УДК 621.391.14:621.396

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ СУПЕРПОЗИЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Ф. В. Голик
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

Получена 29 декабря 2012 г.

Аннотация. В работе показано, что суперпозиция случайных потоков прямоугольных импульсов может быть представлена эргодической полумарковской моделью. Найдены вероятностные характеристики модели: одношаговые переходные вероятности и условная переходная функция распределения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании асинхронных систем передачи и обработки информации, радиолокационных систем и систем управления, а так же при анализе надежности сложных систем.

Ключевые слова. Случайный поток, полумарковский процесс, эргодическая цепь Маркова, суперпозиция потоков, переходная вероятность, условная функция распределения, радиолокация, информация, надежность.

Abstract. It is shown that the square pulse random streams superposition can be represented by an ergodic semi-Markov model.Model probabilistic characteristics are found: one-step transition probability and conditional transition distribution function. Obtained results could be applied to analysis of asynchronous communication systems, radar systems, control systems, complex systems reliability.

Keywords. Random stream, semi-Markov process, Markov ergodic chain, streams superposition, transition probability, conditional transition distribution function, radar systems, information, reliability.

Постановка задачи. Условия и ограничения

Рассмотрим систему, состоящую из N элементов, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний {0; 1}. Пусть состояния i-го элемента описывается случайным потоком прямоугольных импульсов $\varphi_i(t),\ i=\overline{1,N}$.

Представим суперпозицию потоков $\varphi_i(t)$ вектором, компонентами которого являются парциальные потоки $\varphi_i(t)$:

$$\phi_N(t)=\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_N(t)\right),\ \varphi_N(t)\in(\mathrm{B}^N,\mathbb{R}_+),\ \mathrm{B}=\{0,1\},\ \mathbb{R}_+=[0,\infty).$$

Процесс $\phi_N(t)$ находится в момент t в $\vec{s}$-состоянии, если $\phi_N(t)=\vec{s}$, $\vec{s}=(s_1,\ldots s_i,\ldots s_N)$. Во времени эти состояния описываются потоком $\vec{s}$-состояний

$$\Phi_{\vec{s}}(t)=\begin{cases}0,\ \varphi_N(t)\notin\vec{s}\\ 1,\ \varphi_N(t)\in\vec{s}.\end{cases}$$

Поток $\Phi_{\vec{s}}(t)$ может быть представлен произведением соответствующих комбинаций парциальных потоков $\varphi_i(t)$ и их инверсий $\overline{\varphi}_i(t)$ [1]:

$$\Phi_S(t)=\prod_{i=1}^{N}\varphi_i^{s_i}(t)\cdot\overline{\varphi}_i^{\overline{s}_i}\ , \tag{1}$$

где $\overline{\varphi}_i(t)=1-\varphi_i(t),\ \overline{s}_i=1-s_i$.

Соотношение (1) справедливо для любых типов парциальных потоков, в том числе и зависимых. Однако в настоящей работе введены ограничения на свойства потоков $\varphi_i(t)$, а именно полагаем что:

1) потоки стационарны, т.е. законы распределения длительностей импульсов τ_j^* и пауз ϑ_j^* не зависят от $j=1,2,\ldots$;

2) существуют и заданы плотности распределения вероятностей длительностей импульсов $\alpha_i(x)$ и длительностей пауз $\beta_i(x)$ $i=\overline{1,N}$;

3) импульсы, принадлежащие одному и тому же потоку, не перекрываются сами с собой, т.е. функция распределения длительности пауз $B_i(x)$ не имеет скачка при $x=0$:

$$B_i(0)=0,\ i=\overline{1,N} \tag{2}$$

4) аналогичному условию удовлетворяет функция распределения $A_i(x)$ длительности импульсов:

$$A(0)=0,\, i=\overline{1,N} \tag{3}$$

5) существуют математические ожидания длительностей импульсов $m_{1\tau_i}$ и пауз $m_{1\vartheta_i}$, $i=\overline{1,N}$;

6) потоки $\varphi_i(t),\, i=\overline{1,N}$ взаимно независимы в совокупности.

Каждому состоянию $\vec{s}\in \mathrm{B}^N$ можно приписать некоторое значение $h_{\vec{s}}, h_{\vec{s}}\neq h_{\vec{k}}, \vec{s}\neq\vec{k}, \vec{s},\vec{k}\in \mathrm{B}^N$. Тогда многомерному потоку $\phi_N(t)$ соответствует процесс $\mathrm{H}(t)=\sum\limits_{\vec{s}\in \mathrm{B}^N} h_{\vec{s}}\Phi_{\vec{s}}(t)$, имеющий, например, смысл эффективности функционирования системы.

Процессы $\phi_N(t)$ и $\mathrm{H}(t)$ относятся к классу полумарковских. Действительно, переходы из фазовых состояний описываются эргодической цепью Маркова, поскольку интуитивно ясно[1], что цепь возвратна и средние времена возвращений конечны [2], а распределения времени пребывания системы в фиксированном состоянии в общем случае отличается от экспоненциального.

Полумарковский процесс задан, если известны вероятности переходов и условные распределения длительности пребывания процесса в фиксированном состоянии.

Настоящая работа посвящена определению этих характеристик для процессов, описываемых суперпозицией $\phi_N(t)$ случайных потоков прямоугольных импульсов.

Характеристики потока $\vec{s}$ -состояний

Прежде чем перейти к определению вероятностных характеристик полумарковского процесса, найдем характеристики потока $\Phi_{\vec{s}}(t)$, заданного соотношением (1).

---

[1] Строгое обоснование эргодичности цепи приведено в конце настоящей статьи.

Отметим, что характеристики парциальных потоков получены Н. М. Седякиным [3]. В этом параграфе мы лишь обобщим известные результаты применительно к потокам $\vec{s}$ -состояний.

Учитывая независимость потоков $\varphi_i(t), i=\overline{1,N}$ и свойства потоков $\Phi_{\vec{s}}(t)$, вероятность $P_{\vec{s}}(\delta)$ того, что произвольный момент времени t окажется в пределах основания укороченного на величину δ импульса потока $\Phi_{\vec{s}}(t)$ равна:

$$P_{\vec{s}}(\delta) = \prod_{i=1}^{N} p_i(\delta) \tag{4}$$

где $p_i(\delta) = \mu_i \int_{\delta}^{\infty} (x-\delta)\alpha^{[s_i]}(x)dx$, вероятность попадания произвольного момента времени t на основание укороченного на величину δ импульса $(s_i = 1)$ или паузы $(s_i = 0)$ парциального потока $\varphi_i(t)$;

$\mu_i = \dfrac{1}{m_{1\tau_i} + m_{1\vartheta_i}}$ - средняя частота следования импульсов потока $\varphi_i(t)$;

$\alpha^{[s_i]}(x) = \alpha_i^{s_i}(x) \cdot \beta_i^{\bar{s}_i}(x)$ - плотность распределения импульсов $(s_i = 1)$ и пауз $(s_i = 0)$ потока $\varphi_i(t)$;

Средняя частота следования импульсов потока $\Phi_{\vec{s}}(t)$, укороченных на $\delta \geq 0$ равна :

$$\mu_{\vec{s}}(\delta) = -\frac{d}{dx} P_{\vec{s}}(x)\bigg|_{x=\delta} \tag{5}$$

или после преобразований

$$\mu_{\vec{s}}(\delta) = P_{\vec{s}}(\delta) \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{s_i}{m_{1\tau}(\delta)} + \frac{\bar{s}_i}{m_{1\vartheta}(\delta)} \right] \tag{6}$$

При $\delta = 0$

$$\mu_{\vec{s}}(\delta) = \mu_{\vec{s}} = P_{\vec{s}} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{s_i}{m_{1\tau}} + \frac{\bar{s}_i}{m_{1\vartheta}} \right] \tag{7}$$

где

$$P_{\vec{s}} = \prod_{i=1}^{N} \mu_i \cdot m_{1\tau}^{s_i} \cdot m_{1\vartheta}^{\overline{s}_i}\,; \tag{8}$$

Средняя длительность $m_{1\tau_S}(\delta)$ импульсов потока $\Phi_{\vec{s}}(t)$, укороченных на величину $\delta \geq 0$:

$$m_{1\tau_S}(\delta) = \frac{P_{\vec{s}}(\delta)}{\mu_{\vec{s}}(\delta)} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{s_i}{m_{1\tau_i}(\delta)} + \frac{\overline{s}_i}{m_{1\vartheta_i}(\delta)} \right] \right\}^{-1} \tag{9}$$

при $\delta = 0$

$$m_{1\tau_S}(0) = m_{1\tau_S} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{s_i}{m_{1\tau_i}} + \frac{\overline{s}_i}{m_{1\vartheta_i}} \right] \right\}^{-1} \tag{10}$$

Плотность распределения длительности импульса потока $\Phi_{\vec{s}}(t)$;

$$\alpha_{\vec{s}}(x) = \mu_{\vec{s}}^{-1} \frac{d}{dx} P_{\vec{s}}(x). \tag{11}$$

Таким образом все основные характеристики потока $\vec{s}$-состояний определяются через соответствующие характеристики парциальных потоков $\varphi_i(t),\, i = \overline{1, N}$.

Условная переходная функция распределения

Определим *функцию распределения* $\mathrm{A}_{\vec{s}k}(x)$ *времени пребывания процесса* $\phi_N(t)$ *в* $\vec{s}$ *-состоянии при условии, что выход из* $\vec{s}$ *-состояния обусловлен переходом, возникающим в* k *-ом парциальном потоке* $\varphi_k(t),\, k = \overline{1, N}$.

Пусть вектор $\vec{s} = (s_1, ..., s_k, ..., s_N)$ фиксирует некоторое состояние процесса $\phi_N(t)$. Вектор $\vec{s}^{\,k} = (s_1, ..., \overline{s}_k, ..., s_N),\, \overline{s}_k = 1 - s_k$ задает состояние, смежное с $\vec{s}$-состоянием по k -ой компоненте. Тогда индексы $\vec{s}k$ означают переход из $\vec{s}$-состояния в состояние $\vec{s}^{\,k}$.

Обозначим ${}^{k}\vec{s}$ вектор, не содержащий k-ой компоненты, т.е. ${}^{k}\vec{s} = (s_1, ..., s_{k-1}, s_{k+1}, ..., s_N)$.

Пусть t^* - случайный момент времени, равномерно распределенный на полуинтервале $[0,T), T\to\infty$.

Введем случайные величины:

z_k - длина интервала, отсчитанного от точки t^* до ближайшего справа скачка в потоке $\phi_N(t)$ (недоскок процесса $\phi_N(t)$);

$z_{k_{\vec{s}}}$ - длина интервала, отсчитанного от t^* до ближайшего справа скачка суперпозиции потоков ${}^k\phi_N(t) = \left(\varphi_1(t),\ldots\varphi_{k-1}(t),\varphi_{k+1}(t),\ldots,\varphi_N(t)\right)$ или недоскок указанного процесса;

$z_{\vec{s}^k}$ - недоскок процесса $\phi_N(t)$ при условии перехода из состояния $\vec{s}$ в состояние $\vec{s}k$.

В соответствии с формулой Пальма запишем выражения для плотностей распределения вероятностей введенных величин:

- плотность распределения недоскока z_k:

$$e_k(x) = \frac{1}{m_k}\int_x^\infty \alpha^{[s_k]}(y)dy, \tag{12}$$

$$m_k = \int_0^\infty x\alpha_k^{[s_k]}(x)dx .$$

- плотность распределения недоскока $z_{k_{\vec{s}}}$:

$$e_{k_{\vec{s}}}(x) = \frac{1}{m_{k_{\vec{s}}}}\int_x^\infty \alpha_{k_{\vec{s}}}(y)dy \tag{13}$$

$$m_{k_{\vec{s}}} = \int_0^\infty \alpha_{k_{\vec{s}}}(x)dx$$

где $\alpha_{k_{\vec{s}}}(x)$ - плотность распределения времени пребывания процесса ${}^k\phi_N(t)$ в состоянии ${}^k\vec{s}$;

- плотность распределения недоскока $z_{\vec{s}^k}$:

$$e_{\vec{s}^k}(x) = \frac{1}{m_{\vec{s}^k}} \int_x^{\infty} \alpha_{\vec{s}^k}(y)dy, \qquad (14)$$

$$m_{\vec{s}^k} = \int_0^{\infty} x\alpha_{\vec{s}^k}(x)dx,$$

где $\alpha_{\vec{s}^k}(x)$ - плотность распределения времени пребывания процесса $\phi_N(t)$ в $\vec{s}$-состоянии, при условии последующего перехода в смежное состояние $\vec{s}^k$.

Определим вероятность одновременного выполнения неравенств:

$$z_{k_{\vec{s}}} > z_k,\, z_k < x\,.$$

Вследствие независимости величин $z_{k_{\vec{s}}}$ и z_k получим

$$\mathrm{P}\left[z_{k_{\vec{s}}} > z_k < x\right] = \int_0^x \left[1 - \mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(y)\right] e_k(y)dy = \pi_{\vec{s}^k} \cdot \mathrm{E}_{\vec{s}^k}(x). \qquad (15)$$

Здесь

$$\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x) = \int_0^x e_{k_{\vec{s}}}(y)dy,$$

$$\mathrm{E}_{\vec{s}^k}(x) = \int_0^x e_{\vec{s}^k}(y)dy,$$

$\pi_{\vec{s}k}$ - одношаговая вероятность перехода из состояния $\vec{s}$ в состояние $\vec{s}^k$.

После дифференцирования обеих частей уравнения (15) с учетом выражения (12) получим

$$\mathrm{A}_{\vec{s}k}(x) = 1 - \frac{m_{\vec{s}k}}{\pi_{\vec{s}k} m_k}\left(1 - \mathrm{A}_k(x)\right)\cdot\left(1 - \mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x)\right). \qquad (16)$$

Здесь

$$\mathrm{A}_k(x) = \int_0^x \alpha_k^{[s_k]}(y)dy.$$

Из условий (2) и (3) следует, что $\mathrm{A}_{\vec{s}k}(0) = 0,\ \mathrm{A}_k(0) = 0,\ \mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(0) = 0.$ Поэтому

$$\frac{m_{\vec{s}k}}{\pi_{\vec{s}k} m_k} = 1$$

Тогда формулу (16) можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{A}_{\vec{s}k}(x)=1-\overline{\mathrm{A}}_k(x)\cdot\overline{\mathrm{E}}_{k_{\vec{s}}}(x), \tag{17}$$

где

$$\overline{\mathrm{A}}_k(x)=1-\mathrm{A}_k(x),\ \overline{\mathrm{E}}_{k_{\vec{s}}}(x)=1-\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x).$$

Найдем функцию распределения $\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x)$:

$$\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x)=\int_0^x e_{k_{\vec{s}}}(y)dy=\frac{1}{m_{k_{\vec{s}}}}\int_0^x dy\int_y^\infty \alpha_{k_{\vec{s}}}(z)dz.$$

Обозначив $\overline{\mathrm{A}}_{k_{\vec{s}}}(x)=\int_x^\infty \alpha_{k_{\vec{s}}}(y)dy$, получим

$$\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x)=\frac{1}{m_{k_{\vec{s}}}}\int_0^x \overline{\mathrm{A}}_{k_{\vec{s}}}(y)dy.$$

Плотность распределения $\alpha_{k_{\vec{s}}}(x)$ времени пребывания процесса ${}^k\phi_N(t)$ в состоянии ${}^k\vec{s}$ равна плотности распределения длительности импульсов потока совпадения, заданного вектором ${}^k\vec{s}$. Согласно соотношению (11) плотность $\alpha_{k_{\vec{s}}}(x)$ равна:

$$\alpha_{k_{\vec{s}}}(x)=\frac{P^{(2)}_{k_{\vec{s}}}(x)}{\mu_{k_{\vec{s}}}} \tag{18}$$

Здесь

$$P_{k_{\vec{s}}}(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^N p_i(x),$$

$$p_i(x)=\mu_i\int_x^\infty (y-x)\alpha_i^{[s_i]}(y)dy,$$

$$\mu_{k_{\vec{s}}}=-P^{(1)}_{k_{\vec{s}}}(0).$$

Тогда $\alpha_{k_{\vec{s}}}(x)=-P^{(2)}_{k_{\vec{s}}}(x)\Big/P^{(1)}_{k_{\vec{s}}}(0)$ и

$$\mathrm{A}_{k_{\vec{s}}}(x)=\int_0^x \alpha_{k_{\vec{s}}}(y)dy = 1-P_{k_{\vec{s}}}^{(1)}(x)\Big/P_{k_{\vec{s}}}^{(1)}(0). \tag{19}$$

Следовательно

$$\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x)=\frac{1}{m_{k_{\vec{s}}}P_{k_{\vec{s}}}^{(1)}(0)}\int_0^x P_{k_{\vec{s}}}^{(1)}(y)dy=\frac{P_{k_{\vec{s}}}(x)-P_{k_{\vec{s}}}(0)}{m_{k_{\vec{s}}}P_{k_{\vec{s}}}^{(1)}(0)}. \tag{20}$$

Математическое ожидание $m_{k_{\vec{s}}}$ времени пребывания процесса ${}^{k}\phi_N(t)$ в ${}^{k}\vec{s}$ -состоянии равно средней длительности $m_{1^{k}\vec{s}}$ импульса совпадения, которую можно найти по формуле (9) при $\delta=0$:

$$m_{1^{k}\vec{s}}=P_{k_{\vec{s}}}(0)\big/\mu_{k_{\vec{s}}}=-P_{k_{\vec{s}}}(0)\Big/P_{k_{\vec{s}}}^{(1)}(0).$$

Подставив выражение для $m_{1^{k}\vec{s}}$ в формулу (20), получим:

$$\mathrm{E}_{k_{\vec{s}}}(x)=1-P_{k_{\vec{s}}}(x)\big/P_{k_{\vec{s}}}(0). \tag{21}$$

Выразим функцию распределения $\mathrm{A}_k(x)$ через вероятность $p_k(x)$, определяемую выражением (4). Для этого по аналогии с (18) запишем

$$\alpha_k^{[s_k]}(x)=\mu_k^{-1}p_k^{(2)}(x),$$

$$\mathrm{A}_k(x)=\mu_k^{-1}\cdot\left(p_k^{(1)}(x)-p_k^{(1)}(0)\right),$$

$$\mu_k=-p_k^{(1)}(0).$$

Тогда

$$\mathrm{A}_k(x)=1-p_k^{(1)}(x)\big/p_k^{(1)}(0). \tag{22}$$

Подставив выражения (21) и (22) в (17) получим формулу для искомой условной переходной функции распределения

$$A_{\vec{s}k}(x)=1-\frac{p_k^{(1)}(x)\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{N}p_i(x)}{\mu_k\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{N}p_i(0)} \tag{23}$$

Обозначим

$$a_{\vec{s}k}(x) = -p_k^{(1)}(x) \prod_{i=1, i\neq k}^{N} p_i(x) > 0 \tag{24}$$

Учитывая, что $p_k^{(1)}(0) = -\mu_k$, получим

$$a_{\vec{s}k}(0) = \mu_k \prod_{i=1, i\neq k}^{N} p_i(0) > 0 \tag{25}$$

и окончательно

$$\mathrm{A}_{\vec{s}k}(x) = 1 - \frac{a_{\vec{s}k}(x)}{a_{\vec{s}k}(0)}. \tag{23a}$$

Одношаговые переходные вероятности

Найдем *вероятность перехода процесса* $\phi_N(t)$ *за один шаг из состояния* $\vec{s}$ *в смежное по* k*-ой компоненте состояние* $\vec{s}^{\,k}$. Знание этих вероятностей достаточно для определения матрицы переходных вероятностей, поскольку вероятности переходов в несмежные состояния, отличающиеся более чем одной компонентой, равны нулю. Это следует из условия ординарности суммарного потока точек, образованного моментами появления импульсов парциальных потоков.

Прежде чем перейти к определению вероятности $\pi_{\vec{s}k}$, найдем *функцию распределения* $\mathrm{A}_{\vec{s}}(x)$ *времени пребывания процесса* $\phi_N(t)$ *в состоянии, фиксируемом вектором* $\vec{s}$. По аналогии с выражением (19) запишем:

$$\mathrm{A}_{\vec{s}}(x) = 1 - P_{\vec{s}}^{(1)}(x) \big/ P_{\vec{s}}^{(1)}(0). \tag{26}$$

Здесь

$$P_{\vec{s}}(x) = \prod_{i=1}^{N} p_i(x).$$

Найдем производную

$$P_{\vec{s}}^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{N} \left[p_k^{(1)}(x) \sum_{i=1, i\neq k}^{N} p_i(x) \right],$$

или, с учетом (24)

$$P_{\vec{s}}^{(1)}(x) = -\sum_{k=1}^{N} a_{\vec{s}k}(x).$$

Очевидно, что

$$P_{\vec{s}}^{(1)}(0) = -\sum_{k=1}^{N} a_{\vec{s}k}(0).$$

Тогда

$$\mathrm{A}_{\vec{s}}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_{\vec{s}k}(x) \Big/ \sum_{k=1}^{N} a_{\vec{s}k}(0). \qquad (26a)$$

Т е о р е м а . ***Одношаговая вероятность перехода процесса*** $\phi_N(t)$ ***из состояния*** $\vec{s}$ ***в смежное состояние*** $\vec{s}k$ **равна**

$$\pi_{\vec{s}k} = a_{\vec{s}k}(0) \Big/ \sum_{k=1}^{N} a_{\vec{s}k}(0). \qquad (27)$$

Для доказательства покажем допустимость и единственность представления переходных вероятностей соотношением (27).

Функция распределения $\mathrm{A}_{\vec{s}}(x)$ времени пребывания процесса $\phi_N(t)$ в $\vec{s}$-состоянии может быть выражена через условные переходные функции распределения $\mathrm{A}_{\vec{s}k}(x)$:

$$\mathrm{A}_{\vec{s}}(x) = \sum_{k=1}^{N} \pi_{\vec{s}k} \mathrm{A}_{\vec{s}k}(x). \qquad (28)$$

Подставив формулы (27) и (23а) в (28), убеждаемся, что выражение (28) тождественно равно (26а). Тем самым доказана допустимость представления переходных вероятностей соотношением (27).

Докажем, что выражение (27) задает вероятность $\pi_{\vec{s}k}$ единственным образом. Допустим, что это не так и существуют вероятности $p_{\vec{s}k}$, обеспечивающие выполнение равенства

$$\mathrm{A}_{\vec{s}}(x) = \sum_{k=1}^{N} p_{\vec{s}k} \mathrm{A}_{\vec{s}k}(x). \qquad (29)$$

Предположим, что $\pi_{\vec{s}k} \neq p_{\vec{s}k}$, $k = \overline{1, N}$. Вычитая (29) из (28), получим

$$\sum_{k=1}^{N}(\pi_{\vec{s}k} - p_{\vec{s}k}) = 0$$

Запишем систему уравнений

$$\pi_{\vec{s}k} = p_{\vec{s}k} - \sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} \left(\pi_{\vec{s}j} - p_{\vec{s}j}\right) \cdot \mathrm{A}_{\vec{s}j}(x) / \mathrm{A}_{\vec{s}k}(x),\ k = \overline{1, N}.$$

Величины $\pi_{\vec{s}k}$, $p_{\vec{s}k}$ не зависят от переменной x. Следовательно

$$\frac{d}{dx} \sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} \left(\pi_{\vec{s}j} - p_{\vec{s}j}\right) \cdot \mathrm{A}_{\vec{s}j}(x) / \mathrm{A}_{\vec{s}k}(x) = 0,\ k = \overline{1, N}. \tag{30}$$

Обозначим

$$\eta_{jk}(x) = \frac{d}{dx} \frac{\mathrm{A}_{\vec{s}j}(x)}{\mathrm{A}_{\vec{s}k}(x)},\ c_j = \pi_{\vec{s}j} - p_{\vec{s}j}.$$

Тогда систему (30) можно привести к виду

$$\sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} c_j \eta_{jk}(x) = 0,\ k = \overline{1, N},\ x \in \mathbb{R}_+ \tag{31}$$

или в матричной форме

$$\mathbb{Z}\mathbb{C} = 0,\ \mathbb{Z} = \left\| \eta_{jk} \right\|_{N\times N},\ \mathbb{C} = \left(c_1, ..., c_N\right)^{\mathrm{T}}. \tag{32}$$

Известно, что однородная система линейных уравнений имеет тривиальное решение $\mathbb{C} = 0$. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение, необходима и достаточно, чтобы ее определитель был тождественно равен нулю. Но элементы определителя - функции переменной $x \in \mathbb{R}_+$. Равенство определителя нулю может выполняться лишь случайным образом при некоторых x из полуинтервала $[0, \infty)$. Поэтому можно считать, что система (32) имеет гарантированное тривиальное решение и

$$c_j = \pi_{\vec{s}j} - p_{\vec{s}j} = 0,\ j = \overline{1, N}.$$

Тем самым доказана единственность переходных вероятностей $\pi_{\vec{s}k}$ и теорема в целом.

Заметим, что согласно (24) и (25) $a_{\vec{s}k}(0) > 0$ и переходные вероятности (27) гарантировано ненулевые. Следовательно, цепь Маркова эргодическая, что подтверждает сделанные ранее предположения.

Литература

1. Голик Ф. В. Вопросы теории случайных многомерных импульсных потоков. // Труды Второй Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы фундаментальных наук». Том 1, часть 2 «Техносфера». М. 1994.

2. Сильвестров Д. С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний (основы расчета функциональных и надежностных характеристик стохастических систем). М.: Сов. радио, 1980.- 272 с.

3. Седякин Н.М. Элементы теории случайных импульсных потоков. М.: Сов. радио, - 1965.