УДК 537.874

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Д. В. Лосев, Д. С. Бардашов, А. Г. Быков

Томский государственный университет, 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Статья поступила в редакцию 28 января 2017 г., после доработки – 6 февраля 2017 г.

Аннотация: Рассматривается задача распространения плоской волны с произвольной временной зависимостью в безграничной нелинейной среде. Решение этой задачи позволяет выявить общие закономерности преобразования формы волны и ее спектрального состава в зависимости от формы исходного сигнала и вида нелинейной характеристики. Предложенный подход, в отличие от классического, не приводит к неограниченному возрастанию амплитуды волны при больших значениях временной и пространственных переменных.

Ключевые слова: нелинейные среды, распространение волн, метод вариации параметров.

Abstract: We consider the problem of propagation of a plane wave with arbitrary time dependence in infinite nonlinear medium. The solution of this problem allows revealing General regularities the transformation of waveform and its spectral composition depending on the original signal and nonlinear characteristics of medium. The proposed approach, unlike classical one, does not lead to unlimited increase of the wave amplitude for large values of time and spatial variables.

Keywords: nonlinear media, wave propagation, method of parameters variation.

Введение

С развитием технических возможностей по созданию генераторов высокомощного и сверхширокополосного излучения (в частности, лазеров в оптике) становятся все более актуальными задачи описания распространения излучения в сплошной нелинейной среде. Среди них выделим проблему использования эффектов, возникающих при взаимодействии излучения с биологическими тканями, для своевременной диагностики различных заболеваний [1-3].

В последнее время для целей медицинской диагностики начинает использоваться терагерцовый диапазон волн. Его привлекательность вызвана возможностью исследования вращательных спектров различных органических молекул [4]. Для преобразования частоты излучения в терагерцовый диапазон предпринимаются попытки использования сосредоточенных нелинейных элементов [5], однако ввиду малого вклада одиночной нелинейности в энергетику сигнала это направление сталкивается с существенными трудностями. Одним из способов их преодоления является использование протяженных нелинейных сред, в которых происходит накопление нелинейных эффектов, в результате чего возможно более гибкое управление формой и другими характеристиками сигнала.

Математически задачи анализа преобразования сигнала в сплошной нелинейной среде сводятся к решению нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, точные методы решения которых, за исключением простейших случаев, практически отсутствуют. Поэтому магистральным направлением исследования нелинейных сред является спектральный подход – своеобразный аналог метода комплексных амплитуд [6]. Он основан на представлении искомой зависимости в виде $\sum_n A_n e^{i\omega_n t}$, где «комплексные амплитуды» A_n зависят от пространственных координат и находятся приближенными методами, основанными на малости изменения характеристик волны при распространении в среде, ω_n – исходная частота и ее кратные гармоники, выбираемые по виду нелинейной характеристики на основе физических представлений. Применение этого подхода возможно при 1) гармонической (узкополосной) временной зависимости сигнала; 2) полиномиальной аппроксимации нелинейной характеристики (обычно рассматриваются полиномы второго и третьего порядка).

Использование в ходе решения метода малых возмущений часто приводит к неограниченному возрастанию получаемой зависимости при увеличении временной и пространственных переменных. Подобный эффект хорошо известен в теории колебаний, где разработаны эффективные методы устранения соответствующих секулярных членов [7]. Кроме того, существующие подходы базируются на решении однородных уравнений, т.е. описанием возможных типов волн. Реализуемые же процессы адекватно описываются лишь неоднородными уравнениями с заданным источником. В данной работе делается попытка построения методов, свободных от указанных ограничений, на примере задачи о распространении излучения одномерного точечного источника с произвольной временной зависимостью в нелинейной среде.

1. Метод вариации параметров

Будем исходить из одномерного волнового уравнения в скалярном приближении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(t)\delta(x) + \gamma_1 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial t^2} + \gamma_2 \frac{\partial g(u)}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ описывает временную форму сигнала, v – фазовая скорость в фоновой линейной среде, функции $f(u)$ и $g(u)$ описывают нелинейные свойства фазовой скорости и коэффициента поглощения среды, γ_1 и γ_2 – малые числовые параметры, характеризующие вклад нелинейных характеристик. Будем считать среду безграничной, а начальные условия однородными.

Поиск решения в виде прямого разложения по степеням малого параметра γ

$$u(x,t,\gamma) = u_0(x,t) + \gamma_1 u_1(x,t) + \gamma_2 u_2(x,t) + \ldots$$

дает последовательность приближений

$$u_0(x,t) = -\frac{v}{2}\Phi\left(t - |x|/v\right)\chi\left(t - |x|/v\right), \qquad (2)$$

где $\Phi(t)=\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau$, $\chi(t)$ – функция Хевисайда,

$$u_1(x,t)=-\frac{v}{2}\chi(t-|x|/v)\left[vf\left(-\frac{v}{2}\Phi(t-|x|/v)\right)+|x|\frac{\partial}{\partial t}f\left(-\frac{v}{2}\Phi(t-|x|/v)\right)\right],$$

$$u_2(x,t)=-\frac{v}{2}\chi(t-|x|/v)\cdot\left[v\int\limits_0^t g\left(-\frac{v}{2}\Phi(\tau-|x|/v)\right)d\tau+|x|g\left(-\frac{v}{2}\Phi(t-|x|/v)\right)\right].$$

Таким образом, уже первые приближения содержат слагаемые, пропорциональные $|x|$ (секулярные члены), что ограничивает применимость этих формул условиями $\gamma_1|x|<<1$, $\gamma_2|x|<<1$, т.е областью вблизи источника.

Для устранения этой проблемы применим метод вариации параметров. В качестве исходной формы выберем решение (2) невозмущенного уравнения (1) при $\gamma_1=\gamma_2=0$. Будем варьировать амплитуду и время запаздывания сигнала (2) и введем в рассмотрение дополнительную аддитивную поправку. В результате решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x,t)=-\frac{v}{2}\left[m(x,t)\Phi(\tau(x,t))+s(x,t)\right]\chi(\tau(x,t)), \tag{3}$$

содержащем три подлежащих определению функции $m(x,t)$, $\tau(x,t)$ и $s(x,t)$, имеющие физический смысл коэффициента прохождения, запаздывания волны за счет изменения ее фазовой скорости нелинейной средой и рассеянной волны соответственно. Функцию $\tau(x,t)$ можно связать с эквивалентным показателем преломления нелинейной среды $n(x,t)$ с помощью соотношения

$$\tau(x,t)=t-\frac{|x|}{v}n(x,t). \tag{4}$$

Подчеркнем, что взаимосвязь между этими функциями в (3) в большой степени произвольна, но отражает основные представления об изменениях характеристик плоской волны при распространении в линейной неоднородной среде и надежды на адекватное описание процессов в нелинейной среде.

Подстановка в уравнение (1) зависимости (3) и ее требуемых производных преобразует его к виду

$$
\begin{gathered}
\left[\Phi\left(m_{xx}-\frac{m_{tt}}{v^2}\right)+\left(s_{xx}-\frac{s_{tt}}{v^2}\right)+\varphi\left(2m_x\tau_x-\frac{2}{v^2}m_t\tau_t+m\tau_{xx}-\frac{1}{v^2}m\tau_{tt}\right)+\right.\\
\left.+\varphi' m\left(\tau_x^2-\frac{\tau_t^2}{v^2}\right)\right]\chi+\left[2\Phi\left(m_x\tau_x-\frac{1}{v^2}m_t\tau_t\right)+2\varphi m\left(\tau_x^2-\frac{\tau_t^2}{v^2}\right)+\right.\\
\left.+2\left(s_x\tau_x-\frac{1}{v^2}s_t\tau_t\right)+(m\Phi+s)\left(\tau_{xx}-\frac{\tau_{tt}}{v^2}\right)\right]\delta+(m\Phi+s)\cdot\left(\tau_x^2-\frac{\tau_t^2}{v^2}\right)\delta'= \qquad (5)\\
=-\frac{v}{2}\gamma_1 f''\cdot(m_t\Phi+m\varphi\tau_t+s_t)^2\chi+\gamma_1 f'\cdot\left(m_{tt}\Phi+2m_t\varphi\tau_t+m\varphi'\tau_t^2+m\varphi\tau_{tt}+s_{tt}\right)\chi+\\
+2(m_t\Phi+m\varphi\tau_t+s_t)(\gamma_1 f'\tau_t\delta+\gamma_2 g'\chi)-\frac{2}{v}(\gamma_1 f\tau_{tt}+\gamma_2 g\tau_t)\delta-\frac{2}{v}\gamma_1 f\tau_t^2\delta'.
\end{gathered}
$$

Здесь для упрощения выражений у функций $\Phi(\tau(x,t))$, $\varphi(\tau(x,t))$, $\chi(\tau(x,t))$, $\delta(\tau(x,t))$, $u(x,t)$, $m(x,t)$, $s(x,t)$, $\tau(x,t)$ опущены аргументы и использованы нижние индексы для обозначения соответствующих производных, например, $\varphi_x \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $m_{tt} \equiv \dfrac{\partial^2 m}{\partial t^2}$. Обозначения же вида φ', f'' означают производные по всему аргументу.

Требуемые условия для нахождения неизвестных функций $\tau(x,t)$, $m(x,t)$ и $s(x,t)$ получим, приравнивая коэффициенты при $\delta'(\tau(x,t))$, $\delta(\tau(x,t))$ и $\chi(\tau(x,t))$ в левой и правой частях уравнения (5).

2. Вычисление функции $\tau(x,t)$

Для определения функции $\tau(x,t)$ имеем уравнение

$$\tau_x^2-\frac{1}{v^2}\tau_t^2=\gamma_1 F\left(-\frac{v}{2}[m\Phi+s]\right)\tau_t^2, \qquad (6)$$

где $F(x)=f(x)/x$. В приближении отсутствия взаимного влияния неизвестных функций, когда можно положить $m=1$, $s=0$, оно имеет общий интеграл [8]

$$\tau=\psi\left(t\pm\frac{x}{v}\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F\left(-\frac{v}{2}\Phi(\tau)\right)}\right),$$

где ψ – произвольная функция. В качестве дополнительного условия, необходимого для конкретизации решения, используем случай линейной среды: при $\gamma_1 = 0$ $\tau(x,t) = t - |x|/v$. Подстановка этого условия дает $\psi(\tau) = \tau$, т.е. функция τ находится из решения трансцендентного уравнения

$$\tau = t - \frac{|x|}{v}\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F\left(-\frac{v}{2}\Phi(\tau)\right)} \tag{7}$$

или в первом приближении

$$\tau(x,t) \approx t - \frac{|x|}{v}\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F\left(-\frac{v}{2}\Phi\left(t-\frac{|x|}{v}\right)\right)}. \tag{8}$$

3. Вычисление функции $m(x,t)$

Для нахождения функции $m(x,t)$ приравняем в уравнении (5) коэффициенты при $\delta(\tau(x,t))$ с учетом соотношения (8). При этом предположим по аналогии с линейным случаем, что рассеянное назад поле будет мало вследствие малости контраста эквивалентного показателя преломления нелинейной среды, что позволяет принять функцию $s(x,t) = 0$. Также будем удерживать в уравнении только линейные по параметрам γ_1 и γ_2 члены. В результате уравнение для $m(x,t)$ принимает вид

$$m_x + \frac{m_t}{v} = \frac{\gamma_1 v}{2Q}\frac{\varphi}{\Phi}\left(F\left(-\frac{v}{2}\Phi\right) - f'\left(-\frac{v}{2}\Phi\right)\right) + \frac{\gamma_2}{\Phi} g\left(-\frac{v}{2}\Phi\right), \tag{9}$$

где у функций φ, Φ опущен аргумент $t - |x|/v$, «штрих» обозначает производную по всему аргументу, $Q = 1 - \dfrac{\gamma_1 |x| v^2 F' \cdot \varphi}{4\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}}$.

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения с частными производными первого порядка имеет вид [8]

$$m(x,t) = \frac{|x|}{\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}}\left\{\frac{\gamma_2 g}{\Phi} + \frac{\gamma_1 v \varphi}{2\Phi Q}\left(F - f'\right)\right\} + \Psi\left(t - \frac{|x|}{v}\right).$$

Находя из условия $m(x,t) = 1$ при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ произвольную функцию Ψ, получаем

$$m(x,t)=1+\frac{|x|}{\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}}\left\{\frac{\gamma_2 g}{\Phi}+\frac{\gamma_1 v\varphi}{2\Phi Q}\left(F-f'\right)\right\}. \qquad (10)$$

В последних уравнениях нелинейные характеристики зависят от аргумента $-\frac{v}{2}\Phi\left(t-\frac{|x|}{v}\right)$. Учтем, что в процессе решения мы ограничивались только линейными членами по параметрам γ_1 и γ_2, и, поскольку $1+z\approx e^z$, можем записать решение в эквивалентной форме

$$m(x,t)=\exp\left(\frac{\gamma_2 g|x|}{\Phi\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}}\right)\exp\left[\frac{|x|}{2\Phi}\frac{\gamma_1 v\varphi\left(F-f'\right)}{\left(\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}-\frac{\gamma_1|x|v^2 F'\cdot\varphi}{4}\right)}\right]. \qquad (11)$$

Отметим, что, подобно случаю линейной среды, имеет место ослабление волны за счет функции нелинейного поглощения $g\left(-v\Phi(\tau)/2\right)$ (при $\gamma_2=0$ оно отсутствует), хотя на величину ослабления также оказывают влияние нелинейные свойства фазовой скорости, представленные функцией $F\left(-v\Phi(\tau)/2\right)$.

При анализе формулы (10) может возникнуть подозрение о неограниченном возрастании амплитуды волны с увеличением расстояния (появлении секулярного члена). Поэтому проанализируем поведение полученного решения на больших расстояниях. В случае отсутствия у среды нелинейного поглощения $(\gamma_2=0)$, удобнее рассматривать решение в форме (10)

$$1+\frac{|x|\gamma_1 v\varphi}{\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}}\frac{\left(F-f'\right)}{2\Phi\left(1-\frac{\gamma_1|x|v^2 F'\cdot\varphi}{4\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}}\right)}\underset{|x|\to\infty}{\to}1+\frac{\left(F-f'\right)}{\left(-\frac{vF'\Phi}{2}\right)}=0.$$

При этом учтено тождество $-\frac{v}{2}\Phi F'=f'-F$, получающееся путем дифференцирования по аргументу $z=-\frac{v}{2}\Phi$ определяющего функцию F

соотношения $zF(z) = f(z)$. В случае же нелинейной проводимости, по формуле (11) имеем

$$m(x,t)\big|_{|x|\to\infty} \approx \exp\left(\frac{\gamma_2 g|x|}{\Phi\sqrt{1+\gamma_1 v^2 F}} - 1\right),$$

причем из соображений уменьшения энергии сигнала при распространении его в проводящей среде знак показателя экспоненты будет отрицательным при любом виде нелинейной характеристики.

4. Вычисление функции $s(x,t)$

Приравнивая коэффициенты при $\chi(\tau(x,t))$ в уравнении (5) с учетом найденных приближенно функций $\tau(x,t)$ и $m(x,t)$ и, пренебрегая малыми слагаемыми, получаем уравнение для нахождения функции $s(x,t)$

$$s_{xx} - \frac{s_{tt}}{v^2} + \frac{2\varphi}{\Phi v}\left(s_x + \frac{1}{v}s_t\right) = 2\gamma_1\left(\frac{\varphi^2}{\Phi} - \varphi'\right)(F - f') - \gamma_2\varphi(G - g'),$$

где $G(z) = g(z)/z$.

Для решения этого уравнения сделаем замену неизвестной функции $s(x,t) = w(x,t)\Phi(\tau)$. В результате для функции $w(x,t)$ имеем волновое уравнение

$$w_{xx} - \frac{w_{tt}}{v^2} = 2\gamma_1\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)'(f' - F) + \gamma_2\frac{\varphi}{\Phi}(g' - G).$$

Его решение [9]

$$w(x,t) = -\frac{v}{2}\int_0^t dt_1 \int_{x-v(t-t_1)}^{x+v(t-t_1)} dx_1 \left\{2\gamma_1\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)'(f' - F) + \gamma_2\frac{\varphi}{\Phi}(g' - G)\right\}$$

описывает процесс рассеяния волны неоднородностями, возникающими при прохождении волной нелинейной среды, а функция $w(x,t)$ имеет смысл коэффициента рассеяния (отражения) – отношения рассеянного поля к падающему $\Phi(\tau)$.

5. Численное моделирование и анализ результатов

На основе полученных соотношений было проведено численное моделирование искажения волны в нелинейной среде при учете функции $\tau(x,t)$, получаемой в результате итерационного решения уравнения (7), функции $m(x,t)$, вычисленной по формуле (11), и $s(x,t)=0$. Для примера на рисунках 1, 2 представлена форма волны, преобразованной квадратичной нелинейностью ($f(x)=x^2$, $g(x)=0$), в зависимости от расстояния от источника, а также соответствующий спектр сигнала. Отображены следующие величины: u_0 – плоская волна при отсутствии нелинейности в среде, вычисляемая по формуле (2), u_8 – восьмая итерация сигнала, $n(x,t)$ – эффективный показатель преломления, связанный с функцией $\tau(x,t)$ выражением (4), а также спектр сигнала u_8. При этом рис. 1 соответствует гармоническому сигналу $\varphi(t)=A\cos\omega t$, $\omega=2\pi f$, $f=1\,\textit{ГГц}$, $A=0.25$, рис. 2 – гауссовскому импульсу $\varphi(t)=Ae^{-(t/t_0)^2}\sin\omega t$, где величины $t_0=3\,\textit{нс}$, $f=1\,\textit{ГГц}$, $A=10$ – характеризуют длительность, частоту заполнения и амплитуду импульса соответственно.

В результате численного моделирования установлено, что спектр гармонической волны в квадратичной среде обладает не только второй гармоникой, как следует из прямого разложения, но и другими составляющими на кратных частотах. При распространении волны в нелинейной среде уровень этих гармоник подвержен значительным изменениям, включая полное исчезновение некоторых из них. Кроме того, на больших расстояниях наблюдается наличие в спектре гармоник, не находящихся с основной в кратном отношении. Для гауссовского импульса, представляющего собой пример широкополосного сигнала, в результате наложения различных составляющих эти эффекты сглажены. В обоих случаях наблюдается существенное расширение спектра сигнала за счет накопления нелинейных эффектов при распространении волны в среде.

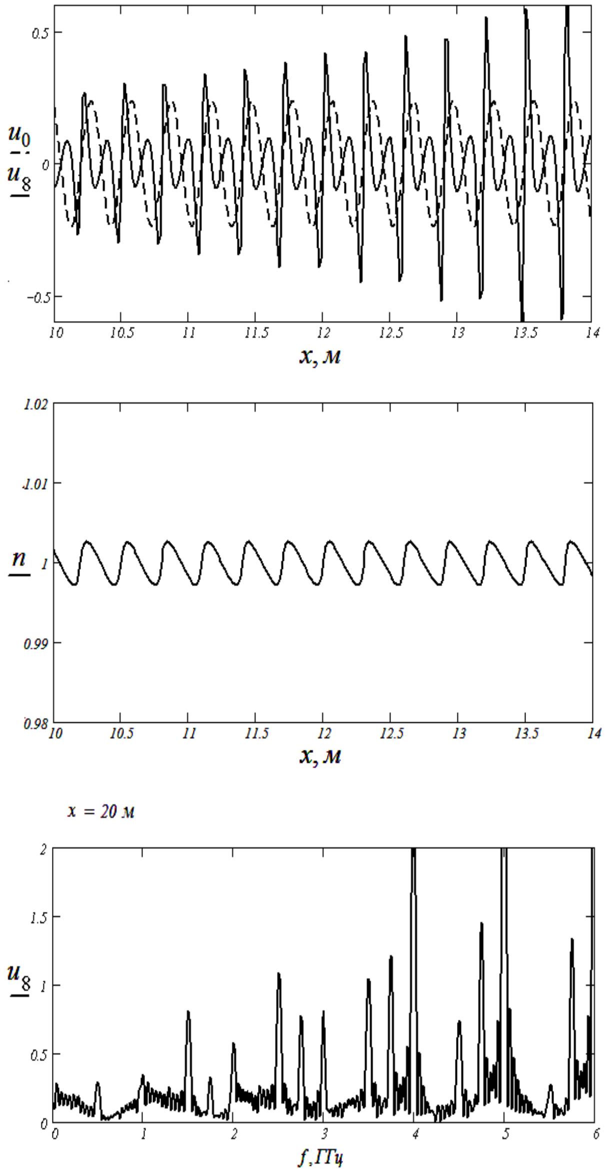

Рис. 1.

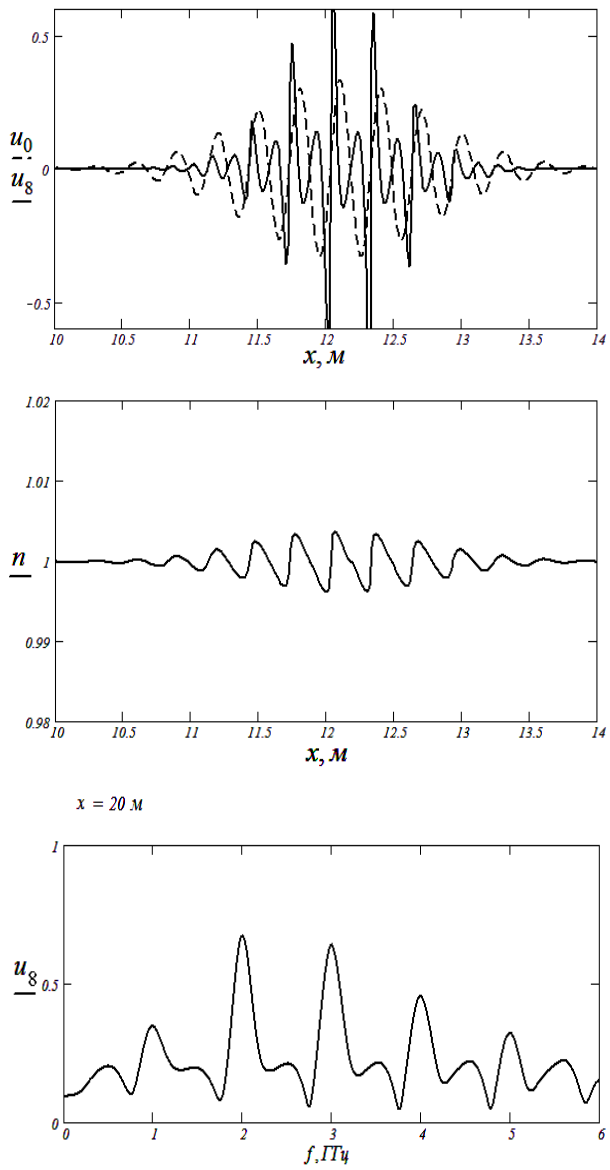

Рис. 2.

Заключение

Предложенное решение задачи позволяет выявить общие закономерности преобразования формы волны в нелинейной среде в зависимости от формы исходного сигнала и вида нелинейной характеристики. Используемую для решения процедуру можно рассматривать как перенос методов нелинейной геометрической оптики [6] из спектральной во временную область.

Также можно отметить наличие в нелинейной среде ослабления/усиления волны даже при отсутствии у среды проводимости, что позволяет говорить об эквивалентной проводимости (переменного знака) нелинейной среды. Упоминание такого эффекта в литературе не обнаружено.

Таким образом, строгое математическое рассмотрение даже простейшей задачи выявило новые эффекты и показало, что некритичный перенос методов, разработанных для линейных сред и сосредоточенных нелинейных элементов, которые составляют основу существующего подхода к проблеме, может привести к значительному искажению при описании эффектов распространения волн в нелинейных средах.

Литература

1. Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П.Усленги. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
2. Якубов В.П., Лосев Д.В., Мальцев А.И. Диагностика нелинейностей по возмущениям рассеянного поля // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 7. С. 645-651.
3. Быков А.Г., Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Рассеяние волн нелинейным объектом // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58. № 10-3. – С. 9-11.
4. Вакс В. Л., Анфертьев В. А., Гольцман Г. Н., Пентин И. В., Третьяков И. В. ТГц спектрометр высокого разрешения на основе наноструктурированных полупроводниковых и сверхпроводниковых устройств // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал), № 1, 2016. http://jre.cplire.ru/jre/jan16/12/text.pdf
5. Семенихина Д. В., Чиков Н. И., Семенихин А. И., Горбатенко Н. Н. Электродинамический анализ и конструктивный синтез нелинейной микрополосковой решетки с подложкой из метаматериала // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал), № 7, 2015. http://jre.cplire.ru/jre/jul15/8/text.pdf

6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 384 с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 526 с.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.–416 с.
9. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

Ссылка на статью:
Д. В. Лосев, Д. С. Бардашов, А. Г. Быков. Метод вариации параметров в задаче распространения волн в нелинейных средах. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №2. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/feb17/13/text.pdf