

УДК 681.513.6

КОМПЕНСАЦИОННЫЙ МЕТОД СЛЕПОГО ПОДАВЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПОМЕХ С НЕГАУССОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

А. Е. Манохин

**Институт радиоэлектроники и информационных технологий УрФУ им. первого
Президента РФ Б.Н.Ельцина, 620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19**

Статья поступила в редакцию 8 декабря 2016 г.

Аннотация. В работе представлен метод слепого подавления аддитивных стационарных помех с негауссовым распределением, который основан на слепом выделении помехи на выходе нейронной сети по одному из критериев (максимизация эксцесса), а затем ее компенсации в смеси с сигналом. Основным достоинством данного метода является возможность подавления помех без априорных знаний о параметрах помехи и сигнала за исключением некоторых предположений (о принадлежности к классу распределений сигналов и помех, об отсутствии сигнала в смеси с помехой на определенное время, о различии статистических характеристик сигналов и помех, о некоторых корреляционных свойствах сигналов и помех и т. п.). В качестве алгоритмов слепого выделения помехи используются алгоритмы, основанные на максимизации абсолютного и нормированного эксцессов, выявлены их достоинства и недостатки. Моделированием подтверждена работоспособность компенсационного метода, который позволяет достичь отношение мощности сигнал-шум на выходе нейронной сети от 9 до 17 дБ в зависимости от отношения мощности сигнал-помеха на ее входах и применяемых алгоритмов выделения помех.

Ключевые слова: слепое подавление помех, слепое выделение сигналов, эксцесс, функция Лагранжа, скорость сходимости.

Abstract. In a work a method of blind additive stationary non-gaussian disturbance suppression based on blind signal extraction at the output of the neural network

according to a criteria (maximizing the kurtosis), and then compensation from the mixing with the signal is presented. The main advantage of this method is the possibility of disturbance suppression without a priori knowing of the signals and disturbances properties apart from some assumptions (belonging to the class of signal and disturbance distributions, the absence of a signal mixed with the disturbance at a certain time, the difference of statistical characteristics of signals and disturbances, some correlation properties of signals and disturbances, etc). Blind disturbance extraction algorithms based on the maximization of absolute and normalized kurtosis, are used; their advantages and weaknesses are identified. Modeling confirmed the efficiency of the compensation method achieving a signal-to-noise power ratio at the output of the neural network from 9 to 17 dB depending on the input signal-to-noise power ratio and used blind algorithms.

Key words: blind disturbance suppression, blind signal extraction, kurtosis, Lagrange function, the rate of convergence.

Введение

Слепые методы подавления помех за последние годы все чаще используются в различных областях радиотехники и их можно разделить на фильтрационные и компенсационные. Вместе с тем, их суть и содержание отличаются от традиционных методов.

Слепое подавление помех — это максимально возможное уменьшение искажающего действия помех на полезный сигнал при его выделении из смеси в условиях, когда отсутствует информация о параметрах сигнала и помех за исключением отдельных априорных предположений (о принадлежности к классу распределений сигналов и помех, об отсутствии сигнала в смеси с помехой на определенное время, о различии статистических характеристик сигналов и помех, о некоторых корреляционных свойствах сигналов и помех и т. п.).

Компенсационные методы слепого подавления помех являются сравнительно новыми и подразумевают получение слепой оценки смеси сигнала и помех и (или) слепой оценки помех.

В статье изложен компенсационный метод на основе слепого выделения помех, который представляет собой выделение одной из помех на выходе нейронной сети по одному из критериев (максимизация эксцесса), а затем ее компенсация в смеси с сигналом. Помеха — стационарная, аддитивно взаимодействует с сигналом.

1. Постановка задачи

Задача слепого выделения сигналов¹ выражается как оценка одного или нескольких интересующих сигналов с особыми статистическими свойствами, а остальные сигналы, не представляющие интереса, должны быть проигнорированы (здесь и далее под интересующими сигналами подразумеваются выделяемые помехи).

По-другому, задачу слепого выделения сигналов можно сформулировать как идентификацию соответствующего вектора h_j смешивающей матрицы \mathbf{H} и (или) их обращений w_j , которые являются строками разделяющей матрицы \mathbf{W} , предполагая только статистическую независимость первичных источников и линейную независимость колонок матрицы \mathbf{H} [1]. Выделение сигналов можно представить следующим соотношением:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{W}\mathbf{y}(n) = \hat{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{s}(n), \quad (1)$$

где $\mathbf{s}(n)$ и $\hat{\mathbf{s}}(n)$ — вектора выделяемых сигналов и их оценок; $\mathbf{y}(n)$ — вектор наблюдения (смесей сигналов и помех).

Как правило, слепое выделение сигналов происходит последовательно, один за другим. Для того, чтобы не возникала ситуация повторного выделения того же сигнала, производится удаление выделенного сигнала из смеси.

¹ BSE — Blind Signal Extraction (англ.).

Несмотря на то, что слепое выделение сигналов может давать худшие характеристики по сравнению со слепым разделением сигналов из-за накопления ошибок при удалении уже отфильтрованных сигналов, этот метод имеет ряд неоспоримых преимуществ [1]:

1. Сигналы могут быть отфильтрованы в определенном порядке в соответствии с их стохастическими особенностями (например, в порядке убывания нормированного эксцесса [2] или в порядке уменьшения дисперсий сигналов [3]).

2. Можно применять множество различных критериев, основанных на статистиках 2 и более высоких порядков, для выделения широкого спектра сигналов — статистически независимых, гауссовых окрашенных [4, 5], нестационарных [6] и т. п. в зависимости от особенностей сигналов, которые необходимо выделить.

3. Нет необходимости выделять все сигналы, которых в смеси может быть бесконечное множество.

4. Алгоритмы выделения более простые по сравнению с алгоритмами слепого разделения сигналов.

Некоторые из подходов слепого выделения сигналов требуют предварительной обработки в форме обеления вектора смеси сигналов с датчиков или ортогонализации смешивающей матрицы.

Перед тем, как рассмотреть отдельно процедуры обеления, выделения, подавления и используемые при этом основные алгоритмы, еще раз отметим, что, применяя компенсационный метод слепого подавления помех, сначала производится слепое выделение помехи, а затем ее удаление из смеси.

Процедура обеления смеси сигналов и помех

Под обелением смеси сигналов и помех понимается их декорреляция². Она необходима для частичного упрощения решения задачи слепого выделения сигналов [1].

² Линейное преобразование исходного вектора смеси в вектор, компоненты которого являются некоррелированными с единичной энергией.

Вектор y считается обеленным, если корреляционная матрица обеленной смеси — единичная, причем на главной диагонали расположены дельта-функции. Тогда процедура обеления представляется:

$$y_w(n) = Qy(n), \quad (2)$$

где $y_w(n)$ — обеленный вектор; Q — обеляющая матрица.

В [7] предложен эффективный алгоритм градиентного поиска (NGA³) обеляющей матрицы, который обеспечивает высокую скорость сходимости:

$$Q(n+1) = Q(n) + \mu[\mathbf{I} - y_w(n)y_w^T(n)]Q(n), \quad (3)$$

где μ — коэффициент, определяющий скорость сходимости алгоритма; \mathbf{I} — единичная матрица.

В скалярной форме алгоритм (3) можно выразить следующим образом:

$$q_{ij}(n+1) = q_{ij}(n) + \mu[\delta_{ij} - y_{wi}(n)y_{wj}(n)]q_{ij}(n), \quad (4)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера⁴.

Структурная схема, наглядно объясняющая реализацию алгоритма NGA для обеления смеси с m датчиков, изображена на рис. 1.

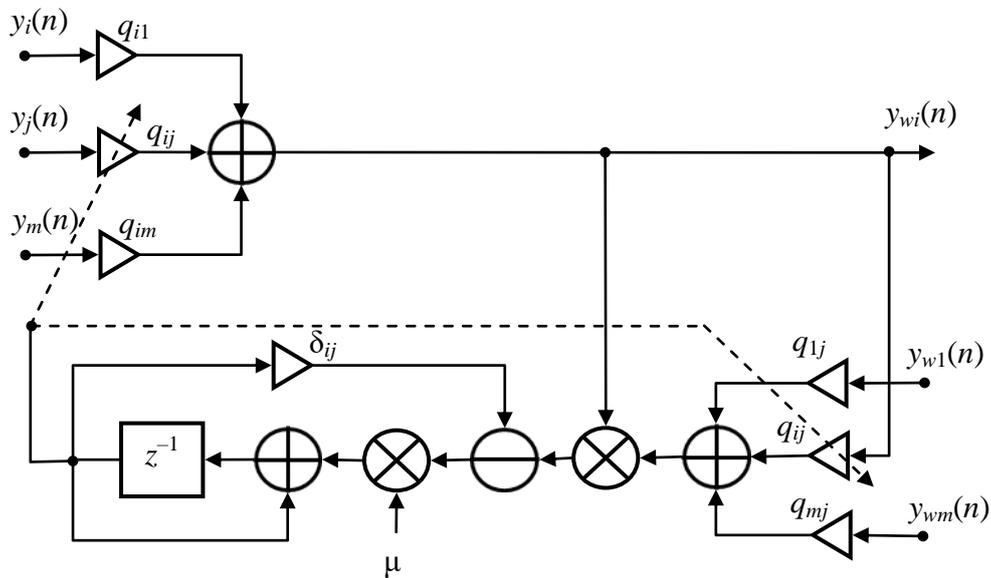


Рис. 1. Структурная схема, иллюстрирующая реализацию алгоритма (4)

³ Natural Gradient Algorithm (англ.).

⁴ Равен единице, если $i=j$, и нулю в противном случае.

Процедура выделения сигнала или помехи из смеси

Процедуру выделения сигналов (помех) можно реализовать с помощью каскадной нейронной сети (рис. 2).

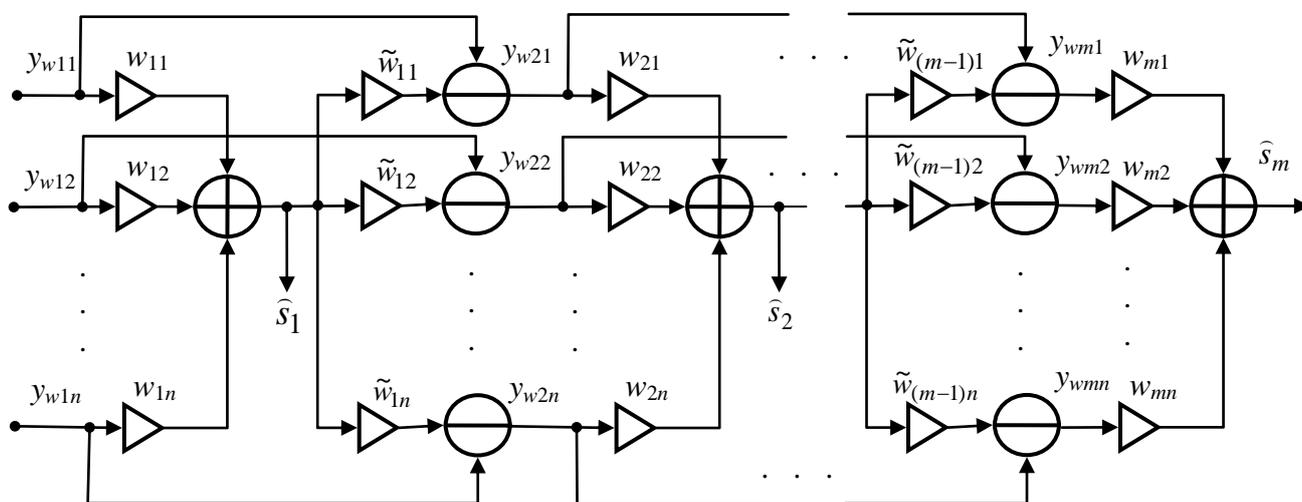


Рис. 2. Функциональная схема (нейронной сети), иллюстрирующая последовательное слепое выделение и удаление сигналов и помех

Предположим, что все сигналы источников взаимно независимы и имеют особые статистические свойства (например, негауссовость). В этом случае для выделения сигналов чаще всего используют критерии максимизации эксцесса [2, 8–10] — величины как меры негауссовости. При этом функционал выражается:

$$J(\mathbf{w}_1) = \frac{1}{4} \kappa_4(\hat{s}_1) = \frac{1}{4} \left[E\{\hat{s}_1^4\} - 3E^2\{\hat{s}_1^2\} \right], \quad (5)$$

где $\kappa_4(\hat{s}_1)$ — эксцесс для сигналов с нулевым математическим ожиданием; $E\{\dots\}$ — операция усреднения.

Этот критерий является мерой отличия распределения выделяемого сигнала от гауссова. Если на вектор \mathbf{w}_1 наложить ограничение так, что его квадратичная норма будет равна 1, т.е. $\|\mathbf{w}_1\|^2=1$, и взять нормированный эксцесс, тогда функционал (5) преобразуется к виду [11]:

$$J(\mathbf{w}_1) = \frac{\beta}{4} \left(\frac{E\{\hat{s}_1^4\}}{E^2\{\hat{s}_1^2\}} - 3 \right) \Big|_{\|\mathbf{w}_1\|^2=1}. \quad (6)$$

Введение параметра β обусловлено необходимостью выбора знака эксцесса выделяемого сигнала. Если $\beta = -1$, то выделяется сигнал, имеющий отрицательный эксцесс, и $\beta = 1$ — выделяется сигнал с положительным эксцессом.

Для исключения параметра β в качестве функционала можно взять абсолютное значение эксцесса при дополнительном ограничении $\|\mathbf{w}_1\|^2 = 1$:

$$J(\mathbf{w}_1) = \frac{1}{4} |\kappa_4(\hat{s}_1)|_{\|\mathbf{w}_1\|^2 = 1}. \quad (7)$$

Процедура удаления помехи из смеси

После успешного выделения первого сигнала необходимо применить процедуру подавления для того, чтобы повторно не фильтровать сигнал из смеси во втором блоке (см. рис. 2). Процедура подавления представляет удаление уже выделенного сигнала из смеси. Для этого требуется выполнить следующее преобразование [2]:

$$\mathbf{y}_2(n) = \mathbf{y}_{w1}(n) - \tilde{\mathbf{w}}_1 \hat{s}_1(n), \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{w}}_1$ — вектор весовых коэффициентов подавления сигнала s_1 первого блока.

Оптимальное значение вектора $\tilde{\mathbf{w}}_1$ должно минимизировать суммарную мощность смеси, подаваемой на второй блок. Тогда функционал можно выразить:

$$J(\tilde{\mathbf{w}}_1) = \frac{1}{2} E \left\{ \sum_{p=1}^m y_{2p}^2 \right\}. \quad (9)$$

Минимизация функционала (9) приводит к итерационному уравнению нахождения весовых коэффициентов подавления сигнала s_1 :

$$\tilde{\mathbf{w}}_1(n+1) = \tilde{\mathbf{w}}_1(n) + \mu(n) \hat{s}_1(n) \mathbf{y}_2(n). \quad (10)$$

Необходимо отметить, что итерационная процедура оптимизации вектора подавления (10) не имеет ложных минимумов и после сходимости она оценивает один столбец смешивающей матрицы \mathbf{H} [2].

Если предположить, что на каждом шаге выделения сигнала производится обеление вектора смеси (на рис. 2 процедура обеления вектора входного сигнала \mathbf{y} не показана, но подразумевается), то можно предложить

более простую формулу нахождения вектора $\tilde{\mathbf{w}}_1$. Запишем функционал (9) в следующем виде с учетом (8):

$$J(\tilde{\mathbf{w}}_1) = E\{\mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2\} = E\{\mathbf{y}_{w1}^T \mathbf{y}_{w1}\} - 2\tilde{\mathbf{w}}_1^T E\{\mathbf{y}_{w1} \hat{s}_1\} + \tilde{\mathbf{w}}_1^T \tilde{\mathbf{w}}_1 E\{\hat{s}_1^2\}. \quad (11)$$

Найдем его производную по $\tilde{\mathbf{w}}$ и приравняем к нулю. Тогда с учетом обеленности вектора первой смеси \mathbf{y}_{w1} (см. ф. 2) и наложения ограничения на норму вектора $\|\mathbf{w}_1\|^2=1$:

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \frac{E\{\mathbf{y}_{w1} \hat{s}_1\}}{E\{\hat{s}_1^2\}} = \frac{E\{\mathbf{y}_{w1} \mathbf{y}_{w1}^T\} \mathbf{w}_1}{E\{\hat{s}_1^2\}} = \mathbf{w}_1. \quad (12)$$

Очевидно, что вектор подавления равен вектору выделения.

Описать компенсационный метод слепого подавления помех можно универсальной структурной схемой (рис. 3). Смесь полезного сигнала и помех поступает на устройство обеления. Затем анализатором распределения помех определяются некоторые параметры смеси (например, значение эксцесса). При этом если сигнал имеет гауссово распределение, а помехи негауссовы, то компенсацию можно автоматизировать — подавлять помехи до тех пор, пока эксцесс не устремится к нулю. Однако необходимо помнить, что чем больше число действующих помех, тем больше смесь приближается к гауссову распределению⁵.

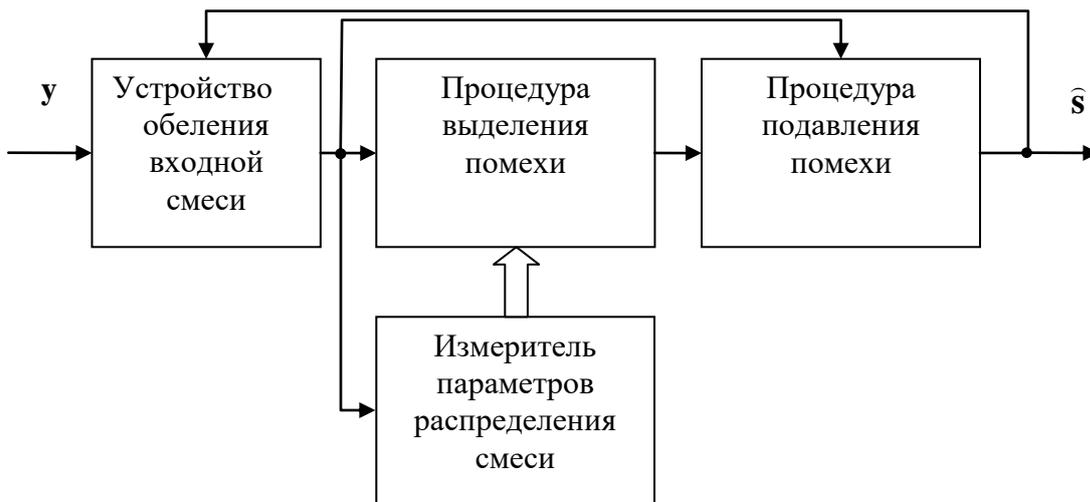


Рис. 3. Структурная схема, реализующая компенсационный метод слепого подавления помех

⁵ Центральная предельная теорема.

Если сигнал и помеха негауссовы, то необходимо искать особые статистические свойства, по которым их отделить (эксцесс, асимметрия и т.п.). Например, пусть имеется предположение, что полезный сигнал обладает наименьшим по сравнению с помехами эксцессом или нулевой по сравнению с помехами асимметрией. Тогда останов цикла происходит, когда эксцесс смеси станет менее определенного минимального значения (порога) или значение асимметрии приблизится к нулю.

2. Выделение гауссовых сигналов на фоне негауссовых помех

При слепом выделении гауссовых сигналов (окрашенных или белых) на фоне негауссовых непрерывных помех более всего подойдут алгоритмы, основанные на поиске градиента эксцесса. Используя отличие значений эксцессов негауссовых от гауссовых процессов (эксцесс равен нулю), можно выделять их, а затем последовательно вычитать их из смеси до полного подавления негауссовых помех.

Для упрощения вначале находим обеляющую матрицу \mathbf{Q} , затем обеленный вектор смеси $\mathbf{y}_w(n) = \mathbf{Q}\mathbf{y}(n)$.

Пусть первый блок выделяет оценку \hat{s}_1 (см. рис. 2):

$$\hat{s}_1 = \mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} = \sum_{i=1}^m w_{1i} y_{w1i}, \quad (13)$$

где \mathbf{w}_1 — вектор весовых коэффициентов выделения сигнала s_1 первого блока.

С учетом обеления корреляционная матрица входного сигнала является единичной — $E\{\mathbf{y}_{w1}\mathbf{y}_{w1}^T\} = \mathbf{I}$. Кроме того, можно показать, что при наложении ограничения на норму вектора весовых коэффициентов $\|\mathbf{w}_1\|^2=1$, дисперсия выделяемого сигнала равна единице:

$$E\{\hat{s}_1^2\} = E\left\{\left(\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1}\right)^2\right\} = E\left\{\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} \mathbf{y}_{w1}^T \mathbf{w}_1\right\} = \|\mathbf{w}_1\|^2 = 1. \quad (14)$$

Для того, чтобы найти оптимальное значение вектора \mathbf{w}_1 в [8] предлагается использовать следующее правило:

$$\mathbf{w}_1(k+1) = \frac{\partial \kappa_4(\hat{s}_1) / \partial \mathbf{w}_1}{\|\partial \kappa_4(\hat{s}_1) / \partial \mathbf{w}_1\|}. \quad (15)$$

Найдем градиент эксцесса с учетом нормы $\|\mathbf{w}_1\|^2=1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{w}_1} &= \frac{1}{4} \frac{\partial \kappa_4(\hat{s}_1)}{\partial \mathbf{w}_1} = \frac{1}{4} \frac{\partial \left(E \left\{ \left(\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} \right)^4 \right\} - 3E^2 \left\{ \left(\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} \right)^2 \right\} \right)}{\partial \mathbf{w}_1} = \\ &= \frac{4E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - 6E \left\{ \hat{s}_1^2 \right\} 2E \left\{ \hat{s}_1 \mathbf{y}_{w1} \right\}}{4} = E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - \\ &- 3E \left\{ \hat{s}_1^2 \right\} \mathbf{w}_1 E \left\{ \mathbf{y}_{w1} \mathbf{y}_{w1}^T \right\} = E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - 3 \left\| \mathbf{w}_1 \right\|^2 \mathbf{w}_1 \Big|_{\left\| \mathbf{w}_1 \right\|^2=1} = \\ &= E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - 3\mathbf{w}_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда алгоритм, который максимизирует эксцесс (5), может быть представлен следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^+(n+1) &= E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - 3\mathbf{w}_1(n); \\ \mathbf{w}_1(n+1) &= \frac{\mathbf{w}_1^+(n+1)}{\left\| \mathbf{w}_1^+(n+1) \right\|}, \end{aligned} \quad (17)$$

Структурная схема, иллюстрирующая реализацию алгоритма (17), приведена на рис. 4. Такой алгоритм относится к классу быстрых АНК-алгоритмов⁶. Он обладает преимуществами перед градиентными алгоритмами. Во-первых, как показано в [8], сходимость таких алгоритмов кубическая⁷, а во-вторых, нет необходимости выбирать параметр сходимости, что облегчает реализацию алгоритма.

Синтезируем алгоритм по критерию максимизации функционала (6). Для этого возьмем его производную по \mathbf{w}_1 с последующим дополнительным ограничением $\|\mathbf{w}_1\|^2=1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{w}_1} &= \frac{\beta}{4} \frac{\partial \left(\left[E \left\{ \hat{s}_1^4 \right\} / E^2 \left\{ \hat{s}_1^2 \right\} \right] - 3 \right)}{\partial \mathbf{w}_1} = \frac{\beta}{4} \frac{4E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} \left\| \mathbf{w}_1 \right\|^4 - 4E \left\{ \hat{s}_1^4 \right\} \mathbf{w}_1 \left\| \mathbf{w}_1 \right\|^2}{\left\| \mathbf{w}_1 \right\|^8} = \\ &= \beta \left(\frac{E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\}}{\left\| \mathbf{w}_1 \right\|^4} - \frac{E \left\{ \hat{s}_1^4 \right\} \mathbf{w}_1}{\left\| \mathbf{w}_1 \right\|^6} \right) \Big|_{\left\| \mathbf{w}_1 \right\|^2=1} = \beta \left(E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - E \left\{ \hat{s}_1^4 \right\} \mathbf{w}_1 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

⁶ Fast ICA (англ.).

⁷ Ошибка на каждой итерации пропорциональна ошибке третьей степени на предыдущей операции.

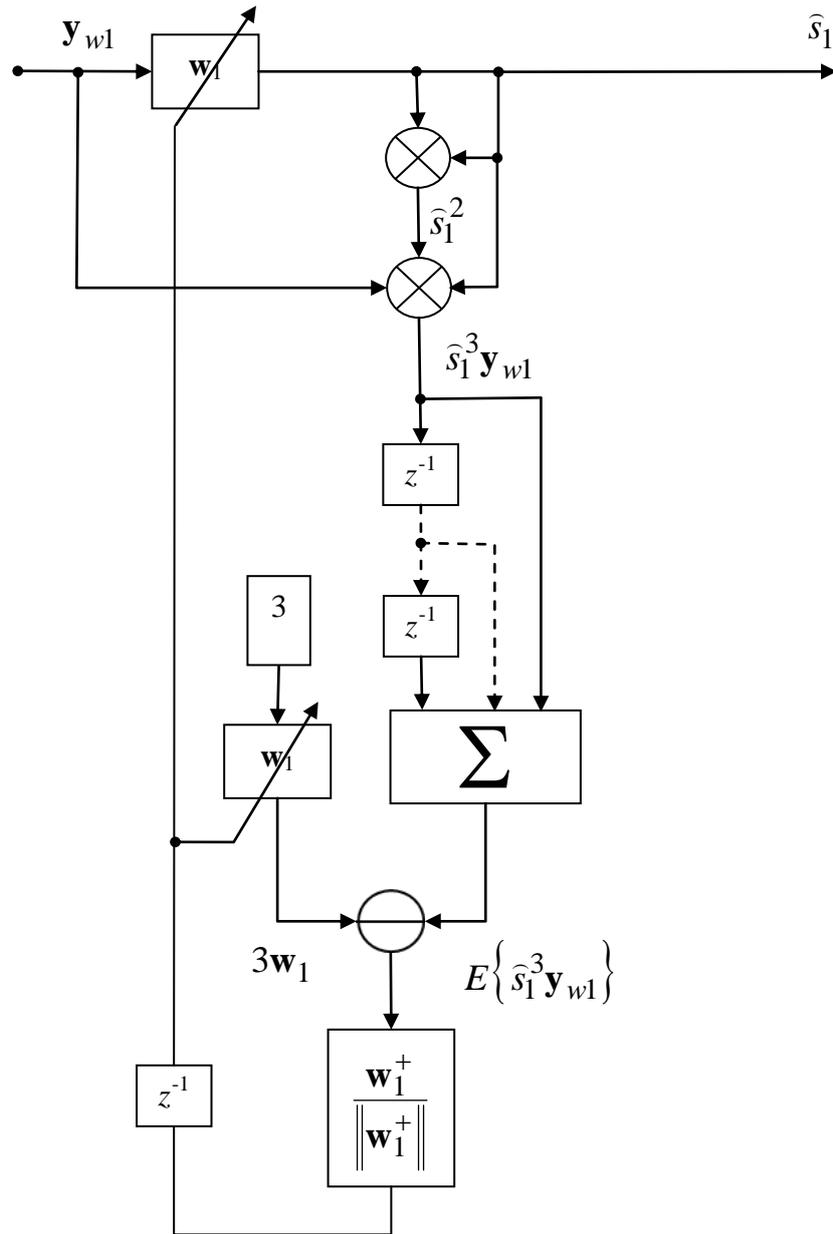


Рис. 4. Структурная схема, иллюстрирующая работу быстрого АНК-алгоритма, основанного на максимизации эксцесса

Используя алгоритм градиентного спуска с постоянным коэффициентом адаптации, можно шаг за шагом, от $\mathbf{w}_1(0)$ до $\mathbf{w}_1(\infty)$, максимизировать функционал:

$$\mathbf{w}_1(n+1) = \mathbf{w}_1(n) + \mu \frac{\partial J(\mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{w}_1}, \quad (19)$$

где μ — параметр, определяющий скорость сходимости алгоритма.

Однако, в вычислительном плане достаточно проблематично вычислять усредняющую по времени функцию $E\{\dots\}$. Например, если предположить, что

входной сигнал стационарный, то усреднение можно заменить на значение текущего вектора, а саму операцию $E\{\dots\}$ опустить.

Таким образом, максимизация функционала (6) через градиентный спуск приводит к следующему алгоритму⁸ поиска весовых коэффициентов [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^+(n+1) &= \mathbf{w}_1(n) + \mu\beta\hat{s}_1^3[\mathbf{y}_{w1}(n) - \hat{s}_1(n)\mathbf{w}_1(n)], \\ \mathbf{w}_1(n+1) &= \frac{\mathbf{w}_1^+(n+1)}{\|\mathbf{w}_1^+(n+1)\|}. \end{aligned} \quad (20)$$

Структурная схема, иллюстрирующая реализацию алгоритма (20), изображена на рис. 5.

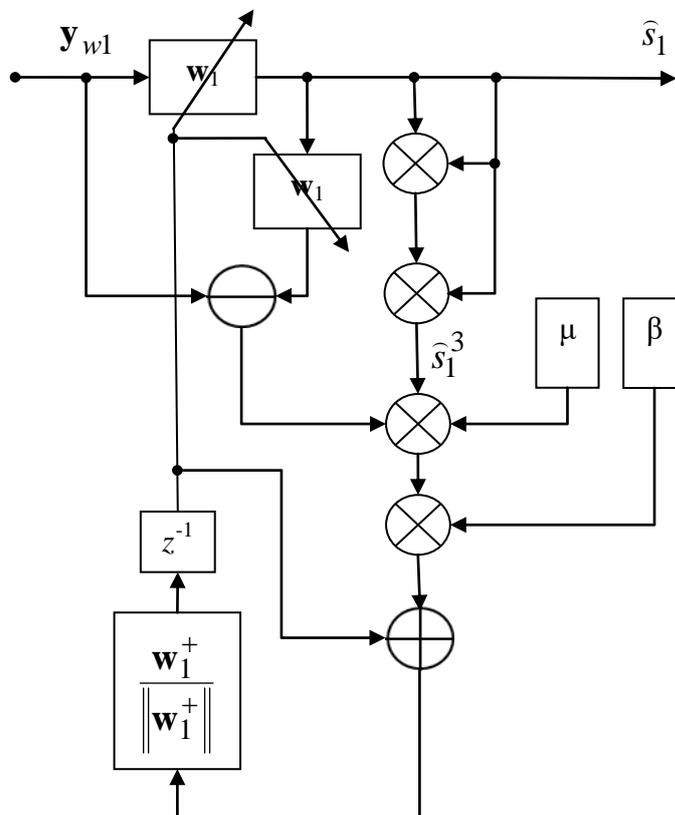


Рис. 5. Структурная схема, иллюстрирующая реализацию алгоритма KuicNet

Наконец, исследуем функционал (7), максимизация которого в отличие от вышеизложенных алгоритмов позволяет выделять сигналы с любым знаком эксцесса. Это свойство особенно важно при выделении негауссовых сигналов на фоне гауссовой помехи.

Градиент функционала получается в форме:

⁸ Имеет название KuicNet.

$$\frac{\partial J(\mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{w}_1} = \frac{1}{4} \frac{\partial |\kappa_4(\hat{s}_1)|}{\partial \mathbf{w}_1} \Big|_{\|\mathbf{w}_1\|^2=1} = \frac{1}{4} \frac{\partial \left| E \left\{ \left(\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} \right)^4 \right\} - 3 \right|}{\partial \mathbf{w}_1} = \quad (21)$$

$$= \text{sign}\{\kappa_4(\hat{s}_1)\} E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\}.$$

Алгоритм градиентного спуска на основе максимизации абсолютного эксцесса (назовем его AbsKurt) для стационарных входных сигналов можно записать следующим образом:

$$\mathbf{w}_1^+(n+1) = \mathbf{w}_1(n) + \mu \text{sign}\{\kappa_4(\hat{s}_1(n))\} \hat{s}_1^3(n) \mathbf{y}_{w1}(n),$$

$$\mathbf{w}_1(n+1) = \frac{\mathbf{w}_1^+(n+1)}{\|\mathbf{w}_1^+(n+1)\|}. \quad (22)$$

Структурная схема, иллюстрирующая реализацию алгоритма (22), изображена на рис. 6.

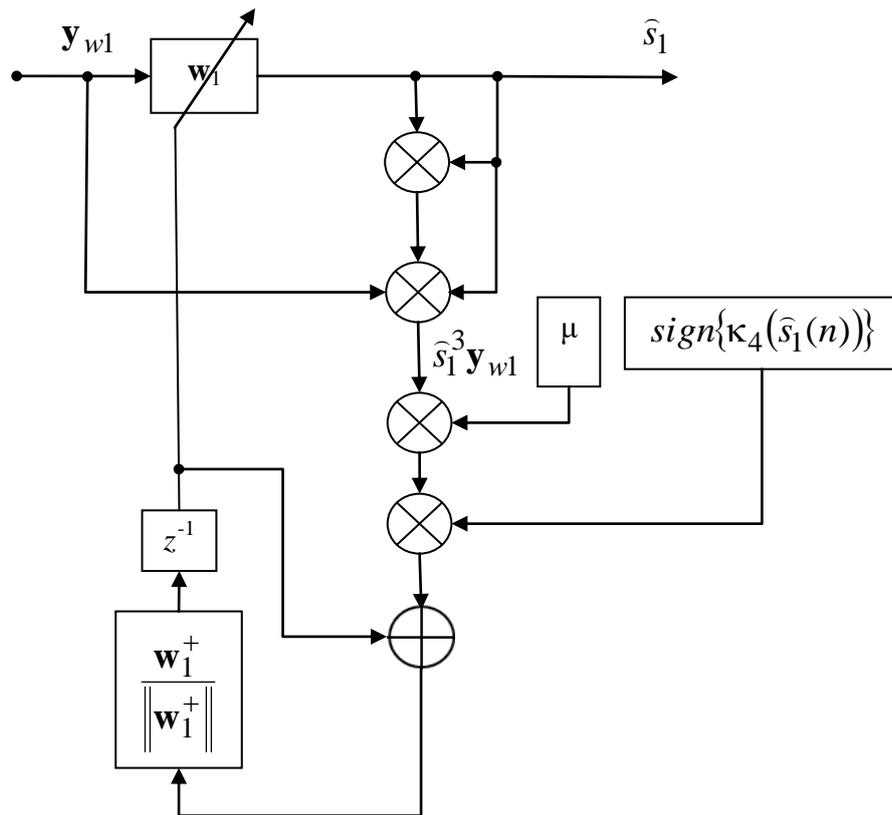


Рис. 6. Структурная схема, иллюстрирующая реализацию алгоритма AbsKurt

Для сравнения скорости сходимости указанных алгоритмов составим матрицы Гессе для различных функционалов и определим ее обусловленность

как отношение абсолютных максимального и минимального собственных значений матрицы [12]:

$$D = \|\mathbf{He}^{-1}\| \|\mathbf{He}\| = \frac{\max\{|\lambda_i|\}}{\min\{|\lambda_i|\}}, \quad (23)$$

где \mathbf{He} — матрица Гессе.

С этой целью составим уравнения Лагранжа для функционала (5). Пусть выделяется негауссова помеха s_1 , действующая в смеси с полезным сигналом s_2 , имеющим гауссово распределение. Смеси в двух каналах после обеления можно выразить в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y_{w1_1} \\ y_{w1_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{1-k^2} & -k \\ k & \sqrt{1-k^2} \end{bmatrix}}_{\text{матрица смешивания } \mathbf{H}} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

где k и $\sqrt{1-k^2}$ — среднеквадратическое отклонение случайных процессов в каналах ($k < 1$).

Тогда, для алгоритма FastICA уравнение Лагранжа с учетом ограничения $\|\mathbf{w}_1\|^2 = 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}_1, l) = & \frac{1}{4} \left[E \left\{ \left(\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} \right)^4 \right\} - 3 \|\mathbf{w}_1\|^4 \right] - l \left(\|\mathbf{w}_1\|^2 - 1 \right) = \frac{1}{4} \left(w_{1_1}^4 m_4^{y_{w1_1}} + \right. \\ & + 4 w_{1_1}^3 w_{1_2} m_{31}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 6 w_{1_1}^2 w_{1_2}^2 m_{21}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 4 w_{1_1} w_{1_2}^3 m_{13}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + w_{1_2}^4 m_4^{y_{w1_2}} - \\ & \left. - 3 \left(w_{1_1}^2 + w_{1_2}^2 \right)^2 \right) - l \left(w_{1_1}^2 + w_{1_2}^2 - 1 \right); \end{aligned} \quad (25)$$

где l — множитель Лагранжа; m_{22} , m_{13} и m_{31} — смешанные моменты 4 порядка, m_4 — центральный момент 4 порядка:

$$\begin{aligned} m_4^{y_{w1_1}} &= \kappa_4^{s_1} (1-k^2)^2 + 3; \\ m_4^{y_{w1_2}} &= \kappa_4^{s_1} k^4 + 3; \\ m_{22}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} &= \kappa_4^{s_1} (k^2 - k^4) + 1; \\ m_{31}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} &= \kappa_4^{s_1} k \sqrt{(1-k^2)^3}; \\ m_{13}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} &= \kappa_4^{s_1} k^3 \sqrt{1-k^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения стационарных точек функции Лагранжа возьмем частные производные выражения (25) по l и \mathbf{w}_1 с учетом оценки сигнала (13) и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w}_1, l)}{\partial \mathbf{w}_1} &= E\left\{\hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1}\right\} - 3\mathbf{w}_1 - 2l\mathbf{w}_1 = \\ &= \left(\begin{array}{l} w_{11}^3 m_4^{y_{w1}} + 3w_{11}^2 w_{12} m_{31}^{y_{w1} y_{w12}} + 3w_{11} w_{12}^2 m_{22}^{y_{w1} y_{w12}} + w_{12}^3 m_{13}^{y_{w1} y_{w12}} \\ w_{11}^3 m_{31}^{y_{w1} y_{w12}} + 3w_{11}^2 w_{12} m_{22}^{y_{w1} y_{w12}} + 3w_{11} w_{12}^2 m_{13}^{y_{w1} y_{w12}} + w_{12}^3 m_4^{y_{w12}} \end{array} \right) - \\ &- (3 + 2l) \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Для положительного множителя Лагранжа $l^* = \kappa_4^{s_1} / 2$ обнаруживаются две стационарные точки⁹:

$$\mathbf{w}_1^* = \begin{pmatrix} \sqrt{1-k^2} \\ k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-k^2} \\ -k \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Обе стационарные точки являются седловыми, поскольку гессиан (определитель матрицы Гессе) отрицательный, и являются глобальными максимумами, т.к. удовлетворяют условиям Куна-Таккера:

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{w}_1, l^*)}{\partial \mathbf{w}_1} \right|_{\mathbf{w}_1^*} = 0; \quad (29)$$

$$l^* \frac{\partial L(\mathbf{w}_1^*, l)}{\partial l} = 0, \quad (30)$$

При нахождении собственных значений матрицы Гессе (по ф. 27), возьмем предельный случай, когда $k=0$ ($w_{11}=1$ и $w_{12}=0$). Тогда смешанные моменты $m_{31}=m_{13}=0$ и собственные значения могут быть выражены (с подстановкой параметров из ф. 26):

⁹ Эти же точки справедливы для алгоритмов KuicNet и AbsKurt.

$$\begin{aligned} \max \{|\lambda_i|\} &= \frac{3}{2} \left| m_4^{y_{w1}} + m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} - 2 \left(1 + \frac{\kappa_4^{s1}}{3} \right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\left(m_4^{y_{w1}} \right)^2 - 2 m_4^{y_{w1}} m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} + \left(m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} \right)^2 + 4 \left(m_{31}^{y_{w1} y_{w2}} \right)^2} \right| = \quad (31) \\ &= \frac{3}{2} \left| m_4^{y_{w1}} - 2 \left(1 + \frac{\kappa_4^{s1}}{3} \right) + m_4^{y_{w1}} \right| = 3 \left| m_4^{y_{w1}} - \left(1 + \frac{\kappa_4^{s1}}{3} \right) \right| = 2(\kappa_4^{s1} + 3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \{|\lambda_i|\} &= \frac{3}{2} \left| m_4^{y_{w1}} + m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} - 2 \left(1 + \frac{\kappa_4^{s1}}{3} \right) - \right. \\ &- \left. \sqrt{\left(m_4^{y_{w1}} \right)^2 - 2 m_4^{y_{w1}} m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} + \left(m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} \right)^2 + 4 \left(m_{31}^{y_{w1} y_{w2}} \right)^2} \right| = \quad (32) \\ &= \frac{3}{2} \left| m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} - 2 \left(1 + \frac{\kappa_4^{s1}}{3} \right) + m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} \right| = 3 \left| m_{22}^{y_{w1} y_{w2}} - \left(1 + \frac{\kappa_4^{s1}}{3} \right) \right| = \kappa_4^{s1}. \end{aligned}$$

Аналогичный результат получается при $k=1$ ($w_{1_1}=0$ и $w_{1_2}=1$). Тогда обусловленность матрицы Гессе определяется как отношение ее абсолютных максимального и минимального собственных значений:

$$D = \frac{\max \{|\lambda_i|\}}{\min \{|\lambda_i|\}} = 2 \left(1 + \frac{3}{\kappa_4^{s1}} \right). \quad (33)$$

Как известно, чем хуже обусловленность матрицы Гессе, тем труднее осуществлять поиск глобального максимума [13]. Обусловленность матрицы Гессе (ф. 33) находится в обратной зависимости от эксцесса выделяемой помехи, поэтому более глубокая компенсация происходит при действии помехи с высоким эксцессом.

Скорость сходимости градиентных методов при использовании функционалов (6) и (7) с одной стороны зависит от коэффициента адаптации μ , а с другой от числа обусловленности матрицы Гессе (разброса собственных значений), вычисленной для этих функционалов. Если матрица Гессе будет плохо обусловлена (число обусловленности много больше единицы), то сходимость медленная, если наоборот, то сходимость быстрая.

Производную функции Лагранжа по \mathbf{w}_1 для функционала (6) можно записать из (18), т.к. она не требует дополнительного ограничения в связи с нормированием эксцесса:

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{w}_1} = \beta \left(E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - E \left\{ \hat{s}_1^4 \right\} \mathbf{w}_1 \right) = \beta \left(E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - \left(\kappa_4^{s1} + 3 \|\mathbf{w}_1\|^2 \right) \mathbf{w}_1 \right). \quad (34)$$

Для функционала (7) найдем производную функции Лагранжа по \mathbf{w}_1 :

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}_1, l)}{\partial \mathbf{w}_1} = \frac{1}{4} \frac{\partial |\kappa_4(\hat{s}_1)|}{\partial \mathbf{w}_1} - 2l \mathbf{w}_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial \left| E \left\{ \left(\mathbf{w}_1^T \mathbf{y}_{w1} \right)^4 \right\} - 3 \|\mathbf{w}_1\|^4 \right|}{\partial \mathbf{w}_1} - 2l \mathbf{w}_1 \Bigg|_{l = \frac{\kappa_4(\hat{s}_1)}{2}} = \quad (35)$$

$$= \text{sign} \{ \kappa_4(\hat{s}_1) \} \left(E \left\{ \hat{s}_1^3 \mathbf{y}_{w1} \right\} - \left(\kappa_4^{s1} + 3 \|\mathbf{w}_1\|^2 \right) \mathbf{w}_1 \right).$$

Ввиду схожести производных функций Лагранжа по \mathbf{w}_1 для функционалов (6) и (7) матрица Гессе для них без учета знака эксцесса выражается:

$$\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} he_{11} & he_{12} \\ he_{21} & he_{22} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\text{где } he_{11} = 3w_{1_1}^2 m_4^{y_{w1_1}} + 6w_{1_1} w_{1_2} m_{31}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 3w_{1_2}^2 m_{22}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} - \kappa_4^{s1} - 9w_{1_1}^2 - 3w_{1_2}^2;$$

$$he_{22} = 3w_{1_1}^2 m_{22}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 6w_{1_1} w_{1_2} m_{13}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 3w_{1_2}^2 m_4^{y_{w1_2}} - \kappa_4^{s1} - 3w_{1_1}^2 - 9w_{1_2}^2;$$

$$he_{12} = he_{21} = 3w_{1_1}^2 m_{31}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 6w_{1_1} w_{1_2} m_{22}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} + 3w_{1_2}^2 m_{13}^{y_{w1_1} y_{w1_2}} - 6w_{1_1} w_{1_2}.$$

Число обусловленности матрицы Гессе при $k=0$ ($w_{1_1}=1$ и $w_{1_2}=0$) и $k=1$ ($w_{1_1}=0$ и $w_{1_2}=1$) равно:

$$D = \frac{2\kappa_4^{s1}}{\kappa_4^{s1}} = 2. \quad (37)$$

В связи с тем, что матрица Гессе, составленная для функционала (6) аналогична и для функционала (7), скорость сходимости для указанных градиентных алгоритмов можно считать одинаковой и независимой от эксцесса выделяемой помехи. Вместе с тем, по сравнению с алгоритмом FastICA сходимость алгоритма градиентного спуска линейная [8].

Алгоритмы слепого выделения помех (17), (20), (22) были реализованы в Simulink. В ходе компьютерного моделирования была установлена их работоспособность и эффективность. Обеление входных смесей производилось по формуле (4), удаление выделенной помехи из смеси с сигналом — по формуле (10). Экспериментальная установка показана на рис. 7.

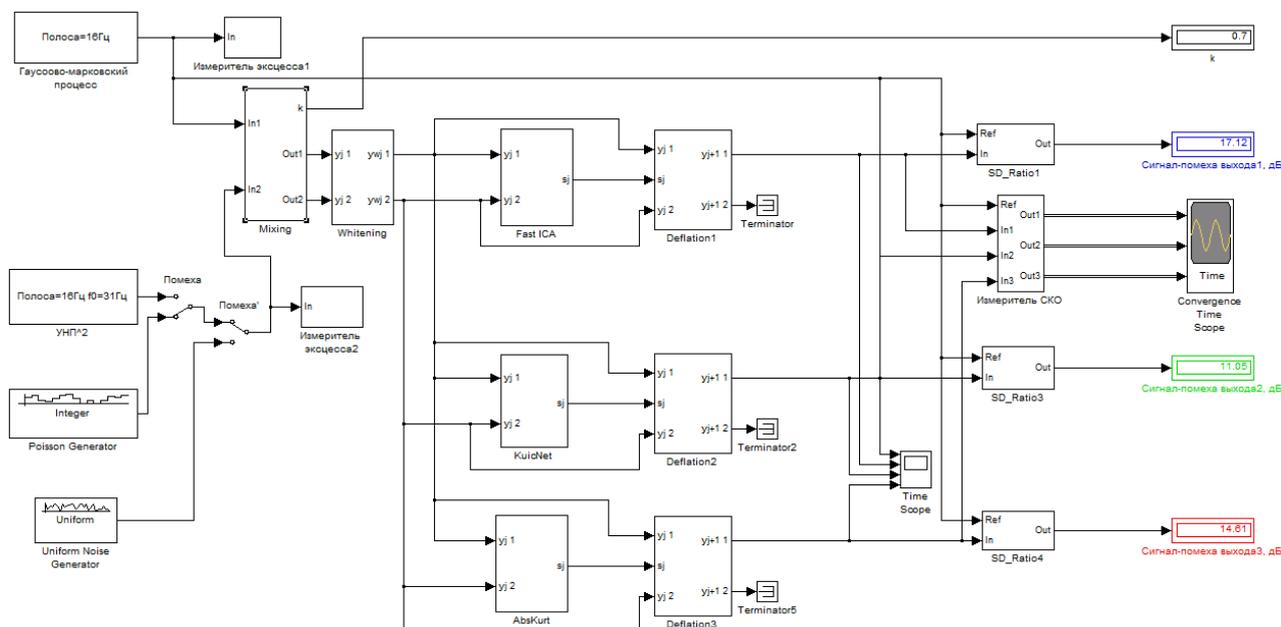


Рис. 7. Экспериментальная установка в Simulink, реализующая компенсационный метод слепого подавления помех

Она состоит из источников сигнала (гауссово-марковский процесс с относительной шириной полосы α) и помех (квадратичный узкополосный процесс¹⁰ с относительной шириной полосы α и центральной частотой ω_0 ; процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda_{\text{П}}$; случайный процесс с симметричным равномерным распределением), блоков смешивания (Mixing), обеления (Whitening), слепого выделения (FastICA, KuicNet, AbsKurt), удаления (Deflation), а также блоков вычисления и индикации отношений мощностей сигнал-помеха на входе и на выходе устройства, измерителя СКО.

Реализация в Simulink алгоритмов обеления, выделения и удаления показана на рис. 8–12.

¹⁰ Формируется как разность квадратов узкополосных нормальных процессов.

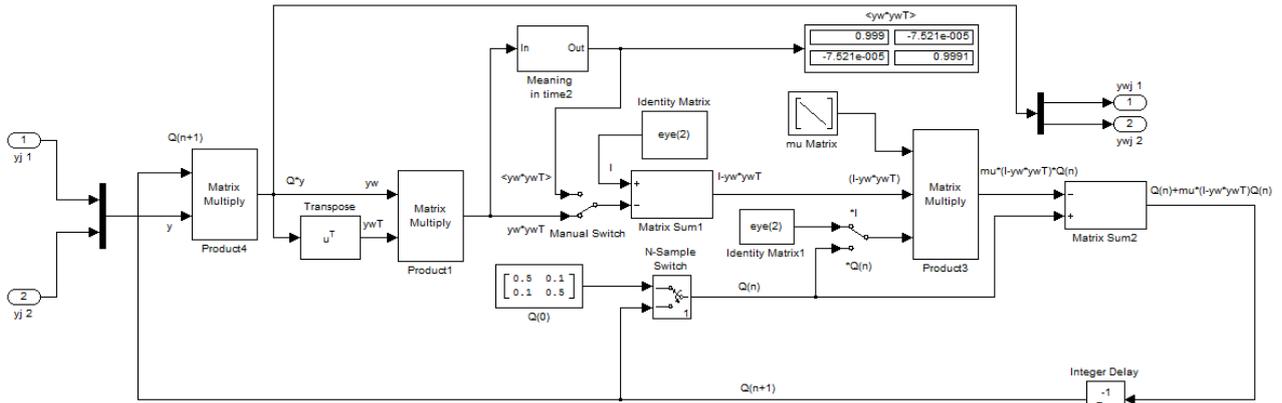


Рис. 8. Алгоритм обеления входных смесей в Simulink по ф.4

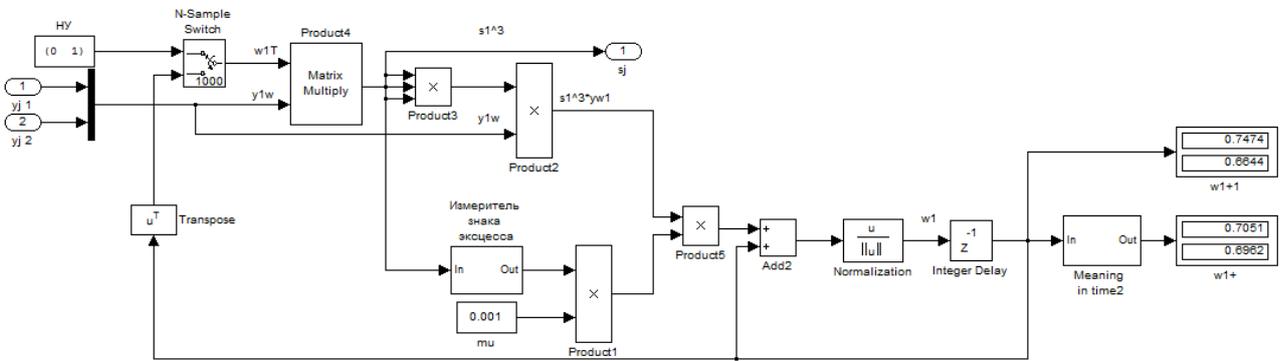


Рис. 9. Алгоритм AbsKurt (ф. 22)

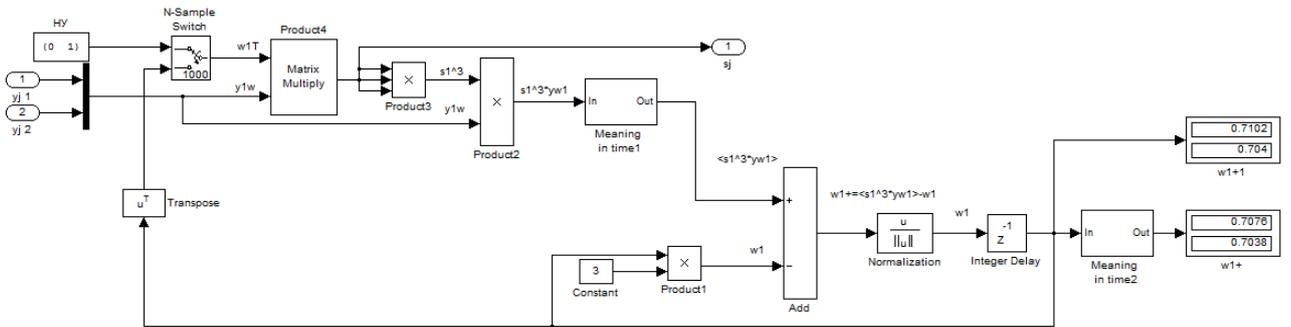


Рис. 10. Алгоритм FastICA (ф. 17)

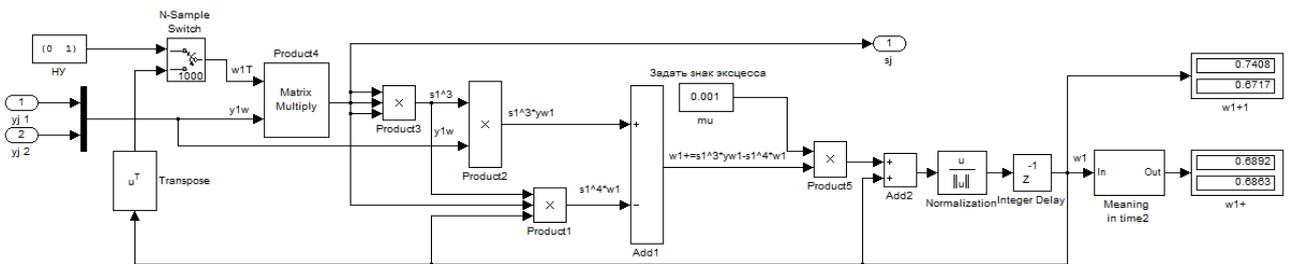


Рис. 11. Алгоритм KuicNet (ф. 20)

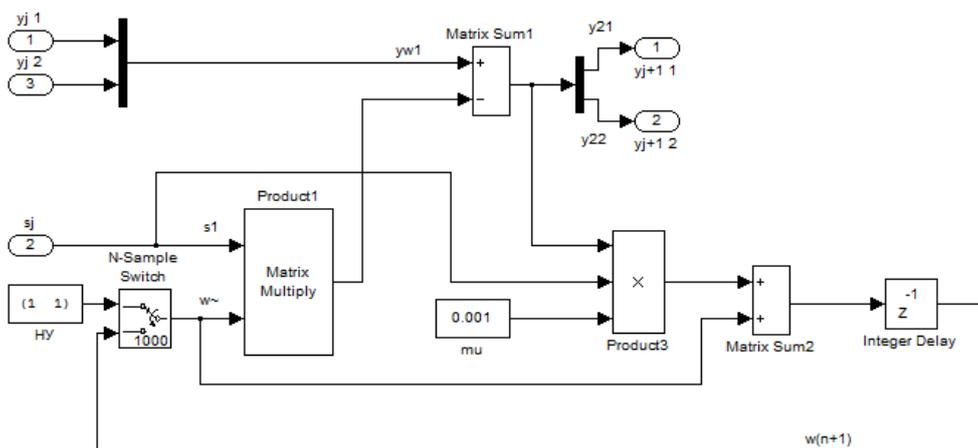


Рис. 12. Алгоритм удаления выделенной негауссовой помехи по ф.10 в Simulink

Результаты экспериментов отображены в таблицах 1–4 и рисунках 13–15.

В двух приемных датчиках действуют аддитивно взаимодействующие помеха и сигнал с разной дисперсией, задаваемой коэффициентами матрицы смешивания $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$, (ф. 24). Тогда отношение дисперсий случайных процессов в смесях можно выразить в таблице:

k	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5
$\eta_{1 \text{ датчик}}, \text{ дБ}$	-4.1	-2.5	-1.1	0.2	1.3	2.5	3.6	4.8
$\eta_{2 \text{ датчик}}, \text{ дБ}$	4.1	2.5	1.1	-0.2	-1.3	-2.5	-3.6	-4.8

Сигнал — гауссово-марковский процесс ($\alpha=0.1$). Для градиентных алгоритмов и алгоритма удаления помехи коэффициент адаптации μ равен 0.001^{11} . Типы помех выбираются переключателями. Эффективность алгоритмов определяется по отношению мощности сигнал-помеха q на выходе блока удаления помехи.

Таблица 1

Зависимости отношения мощности сигнал-помеха на выходе q от параметра k при разных алгоритмах слепого выделения квадратичного узкополосного процесса¹² ($\omega_0=\pi/16, \alpha=0.1$)

k	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5
$q_{\text{FastICA}}, \text{ дБ}$	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1
$q_{\text{KuicNet}}, \text{ дБ}$	14.2	13.8	13.3	12.9	12.3	11.7	11.1	10.4
$q_{\text{AbsKurt}}, \text{ дБ}$	14.9	14.7	14.4	14.0	13.6	13.2	12.7	12.1

¹¹ В некоторых случаях для обеспечения сходимости алгоритмов выбирался на порядок меньше.

¹² Экссесс равен 10.9.

Таблица 2

Зависимости отношения мощности сигнал-помеха на выходе q от параметра k при разных алгоритмах слепого выделения процесса Пуассона (с интенсивностью $\lambda_{\Pi}=0.15^{13}$)

k	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5
q_{FastICA} , дБ	17.1	17.1	17.1	17.1	17.1	-2.3	-3.6	-4.8
q_{KuicNet} , дБ	14.2	13.6	12.9	12.2	11.5	10.8	9.9	9.1
q_{AbsKurt} , дБ	15.5	15.2	14.8	14.4	13.9	13.4	12.8	12.1

Таблица 3

Зависимости отношения мощности сигнал-помеха на выходе q от величины эксцесса помехи при разных алгоритмах слепого выделения процесса Пуассона при $k = 0.7$

κ_4^{s1}	10	6.6	3.3	2	1	0.1	0.01
q_{FastICA} , дБ	17.2	17.1	-0.3	-0.33	-0.3	-0.33	-0.4
q_{KuicNet} , дБ	11.1	12.2	13.2	12.9	13.5	12.5	11.1
q_{AbsKurt} , дБ	16.4	14.4	14.3	13.8	14.2	16.5 ¹⁴	14.6

Таблица 4

Зависимости отношения мощности сигнал-помеха на выходе q от параметра k при разных алгоритмах слепого выделения широкополосного равномерного процесса (значение эксцесса равно -1.2)

k	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5
q_{FastICA} , дБ	3.8	2.2	0.8	-0.4	-1.6	-2.7	-3.8	-4.9
q_{KuicNet} , дБ	17.0	17.0	16.9	16.9	16.8	16.8	16.7	16.6
q_{AbsKurt} , дБ	17.0	17.0	16.9	16.9	16.8	16.8	16.7	16.6

¹³ Соответствует значению эксцесса помехи равному 6.6.

¹⁴ Измерения проводились при $\mu = 0.0001$.

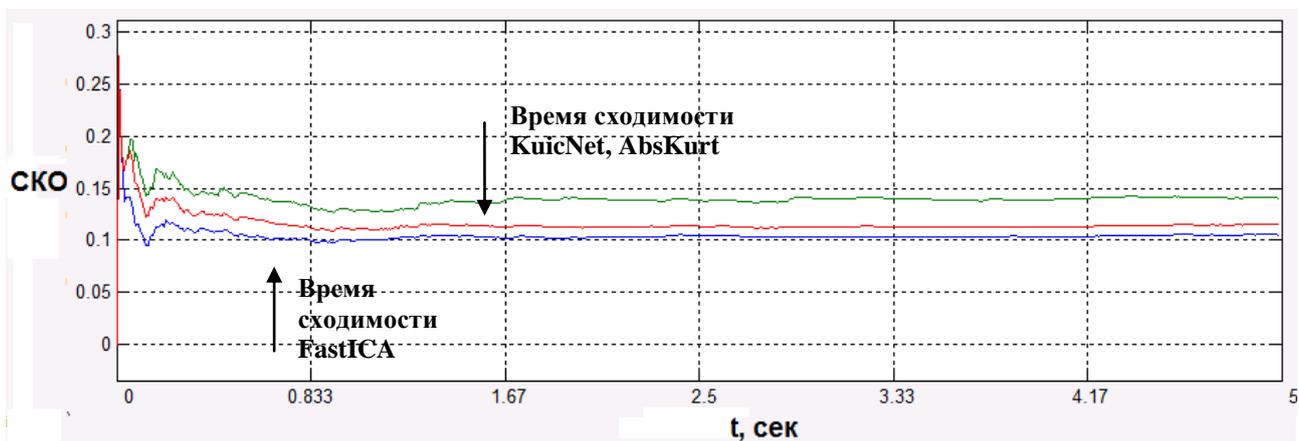


Рис. 13. Средний квадрат ошибки воспроизведения гауссово-марковского процесса на фоне процесса Пуассона, с использованием алгоритмов FastICA (синяя линия), KuicNet (зеленая линия) и AbsKurt (красная линия) при $k=0.7$ и $\lambda_{\Pi}=0.1$ (эксцесс помехи равен 10)



Рис. 14. Средний квадрат ошибки воспроизведения гауссово-марковского процесса на фоне процесса Пуассона, с использованием алгоритмов FastICA (синяя линия), KuicNet (зеленая линия) и AbsKurt (красная линия) при $k=0.7$ и $\lambda_{\Pi}=0.15$ (эксцесс помехи равен 6.6)

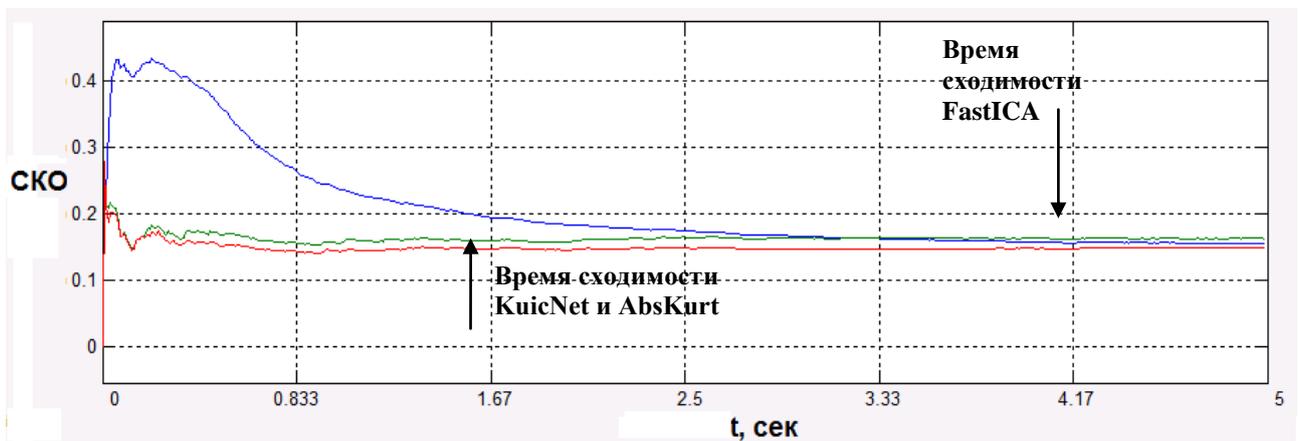


Рис. 15. Средний квадрат ошибки воспроизведения гауссово-марковского процесса на фоне процесса Пуассона, с использованием алгоритмов FastICA (синяя линия), KuicNet (зеленая линия) и AbsKurt (красная линия) при $k=0.65$ и $\lambda_{\Pi}=0.15$ (эксцесс помехи равен 6.6)

Выводы

1. Метод слепого подавления помех, реализованный с использованием их слепого выделения и компенсации в смеси с сигналом, работоспособен и позволяет достичь отношение мощности сигнал-помеха на выходе блока удаления помехи от 9 до 17 дБ в зависимости от отношения мощности сигнал-помеха на входах блока обеления и применяемых алгоритмов выделения помех FastICA, AbsKurt, KuicNet (см. табл. 1–4).

2. При больших эксцессах (10 и более) FastICA является самым быстросходящимся, тогда как алгоритмы AbsKurt и KuicNet уступают ему в этом (см. рис. 13). В то же время моделирование подтвердило зависимость скорости сходимости от значения эксцесса выделяемой помехи для алгоритма FastICA и инвариантность сходимости алгоритмов AbsKurt и KuicNet к изменению эксцесса (см. табл. 3). В частности, при уменьшении эксцесса помехи с 10 до 6.6 выигрыш в скорости сходимости у алгоритма FastICA падает примерно с 2.3 до 1 (см. рис. 14).

3. При увеличении параметра k увеличивается расстояние от точки начальных условий $(0,1)$ до точки искомого решения w_1 , что при эксцессах менее 7 негативно влияет на алгоритм FastICA, в то же время AbsKurt и KuicNet устойчивы к подобным расстройкам (см. табл. 2).

4. Алгоритм FastICA не способен выделять негауссовы помехи с отрицательным эксцессом на фоне гауссова сигнала; алгоритм KuicNet работоспособен, однако необходимо иметь априорные данные о знаке эксцесса, чтобы правильно задать параметр β ; алгоритм AbsKurt инвариантен к знаку эксцесса (см. табл. 4).

Литература

1. A.Cichoki and S.Amari, Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and Applications, John Wiley & Sons, 2002.
2. A. Cichocki, R. Thawonmas, and S. Amari, "Sequential blind signal extraction in order specified by stochastic properties" Electron. Lett., vol. 33, № 1, pp. 64–65, Jan. 1997.

3. Zhi-Lin Zhang, Zhang Yi, Extraction of a Source Signal Whose Kurtosis Value Lies in a Specific Range, *Neurocomputing*, vol. 69, № 7–9, pp. 894–899, 2006.
4. Zhi-Lin Zhang, Zhang Yi, Robust Extraction of Specific Signals with Temporal Structure, *Neurocomputing*, vol. 69, № 7-9, pp. 888–893, 2006.
5. S. Amari, “ICA of temporally correlated signals - learning algorithm,” in *Proceedings of ICA’99: International workshop on blind signal separation and independent component analysis*, Aussois, France, Jan. 1999. pp. 13–18.
6. K. Matsuoka, M. Ohya, and M. Kawamoto. A neural net for blind separation of nonstationary signals. *Neural Networks*, 8(3) : 411–419, 1995.
7. S. Amari. Natural gradient works efficiently in learning. *Neural Computation*, № 10 : pp. 271–276, 1998.
8. Hyvarinen, A., Karhunen, J. and Oja, E. *Independent component analysis*. New York: J. Wiley, 2001.
9. P. Comon. Contrast functions for blind deconvolution. *IEEE Signal Processing Lett.*, SPL-3, no. 7 : 209–211, July 1996.
10. O. Shalvi and E. Weinstein. Universal method for blind deconvolution. In S. Haykin, editor, *Blind Deconvolution*, pages 121–180. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
11. S.C. Douglas and S.Y. Kung. Kuicnet algorithms for blind deconvolution. In *Proc. IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, pp. 3–12, Cambridge, UK, August 1998.
12. Шарый С.П. Курс вычислительных методов. – Новосибирск : Институт вычислительных технологий СО РАН, 2013. – 497 с.
13. Норенков И.П. Экстремальные задачи при схемотехническом проектировании в электронике / И.П. Норенков, С.Г. Мулярчик, С.Р. Иванов. – Минск : Изд-во БГУ, 1976. – 239 с. : ил.

Ссылка на статью:

А. Е. Манохин. Компенсационный метод слепого подавления аддитивных стационарных помех с негауссовым распределением. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2017. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb17/4/text.pdf>