

УДК 621.391.01

АЛГОРИТМЫ ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ БАЗИСНЫМ ФУНКЦИЯМ ФУРЬЕ

Л. Е. Назаров, М. А. Щеглов

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
Фрязинский филиал, 141120, г. Фрязино Московской области, пл. Введенского 1

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2017 г.

Аннотация. Приведены описания алгоритмов посимвольного когерентного и некогерентного приёма (оптимального и подоптимального) дискретных ортогональных сигналов, соответствующих базисным функциям Фурье. Основу разработанных алгоритмов посимвольного приема рассматриваемых сигналов составляет алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша-Адамара и алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Фурье. Подоптимальные алгоритмы посимвольного приема не требуют значения энергетического параметра канала и являются более простыми по сложности реализации по отношению к оптимальным алгоритмам посимвольного приема.

Ключевые слова: посимвольный прием, дискретные сигналы, базис Фурье, базис Уолша-Адамара.

Abstract. The symbol-by-symbol decoding algorithms (optimal and suboptimal, coherent and noncoherent) for orthogonal basic Fourier signals are presented in the article. The base of these algorithms is Fast Fourier Transformation and Fast Hadamard Transformation. The suboptimal decoding algorithms are simpler than optimal decoding algorithms concerning their complexity.

Key words: symbol-by-symbol, digital signals, FFT, FHT.

Введение

Правила обработки сигналов при их приеме в системах цифровой связи реализуют статистические критерии оптимальности [1]. Наиболее известное

правило обработки основано на использовании критерия максимального правдоподобия (прием “в целом”), обеспечивающего минимальную вероятность ошибочного приёма дискретных сообщений при условии их равновероятности [1,2].

Разработан ряд алгоритмов, реализующих правило приема “в целом”. Примером является алгоритм приёма Витерби [2], применяемый для сигналов, соответствующих помехоустойчивым свёрточным кодам [3]. Для дискретных сигналов с двоичной кодовой манипуляцией, формируемых на основе блоковых помехоустойчивых кодов в двоичном поле, разработаны вычислительные процедуры оптимального приёма, основу которых составляет алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша-Адамара (БПУ) [4].

В работах [5,6] приведены описания другого правила обработки при приеме дискретных сигналов на основе помехоустойчивых сверточных и блоковых кодов, минимизирующего вероятность ошибочного приема информационных символов передаваемых дискретных сообщений (правило посимвольного приема). Алгоритмы посимвольного приёма составляют основу приёма сигнальных конструкций, соответствующих наиболее эффективным помехоустойчивым кодам (турбо-коды, низкоплотностные коды) [7]. Основу разработанных алгоритмов посимвольного приема дискретных сигналов с двоичной фазовой манипуляцией на основе помехоустойчивых блоковых кодов в двоичном поле составляет также алгоритм БПУ [8,9].

Актуальной является проблема разработки эффективных алгоритмов посимвольного приёма дискретных сигналов с различными видами манипуляции. В статье приведены описания разработанных алгоритмов посимвольного приёма дискретных сигналов в виде базисных функций Фурье, соответствующих классу сигналов с частотной манипуляцией [10,11].

1. Постановка задачи

Пусть $\vec{m} = (a_{mi}; 0 \leq i < k)$ - последовательность информационных символов ($a_{mi} = 0,1$), задающая передаваемый сигнал \vec{S}_m из ансамбля базисных функций Фурье $\{\vec{S}\}$ с комплексными отсчётами в области видеочастоты [10]

$$\dot{S}_m(l) = \exp\left(\frac{j2\pi ml\alpha}{N}\right). \quad (1)$$

Здесь m - номер сигнала \vec{S}_m ($0 \leq m < 2^k$), последовательность \vec{m} является двоичным представлением номера m ; l - номер комплексных отсчетов сигналов ($0 \leq l < N$); объём ансамбля сигналов $\{\vec{S}\}$ равен $M = 2^k$; длительность сигналов $N = 2^k$. Значение параметра α определяет минимальное частотное разнесение $\Delta f = \frac{\alpha}{T}$ ($\alpha = 0.5$ или $\alpha = 1$), при котором дискретные сигналы \vec{S}_m и \vec{S}_i при $m \neq i$ являются ортогональными [1].

Обозначим $\vec{Y} = (\dot{y}_l; 0 \leq l < N)$ отсчеты (комплексные) прямого и квадратурного каналов в области видеочастоты на входе приемного устройства

$$\dot{y}_l = A \exp(j(2\pi ml\alpha / N + \varphi)) + \dot{n}(l). \quad (2)$$

Здесь A - амплитуда сигналов; φ - начальная фаза сигналов; $\dot{n}(l)$ - помеховые составляющие, статистически независимые, соответствующие аддитивному белому гауссовскому шуму с односторонней спектральной плотностью N_0 (АБГШ).

Если значение начальной фазы φ известно, то можно положить $\varphi = 0$ и реализуется когерентный приём, в этом случае $\alpha = 0.5$ и сигналы \vec{S}_m , \vec{S}_i при $m \neq i$ ортогональные [1]. Для неизвестной фазы φ реализуется некогерентный приём, в этом случае $\alpha = 1$ и сигналы \vec{S}_m , \vec{S}_i при $m \neq i$ ортогональные в усиленном смысле [1].

Процедуры приёма “в целом” (когерентный и некогерентный приём) основаны на вычислении множества корреляционных соотношений [1]

$$\dot{R}_h = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{y}(l) \dot{S}_h^*(l), \quad 0 \leq h < M. \quad (3)$$

Здесь $()^*$ - операция комплексного сопряжения.

При когерентном приёме “в целом“ используется множество $\{\dot{R}_h\}$ - дискретный сигнал \vec{S}_m , определяющий максимум в множестве $m = \arg(\max_{0 \leq h < M} \{\text{Re}(\dot{R}_h)\})$, соответствует переданному сигналу и информационной последовательности \vec{m} [1].

При некогерентном приёме “в целом“ используется множество $\{|\dot{R}_h|\}$ - дискретный сигнал \vec{S}_m , определяющий максимум в множестве $m = \arg(\max_{0 \leq h < M} \{|\dot{R}_h|\})$, соответствует переданному сигналу и информационной последовательности \vec{m} . Здесь $|\dot{R}_h| = \sqrt{(\text{Re}(\dot{R}_h))^2 + (\text{Im}(\dot{R}_h))^2}$ [1].

При посимвольном приёме информационных символов a_i вычисляются “мягкие” решения [7]

$$\lambda_i = \ln \frac{\Pr(a_i = 0 | \vec{Y})}{\Pr(a_i = 1 | \vec{Y})}. \quad (4)$$

Принимается решение $a_i = 0$, если $\lambda_i > 0$ и $a_i = 1$ в противном случае. Здесь $\Pr(a_i = \xi | \vec{Y})$, $\xi = 0,1$ - условная апостериорная вероятность символа a_i , задаваемая соотношением [5,6]

$$\Pr(a_i = \xi | \vec{Y}) = \sum_{\vec{h}: a_i = \xi} \Pr(\vec{h} | \vec{Y}), \quad (5)$$

$\Pr(\vec{h} | \vec{Y})$ - условная апостериорная вероятность передачи сигнала \vec{S}_h .

Суть задачи - разработка вычислительных процедур посимвольного приёма (4), (5) для ортогональных дискретных сигналов, соответствующих базисным функциям Фурье. Основу данных процедур составляют производительные алгоритмы быстрых преобразований в базисе Фурье и Уолша-Адамара [10,11].

2. Алгоритмы посимвольного приёма

Запишем апостериорные вероятности $\Pr(a_i = \xi | \vec{Y})$ с использованием формулы Байеса и соотношения (5) в виде [5,6]

$$\Pr(a_i = \xi | \vec{Y}) = \sum_{\vec{h}: a_i = \xi} \frac{p(\vec{Y} | \vec{h}) \Pr(\vec{h})}{p(\vec{Y})}. \quad (6)$$

Здесь $\Pr(\vec{h})$ - априорные вероятности передачи дискретных сигналов \vec{S}_h ; $p(\vec{Y} | \vec{h})$ - условная плотность вероятности реализации \vec{Y} для сигнала \vec{S}_h ; $p(\vec{Y})$ - плотность вероятности реализации \vec{Y} .

Для некогерентного приёма обозначение $p(\vec{Y} | \vec{h})$ соответствует усреднённой по φ условной плотности вероятности, полагая равномерное распределение начальной фазы $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$p(\vec{Y} | \vec{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\vec{Y}(\varphi) | \vec{h}) d\varphi. \quad (7)$$

После усреднения (7) по φ имеем [1]

$$p(\vec{Y} | \vec{h}) = L_1 I_0 \left(\frac{2A}{N_0} |\dot{R}_h| \right). \quad (8)$$

Здесь $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos(\varphi)) d\varphi$ - функция Бесселя первого рода 0-го порядка; L_1 - множитель, не зависящий от \vec{h} .

Для когерентного приёма имеем [1]

$$p(\vec{Y} | \vec{h}) = L_2 \exp \left(\frac{2A \operatorname{Re}(\dot{R}_h)}{N_0} \right). \quad (9)$$

Здесь L_2 - множитель, не зависящий от \vec{h} .

Таким образом, процедура оценки апостериорных вероятностей

$\Pr(a_i = \xi | \vec{Y})$ заключается в вычислении множества корреляций $\{\dot{R}_h\}$ (3), их нелинейном преобразовании с использованием соотношения (8) для некогерентного приёма и соотношения (9) для когерентного приёма и выполнении суммирования (6).

Вычисление множества корреляций $\{\dot{R}_h\}$ для случая некогерентного приема осуществляется с использованием алгоритма быстрого спектрального преобразования в базисе Фурье (БПФ) размерностью 2^k над реализацией \vec{Y} длительностью $N = 2^k$ [10]. Это повышает производительность обработки по отношению к прямому вычислению $\{\dot{R}_h\}$ в $2^k / k$ раз [10].

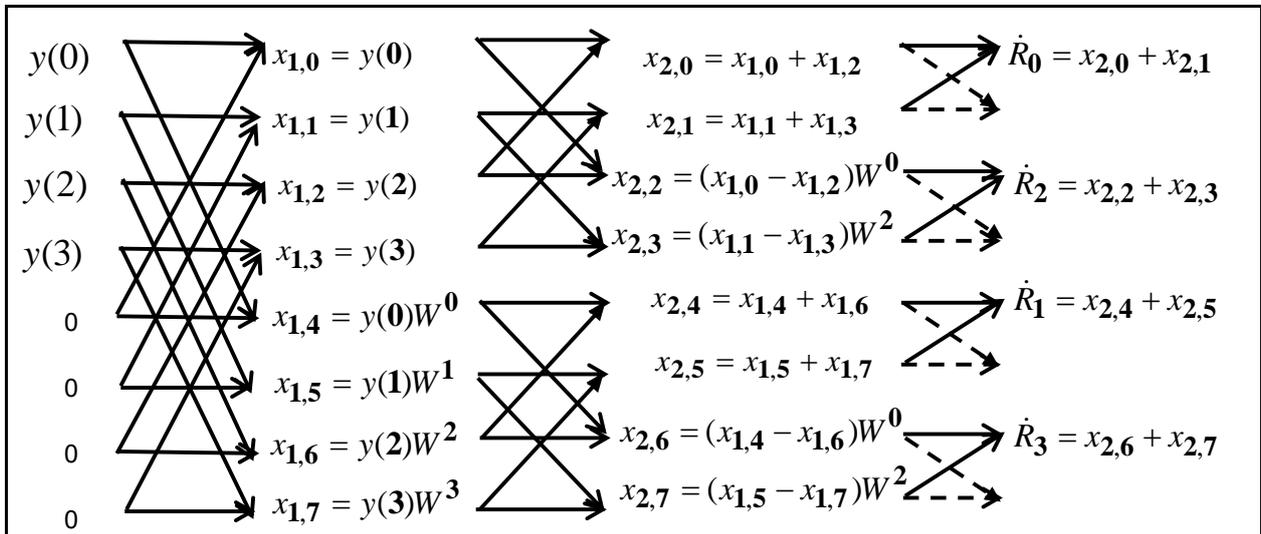


Рис.1. Вид модифицированного (сплошные линии) графа БПФ с размерностью 2^3 , используемого при вычислении множества корреляций $\{\dot{R}_h\}$ для реализации $\vec{Y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4)$.

Вычисление множества корреляций $\{\dot{R}_h\}$ для случая когерентного приема осуществляется с использованием алгоритма БПФ размерностью 2^{k+1} над функцией \vec{U} длительностью 2^{k+1} . Функция \vec{U} формируется в соответствии с правилом: $\dot{U}(l) = \dot{y}(l)$ при $0 \leq l < 2^k$ и $\dot{U}(l) = 0$ при $2^k \leq l < 2^{k+1}$. Повышение производительности обработки в этом случае при использовании алгоритма БПФ по отношению к прямому вычислению множества $\{\dot{R}_h\}$ оценивается

соотношением $2^k / 2(k+1)$. Так как объем множества $\{\dot{R}_h\}$ равен 2^k , то возможна модификация алгоритма БПФ с вычислением лишь 2^k спектральных составляющих и соответствующим снижением сложности его реализации. Значения h при вычислении \dot{R}_h соответствуют двоично-инверсным номерам спектральных составляющих БПФ [10]. В качестве примера на рис.1 приведен вид направленного графа исходного (штриховые линии) и модифицированного графа БПФ с размерностью 2^3 (сплошные линии), используемого при вычислении множества $\{\dot{R}_h\}$ для реализации $\vec{Y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4)$ длительностью 4, поворачивающие множители имеют вид $W^i = \exp\left(-\frac{j2\pi i}{8}\right)$.

Суммирование (6) может быть осуществлено с использованием алгоритма быстрого преобразования в базисе Уолша-Адамара (БПУ) размерностью 2^k с базовыми операциями “сложение-вычитание-пересылки” над дискретными сигналами (8) для некогерентного приёма или над дискретными сигналами (9) для когерентного приёма [11]. Действительно, в этом случае базисные функции Уолша-Адамара Wal_l с номерами $l = 2^0, 2^1, \dots, 2^{k-1}$, отсчёты которых задаются соотношением

$$Wal_l(i) = \exp\left(j\pi \sum_{p=0}^{k-1} l_p i_p\right) \quad (l_p, i_p - \text{компоненты двоичного представления } l \text{ и } i),$$

имеют период 2^l . Этот же период имеют двоичное представление номеров m дискретных сигналов \vec{S}_m для информационных символов $a_i = 0$ и $a_i = 1$ (соответственно для апостериорных вероятностей $p(\vec{Y}|\vec{S}_m)$).

В таблице 1 в качестве примера приведен вид функций Уолша-Адамара Wal_l длительностью 8 с номерами $l=1, l=2, l=4$ и двоичное представление \vec{a} номеров m ($0 \leq m < 7$) дискретных сигналов \vec{S}_m , соответствующих базисным функциям Фурье объемом 8. Видно указанное соответствие значений двоичного представления \vec{a} и отсчетов функций Wal_l .

Таблица 1. Функции Уолша-Адамара Wal_l ($l = 1, l = 2, l = 4$) длительностью 8 и двоичное представление (a_0, a_1, a_2) номеров $m, 0 \leq m < 7$ дискретных сигналов \vec{S}_m , соответствующих базисным функциям Фурье объемом 8.

m	0	1	2	3	4	5	6	7
a_2	0	0	0	0	1	1	1	1
a_1	0	0	1	1	0	0	1	1
a_0	0	1	0	1	0	1	0	1
Wal_4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
Wal_2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
Wal_1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Используя это соответствие, можно записать соотношение [8]

$$C(a_i) = \Pr(a_i = 0 | \vec{Y}) - \Pr(a_i = 1 | \vec{Y}) = \sum_{m=0}^{2^k-1} \frac{\Pr(\vec{S}_m)}{p(\vec{Y})} p(\vec{Y} | \vec{S}_m) Wal_{2^i}(m). \quad (10)$$

Числитель и знаменатель в (10) являются компонентами спектрального преобразования Уолша-Адамара размерностью 2^k над дискретной реализацией $p(\vec{Y} | \vec{S}_m)$ [11]. Используя тождество $\Pr(a_i = 0 | \vec{Y}) + \Pr(a_i = 1 | \vec{Y}) = 1$, запишем результирующее выражение для “мягких” решений λ_i (4) в виде

$$\lambda_i = \ln \frac{1 + C(a_i)}{1 - C(a_i)}. \quad (11)$$

При вычислении $C(a_i)$ (10) можно применить алгоритм БПУ размерностью 2^k . Вместе с тем, при вычислении “мягких” решений λ_i , $i = 0, 1, \dots, k-1$ требуется вычислить лишь k спектральных компонент, что обуславливает возможность изменения графа БПУ, исключая его вершины и переходы, не участвующие в формировании требуемых спектральных компонент. Это приводит к существенному снижению сложности модифицированного алгоритма БПУ по отношению к исходному алгоритму БПУ. На рис.2 приведён граф БПУ размерностью 2^3 , штриховыми линиями

обозначены исключенные ветви графа при вычислении функционала $C(a_i)$ (10). Анализ модифицированного алгоритма БПУ показывает, что число требуемых арифметических операций при его реализации оценивается

соотношением $N_1 \approx 2^k (k - l_1) + \sum_{l=0}^{l_1-1} 2^l k$, здесь значение l_1 определяется условием

$$l_1 = \text{Int}\left(\frac{2^k}{k}\right), \text{Int}(x) - \text{целая часть положительного числа } x. \text{ Выигрыш по}$$

производительности для модифицированного графа БПУ по отношению к исходному графу БПУ оценивается соотношением $\gamma \approx \frac{k \cdot 2^k}{N_1}$ и для размерности

2^3 имеем $l_1 = 2$ и $\gamma \approx 1.4$.

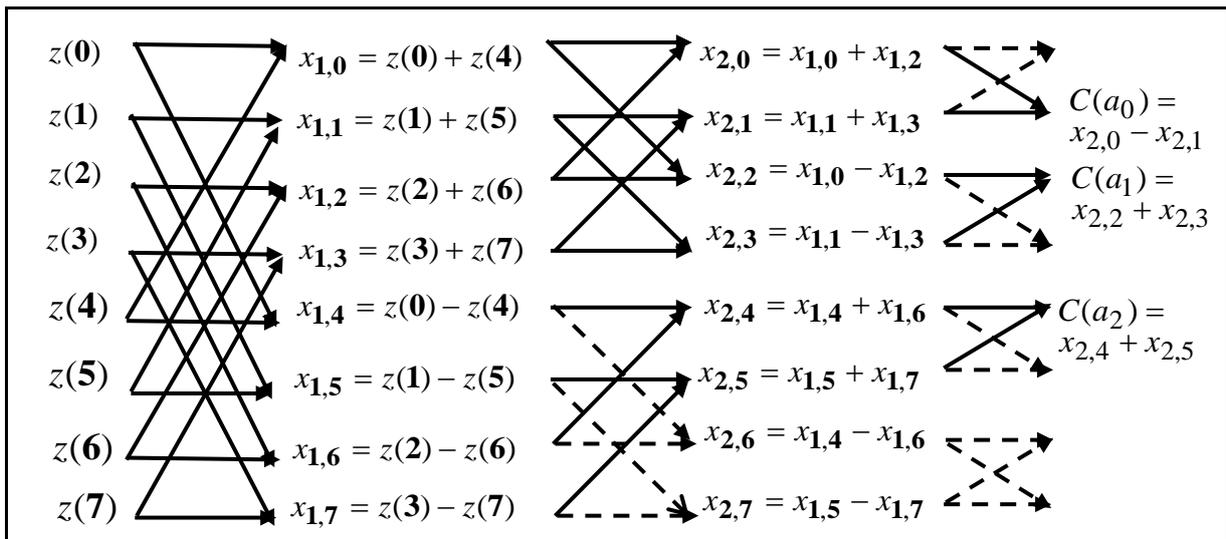


Рис.2. Граф БПУ размерностью 2^3 (штриховыми линиями обозначены исключенные ветви графа при вычислении функционала $C(a_i)$ (10)).

Более простой метод оценивания λ_i , не требующий вычислений функций

экспоненциального вида и значения энергетического параметра $\frac{A}{N_0}$, основан на

использовании приближенного соотношения [7]

$$\lambda_i \cong \ln\left(\max_{h:a_i=0} \left(p(\vec{Y}|\vec{S}_h)\right)\right) - \ln\left(\max_{h:a_i=1} \left(p(\vec{Y}|\vec{S}_h)\right)\right). \quad (12)$$

В частности, для некогерентного посимвольного приёма имеем

$$\lambda_i \cong \max_{h:a_i=0} (|\dot{R}_h|) - \max_{h:a_i=1} (|\dot{R}_h|). \quad (13)$$

При вычислении соотношения (12) для когерентного и некогерентного посимвольного приёма может применяться алгоритм БПУ с базовыми операциями “сравнение-пересылки”, описание которого приведено в [12].

3. Результаты моделирования

На рисунке 3 приведены вероятности ошибки на бит P_6 посимвольного когерентного и некогерентного приёма сигналов, соответствующих базисным функциям Фурье объемом $M = 2^6$ и $M = 2^8$ для канала АБГШ. Вероятностные кривые получены путем компьютерного моделирования подоптимального алгоритма вычисления “мягких” решений (12) на основе использования множества $\{\dot{R}_h\}$ (3) для когерентного приёма и на основе множества $\{|\dot{R}_h|\}$ для некогерентного множества. Моделирование подоптимального алгоритма (12) и оптимального алгоритма вычисления “мягких” решений (8)-(10) и показало их эквивалентность относительно вероятностных характеристик P_6 .

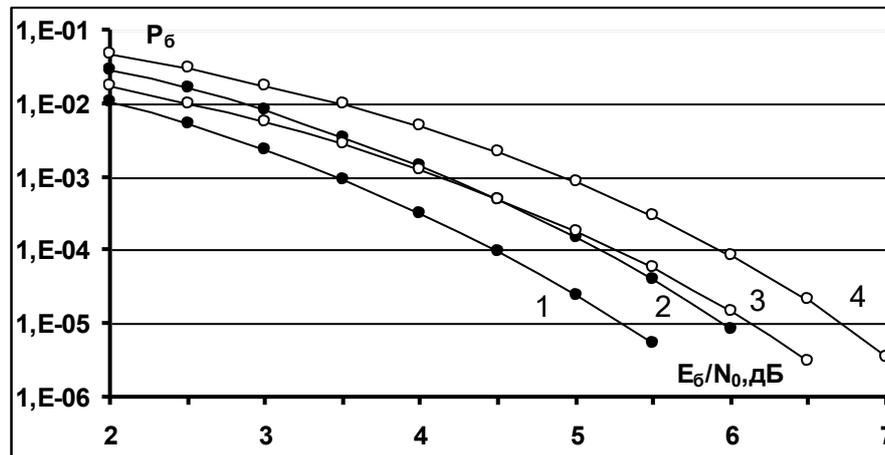


Рис.3. Вероятности ошибки на бит P_6 при посимвольном приеме сигналов на основе функций Фурье для канала АБГШ: 1 - объем ансамбля сигналов 2^8 (когерентный прием); 2 - объем ансамбля сигналов 2^8 (некогерентный прием); 3 - объем ансамбля сигналов 2^6 (когерентный прием); 4 - объем ансамбля сигналов 2^6 (некогерентный прием).

Вероятностные кривые 1 (когерентный прием) и 2 (некогерентный прием) соответствуют объему ансамблей сигналов $M = 2^8$. Вероятностные кривые 3 (когерентный прием) и 4 (некогерентный прием) соответствуют объему ансамблей сигналов $M = 2^6$. По оси абсцисс отложены значения отношения сигнал/помеха E_b/N_0 , здесь E_b - энергия сигналов на информационный бит.

Для фиксированного значения E_b/N_0 вероятности ошибки P_b уменьшаются с увеличением объема ансамблей сигналов, например, при некогерентном приеме для $\frac{E_b}{N_0} = 6$ дБ имеем $P_b = 10^{-5}$ для $M = 2^8$ и $P_b = 8.5 \cdot 10^{-5}$ для $M = 2^6$.

Энергетический проигрыш при использовании алгоритма посимвольного некогерентного приема по отношению к алгоритму посимвольного когерентного приема для сигналов объемом $M = 2^8$ достигает 1 дБ при $P_b = 10^{-5}$.

В [13] доказано аналитическое выражение для вероятности ошибки P_b при применении алгоритма посимвольного некогерентного приема для ансамблей сигналов ортогональных в усиленном смысле, определяемого соотношением (13)

$$P_b = \frac{M \exp(-E/N_0)}{2(M-1)} \sum_{j=2}^n (-1)^j C_M^j \exp(E/jN_0). \quad (14)$$

Здесь $E = E_b k$ энергия сигналов.

Сравнительный анализ вероятностных кривых, приведенных на рис. 3 для рассматриваемых ансамблей сигналов и полученных путем моделирования алгоритма (13), показывает их совпадение с вероятностными кривыми, полученными путем теоретического вычисления с использованием соотношения (14).

Заключение

В статье приведены описания алгоритмов посимвольного когерентного и некогерентного приёма (оптимального и подоптимального) дискретных

ортогональных сигналов, соответствующих базисным функциям Фурье, соответствующих классу сигналов с частотной манипуляцией.

Алгоритмы посимвольного приёма составляют основу приёма сигнальных конструкций, соответствующих наиболее эффективным помехоустойчивым кодам (турбо-коды, низкоплотностные коды). При посимвольном приёме вычисляются “мягкие” решения как функционалы апостериорных вероятностей символов дискретных сигналов. Основу разработанных алгоритмов посимвольного приема рассматриваемых сигналов составляет алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша-Адамара и алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Фурье.

Подоптимальные алгоритмы посимвольного приема не требуют значения энергетического параметра канала и являются более простыми по сложности реализации по отношению к оптимальным алгоритмам посимвольного приема.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№16-07-00746).

Литература

1. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Сов.радио. 1970.
2. Витерби А.Д., Омура Дж.К. Принципы цифровой связи и кодирования. Пер. с англ. М.:Радио и связь. 1982.
3. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир. 1976.
4. Смольянинов В.М., Назаров Л.Е. Особенности спектрального анализа при распознавании дискретных сигналов, основанных на двоичных кодах. // Радиотехника и электроника. 1987. Т.32. №11. Стр.2341-2347.
5. Hartmann C.R., Rudolph L.D. An optimum symbol-by-symbol decoding rule for linear codes. //IEEE Transactions on Information Theory. 1976. V.22. N5. P.514-517.
6. Bahl L.R., Cocke J., Jelinek F., Raviv J. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate. // IEEE Transactions on Information Theory. 1974. V.IT-20. N3. P.284-287.

7. Johnson S.J. Iterative Error Correction: Turbo, Low-density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge University Press. 2010.
8. Смольянинов В.М., Назаров Л.Е. Применение спектрального преобразования в базисе Уолша при оптимальном посимвольном приеме сигналов, основанных на линейных кодах. // Радиотехника и электроника. 1997. Т.42. №10. Стр. 1214-1219.
9. Назаров Л.Е. Эффективные алгоритмы оптимального посимвольного декодирования сигналов, соответствующих двоичным линейным кодам. // Радиотехника и электроника. 1999. Т.44. №9. Стр.1116-1119.
10. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при цифровой обработке сигналов. М.:Связь. 1980. 248 с.
11. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио. 1975.
12. Назаров Л.Е., Шишкин П.В., Батанов В.В. Алгоритмы итеративного некогерентного приема сигналов на основе последовательных турбо-кодов и сигналов Уолша при передаче по нестационарным каналам. // Радиотехника и электроника. 2016. Т.61. №4. Стр. 366-372.
13. Назаров Л.Е., Шишкин П.В. Вычисление вероятностных характеристик посимвольного некогерентного приема ортогональных сигналов. // Журнал радиоэлектроники, URL: <http://jre.cplire.ru/jre/may16/5/text.pdf>. 2016. №5.

Ссылка на статью:

Л. Е. Назаров, М. А. Щеглов. Алгоритмы посимвольного приема ортогональных дискретных сигналов, соответствующих базисным функциям Фурье. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb17/2/text.pdf>