DOI https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.12.5
УДК 621.371: 538.574

ВОЗБУЖДЕНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ МЕТАПОВЕРХНОСТИ В ВИДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

А. И. Семенихин, Д. В. Семенихина

Институт радиотехнических систем и управления Южного федерального университета, 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, д. 44

Статья поступила в редакцию 4 декабря 2020 г.

Аннотация. Решена задача произвольного возбуждения волн системой сторонних источников вблизи анизотропной метаповерхности в виде эллиптического цилиндра с тензором поверхностного гомогенизированного импеданса общего вида. Решение задачи записано в виде наложения *E*- и *H*-волн в эллиптических координатах. Парциальные коэффициенты отражения волн находились из граничных условий с использованием ортогональности угловых функций Матье. Для этих коэффициентов получены четыре связанные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Найдены и проанализированы условия, при которых решение задачи возбуждения методом собственных функций получается в явном виде. Показано, что для этого тензор поверхностного импеданса однородной метаповерхности должен принадлежать множеству девиаторов (иметь нулевые диагональные элементы). В частном случае взаимной (наиболее просто реализуемой) метаповерхности ее тензор импеданса должен быть только реактансным. В другом частном случае тензор импеданса из множества девиаторов описывает класс анизотропных невзаимных метаповерхностей с так называемой идеальной электромагнитной проводимостью (PEMC).

Ключевые слова: эллиптический цилиндр, метаповерхность, тензор поверхностного импеданса, идеальный электромагнитный проводник, возбуждение волн.

Abstract. The problem of arbitrary excitation of waves by a system of external sources near an anisotropic metasurface in the form of an elliptical cylinder with a surface homogenized impedance tensor of general form is solved. The solution to the problem is written as a superposition of *E*- and *H*-waves in elliptical coordinates. The partial reflection coefficients of waves were found from the boundary conditions using the orthogonality of the Mathieu angular functions. For these coefficients, four coupled infinite systems of linear algebraic equations of the second kind are obtained. The conditions under which the solution of the excitation problem by the method of eigenfunctions is obtained in an explicit form are found and analyzed. It is shown that for this, the surface impedance tensor of a uniform metasurface must belong to a class of deviators (have zero diagonal elements). In the particular case of a mutual (most easily realized) metasurface, its impedance tensor should only be reactance. In another special case, the impedance tensor of a set of deviators describes a class of anisotropic nonreciprocal metasurfaces with the so-called perfect electromagnetic conductivity (PEMC).

Key words: elliptical cylinder, metasurface, surface impedance tensor, perfect electromagnetic conductor, excitation of waves.

Введение

Задачи возбуждения и рассеяния волн в присутствии криволинейных конформных метаповерхностей (МП) актуальны во многих приложениях [1-4]. Конформные МП расширяют функциональные возможности антенн и антенных решеток, улучшают их характеристики согласования и излучения, позволяют управлять полем излучения [1,2]. Они позволяют также создавать радиомаскирующие покрытия с компенсацией рассеянного поля [3,4]. Возбуждаемые поверхности часто имеют форму, близкую к эллиптическим цилиндрам, полосам. Поэтому задачи возбуждения волн вблизи таких импедансных цилиндрических МП являются актуальными.

Решения задач возбуждения идеально проводящих эллиптических цилиндров получены в явном виде методом разделения переменных во многих работах [5-7]. В случае импедансных цилиндров аналитические решения задач в эллиптических координатах u, υ, z можно получить только при определенной азимутальной зависимости импедансных граничных условий от коэффициента Лямэ h_u по радиальной координате u. Для этого импеданс цилиндра должен изменяться по угловой координате υ прямо пропорционально h_u для E-волн и обратно пропорционально h_u для H-волн [8,9].

В [10] с помощью векторных волновых функций получено точное аналитическое решение задачи рассеяния плоской волны на эллиптическом цилиндре с так называемой идеальной электромагнитной проводимостью (PEMC). Среда PEMC обобщает понятия идеального электрического проводника (PEC), идеального магнитного проводника (PMC) и определяется одним действительным параметром - полной проводимостью (адмитансом) [11,12].

В настоящей работе рассматривается задача произвольного возбуждения волн в присутствии анизотропной метаповерхности в виде эллиптического цилиндра с тензором поверхностного гомогенизированного импеданса общего вида. Найдены и проанализированы условия, при которых решение задачи методом собственных функций получается в явном виде, в том числе для однородных анизотропных взаимных МП и невзаимных МП из класса PEMC.

1. Постановка общей задачи возбуждения

Геометрия задачи показана на рис.1. Бесконечно длинный цилиндр расположен в среде с параметрами ε_a, μ_a в центре эллиптической системы координат u, υ, z и описывается большой полуосью a, малой полуосью b и межфокусным рассоянием $2d$. Возбуждающие сторонние электрические и магнитные токи $\vec{j}^{\,e,m}$ распределены во внешней области V' (со штрихованными координатами внутренних точек).

Цилиндрическая метаповерхность совпадает с координатной поверхностью $u = u_0$. На ней выполняются анизотропные импедансные граничные условия общего вида:

$$E_{\upsilon} = W_0(-Z_{11}H_z + Z_{12}H_{\upsilon}), \quad E_z = W_0(-Z_{21}H_z + Z_{22}H_{\upsilon}), \tag{1}$$

где Z_{pq}, $p,q = 1,2$ – элементы тензора поверхностного гомогенизированного импеданса МП, $W_0 = 120\pi$ Ом – характеристическое сопротивление свободного пространства.

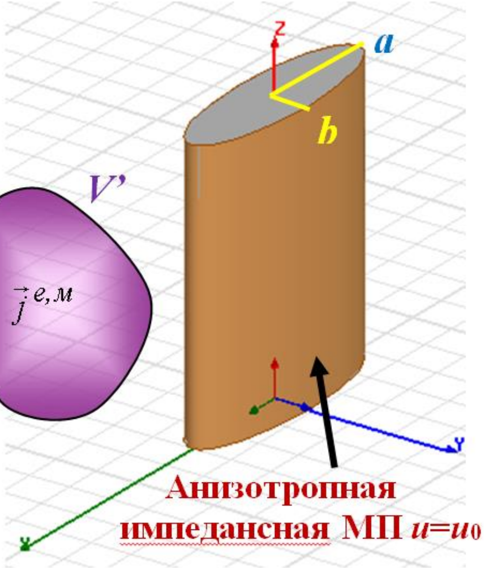

Рис.1 – Постановка задачи возбуждения анизотропной импедансной метаповерхности в виде эллиптического цилиндра.

Определим поле, возбуждаемое сторонними токами в присутствии МП. Оно должно удовлетворять уравнениям Максвелла в области $u>u_0$, граничным условиям (1) при $u=u_0$ и условиям излучения при $u\to\infty$. Решение задачи получим методом собственных функций [7].

2. Общее решение задачи возбуждения

Пусть сторонние токи порождают в отсутствие цилиндра падающее поле в виде E-волн, которые представим разложениями по волновым функциям эллиптического цилиндра [7]:

$$E_z^{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} E_{znh}^{in} dh, \quad E_{\upsilon}^{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} E_{\upsilon nh}^{in} dh, \quad H_{\upsilon}^{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} H_{\upsilon nh}^{in} dh, \tag{2}$$

где парциальные поперечные составляющие

$$E_{\upsilon nh}^{in} = \frac{-ih}{d\Delta(k^2 - h^2)} \frac{\partial E_{znh}^{in}}{\partial \upsilon}, \quad H_{\upsilon nh}^{in} = \frac{-i\omega\varepsilon_a}{d\Delta(k^2 - h^2)} \frac{\partial E_{znh}^{in}}{\partial u}, \tag{3}$$

продольная составляющая (записывается в виде суммы с четными и нечетными функциями Матье):

$$E_{znh}^{in} = e^{-ihz} S_{e,on}(vd, \cos\upsilon) \begin{cases} F_{e,o1}^{e} J_{e,on}(vd, \mathrm{ch}\, u), & u < u' \\ F_{e,o2}^{e} H_{e,on}(vd, \mathrm{ch}\, u), & u > u' \end{cases}, \tag{4}$$

где $\Delta = \sqrt{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 \upsilon}$, $v = -i\sqrt{h^2 - k^2}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, $S_{e,on}(vd, \cos\upsilon)$ − четная и нечетная угловые функции Матье; $J_{en}(vd, \mathrm{ch}\, u)$, $H_{en}(vd, \mathrm{ch}\, u)$ − четные радиальные функции Матье; $J_{on}(vd, \mathrm{ch}\, u)$, $H_{on}(vd, \mathrm{ch}\, u)$ −нечетные радиальные функции Матье; коэффициенты $F_{e,o1}^{e}$, $F_{e,o2}^{e}$ определяются сторонними токами известным образом [7].

Вторичное поле запишем по аналогии с полем (2), как наложение *E*- и *H*-волн (из-за анизотропии МП):

$$E_z^s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} E_{znh}^s dh, \qquad E_\upsilon^s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} E_{\upsilon nh}^s dh,$$

$$H_z^s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} H_{znh}^s dh, \qquad H_\upsilon^s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n=-\infty}^{\infty} H_{\upsilon nh}^s dh, \tag{5}$$

где парциальные поперечные составляющие по аналогии с (3) имеют вид:

$$E_{\upsilon nh}^s = \frac{-i}{d\Delta(k^2 - h^2)} \left(h \frac{\partial E_{znh}^s}{\partial \upsilon} - \omega\mu \frac{\partial H_{znh}^s}{\partial \upsilon}\right),$$

$$H_{\upsilon nh}^s = \frac{-i}{d\Delta(k^2 - h^2)} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_{znh}^s}{\partial \upsilon} + h \frac{\partial H_{znh}^s}{\partial \upsilon}\right),$$

продольные составляющие

$$E_{znh}^s = f_{e,on}^{22} F_{e,o1}^{e} S_{e,on}(vd, \cos\upsilon) H_{e,on}(vd, \mathrm{ch}\, u) e^{-ihz},$$

$$H_{znh}^s = \frac{f_{e,on}^{12}}{W} F_{e,o1}^{e} S_{e,on}(vd, \cos\upsilon) H_{e,on}(vd, \mathrm{ch}\, u) e^{-ihz}. \tag{6}$$

Для определения парциальных коэффициентов отражения $f_{e,on}^{22}(h)$ и $f_{e,on}^{12}(h)$ подставим поля (2), (5) в граничные условия (1). Положим, что элементы тензора импеданса не зависят от координаты z и в общем случае являются произвольными функциями угловой координаты υ. Воспользуемся свойством ортогональности угловых функций Матье на интервале $0 \le \upsilon \le 2\pi$ с нормой $M_{e,on}(vd)$ [13].

Тогда из (1) получим четыре связанные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов отражения E-волн f_{em}^{22}, f_{om}^{22} и H-волн f_{em}^{12}, f_{om}^{12}, m= 0,1,2,… ∞. Для наглядности приведем одну из систем уравнений:

$$\frac{ik}{k^2-h^2} F_{e1}^{e} H'_{em} f_{em}^{12} M_{em} =$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\{F_{e1}^{e} H_{en} f_{em}^{12} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} d\Delta_0\, Z_{11} S_{em} S_{en} d\upsilon + F_{o1}^{e} H_{on} f_{on}^{12} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} d\Delta_0\, Z_{11} S_{em} S_{on} d\upsilon\,\} -$$

$$\frac{ik}{k^2-h^2}\sum_{n=0}^{\infty}\{F_{e1}^{e} J_{en} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} Z_{12} S_{em} S_{en} d\upsilon + F_{e1}^{e} H'_{en} f_{en}^{22} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} Z_{12} S_{em} S_{en} d\upsilon +$$

$$\frac{h}{k} F_{e1}^{e} H_{en} f_{en}^{22} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} Z_{12} S_{em} S'_{en} d\upsilon + F_{o1}^{e} J_{on} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} Z_{12} S_{em} S_{on} d\upsilon +$$

$$F_{o1}^{e} H'_{on} f_{on}^{22} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} Z_{12} S_{em} S_{en} d\upsilon + \frac{h}{k} F_{o1}^{e} H_{on} f_{on}^{22} \int_{\upsilon=0}^{2\pi} Z_{12} S_{em} S'_{on} d\upsilon\}. \qquad (7)$$

Здесь для упрощения записи опущены аргументы $(vd, \cos\upsilon)$ угловых функций Матье и аргументы $(vd, \mathrm{ch}\, u_0)$ радиальных функций Матье, штрих у этих функций означает производную, $\Delta_0 = \sqrt{\mathrm{ch}^2 u_0 - \cos^2\upsilon}$.

Аналогично рассматривается решение задачи возбуждения МП сторонними токами, которые порождают в отсутствие МП падающее поле в виде H-волн. В этом случае неизвестные коэффициенты отражения H-волн f_{em}^{11}, f_{om}^{11} и E-волн f_{em}^{21}, f_{om}^{21} (по аналогии с (6)) также находятся из бесконечных систем алгебраических уравнений.

3. Аналитическое решение в случае неоднородной импедансной МП

Найдем условия, при которых решение задачи возбуждения неоднородной МП в свободном пространстве получается в явном виде. Учтем, что в полученных бесконечных системах уравнений типа (7) под интегралы входят множители $\Delta_0 Z_{11}(\upsilon)$, $Z_{22}(\upsilon)/\Delta_0$, $Z_{12}(\upsilon)$, $Z_{21}(\upsilon)$, которые в общем случае зависят от угловой координаты υ.

Пусть недиагональные импедансы не зависят от угловой координаты υ,

$$Z_{12}(\upsilon) = Z_{12}^0,\ Z_{21}(\upsilon) = Z_{21}^0,$$

а диагональные импедансы меняются по законам

$$Z_{11}(\upsilon) = Z_{11}^0 / \Delta_0, \qquad Z_{22}(\upsilon) = Z_{22}^0 \Delta_0,$$

где Z_{pq}^0 –константы.

Тогда в бесконечных системах уравнений можно воспользоваться свойством ортогональности угловых функций Матье и получить искомые коэффициенты отражения $f_{e,on}^{11}$, $f_{e,on}^{12}$, $f_{e,on}^{21}$, $f_{e,on}^{22}$ в явном виде:

$$f_{e,on}^{11} = \frac{B_{e,on}G_{e,on} + Z_{12}^0 Z_{21}^0 J_{e,on} H'_{e,on}}{B_{e,on}C_{e,on} - Z_{12}^0 Z_{21}^0 H_{e,on} H'_{e,on}},\quad f_{e,on}^{12} = \frac{Z_{12}^0 (J_{e,on} H'_{e,on} - J'_{e,on} H_{e,on})}{B_{e,on}C_{e,on} - Z_{12}^0 Z_{21}^0 H_{e,on} H'_{e,on}}, \tag{8}$$

$$f_{e,on}^{21} = \frac{-Z_{21}^0 (J_{e,on} H'_{e,on} - J'_{e,on} H_{e,on})}{B_{e,on}C_{e,on} - Z_{12}^0 Z_{21}^0 H_{e,on} H'_{e,on}},\quad f_{e,on}^{22} = \frac{A_{e,on}C_{e,on} + Z_{12}^0 Z_{21}^0 J'_{e,on} H_{e,on}}{B_{e,on}C_{e,on} - Z_{12}^0 Z_{21}^0 H_{e,on} H'_{e,on}}, \tag{9}$$

где обозначено

$$A_{e,on} = -J_{e,on} - \frac{ikZ_{22}^0}{d(k^2 - h^2)} J'_{e,on}, \qquad B_{e,on} = H_{e,on} + \frac{ikZ_{22}^0}{d(k^2 - h^2)} H'_{e,on},$$

$$C_{e,on} = H'_{e,on} + \frac{k^2 - h^2}{ik} dZ_{11}^0 H_{e,on}, \qquad G_{e,on} = -\frac{k^2 - h^2}{ik} dZ_{11}^0 J_{e,on} - J'_{e,on}.$$

Здесь также опущены аргументы $(vd, \mathrm{ch}\, u_0)$ радиальных функций Матье, а штрих у этих функций означает производную. В частных случаях PEC, PMC и анизотропии импеданса отсюда получаются известные результаты [7].

4. Метаповерхность с тензором импеданса из класса девиаторов

Аналитическое решение (8), (9) задачи возбуждения остается справедливым и в частном случае однородной импедансной МП, когда

$$Z_{11}^0 = 0,\ Z_{22}^0 = 0,\ Z_{12}^0 = -Z_{21}^{0*}.$$

Последнее равенство следует из условия физической реализуемости [7] импеданса ($*$ - знак комплексного сопряжения).

В этом случае тензор импеданса однородной МП принадлежит множеству девиаторов с нулевыми диагональными элементами

$$\hat{Z} = \begin{Vmatrix} 0 & D\exp(i\psi) \\ -D\exp(-i\psi) & 0 \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где $|D| \in [0,\infty]$, $\psi \in (-\pi, \pi]$ - два вещественных параметра [14].

В частном случае взаимной (наиболее просто реализуемой) анизотропной метаповерхности с параметром $\psi = \pi/2$ импеданс (10) должен быть только реактансным:

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} 0 & +iD \\ +iD & 0 \end{Vmatrix}.$$

5. Невзаимная метаповерхность с идеальной электромагнитной проводимостью

Множество импедансов (10) в частном случае $\psi = 0;\pi$ включает в себя класс анизотропных невзаимных МП с так называемой [11] идеальной электромагнитной проводимостью (PEMC):

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} 0 & +D \\ -D & 0 \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

где параметр $D = 1/(W_0 M)$ – нормированный импеданс, M – полная проводимость PEMC [11].

Граничные условия (1) в этом случае принимают вид

$$E_\upsilon = W_0 D H_\upsilon, \qquad E_z = W_0 D H_z \tag{12}$$

и описывают при $D = 0$ поверхность идеального электрического проводника (PEC), при $D = \pm\infty$ − поверхность идеального магнитного проводника (PMC).

Задача произвольного возбуждения эллиптической МП с граничными условиями (12) также имеет решение в явном виде с парциальными коэффициентами отражения (8), (9):

$$f^{11}_{e,on} = (-J'_{e,on}H_{e,on} - D^2 J_{e,on}H'_{e,on})/L_{e,on},$$

$$f^{22}_{e,on} = (-J_{e,on}H'_{e,on} - D^2 J'_{e,on}H_{e,on})/L_{e,on},$$

$$f^{12}_{e,on} = f^{21}_{e,on} = D(J_{e,on}H'_{e,on} - J'_{e,on}H_{e,on})/L_{e,on},$$

$$L_{e,on} = H_{e,on}H'_{e,on}(1+D^2).$$

Эти коэффициенты совпадают с результатами точного аналитического решения задачи рассеяния плоской волны на эллиптическом PEMC-цилиндре [10].

Заключение

Поставлена и решена задача произвольного возбуждения волн сторонними источниками в присутствии метаповерхности в виде эллиптического цилиндра с тензором гомогенизированного импеданса общего вида. Пользуясь методом собственных функций и ортогональностью угловых функций Матье, найдены и проанализированы условия, при которых решение задачи получается в явном виде. Тензор поверхностного импеданса таких однородных невзаимных МП должен принадлежать к классу девиаторов. Взаимные МП должны быть только реактансными. Тензор импеданса из множества девиаторов включает в себя класс анизотропных невзаимных МП с идеальной электромагнитной проводимостью (PEMC). В явном виде записаны парциальные коэффициенты отражения в случае произвольного возбуждения эллиптического PEMC-цилиндра.

Результаты работы позволяют исследовать характеристики излучения моделей антенн и элементов конформных антенных решеток вблизи различных эллиптических цилиндров, лент с анизотропными импедансными метаповерхностями (невзаимными, взаимными, типа PEMC).

Работа выполнена в Центре коллективного пользования «Прикладная электродинамика и антенные измерения» Южного федерального университета по гранту Российского научного фонда - проект № 16-19-10537-П.

Литература

1. Yang F., Mei Z.L., Cui T.J. Control of the Radiation Patterns Using Homogeneous and Isotropic Impedance Metasurface // International Journal of Antennas and Propagation. 2015. 7 p. ID 917829. http://dx.doi.org/10.1155/2015/917829
2. Padooru Y.R., Yakovlev A.B., Chen P.-Y., Alù A. Line-source excitation of realistic conformal metasurface cloaks // J. Appl. Phys. 2012. **112.** 104902.
3. Kamiński P.M., Yakovlev A.B., Arslanagić S. Mantle Cloaks for Elliptical Cylinders Excited by an Electric Line Source // 2016 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS). Espoo. Finland. 2016. P.1-4. https://doi.org/10.1109/URSI-EMTS.2016.7571349
4. Shchelokova A.V. et al. Experimental Realization of Invisibility Cloaking. *Physics-Uspekhi*. 2015. Vol. 58. No. 2. P.167.
5. Морс, Фешбах. Методы теоретической физики. М: Изд-во иностр. лит. Том 2. 1960. 897 с.
6. Уэйт Д.Р. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. М.: Сов. Радио. 1963. 240 с.
7. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – М.: Радио и связь. 1983. 296 с.
8. Alexopoulos N.G., Tadler G.A., Schott F.W. Scattering from an elliptic cylinder loaded with an active or passive continuously variable surface impedance // IEEE Trans. Antennas Propag. 1974. Vol.22. No.1. P.132-134.

9. Звягинцев А.А. Батраков Д.О. Дифракция на эллиптическом импедансном цилиндре // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1989. Том 32. № 9. С.1125-1131.
10. Hamid A.K., Cooray F.R. Scattering by a Perfect Electromagnetic Conducting Elliptic Cylinder // Progress In Electromagnetics Research Letters. 2009. Vol.10, 59-67. P.59-67.
11. Lindell I.V., Sihvola A.H. Perfect electromagnetic conductor // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2005. Vol.19. No.7. P.861-869.
12. Ruppin R. Scattering of electromagnetic radiation by a perfect electromagnetic conductor cylinder // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2006. Vol.20. No.13. P.1853-1860.
13. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М: Наука. 1979. 832 с.
14. Семенихин А.И. Преобразования волн, инвариантных к углу падения при отражении от анизотропных управляемых покрытий // Изв. Вузов. Радиоэлектроника. 2002. Том.45. No.6. С.42-50.

Для цитирования:
Семенихин А.И., Семенихина Д.В. Возбуждение анизотропной импедансной метаповерхности в виде эллиптического цилиндра. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №12. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.12.5