac{dP_{m,m'}^n}{dz} + \frac{m'z-m}{\sqrt{1-z^2}} P_{m,m'}^n &= -i\sqrt{(n-m')(n+m'+1)} P_{m,m'+1}^n \\ \sqrt{1-z^2} \frac{dP_{m,m'}^n}{dz} - \frac{m'z-m}{\sqrt{1-z^2}} P_{m,m'}^n &= -i\sqrt{(n+m')(n-m'+1)} P_{m,m'-1}^n \end{aligned} \quad \text{П2.8}$$

После замены  $z \Rightarrow \cos \vartheta$  эти соотношения перепишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\vartheta} - \frac{m' \cos \vartheta - m}{\sin \vartheta} \right) P_{m,m'}^n &= i\sqrt{(n-m')(n+m'+1)} P_{m,m'+1}^n \\ \left( \frac{d}{d\vartheta} + \frac{m' \cos \vartheta - m}{\sin \vartheta} \right) P_{m,m'}^n &= i\sqrt{(n+m')(n-m'+1)} P_{m,m'-1}^n \end{aligned} \quad \text{П2.9}$$

Применим эти соотношения для случаев  $m' = 0, 1, -1$ . Получим для функций Гельфанда-Виленкина:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\vartheta} - \frac{m}{\sin \vartheta} \right) P_{m,0}^n &= i\sqrt{n(n+1)} P_{m,-1}^n; \\ \left( \frac{d}{d\vartheta} + \frac{m}{\sin \vartheta} \right) P_{m,0}^n &= i\sqrt{n(n+1)} P_{m,+1}^n; \\ \left( \frac{d}{d\vartheta} - \frac{m - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) P_{m,1}^n &= i\sqrt{n(n+1)} P_{m,0}^n; \\ \left( \frac{d}{d\vartheta} + \frac{m + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) P_{m,-1}^n &= i\sqrt{n(n+1)} P_{m,0}^n; \end{aligned} \quad \text{П2.10}$$

Система уравнений (П2.7) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \left[ \left( i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_0 \right] P_{m,1}^n = 0 \\ \left[ \frac{-1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_1 \mp k b_0 - \frac{1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_{-1} \right] P_{m,0}^n = 0 \\ \left[ \frac{-1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_0 + \left( -i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_{-1} \right] P_{m,-1}^n = 0 \end{cases} \quad \text{П2.11}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при любых значениях  $\vartheta$ , поэтому на сферические функции можно сократить:

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{r} \frac{d}{dr} r \mp k & \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} & \mp k & \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} b_{-1} \\ 0 & \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} & \frac{-i}{r} \frac{d}{dr} r \mp k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{П2.12}$$

Исключив  $b_0$ , получаем



$$b_0 = \mp \frac{1}{kr} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} (b_1 + b_{-1}) \quad \text{П2.13}$$

таким образом сведя систему уравнений к матричной системе 2-го порядка:

$$\begin{cases} \left( \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_1 \pm \frac{n(n+1)}{2kr^2} (b_1 + b_{-1}) = 0 \\ \left( \frac{-i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_{-1} \pm \frac{n(n+1)}{2kr^2} (b_1 + b_{-1}) = 0 \end{cases} \quad \text{П2.14}$$

Введём новые неизвестные функции:  $x(r) = r(b_1 + b_{-1})$ ;  $y = r(b_1 - b_{-1})$ .

Уравнения для этих функций получим после сложения и вычитания уравнений (П2.14).

$$ix' \mp ky = 0; \quad iy' \pm \frac{n(n+1)}{kr^2} x \mp kx = 0; \quad \text{П2.15}$$

Продифференцируем первое из уравнений и подставим в него  $y'$  из второго уравнения, получим:

$$x'' + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) x = 0 \quad \text{П2.16}$$

Это уравнение Риккати-Бесселя, решения этого уравнения – сферические функции Бесселя  $z_n(kr)$ , умноженные на  $r$ :  $x = rz_n(kr)$ .

Выразим функцию « $y$ » из 1-го уравнения (П2.15)  $y = \pm \frac{i}{k} x'$ . Теперь

можно найти функции  $b_1, b_{-1}, b_0$ :

$$\begin{cases} rb_1 = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x \pm (i/k)x'); \\ rb_{-1} = \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(x \mp (i/k)x'); \\ rb_0 = \mp \frac{1}{kr} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} x; \end{cases} \quad \text{П2.17}$$

В результате получаем вектор решения уравнения Максвелла (П2.1), являющийся векторной сферической гармоникой в спиральном базисе:

$$\mathbf{F}_{\pm} = e^{-im\varphi} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{-i}{kr} \frac{d}{dr} r \mp 1 \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{kr} \right) \\ P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{i}{kr} \frac{d}{dr} r \mp 1 \right) \end{pmatrix} z_n(kr) \quad \text{П2.18}$$

Для проверки правильности выразим поле диполя правой круговой поляризации:  $\text{rot}\mathbf{F}_+ - k\mathbf{F}_+ = \mathbf{e}_z \delta(r)$ .

$$n=1; m=0; h_1^{(2)}(kr) = \left( -1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{kr}; \quad P_{0,0}^1 = \cos \vartheta; P_{0,1}^1 = P_{0,-1}^1 = \frac{i \sin \vartheta}{\sqrt{2}}; \quad \text{П2.19}$$

$$\mathbf{F}_+ = \frac{-k}{4\pi} \begin{pmatrix} P_{0,1}^1(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - ik \right) \\ P_{0,0}^1(\cos \vartheta) \left( \frac{2i}{r} \right) \\ P_{0,-1}^1(\cos \vartheta) \left( -\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} - ik \right) \end{pmatrix} h_1^{(2)}(kr) = k \begin{pmatrix} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \left( 2 - \frac{2i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \\ \cos \vartheta \left( \frac{2}{kr} \right) \left( i + \frac{1}{kr} \right) \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{(kr)^2} \right) \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}; \quad \text{П2.20}$$

Преобразуем это выражение в сферические координаты:

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_{\vartheta} \\ f_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \\ f_{-1} \end{pmatrix}; \quad \text{П2.21}$$

$$f_r = \left( \frac{2}{kr} \right) \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta; \quad f_{\vartheta} = \left( -1 + \frac{i}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta; \quad f_{\varphi} = \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta; \quad \text{П2.22}$$

Точное выражение через векторный потенциал:

$$\mathbf{F}_{\pm} = k \left\{ \pm \frac{2}{kr} \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta \mathbf{e}_r \mp \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_{\vartheta} + \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi} \right\} \psi_{pq} \quad \text{П2.23}$$

Как видно, результаты совпадают.

**Приложение 3.** Определение коэффициентов разложения поля в ряд.

Разложение поля в ряд по векторным сферическим гармоникам имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\pm}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_{m=-n}^n C_{m\pm}^n \mathbf{F}_{m\pm}^n \quad \text{ПЗ.1}$$

Для определения коэффициентов разложения рассмотрим рис. ПЗ.1. Пусть  $S_1$  – произвольная поверхность (например, поверхность рефлектора), содержащая источники,  $S_2$  – сфера конечного радиуса  $r_0$ ,  $S_3$  – бесконечная сфера.  $V_1$  – объем между поверхностью  $S_1$  и бесконечной сферой  $S_3$ , объем  $V_2$  – между  $S_2$  и  $S_3$ . Все источники излучения находятся на поверхности  $S_1$ .

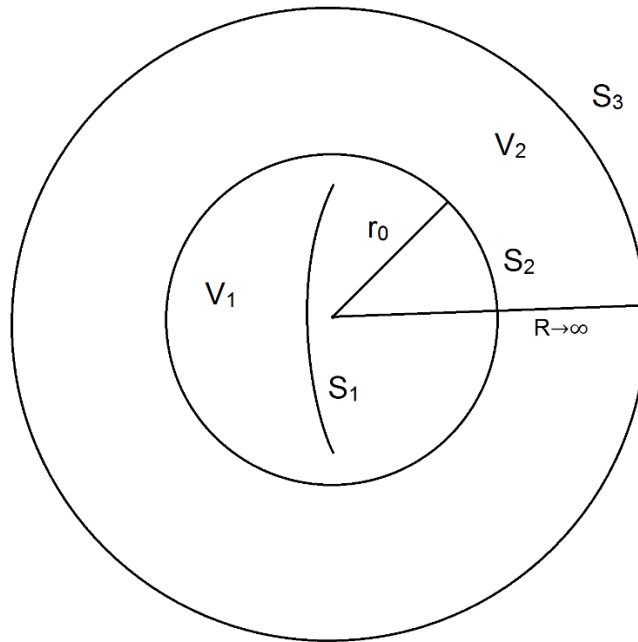


Рис. ПЗ.1. К определению коэффициентов разложения.

*1) Определение коэффициентов по полю на сфере*

В соответствии с теоремой эквивалентности, поле от источников  $S_1$  вне поверхности  $S_2$  может быть представлено как поле эквивалентных электрических и магнитных токов, заданных на сфере  $S_2$ . Для нахождения коэффициентов в области, внешней по отношению к сфере  $S_2$ , запишем лемму Лоренца в области  $V_2$ . Пусть вектор  $\mathbf{A}$  - это вектор Р-З правой круговой поляризации, поле которого нужно определить путём разложения по

сферическим гармоникам. Вектор  $\mathbf{B}$  - это произвольная сферическая гармоника поля правой круговой поляризации, удовлетворяющая условию излучения:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}_m^n = \begin{pmatrix} F_{m,1}^n \\ F_{m,0}^n \\ F_{m,-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - ik \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \left( i \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{r} \right) \\ -P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + ik \right) \end{pmatrix} h_n^{(2)}(kr) e^{-im\varphi} \quad \text{ПЗ.2}$$

Асимптотическое выражение этого вектора в дальней зоне имеет вид:

$$\mathbf{B} \rightarrow 2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\varphi}; \quad \text{ПЗ.3}$$

Запишем Лемму Лоренца для области  $V_2$

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = \oiint_{S_3} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds \quad \text{ПЗ.4}$$

Форма разложения поля на бесконечной сфере

$$\mathbf{A} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{m+}^n i^n \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\varphi} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{ПЗ.5}$$

Раскроем векторное произведение в правой части (ПЗ.4)

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = i \oiint_{S_3 \rightarrow \infty} A_{+1} B_{+1}^* ds \quad \text{ПЗ.6}$$

Подставляем (ПЗ.3) и (ПЗ.5) в (ПЗ.6). В таком случае выражение леммы Лоренца

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = 4i \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{m+}^n i^n P_{m,1}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} \frac{e^{-ikr}}{r} (i^n P_{m',1}^{n'}(\cos \vartheta))^* e^{im'\varphi} \frac{e^{ikr}}{r} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad \text{ПЗ.7}$$

Из условия ортогональности сферических функций следует, что ненулевая правая часть будет только в случае равенства индексов гармоник

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = 4i C_{m+}^n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) (P_{m,1}^n(\cos \vartheta))^* \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad \text{ПЗ.8}$$

Применяем соотношение ортогональности (56), в итоге получаем:

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{16\pi i} \oint\oint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*}], \mathbf{n}) ds \quad \text{ПЗ.9}$$

где вектор  $\mathbf{F}$  - поле источника, вектор  $\mathbf{F}_m^n$  – векторная сферическая гармоника.

На сфере радиуса  $r_0$

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{16\pi} \oint\oint_{S_2} (F_{+1} F_{m,+1}^{n*} - F_{-1} F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad \text{ПЗ.10}$$

где  $F_{+1}$  - поле от источника, пересчитанное на сферу  $S_2$ . В качестве сферических функций выбираются функции Ханкеля второго рода, удовлетворяющие условию излучения (расходящиеся волны).

Раскрывая  $F_{m,\pm 1}^{n*}$ :

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{16\pi} \oint\oint_{S_2} \left( F_{+1} \left( P_{m,1}^n(\cos \vartheta) D_- h_n^{(2)}(kr) \right)^* + F_{-1} \left( P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) D_+ h_n^{(2)}(kr) \right)^* \right) e^{im\varphi} r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad \text{ПЗ.11}$$

где дифференциальные операторы  $D_{\pm}$  определяются согласно (64).

Выражение для вектора  $\mathbf{F}$ .

$$\oint\oint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = -i \oint\oint_{S_3 \rightarrow \infty} A_{-1} B_{-1}^* ds \quad \text{ПЗ.12}$$

$$\oint\oint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = -4i C_{m-}^n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \right)^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad \text{ПЗ.13}$$

Тогда

$$C_{m-}^n = -\frac{2n+1}{16\pi} \oint\oint_{S_2} (F_{+1} F_{m,+1}^{n*} - F_{-1} F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad \text{ПЗ.14}$$

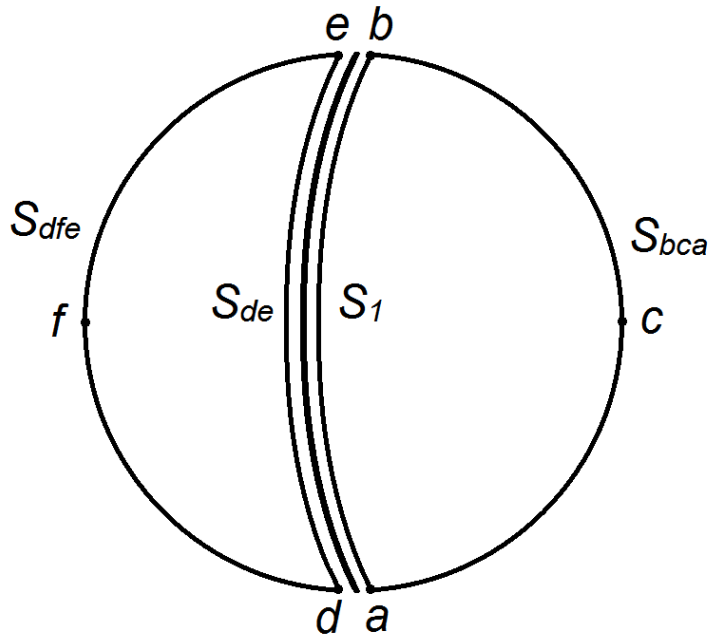
Таким образом, окончательное выражение для коэффициентов разложения на сфере

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{16\pi} \oint\oint_{S_2} (F_{+1} F_{m,+1}^{n*} - F_{-1} F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad \text{ПЗ.15}$$

где составляющие сферических гармоник  $F_{m,\pm 1}^{n*}$  определяются согласно (63).

2) Определение коэффициентов по полю на произвольной поверхности

Существует другой способ определения коэффициентов разложения в ряд – определение непосредственно заданным на поверхности токам источников.



3) К определению коэффициентов разложения по произвольной поверхности.

Поле на поверхности  $S_2=S_{dfe}+S_{bca}$  может быть представлено в виде ряда (ПЗ.1). В качестве вспомогательного поля возьмем векторную сферическую гармонику  $\mathbf{F}_m^n$  правой круговой поляризации, распространяющуюся в сторону уменьшения  $r$  (сходящаяся волна). В качестве радиальных функций берутся сферические функции Бесселя, не имеющие особенности в центре координат.

$$\mathbf{F}_m^n = \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - ik \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \left( i \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{r} \right) \\ -P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + ik \right) \end{pmatrix} j_n(kr) e^{-im\varphi} \quad \text{ПЗ.16}$$

Умножим векторно правую и левую части выражения (ПЗ.1) на комплексно-сопряженную гармонику  $\mathbf{F}_m^{n*}$

$$\oiint_{S_2} \left( [\mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*}], \mathbf{n} \right) ds = \oiint_{S_2} \left( \left[ \sum_N C_{m+}^n \mathbf{F}_m^n, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds \quad \text{ПЗ.17}$$

В формуле (ПЗ.17) в гармонику  $\mathbf{F}_m^n$  входят сферические функции Ханкеля, в  $\mathbf{F}_m^{n*}$  сферические функции Бесселя. Распишем правую часть

$$\oiint_{S_2} \left( \left[ \sum_N C_{m+}^n \mathbf{F}_m^n, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=-n}^n C_{m+}^n \left\{ P_{m,1}^{n'}(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} D_- h_n^{(2)}(kr) \left( P_{m,1}^{n'}(\cos \vartheta) D_- j_n(kr) \right)^* e^{im'\varphi} - \right. \\ \left. - P_{m,-1}^{n'}(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} D_+ h_n^{(2)}(kr) \left( P_{m,-1}^{n'}(\cos \vartheta) D_+ j_n(kr) \right)^* e^{im'\varphi} \right\} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad \text{ПЗ.18}$$

Воспользуемся условием ортогональности

$$\oiint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = \frac{4\pi i r^2 C_{m+}^n}{2n+1} \left\{ D_- h_n^{(2)}(kr) D_+ j_n(kr) - D_+ h_n^{(2)}(kr) D_- j_n(kr) \right\} \quad \text{ПЗ.19}$$

Можно показать, что произведение в скобках

$$\left\{ D_- h_n^{(2)}(kr) D_+ j_n(kr) - D_+ h_n^{(2)}(kr) D_- j_n(kr) \right\} = \\ = 2k^2 \left( j_n(kr) \frac{d}{d(kr)} y_n(kr) - y_n(kr) \frac{d}{d(kr)} j_n(kr) \right) = \frac{2}{r^2} \quad \text{ПЗ.20}$$

Выражение (ПЗ.19) с учетом (ПЗ.20) преобразуется к следующему виду

$$\oiint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = \frac{8\pi i C_{m+}^n}{2n+1} \quad \text{ПЗ.21}$$

В итоге выражение для коэффициентов разложения

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{8\pi i} \oiint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = \frac{2n+1}{8\pi i} \oiint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{n}, \mathbf{F} \right], \mathbf{F}_m^{n*} \right) ds = \frac{2n+1}{8\pi i} \oiint_{S_2} \left( \mathbf{J}, \mathbf{F}_m^{n*} \right) ds \quad \text{ПЗ.22}$$

Интегралы по замкнутым контурам, не содержащим источников (особенностей поля), равны нулю

$$\oiint_{S_{abc+S_{ba}}} = 0; \quad \oiint_{S_{dfe+S_{ed}}} = 0 \quad \text{ПЗ.23}$$

В таком случае исходную сферу  $S_2$  можно представить как совокупность поверхностей  $S_{abc+S_{ba}}$  и  $S_{dfe+S_{ed}}$ . Так как в соответствии в принципе физической оптики мы принимаем ток на обратной стороне рефлектора равным нулю, интеграл по сфере  $S_2$  сводится к интегралу по поверхности источника  $S_1$ . Окончательное выражение

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{8\pi i} \iint_{S_1} \left( \mathbf{J}, \mathbf{F}_m^{\pm*} \right) ds \quad \text{ПЗ.24}$$

**Приложение 4.** Вывод выражения поля плоской круглой апертуры на оси, перпендикулярной плоскости апертуры.

Обозначим точку интегрирования в плоскости апертуры  $q$ , точка  $p$  – точка на оси  $Z$ . Вектор  $\mathbf{q-p}$  направлен из точки интегрирования в точку расчета (рис. П4.1).

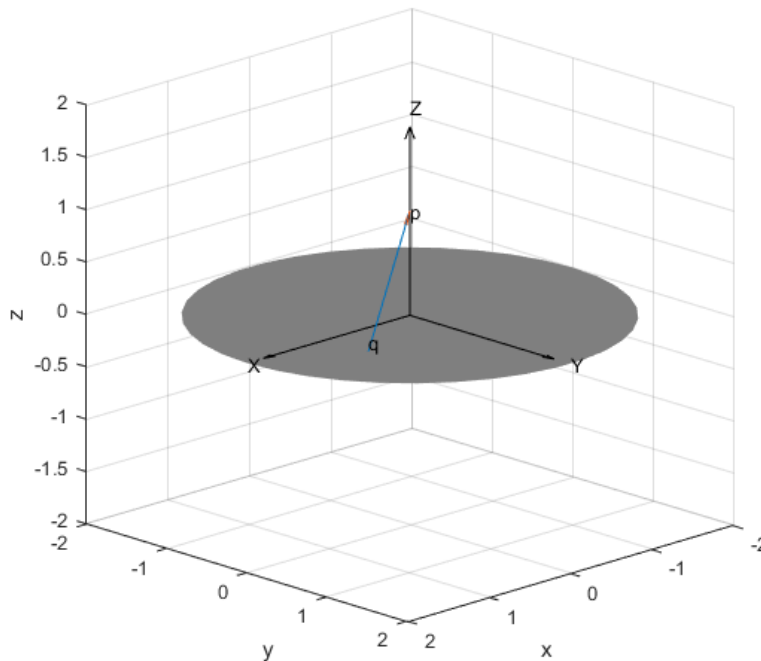


Рис. П4.1. Апертура в плоскости XY. Точка  $q$  – точка интегрирования в плоскости апертуры,  $p$  – точка на оси.

В данном случае применима формула Стрэттона-Чу, так как она содержит контурный интеграл, компенсирующий разрыв поля на границе для незамкнутой поверхности. В (39) положим  $\mathbf{r}_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}^0 = \mathbf{r}_{p,q}^0$ , и запишем формулу для нашего случая

$$\mathbf{F}(p) = k \iint_S \left\{ \mp \mathbf{J} + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \left( [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{p,q}^0] - (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \mathbf{r}_{p,q}^0 \right) \right\} \psi_{pq} ds_q \pm i \oint_L \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \psi_{pq} \mathbf{r}_{p,q}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}_q); \quad \text{П4.1}$$

$$\rho = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|; \quad \mathbf{r}_{p,q}^0 = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|}; \quad \psi_{p,q} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho};$$

Для точек  $\mathbf{p}$  на оси  $Z$  и цилиндрических координат точки  $\mathbf{q} = \{r, \alpha, 0\}$ ,  $0 \leq r \leq a$



$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}; \quad \mathbf{r}_{p,q}^0 = \frac{\{-r \cos \alpha, -r \sin \alpha, z\}}{\rho}; \quad \text{П4.2}$$

$$[\mathbf{J}, \mathbf{r}_{p,q}^0] = -\frac{1}{\rho} [\mathbf{i}e_x + \mathbf{e}_y, r \cos \alpha \mathbf{e}_x + r \sin \alpha \mathbf{e}_y - z \mathbf{e}_z] = -\frac{\{-z, iz, -re^{-i\alpha}\}}{\rho} \quad \text{П4.3}$$

$$dl_q = d(\alpha a) = a d\alpha$$

$$(\mathbf{F}, d\mathbf{l}_q) = (\{1, -i, 0\}, \{-a \sin \alpha, a \cos \alpha, 0\}) d\alpha = -(a \sin \alpha + ia \cos \alpha) = -iae^{-i\alpha} d\alpha$$

Формула Стрэттона-Чу в цилиндрических координатах

$$\mathbf{F}(p) = k \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \{i, 1, 0\} + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \frac{\{z, -iz, re^{-i\alpha}\}}{\rho} \right\} \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} r dr d\alpha + \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{i}{k\rho_a} \right) \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho_a^2} \{a \cos \alpha, a \sin \alpha, -z\} a e^{-i\alpha} d\alpha; \quad \text{П4.4}$$

После вычисления интеграла по  $\phi$

$$\mathbf{F}(p) = \frac{ki}{2} \int_0^a \left\{ \{1, -i, 0\} + z \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \frac{\{1, -i, 0\}}{\rho} \right\} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} r dr + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2 + z^2}}}{4(a^2 + z^2)} \{1, -i, 0\} \quad \text{П4.5}$$

Распишем  $\rho$

$$\mathbf{F}(p) = \frac{ki}{2} \{1, -i, 0\} \left[ \int_0^a \frac{r e^{-ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr + z \int_0^a \frac{r e^{-ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{r^2 + z^2} dr - \frac{zi}{k} \int_0^a \frac{r e^{-ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr \right] + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2 + z^2}}}{4(a^2 + z^2)} \{1, -i, 0\} \quad \text{П4.6}$$

Введем обозначения интегралов

$$\mathbf{F}(p) = \frac{ki}{2} \{1, -i, 0\} \left[ I_1 + zI_2 - \frac{zi}{k} I_3 \right] + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2 + z^2}}}{4(a^2 + z^2)} \{1, -i, 0\} \quad \text{П4.7}$$

Произведем вычисления интегралов

$$I_1 = \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr = \left[ r^2 = x \right] = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \frac{e^{-ik\sqrt{x1 + z^2}}}{\sqrt{x1 + z^2}} dx1 = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x1 + z^2} = x \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{x1 + z^2}} dx1 \end{array} \right] = \int_{|z|}^{\sqrt{a^2 + z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x} x dx = \frac{i}{k} (e^{-ik\sqrt{a^2 + z^2}} - e^{-ik|z|}) \quad \text{П4.8}$$

$$I_2 = \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2} r dr = \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x} dx \quad \text{П4.9}$$

$$I_3 = \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{(r^2+z^2)^{3/2}} r dr = \int_{|z|}^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} u = e^{-ikx}; du = -ike^{-ikx} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx; v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] = \quad \text{П4.10}$$

$$= -\frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{e^{-ik|z|}}{|z|} - ik \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = -\frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{e^{-ik|z|}}{|z|} - ikI_2$$

Таким образом, сумма интегралов

$$I_1 + zI_2 - \frac{zi}{k} I_3 = \frac{i}{k} (e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - e^{-ik|z|}) + zI_2 + \frac{zi}{k} \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{ize^{-ik|z|}}{k|z|} - zI_2 = \quad \text{П4.11}$$

$$= \frac{i}{k} \left( e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - (1 + \text{sign}(z)) e^{-ik|z|} + z \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)$$

где  $\text{sign}(z)$  - кусочно-постоянная функция действительного аргумента

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z = 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases} \quad \text{П4.12}$$

Окончательное выражение для поля на оси Z

$$\mathbf{F}(p) = -\frac{1}{2} \left[ e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - (1 + \text{sign}(z)) e^{-ik|z|} + z \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} \right] \{1, -i, 0\} + \quad \text{П4.13}$$

$$+ \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{4(a^2+z^2)} \{1, -i, 0\} =$$

$$= \frac{1 + \text{sign}(z)}{2} e^{-ik|z|} + \left[ -\frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{a^2}{4(a^2+z^2)} \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \right] e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} \{1, -i, 0\}$$

## Литература

1. L.Silberstein. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung (Basic electromagnetic equations in bivectorial form). *Ann. d. Phys.*, 1907, Vol. 327, pp. 876–880.
2. I. Bialynicki-Birula. Photon wave function. *Progress in Optics*, 1996, Vol. 36, pp. 245–294
3. I. Bialynicki-Birula. The role of the Riemann-Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical Physics*, 2012, Vol. 46(15).
4. H. Weber. *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen bearbeitet von Heinrich Weber*. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1901, 348 p.
5. E. Beltrami. *Considerazioni idrodinamiche*. Rendiconti del reale Istituto Lombardo, Milano, 1889, t.XXII, p. 121-130.
6. И.С. Громека. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. *Учёные записки Казанского университета*, 1881, см. также: И.С. Громека. *Собрания сочинений*, Изд-во АН СССР, Москва, 1952, с. 76-148
7. Max von Laue. *Die Relativitätstheorie. Zweiter Band: Die Allgemeine Relativitätstheorie Und Einsteins Lehre Von Der Schwerkraft*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1921 and 1923.
8. Hermann Minkowski. *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse: 53–111, 1908.
9. H. Bateman. *The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion*. Cambridge: at the University Press, 1915.
10. L. Lewin. *Theory of waveguides*. London: Butterworth and Co Ltd., 1975.
11. Rumsey V.H. A New Way of Solving Maxwell's Equations. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, Sept. 1961, 461-465
12. A. Lakhtakia. *Beltrami Fields in Chiral Media*. Singapore: River Edge, N.Y.: World Scientific, 1994.
13. A. Lakhtakia. Vector spherical wavefunctions for orthorhombic dielectric-magnetic material with gyrotropic-like magnetoelectric properties. *Journal of Optics*, 2012, Vol. 41, Issue 4, pp. 201-213

14. B. L. Kogan. Application of Maxwell's equations in diagonal form to the investigation of polarization and diffraction properties of reflector antennas. *Proceedings of international symposium on satellite communications and remote sensing, (SCRS'99)*, Yandai, China, - October 26-29, 1999. - p. 113-114.
15. Коган Б.Л. О поляризационных характеристиках зеркальных антенн. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*, 1999, № 9, Режим доступа <http://jre.cplire.ru/jre/sep99/2/text.html>
16. Коган Б.Л. Об источниках кроссполяризованного излучения, *Радиотехника и электроника*, 2004, № 4, с. 421-430.
17. Коган Б.Л., *Электромагнитные поля круговой поляризации*, Докторская диссертация, 2004.
18. Коган Б.Л. О векторных сферических гармониках круговой поляризации. *Антенны*. 2004, Том. 81, № 2, с. 59-63.
19. B. L. Kogan, "Application of Faraday's vectors in antenna theory," in *1st Eur. Conf. Ant. and Propag. (EuCAP)*, Nice, France, Nov. 2006.
20. Б.Л. Коган. Применение векторов Фарадея в теории антенн. *Журнал радиоэлектроники: электронный журнал*. 2008. № 7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/mac/jul08/1/text.html>
21. I. V. Belkovich, B. L. Kogan. Utilization of Riemann-Silberstein Vectors in Electromagnetics. *Progress In Electromagnetics Research B*, 2016, Vol. 69, p. 103–116.
22. Igor V. Belkovich ; Boris L. Kogan. The Riemann-Silberstein vectors theory and vector spherical expansion. *Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS) 2017*, 22-25 May 2017, St. Petersburg, Russia
23. Igor V. Belkovich ; Boris L. Kogan. Application of the Riemann-Silberstein vectors for the analysis of electromagnetic fields in reflector antennas. *Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*, 2017, 26-30 June 2017, Divnomorskoe, Russia.
24. Fresnel A. *M'emoire sur la diffraction de la lumi`ere*. In *Œuvres compl`etes d'Augustin Fresnel, Tome premier: Th'eorie de la Lumi`ere* (eds De S'enarmont H, Verdet 'E, and Fresnel L), pp. 247–382, Imprimerie imp'erielle, Paris, 1818.
25. Kirchhoff G. *Mathematische Optik (Vorlesungen uber mathematische Physik, 2. Band)*, Teubner Verlag, Leipzig, 1891.

26. Rubinowitz A. Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen. *Annalen der Physik*. IV Folge, Band 53, Heft 12, 257-278.
27. F. Kottler. Electromagnetische theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. *Ann. d. Phys.* 70. S. 405. 1923.
28. Larmor J. On the mathematical expression of the principle of Huygens. *Proc. London Math. Soc.*, 1, 1–13.
29. A. E. H. Love. The Integration of Equations of Propagation of Electric Waves. *Phil Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 197, 1901, pp. 1-45.
30. W. V. Ignatowsky. Reflexion elektromagnetisches Wellen an einem Draht. *Annalen der Physik*, Vol. 323, Issue 13, pp.495-522.
31. H. M. Macdonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1911, Vo. 2, No. 10, p. 91.
32. Schelkunoff S.A. Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems. *Bell System Technical Journal*, 1936, Vol. 15, pp. 92-112
33. Schelkunoff S.A. On diffraction and radiation of electromagnetic waves. *Physical Review*, 1939, Vol. 56, pp. 308-316.
34. Stratton J.A. and Chu L.J. Diffraction theory of electromagnetic waves. *Physical Review*, 1939, Vol. 56, pp. 99-107.
35. Stratton J.A. *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, 1941.
36. J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons Ltd. 1962.
37. B.C. Brock. Using Vector Spherical Harmonics to Compute Antenna Mutual Impedance from Measured or Computed Fields. 2001 URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.457.8300&rep=rep1&type=pdf>
38. Wood P.J. Spherical waves in antenna problems. *Marconi Rev.* 1971, Vol. 34, pp.149-172
39. Wood P.J. *Reflector antenna analysis and design*. P.Peregrinus Lmt. on behalf of the IEE, 1980. (русский перевод: Вуд П. Анализ и проектирование зеркальных антенн. М.: Радио и связь, 1984. – 207 с.).
40. Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. Представления группы вращений трёхмерного пространства и их применения. *Успехи математических наук*, 1952. Том 7:1, № 47, с. 3-117.

41. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. *Представления группы вращений и группы Лоренца*, М.: Физматгиз, 1958. 368 с.
42. Виленкин Н.Я. *Специальные функции и теория представлений групп*, М.: НАУКА, ГРФМЛ, 1965. – 588 с.
43. Д.А. Варшалович, А.Н. Москалёв, В. К. Херсонский. *Квантовая теория углового момента*. Ленинград, «Наука», 1975 г.
44. A.S. Marathay and J.F. McCalmont. Vector diffraction theory for electromagnetic wavesю *Journal of the Optical Society of America A*, 2001, Vol. 18, Issue 10, pp. 2585-2593
45. Hansen J.E. *Spherical near-field measurement*. IEE Electromagnetics Wave Series, Peter Peregrinus Ltd., UK, 26 - 1988.
46. R. F. Harrington. On the gain and beamwidth of directional antennas. *IRE Trans.*, 1958, AP-6, p. 219

**Для цитирования:**

Б. Л. Коган, И. В. Белькович. Теория и практическое применение векторов Римана-Зильберштейна для задач антенной техники. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 12. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/dec18/11/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2018.12.11