

ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЗАДЕРЖКИ КОМПЛЕКСНЫХ СИГНАЛОВ, НЕКРАТНОЙ ПЕРИОДУ ДИСКРЕТИЗАЦИИ, НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

О. А. Гущина, Т. Я. Шевгунов

**Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, г. Москва, Волоколамское ш., 4, А-80, ГСП-3**

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2020 г.

Аннотация. Рассмотрена задача оценки задержки комплексного сигнала, некратной периоду дискретизации на основе полиномиальной интерполяции с помощью временного корреляционного метода. Предложенные методы полиномиальной интерполяции дискретной комплексной взаимной корреляционной функции в окрестности её максимума, позволяют повысить точность и обладают высоким быстродействием, а также гарантируют вычисление действительных значений для оценок времени задержки при обработке цифровых комплексных сигналов. Проведен сравнительный анализ предложенных методов при использовании интерполяций полиномами второго и третьего порядка. Получено аналитическое решение для поправки, применяемой к оценке времени задержки для метода на основе абсолютных значений при использовании полиномиальной интерполяции третьего порядка для сетки эквидистантных отсчётов взаимной корреляционной функции. Проведенное имитационное численное моделирование на примере стационарного случайного процесса, описываемого авторегрессионной моделью первого порядка, позволило дать количественную оценку точности оценки времени задержки при использовании предложенных методов. Материалы статьи были доложены на XIV Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь».

Ключевые слова: время задержки, взаимная корреляционная функция, полиномиальная интерполяция, среднеквадратическая ошибка, цифровая обработка сигналов.

Аннотация. This paper deals with the problem of subsample time delay estimation of complex signal based on polynomial interpolation. Time delay estimation is performed by cross-correlation time approach. Three polynomial interpolation techniques applied to the discrete complex cross-correlation function in the neighborhood of its maximum are proposed. These methods show high processing speed and allow obtaining accurate real-valued time delay estimation when digital complex signals are processed. The comparative analysis between these methods is performed. A rigorous analytical solution for the correction of time delay estimation for one of the proposed methods is obtained for the case of the third-order polynomial interpolation. This solution is applied for an equidistant grid of discrete cross-correlation function samples. One can improve the accuracy of time delay estimates by using aforementioned correction. A numerical simulation is performed to quantify the accuracy of the time delay estimates when using the proposed methods for the case where a stationary random process described by the first-order autoregressive mode is chosen as a model of original signal. The main results were presented and discussed at XIV All-Russian conference “Radar and telecommunication”.

Key words: time delay, crosscorrelation function, polynomial interpolation, mean square error, digital signal processing.

Введение

В настоящее время задача оценки времени задержки между двумя сигналами является актуальной в таких областях науки и техники как радиолокация, гидролокация, антенные измерения [1, 2], биомедицина [3], геофизика, ультразвуковые исследования [4] и ряде других. Во многих задачах из вышеуказанных областей важно определить время задержки прихода между двумя парами принятых сигналов для того, чтобы впоследствии локализовать источник их происхождения [5; 6, глава 2], или проанализировать

характеристики случайных процессов, в т.ч. нестационарных [7, 8, 9], реализациями которых они являются.

При модуляции и демодуляции сигналов в радиотехнике широко используется математический аппарат комплексной огибающей сигнала как для упрощения ряда промежуточных математических операций, так и для более наглядного представления свойств сигнала, что позволяет выделить информационную часть физического сигнала, переносимую высокочастотным колебанием несущей частоты. Поэтому зачастую оценку времени задержки производят не по самим сигналам, а по их комплексным огибающим, вследствие этого отсчёты обрабатываемых сигналов становятся комплексными.

Оценку времени задержки можно производить с использованием цифровых методов обработки как во временной [10], так и в частотной области [11]. Оценка времени задержки в частотной области основана на обработке кросс-спектра сигналов и требует дополнительного вычисления преобразования Фурье, как это показано, например, в работе [12] при построении широкобазовой пассивной радиолокационной системы (ПРЛС), и рассмотрено подробнее в работах [13, 14] для узкобазовых и комбинированных ПРЛС, в том числе использующих алгоритмы быстрого поиска глобального оптимума [15]. Для того, чтобы исключить процедуру нахождения спектра, можно воспользоваться методом оценки времени задержки непосредственно во временной области, который основан на непосредственном вычислении взаимной корреляционной функции (ВКФ) двух сигналов. В этом случае положение максимума ВКФ может рассматриваться в качестве искомой оценки времени задержки.

Несмотря на то, что временной метод был предложен в начале 40-х годов XX века, он остаётся довольно популярным в настоящее время и повышению его реализации в непрерывном времени посвящён ряд работ [16, 17]. Однако при цифровой обработке сигналов возникает потеря точности оценки, которая связана с дискретностью времени [18]. Её причина состоит в том, что нет никаких объективных оснований для того, чтобы время задержки между парой

сигналов было кратно периоду дискретизации [19] или было сколь-либо близко к кратному значению. В этом случае положение во времени наибольшего по абсолютному значению отсчёта дискретной ВКФ не будет являться точной оценкой времени задержки.

Одним из возможных способов повышения точности оценки времени задержки, представленным, например, в работах [19, 20], является использование интерполяции отсчётов ВКФ в окрестности ее максимума степенными полиномами. Но область применения методов, представленных в этих работах, ограничена только случаями действительных сигналов. При условии использования комплексных огибающих, представленных цифровыми отсчётами комплексных сигналов, непосредственное применение полиномиальной интерполяции отсчётов дискретной ВКФ в окрестности ее максимума приводит к появлению комплексной оценки времени задержки.

В данной статье предложены методы полиномиальной аппроксимации дискретной комплексной ВКФ в окрестности её максимума, обладающие высоким быстродействием и позволяющие получить точные действительные оценки времени задержки при обработке цифровых комплексных сигналов, а также проведен сравнительный анализ этих методов.

Структура настоящей статьи следующая. В первом разделе статьи рассмотрены теоретические аспекты, связанные с оценкой времени задержки во временной области при цифровой обработке сигналов. Во втором разделе представлены три метода для повышения точности оценки времени задержки с учетом комплексности обрабатываемых данных. В третьем разделе приведены результаты численного моделирования при использовании предложенных методов для повышения точности оценки времени задержки. В четвертом разделе выполнен анализ смещения и дисперсий оценок времени задержки. В заключении проведен анализ полученных результатов.

1. Оценка задержки, некратной периоду дискретизации во временной области

При оценке времени задержки имеется два вида ошибок. Первый вид

ошибок связан с наличием шума при приёме сигнала. Влияние таких ошибок будет отражаться в дисперсии D оценки времени задержки, они описывают случайную часть ошибок, фактическое значение которой меняется от опыта к опыту и не зависит от истинного значения задержки. Второй тип ошибок связан с дискретностью времени, используемого при цифровой обработке сигналов. Такие ошибки являются систематическими и приводят к появлению смещения b при оценке времени задержки.

При высоких отношениях сигнал/шум (ОСШ) ошибка оценки задержки, связанная со смещением оценки времени задержки, может существенно преобладать над ошибкой, связанной с наличием шума. Поэтому представляет интерес определить, каково будет смещение при определении времени задержки, которое является систематической ошибкой.

В настоящей работе в качестве модели полезного сигнала $s(t)$ выбрана модель гауссовского комплексного стационарного процесса с известной корреляционной функцией (КФ) $R_s(\tau)$. Сигналы, наблюдаемые в двух точках приёма, могут быть описаны моделью с аддитивным шумом:

$$x(t) = a_x s(t - T_x) + n_x(t), \quad (1)$$

$$y(t) = a_y s(t - T_y) + n_y(t), \quad (2)$$

где $s(t)$ – исходный сигнал, T_x и T_y – задержки сигналов, a_x и a_y – комплексные множители, $n_x(t)$, $n_y(t)$ – помеховые сигналы, каждый из которых представляет собой гауссовский комплексный стационарный процесс с нулевым средним, некоррелированный с сигналом $s(t)$; $n_x(t)$ и $n_y(t)$ также некоррелированы между собой.

Взаимная корреляционная функция сигналов $x(t)$ и $y(t)$ может быть выражена через КФ $R_s(\tau)$ и имеет следующий вид:

$$R_{xy}(\tau) = \mathbf{E} \{ x^*(t) y(t + \tau) \} = a_x^* a_y R_s(\tau - \Delta), \quad (3)$$

где \mathbf{E} обозначает математическое ожидание. $\Delta = T_y - T_x$ – задержка между сигналами $x(t)$ и $y(t)$.

Поскольку КФ $R_s(\tau)$ имеет максимум в нуле, то аргумент τ , при котором значение ВКФ $R_{xy}(\tau)$ максимально, принимается за оценку времени задержки Δ между сигналами $x(t)$ и $y(t)$.

В связи с тем, что на практике время наблюдения ограничено, вместо теоретического выражения ВКФ (3) может быть использована только её оценка \hat{R}_{xy} . Поскольку исследуемые случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ полагаются эргодическими, то усреднение по ансамблю (с использованием математического ожидания) в формуле (3) может быть заменено подходящим усреднением по времени [21]. При этом оценка ВКФ может быть вычислена следующим образом:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) y(t + \tau) dt. \quad (4)$$

При использовании методов цифровой обработки фактически рассматриваются конечные по длительности последовательности отсчётов: $x[n] = x(nT_s)$ и $y[n] = y(nT_s)$. Будем полагать, что каждый из цифровых сигналов имеет одинаковую длину N , соответствующую времени наблюдения сигналов $T = NT_s$. Тогда в качестве оценки дискретной ВКФ рассматривается следующая формула:

$$\hat{R}_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] y[n+m]. \quad (5)$$

При цифровой обработке сигналов доступны только отсчёты ВКФ, расстояние между которыми равно периоду дискретизации T_s : $\hat{R}_{xy}[m] = \hat{R}_{xy}(mT_s)$, вследствие чего максимум оценки ВКФ, заданной формулой (5), может быть определен только в некоторый момент времени T_{max} , кратный T_s . При условии комплексных отсчётов сигналов $x[n]$, $y[n]$ момент времени $T_{max} = m_{max}T_s$, соответствующий номеру отсчёта m_{max} , при котором модуль $|\hat{R}_{xy}[m]|$ достигает максимума, принимается за грубую оценку времени задержки, а значение наибольшего отсчёта модуля ВКФ за грубый максимум ВКФ.

На практике нет никаких причин для того, чтобы время задержки между сигналами оказалось кратным периоду дискретизации. В том случае, если за

оценку времени задержки принять момент времени T_{max} , при котором достигается максимум модуля ВКФ $|\hat{R}_{xy}[m]|$, то неизбежно появляется ошибка. Такая ошибка является систематической и может быть описана как пиковое смещение δ оценки времени задержки (рис. 1), которое представляет собой интервал времени от максимума модуля непрерывной ВКФ до положения модуля наибольшего отсчёта дискретной ВКФ.

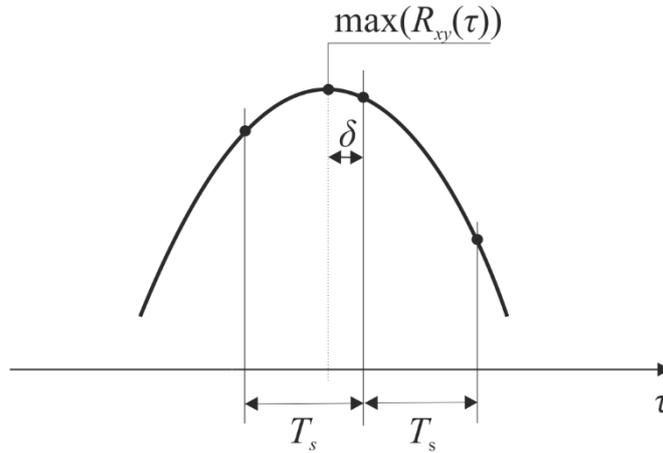


Рис. 1. Фрагмент ВКФ в окрестности максимума $R_{xy}(\tau)$, $\Delta \neq kT_s$, $k \in \mathbb{Z}$.

Положение модуля наибольшего отсчёта дискретной ВКФ может отстоять от истинного положения максимума непрерывной ВКФ не более, чем на половину периода дискретизации: $-T_s/2 \leq \delta \leq T_s/2$.

Очевидной стратегией повышения точности оценки времени задержки является уменьшение смещения δ , которое может быть достигнуто восстановлением непрерывной ВКФ по отсчётам дискретной ВКФ. Для этого можно воспользоваться формулой восстановления с помощью ряда Котельникова [22]:

$$\tilde{R}_{xy}(t) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \hat{R}_{xy}[m] \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_s} - m\right)\right), \quad (6)$$

где функция $\text{sinc}(v) = \sin(v)/v$, дополненная до непрерывной значением 1 при $v = 0$.

Поиск максимума модуля ВКФ, получающейся в результате восстановления по формуле (6), требует применения численных методов в окрестности грубого максимума ВКФ. Одним из возможных решений может

быть ограничение количества используемых при восстановлении слагаемых ряда Котельникова, что в свою очередь непременно приведёт к потере точности. Следовательно, такая практическая реализация вышеуказанного способа восстановления может дать только приближенное значение, требуя при этом существенных вычислительных затрат для реализации нелинейной функции «sinc».

В качестве альтернативы для восстановления непрерывной ВКФ можно воспользоваться быстродействующей локальной полиномиальной интерполяцией дискретной ВКФ в окрестности её грубого максимума.

В данной статье рассматривается полиномиальная интерполяция второго и третьего порядка по трем и четырем отсчётам ВКФ соответственно. При вышеуказанных способах интерполяции подбираются кривые, описываемые полиномами второй и третьей степени, полностью определяемыми своими коэффициентами при степенях переменной времени. Так, при использовании трёх отсчётов кривая, аппроксимирующая модуль ВКФ в окрестности его максимума, будет представлять собой параболу, а при использовании четырех отсчётов – кубическую параболу.

В связи с тем, что истинное положение максимума модуля непрерывной ВКФ неизвестно, а может быть найдено только положение максимума аппроксимирующей кривой, пиковое смещение оценки времени задержки δ можно только оценить. Оценка пикового смещения $\hat{\delta}$ будет представлять собой интервал времени между положением наибольшего по модулю отсчёта ВКФ и положением пика аппроксимирующей кривой.

Оценка времени задержки $\hat{\Delta}$ будет складываться из грубой оценки T_{max} и оценки пикового смещения $\hat{\delta}$:

$$\hat{\Delta} = T_{max} + \hat{\delta}. \quad (7)$$

Поскольку оценка пикового смещения $\hat{\delta}$ является случайной величиной, её смещение, фактически определяющее систематическую ошибку оценки времени задержки сигнала $\hat{\Delta}$, определяется по следующей формуле:

$$b = E[\hat{\delta}] - \delta. \quad (8)$$

2. Полиномиальные алгоритмы оценки задержки комплексных сигналов

Если наблюдаемые сигналы являются комплексными, то их взаимная корреляционная функция (4) также будет комплексной и при ее дискретизации получатся комплексные отсчёты. Результат оценки пикового смещения при непосредственном использовании полиномиальных интерполяций $\hat{\delta}$, например так, как описано в [18] и [19], по комплексным отсчётам ВКФ может оказаться комплексным и, как следствие, оценка времени задержки будет комплексной величиной. Для того чтобы получить действительную оценку времени задержки, было предложено рассмотреть следующие методы:

1. Модульный метод, основанный на интерполяции абсолютных значений ВКФ в окрестности ее грубого максимума.

2. Метод комплексного времени, основанный на непосредственной интерполяции комплексных значений ВКФ в окрестности ее грубого максимума и использовании абсолютных значений получающейся в результате комплексной оценки времени задержки.

3. Метод сопряженных аппроксимаций, основанный на использовании комплексных значений отсчётов ВКФ в окрестности ее грубого максимума, в котором аппроксимирующий полином умножается на его комплексное сопряжение, и время задержки оценивается как положение максимума получающейся в результате умножения функции.

Рассмотрим подробнее каждый из трёх методов.

В модульном методе для интерполяции используются абсолютные значения трёх (в случае интерполяции второго порядка) или четырёх (в случае интерполяции третьего порядка) максимальных по модулю отсчётов ВКФ. Строится полином, проходящий через эти значения, и аналитически отыскивается аргумент, при котором достигается его максимум.

В первом приближении область около максимума модуля ВКФ комплексных стационарных процессов может быть аппроксимирована полиномом второго порядка $A_2(\tau)$ – параболой (рис. 2):

$$A_2(\tau) = a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0. \quad (9)$$

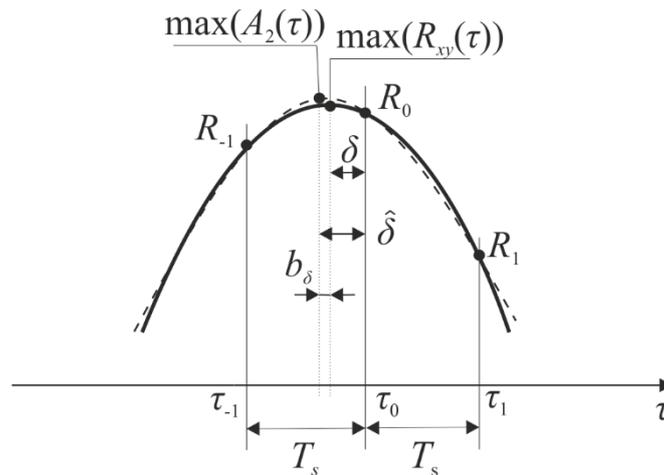


Рис. 2. Модуль ВКФ (сплошная линия) и аппроксимирующая парабола (пунктирная линия) в окрестности максимума.

Для этого выбирается абсолютное значение максимального по модулю отсчёта ВКФ R_0 в момент времени τ_0 и два абсолютных значения отсчётов R_{-1} , и R_1 , ближайšie к максимальному R_0 и располагающиеся соответственно слева и справа от него в моменты времени τ_{-1} и τ_1 соответственно. Для поиска коэффициентов a_2 , a_1 , a_0 необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_2\tau_{-1}^2 + a_1\tau_{-1} + a_0 = R_{-1}, \\ a_2\tau_0^2 + a_1\tau_0 + a_0 = R_0, \\ a_2\tau_1^2 + a_1\tau_1 + a_0 = R_1. \end{cases} \quad (10)$$

Если задать начало локальной системы координат в точке максимума: $\tau_0 = 0$, то $\tau_{-1} = -T_s$, $\tau_1 = T_s$; тогда получаем формулы для вычисления коэффициентов полинома (9):

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{R_{-1} - 2R_0 + R_1}{T_s^2}, \\ a_1 &= \frac{R_{-1} - R_1}{T_s}, \\ a_0 &= R_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Найденные коэффициенты a_2 , a_1 позволяют свести задачу поиска максимума функции (9) к решению линейного уравнения:

$$2a_2\tau + a_1 = 0. \tag{12}$$

Используя абсолютное значение максимального отсчёта ВКФ R_0 и двух ближайших к нему: R_{-1} и R_1 [19] может быть получена явная формула оценки пикового смещения $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta} = T_s \frac{R_{-1} - R_1}{2(R_{-1} - 2R_0 + R_1)}. \tag{13}$$

Из-за простоты этот метод интерполяции ВКФ полиномом второго порядка получил самое широкое распространение [19, 20, 23].

Область около максимума модуля ВКФ комплексных стационарных процессов может быть также аппроксимирована полиномом третьего порядка $A_3(\tau)$ – кубической параболой:

$$A_3(\tau) = a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0. \tag{14}$$

Для этого выбирается четыре абсолютных значения максимальных по модулю отсчётов ВКФ R_{-2}, R_{-1}, R_1, R_2 . В данной ситуации, в отличие от случая аппроксимации параболой, возможны два варианта: если мы примем за нулевое время $\tau = 0$ середину между двумя максимальными по модулю отсчётами ВКФ, то наибольший по модулю отсчёт может находиться справа от $\tau = 0$ (рис. 3), либо слева от $\tau = 0$ (рис. 4).

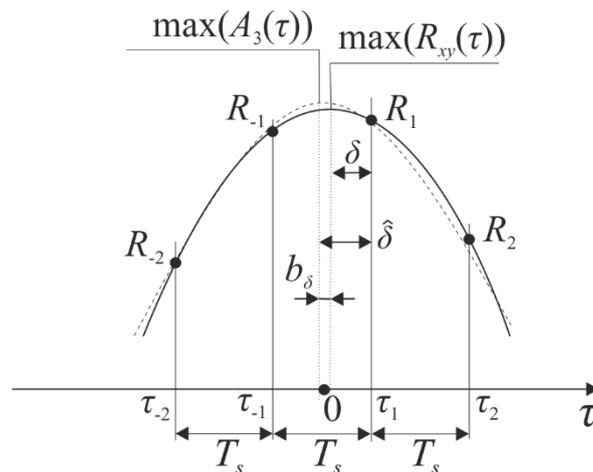


Рис. 3. Модуль ВКФ (сплошная линия) и аппроксимирующая кубическая парабола (пунктирная линия) в окрестности максимума, наибольший по модулю отсчёт ВКФ находится справа от $\tau = 0$.

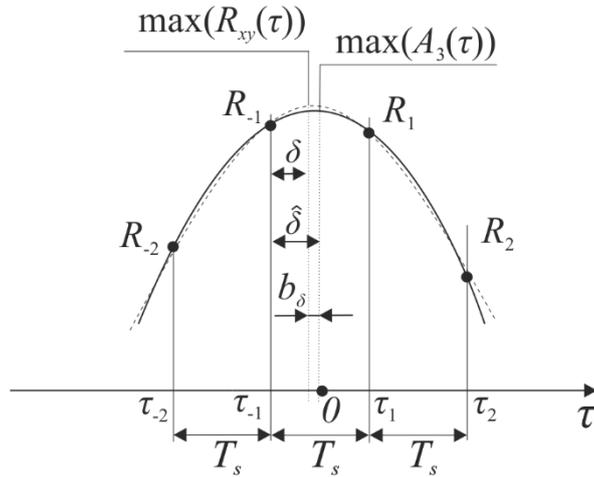


Рис. 4. Модуль ВКФ (сплошная линия) и аппроксимирующая парабола (пунктирная линия) в окрестности максимума, наибольший по модулю отсчёт ВКФ находится слева от $\tau = 0$.

Для поиска коэффициентов a_3, a_2, a_1, a_0 необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_3\tau_{-2}^3 + a_2\tau_{-2}^2 + a_1\tau_{-2} + a_0 = R_{-2}, \\ a_3\tau_{-1}^3 + a_2\tau_{-1}^2 + a_1\tau_{-1} + a_0 = R_{-1}, \\ a_3\tau_1^3 + a_2\tau_1^2 + a_1\tau_1 + a_0 = R_1, \\ a_3\tau_2^3 + a_2\tau_2^2 + a_1\tau_2 + a_0 = R_2, \end{cases} \quad (15)$$

При условии, что нулевой момент времени находится посередине между отсчётами R_{-1}, R_1 : $\tau_{-2} = -1,5T_s, \tau_{-1} = -0,5T_s, \tau_1 = 0,5T_s, \tau_2 = 1,5T_s$, независимо от случая (рис. 3) или (рис. 4), получим:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{0,5R_{-1} - 0,17R_{-2} - 0,5R_1 + 0,17R_2}{T_s^3}, \\ a_2 &= \frac{0,25R_{-2} - 0,25R_{-1} - 0,25R_1 + 0,25R_2}{T_s^2}, \\ a_1 &= \frac{0,04R_{-2} - 1,13R_{-1} + 1,13R_1 - 0,04R_2}{T_s}, \\ a_0 &= 0,56R_{-1} - 0,06R_{-2} + 0,56R_1 - 0,06R_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Зная коэффициенты a_3, a_2, a_1 , не составит труда решить уравнение:

$$3a_3\tau^2 + 2a_2\tau + a_1 = 0 \quad (17)$$

и определить оценку пикового смещения как наименьший корень уравнения (17).

После выполнения необходимых преобразований авторами настоящей статьи была получена аналитическая формула для оценки пикового смещения оценки задержки при использовании полиномиальной интерполяции третьего порядка в окрестности максимума модуля ВКФ:

$$\hat{\delta} = \frac{\frac{1}{2}(R_{-2}-R_{-1}-R_1+R_2) + \sqrt{\frac{1}{3}(R_{-2}^2+R_{-2}R_2+R_2^2) + 7(R_{-1}^2+R_1^2) + 2(R_{-2}R_1+R_{-1}R_2) - 3(R_{-2}R_{-1}+R_1R_2) - 13R_{-1}R_1}}{T_s(R_{-2} - 3R_{-1} + 3R_1 - R_2)}}. \quad (18)$$

Другой метод – метод комплексного времени состоит в том, что для полиномиальной интерполяции для поиска коэффициентов полиномов $A_2(\tau)$ (11) и $A_3(\tau)$ (16) используются непосредственно комплексные значения трёх (в случае интерполяции второго порядка) или четырёх (в случае интерполяции третьего порядка) максимальных по модулю отсчётов ВКФ. По ним строятся полиномы $A_2(\tau)$ и $A_3(\tau)$ с комплексными коэффициентами, проходящие через эти значения, и ищется их максимум как решение уравнений (12) и (17) в комплексных числах соответственно. Положение максимума $\hat{\delta}_{\text{compl}}$, найденное по формулам (13) и (18), в результате получается комплексной величиной. В этом случае за оценку пикового смещения принимается величина

$$\hat{\delta} = \text{sgn}(\text{Re}(\hat{\delta}_{\text{compl}})) \text{abs}(\hat{\delta}_{\text{compl}}), \quad (19)$$

если $|\text{Re}(\hat{\delta}_{\text{compl}})| > |\text{Im}(\hat{\delta}_{\text{compl}})|$

или величина:

$$\hat{\delta} = \text{sgn}(\text{Im}(\hat{\delta}_{\text{compl}})) \text{abs}(\hat{\delta}_{\text{compl}}), \quad (20)$$

если $|\text{Im}(\hat{\delta}_{\text{compl}})| > |\text{Re}(\hat{\delta}_{\text{compl}})|$.

Оценка времени задержки также вычисляется по формуле (7).

Третий метод – метод сопряженных аппроксимаций, позволяет исключить появление комплексных значений. Для случая аппроксимации ВКФ

по ее трем максимальным по модулю отсчётам полином второго порядка $A_2(\tau)$ умножается на его комплексное сопряжение.

$$C_2(\tau) = A_2(\tau)A_2^*(\tau) = (a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0)(a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0)^*. \quad (21)$$

С учетом того, что время τ не может быть комплексным, получим:

$$C_2(\tau) = |a_2|^2 \tau^4 + 2\operatorname{Re}(a_2a_1^*)\tau^3 + (|a_1|^2 + 2\operatorname{Re}(a_2a_0^*))\tau^2 + 2\operatorname{Re}(a_1a_0^*)\tau + |a_0|^2. \quad (22)$$

Затем ищется положение максимума получающейся в результате умножения функции $C_2(\tau)$. Для этого необходимо решить уравнение следующего вида:

$$b_3\tau^3 + b_2\tau^2 + b_1\tau + b_0 = 0 \quad (23)$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned} b_3 &= 4|a_2|^2 \\ b_2 &= 6\operatorname{Re}(a_2a_1^*) \\ b_1 &= 2(|a_2|^2 + 2\operatorname{Re}(a_2a_0^*)) \\ b_0 &= 2\operatorname{Re}(a_1a_0^*), \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициента a_0, a_1, a_2 являются коэффициентами (11) полинома второго порядка $A_2(\tau)$ (9), найденными при использовании метода комплексного времени.

Для случая аппроксимации ВКФ по ее четырем максимальным по модулю отсчётам полином третьего порядка $A_3(\tau)$ умножается на его комплексное сопряжение.

$$C_3(\tau) = A_3(\tau)A_3^*(\tau) = (a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0)(a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0)^*. \quad (25)$$

С учетом того, что время τ не может быть комплексным, получим:

$$\begin{aligned} C_3(\tau) &= |a_3|^2 \tau^6 + 2\operatorname{Re}(a_3a_2^*)\tau^5 + (|a_2|^2 + 2\operatorname{Re}(a_3a_1^*))\tau^4 + \\ &+ 2\operatorname{Re}(a_3a_0^* + a_2a_1^*)\tau^3 + (|a_1|^2 + 2\operatorname{Re}(a_2a_0^*))\tau^2 + 2\operatorname{Re}(a_1a_0^*)\tau + |a_0|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Затем ищется положение максимума получающейся в результате умножения функции $C_3(\tau)$. Для этого необходимо решить уравнение следующего вида:

$$b_5 t^5 + b_4 t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 = 0 \quad (27)$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned} b_5 &= 6|a_3|^2 \\ b_4 &= 10\operatorname{Re}(a_3 a_2^*) \\ b_3 &= 2\operatorname{Re}(a_3 a_1^*) \\ b_2 &= 6\operatorname{Re}(a_3 a_0^* + a_2 a_1^*) \\ b_1 &= 2(|a_1|^2 + 2\operatorname{Re}(a_1 a_0^*)) \\ b_0 &= 2\operatorname{Re}(a_3 a_0^*) \end{aligned} \quad (28)$$

где коэффициенты $a_3 \dots a_0$ являются коэффициентами (16) полинома третьего порядка $A_3(\tau)$ (14).

В отличие от квадратичного полинома с кубическим уравнением (23), для которого формула известна, кубический полином приводит к уравнению пятого порядка (27), для которого аналитической формулы нет, а есть только численные решения.

3. Численное моделирование

Для сравнения результатов оценки времени задержки при использовании полиномиальной интерполяции в окрестности максимума модуля ВКФ второго и третьего порядка при использовании трех методов – модульного, комплексного времени и сопряженных аппроксимаций, было проведено численное моделирование.

В качестве исходного сигнала был выбран гауссовский комплексный стационарный процесс, описываемый авторегрессионной моделью первого порядка $AR(1)$, характеризуемом параметром α . Теоретическая корреляционная функция непрерывного времени такого процесса имеет следующий вид [24, глава 7]:

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} (-a)^{|\tau|}, \quad (29)$$

где коэффициент авторегрессионной модели процесса a принимается равным $e^{-\alpha}$, σ^2 – дисперсия шума, $1/\alpha$ – время корреляции. В качестве аддитивного шума был выбран некоррелированный с исходным сигналом гауссовский комплексный стационарный процесс с нулевым средним, который представляет собой белый шум в пределах полосы частот $-F_s/2$ до $F_s/2$.

Использовались следующие параметры моделирования: $\alpha = 0,1/T_s$; $N = 1000$ – количество отсчётов исследуемых сигналов, используемое для обработки; $M = 1000$ – количество проведённых опытов для формирования статистически значимых результатов.

Для удобства все представленные параметры для оценки точности времени задержки на рисунках 5–12 были пронормированы к периоду дискретизации T_s , модульный метод обозначен как «abs», метод комплексного времени – «compl», метод сопряженных аппроксимаций – «conj».

Для сравнения точности оценки времени задержки при использовании трех вышеперечисленных методов была использована среднеквадратическая ошибка оценки (СКО) времени задержки, которая определяет среднее квадратическое отклонение от истинного значения и вычисляется по следующей формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\Delta}_i - \Delta)^2}. \quad (30)$$

На рис. 5 и 6 представлены график зависимости СКО от отношения сигнал/шум (ОСШ) при $\delta = 0,4$ для случаев полиномиальной интерполяции второго и третьего порядка соответственно при использовании различных методов.

Как видно из рис. 5 и 6, СКО оценки времени задержки при ОСШ меньше 10 дБ для исследуемых методов незначительно отличаются друг от друга, при ОСШ больше 10 дБ СКО при использовании полиномиальной интерполяции второго порядка получается меньше, чем при использовании полиномиальной

интерполяции третьего порядка. СКО при ОСШ больше 15 дБ получается меньше при использовании метода комплексного времени. Значения СКО при применении модульного метода и метода сопряженных аппроксимаций практически совпадают.

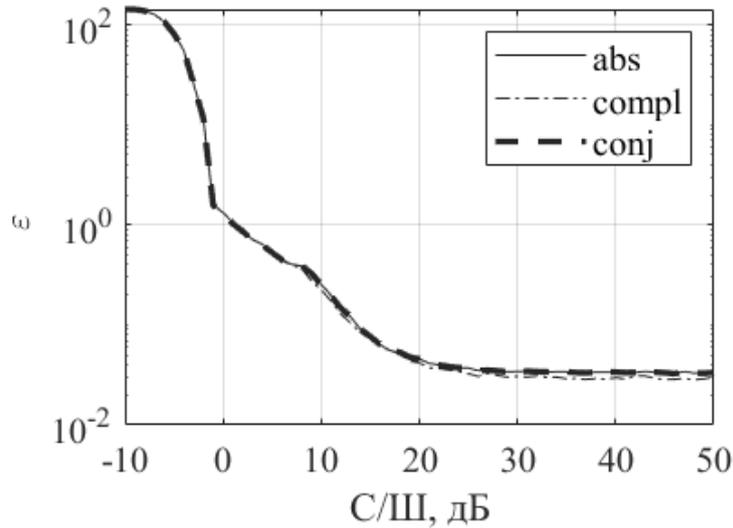


Рис. 5. СКО оценки времени задержки в зависимости от ОСШ для случая полиномиальной интерполяции второго порядка.

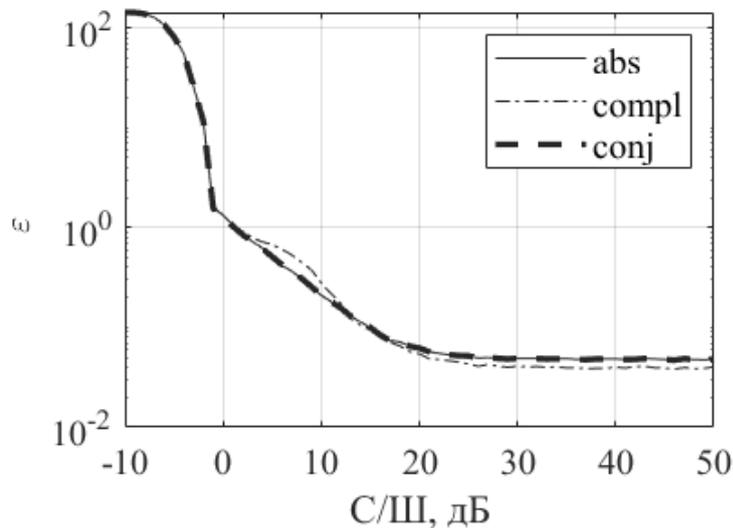


Рис. 6. СКО оценки времени задержки в зависимости от ОСШ для случая полиномиальной интерполяции третьего порядка.

Важно отметить, что квадрат среднеквадратической ошибки оценки времени задержки можно разложить на два слагаемых [25, глава 2]:

$$\varepsilon^2 = b^2 + D, \quad (31)$$

где b^2 – квадрат смещения оценки времени задержки, D – дисперсия оценки времени задержки. Это позволяет при проведении моделирования выделить и оценить в явном виде описанные ранее ошибки двух типов: связанные с дискретностью времени при цифровой обработке сигналов, определяемые смещением b , и ошибки, связанные с наличием шума, которые отражаются в величине дисперсии D . Рассмотрим их подробнее.

4. Анализ смещения и дисперсий оценок времени задержки

Смещение оценки времени задержки рассчитывается по следующей формуле:

$$b = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\Delta}_i - \Delta. \quad (32)$$

На рис. 7 и 8 представлены график зависимости смещения b от ОСШ при $\delta = 0,4$ для случаев полиномиальной интерполяции второго и третьего порядка соответственно.

Как видно из рис. 7 и 8, смещение b оценки времени задержки при ОСШ больше 10 дБ при использовании полиномиальной интерполяции второго порядка получается меньше, чем при использовании полиномиальной интерполяции третьего порядка. Смещение при ОСШ больше 10 дБ получается меньше при использовании метода комплексного времени.

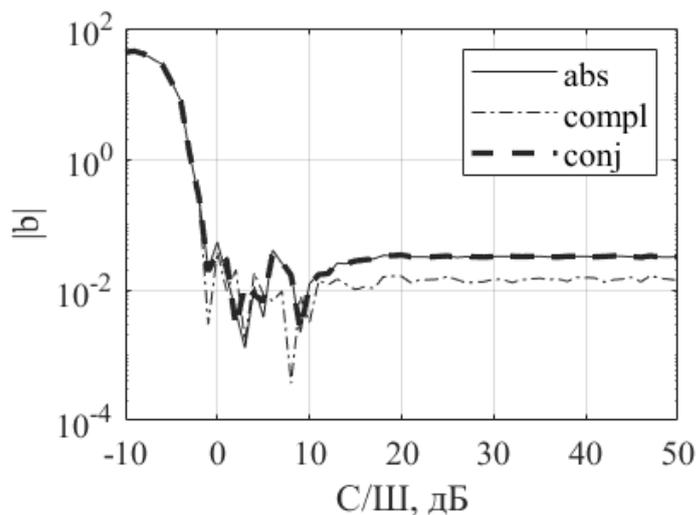


Рис. 7. Смещение оценки времени задержки в зависимости от ОСШ для случая полиномиальной интерполяции второго порядка.

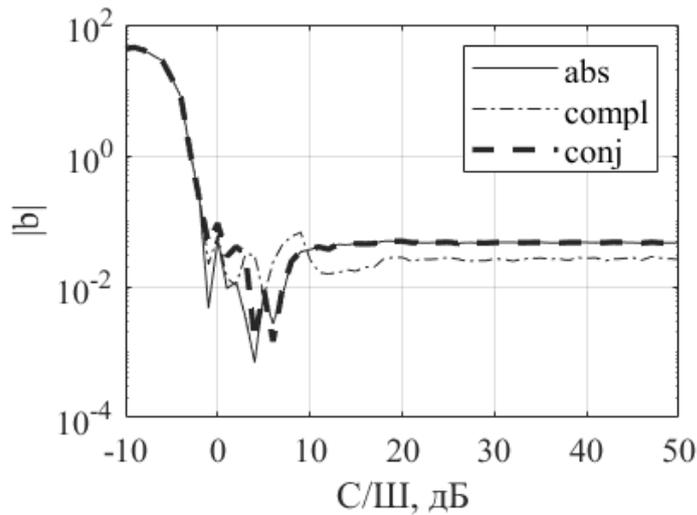


Рис. 8. Смещение оценки времени задержки в зависимости от ОСШ для случая полиномиальной интерполяции третьего порядка.

Для $\delta = 0,4$ смещение оценки времени для модульного метода и метода сопряженных аппроксимаций отличаются не более чем на 0.0167 при ОСШ, равным 0 дБ, при использовании полиномиальных интерполяций второго порядка и не более чем на 0.0186 при ОСШ, равным -2 дБ, при использовании полиномиальной интерполяции третьего порядка. Такое отличие можно считать незначительным в связи с тем, что полученные величины существенно меньше единицы.

Для расчета дисперсии оценки времени задержки использовалась ее «смещенная» версия [26, глава 4.1]:

$$D = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\Delta}_i^2 - \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\Delta}_i \right)^2. \quad (33)$$

Более удобное с практической точки зрения стандартное отклонение (СО) σ_{Δ} оценки времени задержки определяется следующей формулой:

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{D}. \quad (34)$$

На рис. 9 и 10 представлены график зависимости СО от ОСШ при $\delta = 0,4$ для случаев полиномиальной интерполяции второго и третьего порядка соответственно.

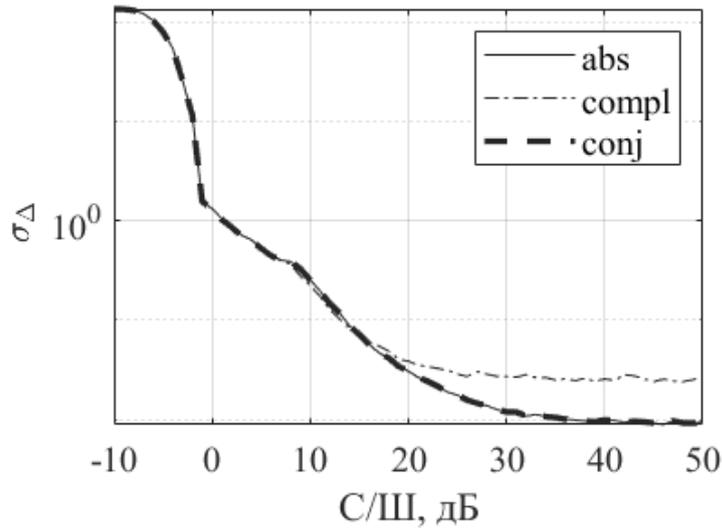


Рис. 9. СО оценки времени задержки в зависимости от ОСШ для случая полиномиальной интерполяции второго порядка.

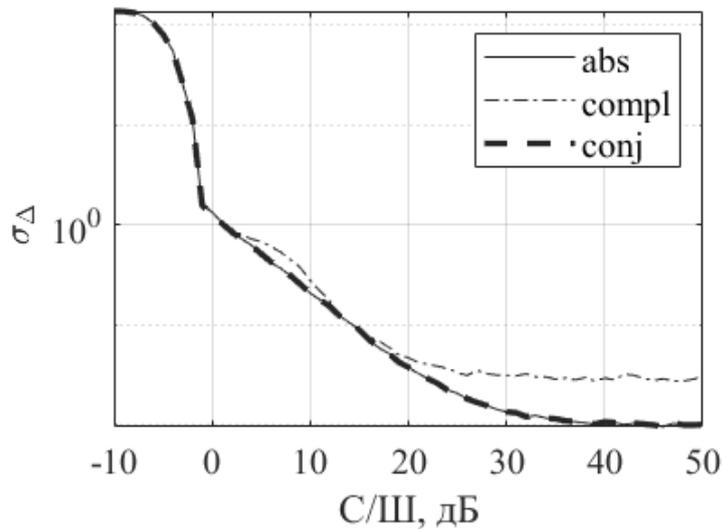


Рис. 10. СО времени задержки в зависимости от ОСШ для случая полиномиальной интерполяции третьего порядка.

По графикам на рис. 9 и 10 видно, что СО оценки времени задержки при ОСШ меньше 15 дБ для исследуемых методов незначительно отличаются друг от друга, при ОСШ больше 15 дБ СО получается меньше при применении модульного метода и метода сопряженных аппроксимаций.

На рис. 11 и 12 представлены графики оценки пикового смещения при зафиксированном ОСШ равным 40 дБ для случаев полиномиальной интерполяции второго и третьего порядка соответственно.

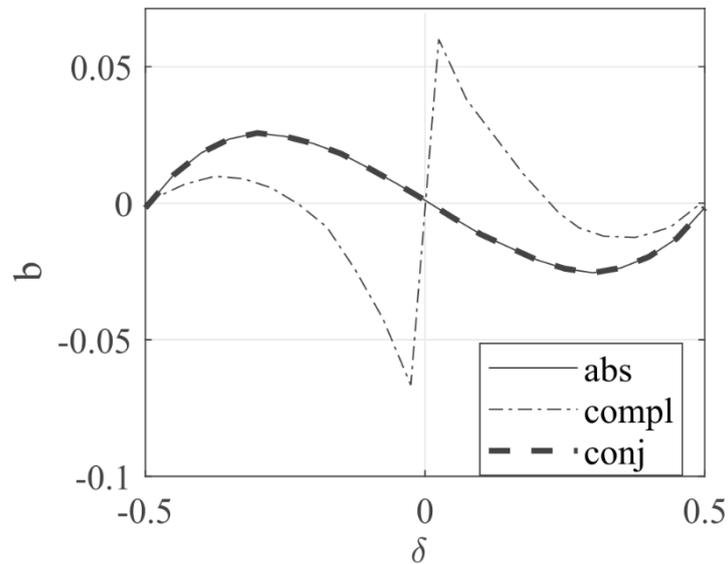


Рис. 11. Смещение оценки времени задержки в зависимости от пикового смещения для случая полиномиальной интерполяции второго порядка.

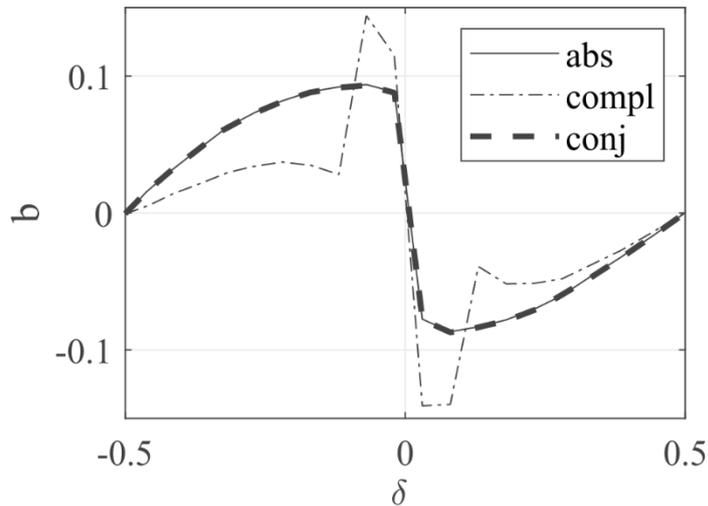


Рис. 12. Смещение оценки времени задержки в зависимости от пикового смещения для случая полиномиальной интерполяции третьего порядка.

В целом смещение получается меньше при использовании полиномиальной интерполяции второго порядка, чем третьего порядка.

Заключение

Результаты проведенного численного моделирования позволили выполнить сравнительный анализ и дать количественную оценку точности оценки времени задержки при использовании предложенных методов на основе вычисления среднеквадратической ошибки, смещения и стандартного отклонения оценки времени задержки для решения проблемы оценки времени

задержки комплексных сигналов при использовании полиномиальной интерполяции второго и третьего порядка в окрестности грубого максимума ВКФ. Для нахождения поправки, применяемой при отыскании оценки пикового смещения для модульного метода для случая полиномиальной интерполяции третьего порядка, было получено строгое аналитическое решение для сетки эквидистантных отсчётов ВКФ.

По результатам проведенного моделирования можно сделать следующие выводы. Во-первых, наименьшее смещение получается при использовании метода комплексного времени. Во-вторых, наименьшая стандартное отклонение получается при использовании любого из методов: модульного или сопряженных аппроксимаций. В-третьих, наименьшая среднеквадратическая ошибка получается при использовании метода комплексного времени. Эти параметры получаются меньше при использовании полиномиальной интерполяции второго порядка, чем при использовании полиномиальной интерполяции третьего порядка. Причем вышеуказанные параметры практически совпадают для модульного метода и метода сопряженных аппроксимаций при высоких отношениях сигнал/шум.

Модульный метод с использованием полиномиальной интерполяции второго порядка является наиболее вычислительно простым. А метод сопряженных аппроксимаций с использованием полиномиальной интерполяции третьего порядка наиболее вычислительно сложным.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что для повышения точности оценки времени задержки в большинстве практических случаев будет достаточным использование модульного метода с полиномиальной интерполяцией второго порядка.

Материалы статьи докладывались на XIV Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь» [27].

Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации: проект № FSFF-2020-0015.

Литература

1. Добычина Е.М., Малахов Р.Ю. Цифровые антенные решетки для бортовых радиолокационных систем // Научный вестник МГТУ ГА. 2012. № 186. С. 176-183.
2. Добычина Е.М.. Калибровка цифровых антенных решеток // Антенны. Радиотехника. 2013. № 9. С. 46-55.
3. Awad S., Al-Abed M., Saraira A.A. A Comparison of Time Delay Estimation Methods and Interpolation Methods in Signal-Averaged ECG: Preliminary Results // IEEE Jordan International Joint Conference on Electrical Engineering and Information Technology. 2019. P.371-374.
<https://doi.org/10.1109/JEEIT.2019.8717446>.
4. Sumino Y., Waag R.C. Measurement of ultrasonic pulse arrival time differences produced by abdominal wall specimens. // Journal of the Acoustical Society of America. 1991. No. 90. P. 2924-2930. <https://doi.org/10.1121/1.401766>
5. Torrieri D. J. Statistical Theory of Passive Location Systems // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1984. Vol. AES-20. No. 2. P. 183-198.
<https://doi.org/10.1109/TAES.1984.310439>.
6. Zekavat R., Buehrer Z. Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances. IEEE Press. 2017. 1222 p.
7. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. Оценка времени задержки циклостационарных радиосигналов // Гагаринские чтения 2017. 2017. С. 621-622.
8. Шевгунов Т.Я., Ефимов Е.Н., Жуков Д.М. Применение моделей циклостационарных случайных процессов в задачах цифровой обработки сигналов // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. Т. 8. № 1. С. 152-156.
9. Шевгунов Т.Я. Симметричные и общие формы двумерной корреляционной функции и циклической корреляционной функции нестационарных случайных процессов // Радиотехника. 2019. № 3. С. 33-38.

10. Knapp C., Carter G. The generalized correlation method for estimation of time delay // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1976. Vol. 24. No. 4. P. 320-327. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1976.1162830>.
11. Roth R.R. Effective measurements using digital signal analysis // IEEE Spectrum. 1971. Vol. 8. No. 4. P. 62–70.
12. Дубровин А. В., Сосулин Ю. Г. Одноэтапное оценивание местоположения источника радиоизлучения пассивной системой // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. №12. С. 1486-1494.
13. Дубровин А. В., Сосулин Ю. Г. Одноэтапное оценивание местоположения источника радиоизлучения пассивной системой, состоящей из узкобазовых подсистем // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 2. С. 156-170.
14. Дубровин А. В., Сосулин Ю. Г. Одноэтапное оценивание местоположения источника радиоизлучения комбинированной пассивной системой // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 4. С. 441-457.
15. Жуков Д.М., Вавилова Ж.А., Шевгунов Т.Я., Гущина О.А., Ефимов Е.Н. Алгоритм поиска глобального максимума при вычислении оценок местоположения источника радиоизлучения пассивной радиолокационной системой // Журнал радиоэлектроники (ISSN 1684-1719). М.: ИПЭ РАН. 2018. № 12. С. 17 <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2018.12.8>
16. Kumar A., Bar-Shalom Y. Time-domain analysis of cross correlation for time delay estimation with an autocorrelated signal // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. Vol. 41. No. 4. P. 1664–1668. <https://doi.org/10.1109/78.212738>.
17. Azaria M., Hertz D. Time delay estimation by generalized cross correlation methods // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1984. Vol. 32. No. 2. P. 280-285. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1984.1164314>.
18. Jacovitti G., Scarano G. Discrete time techniques for time delay estimation // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. Vol. 41. No. 2 P. 525-533. <https://doi.org/10.1109/78.193195>.

19. Cespedes I., Huang Y., Ophir J., Spratt S., Methods of subsample time delays of digitized echo signals // Ultrasonic Imaging. 1995. Vol. 17. P. 142–171. <https://doi.org/10.1177/016173469501700204>.
20. Boucher R., Hassab J. Analysis of discrete implementation of generalized cross correlator // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1981. Vol. 29. No. 3. P. 609-611. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1981.1163623>.
21. Gardner W. A. Introduction to Random Processes. Mcgraw-Hill. 1990. 546 p.
22. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. 3-е изд., испр. М.: Техносфера. 2012. 1048 с.
23. Stein S. Algorithms for ambiguity function processing // IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1981. Vol. 29. No. 3. P. 588–599. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1981.1163621>.
24. Lindgren G., Rootzen H., Sandsten M. Stationary Stochastic Processes for Scientists and Engineers. CRC Press. 2014. 314 p.
25. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. Prentice Hall. 1993. 595 p.
26. Bendat J.S, Piersol A.G. Random Data Analysis and Measurement Procedures. Wiley. 2010. 604 p.
27. Гущина О.А., Шевгунов Т.Я. Применение полиномиальных аппроксимаций для уточнения оценки времени задержки комплексного сигнала во временной области // XIV Всероссийская научно-техническая конференция «Радиолокация и радиосвязь». М.: ИРЭ РАН. 23-25 ноября 2020. С. 214–219.

Для цитирования:

Гущина О.А., Шевгунов Т.Я. Временные корреляционные методы оценки задержки комплексных сигналов, некратной периоду дискретизации, на основе полиномиальной интерполяции. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.12.19>