УДК 621.396.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ В ПРОЦЕДУРАХ НАБЛЮДЕНИЯ В АВИАЦИОННЫХ БОРТОВЫХ РЛС.
ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТРАЕКТОРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А. С. Богачев, В. И. Меркулов, В. С. Чернов, С. Б. Гусаров

АО «Концерн «Вега», 121170, Москва, Кутузовский проспект, 34

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2018 г.

Аннотация. Приведены общие сведения о различных математических моделях относительного движения воздушных объектов, используемых в задачах оценивания координат и параметров их движения в бортовых РЛС летательных аппаратов. Проанализированы возможности практического использования этих моделей.

Ключевые слова: математическая модель, относительное движение, воздушный объект, бортовая РЛС, система координат.

Abstract. General information is presented on various mathematical models of the relative movement of air objects used in problems of estimating the coordinates and parameters of their movement in radar-tracking systems of airspace monitoring. Mathematical models of the relative movement in trajectory coordinate system of airborne radar are considered. The features of practical implementation of these mathematical models of the movement in trajectory tracking systems are analyzed.

The predominant method used to track air object for the fixed radar sensor is tracking in the mixed coordinate system. In this case, the model of the movement of an air object is simulated in fixed Cartesian coordinate system, and model of measurements in spherical or polar coordinate system of the radar sensor. Since the measurements are related to the Cartesian coordinates of the air object by nonlinear dependencies, nonlinear estimation and filtering methods are used in the tracking algorithms. The

main difficulties in the development of the tracking algorithm in a mixed coordinate system are related with the approximation of nonlinear measurements in accordance with the first several terms of their Taylor series expansion.
In the case of a mobile radar sensor, during the measurement the sensor moves relative to the air object. To take into account this phenomenon in the formation of forecast values of measurements, it is necessary to recalculate the absolute Cartesian coordinates of the air object into a coordinate system whose origin coincides with the center of mass of the airborne radar, and the axes are parallel to the axes of the fixed coordinate system. This procedure assumes subtraction from the absolute Cartesian coordinates of the air object of the corresponding absolute Cartesian coordinates of the airborne radar. Based on the obtained relative Cartesian coordinates of the air object, one can determine its spherical or polar coordinates.
Keywords: mathematical model, relative motion, air object, airborne radar, system of coordinates.

Введение

При решении задач управления воздушным движением и наведения летательных аппаратов, охраны государственной границы, проведения антитеррористических мероприятий, обеспечения действий в чрезвычайных ситуациях необходимо осуществлять мониторинг окружающего пространства [1-3].

Важнейшей задачей мониторинга окружающего воздушного пространства является оценивание координат и параметров движения воздушных объектов (ВО), осуществляемого бортовыми РЛС летательных аппаратов (ЛА). От качества и надежности решения данной задачи в существенной степени зависит эффективность применения ЛА, бортовые РЛС (БРЛС) которых функционируют в различных режимах наблюдения за ВО [4, 5].

Как известно [6], при использовании концепции переменных состояния первым этапом общей методики решения задач построения алгоритмов оценивания является разработка математических моделей состояния и наблюдения.

Обычно под математической моделью понимают совокупность математических объектов и отношений между ними, которая с той или иной степенью адекватности отображает некоторые свойства объекта [7]. По своей сути математическая модель (ММ) является упрощением реальной ситуации и представляет собой абстрактный, формально описанный объект, изучение которого возможно математическими методами.

При разработке математических моделей состояния принципиальное значение имеет выбор модели движения (траектории) ВО, который определяется, прежде всего, гипотезой о характере движения ЛА.

В общем случае считается, что движение управляемого ЛА состоит из элементов движения, которые могут включать детерминированную и статистическую составляющие, неопределенную и непредсказуемую составляющие [8]. При этом изменение некоторой координаты $x_i(t)$ во времени можно представить как сумму

$$x_i(t)=x_{ДС}(t)+x_{СС}(t)+x_{НС}(t)+x_{НПС}(t), \quad (1)$$

где $x_{ДС}(t)$ – детерминированная составляющая движения – та часть движения, которая может быть описана системой детерминированных уравнений, например, вида $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$; $x_{СС}(t)$ – статистическая составляющая движения – та часть, которая обусловлена случайным воздействием среды или другими случайными аэродинамическими нагрузками и причинами; $x_{НС}(t)$ – неопределенная составляющая движения – обусловлена типовыми действиями летчика по ситуации, часто доведенными до автоматизма, например: заход на посадку, действия в стандартной ситуации уклонения при возникновении угрозы; $x_{НПС}(t)$ – непредсказуемая составляющая движения – обусловлена волей пилота, проявляющейся в достижении цели выбранным путем, и даже свободой выбора цели (в этом случае неизвестны даже вероятностные характеристики).

В свою очередь, характер траектории движения ВО зависит от многих факторов и условий, таких, как тип ВО, высота и скорость полета, маневренные возможности ВО, возможное противодействие, действие случайных возмущений, обусловленных, в частности, турбулентностью атмосферы и т.д. Выбор той или иной модели движения ВО определяется рядом соображений. Обычно при разработке модели движения ВО задаются некоторой гипотезой о характере движения. Простейшей гипотезой является предположение о том, что вектор скорости ВО постоянен во времени, т.е. ВО не маневрирует. Более сложной является гипотеза, согласно которой ВО непрерывно маневрирует в пространстве, т.е. вектор скорости ВО изменяется во времени и по направлению. Иногда используют гипотезу о периодическом маневрировании ВО. При такой гипотезе в процессе обработки информации возникает задача обнаружения и определения вида маневра, его продолжительности и статистических характеристик.

Как следует из вышесказанного, задание гипотезы движения ВО не исчерпывается только указанием предполагаемого характера изменения координат (детерминированный или случайный процесс) и выбором подлежащих оцениванию параметров. Необходимо также на основе теоретических исследований и анализа реальных траекторий ВО дать достаточно полное описание их возможных маневров. В общем случае обобщенная гипотеза о статистической модели движения ВО включает в себя совокупность гипотез, определяющих вид траекторий движения ВО, и возможные статистические характеристики маневров. На основе обобщенной гипотезы проектируются как системы автоматического сопровождения ВО, так и системы оптимального оценивания координат и параметров движения ВО.

Важную роль при разработке ММ движения ВО играют выбор системы координат, а также определение компонент вектора состояния, векторов входных управляющих и возмущающих воздействий. На практике стремятся получить такие модели, которые были бы достаточно простые и в то же время правильно отражали реальные траектории маневрирующих ВО. Кроме того, ММ движения ВО должны соответствовать решаемым БРЛС информационным задачам, возможностям бортового комплекса оборудования ЛА по измерению необходимых для практической реализации физических величин, а также специфике построения алгоритмов траекторного сопровождения ВО.

При наблюдении ВО бортовые РЛС обеспечивают решение задач *мониторинга* воздушного пространства и информационного обеспечения процедур наведения ЛА. В процессе мониторинга должна быть получена информация о всех ВО, находящихся в заданной зоне радиолокационного наблюдения, которую для потребителей наиболее удобно отображать в неподвижной прямоугольной СК, начало которой расположено в некоторой опорной точке земной поверхности. Подобная информация, в частности, необходима для формирования ситуационной осведомленности о состоянии воздушной обстановки, при обмене информацией между ЛА при групповых действиях, для управления воздушным движением и т.п.

При *наведении* ЛА необходима информация о координатах и параметрах относительного движения наводимого ЛА и ВО, которые используются для выработки сигналов управления наводимым ЛА, обеспечивающих его сближение с заданным ВО, например, по методу параллельного или пропорционального сближения [6]. Для получения требуемой информации необходимо, чтобы разработанные алгоритмы сопровождения основывались на ММ относительного движения, достаточно точно отражающих закономерности изменения во времени необходимых для организации наведения координат и параметров относительного движения. При этом ММ относительного движения должны быть представлены в системах координат наводимого ЛА, которые позволяют обеспечить практическую возможность выполнения на борту наводимого ЛА процедур измерения координат и параметров относительного движения ВО и формирования сигналов управления ЛА, и адаптированы к вполне определенным условиям применения.

Особенности построения *алгоритмов траекторного сопровождения* ВО во многом определяются характером измеряемых БРЛС величин. В БРЛС в общем случае осуществляется измерение относительной дальности, скорости сближения и угловых координат ВО. В то же время сопровождение ВО может выполняться в различных системах координат (СК): в смешанных СК, в декартовых координатах и в координатах радиолокационного датчика. Достоинства и недостатки сопровождения в этих СК проанализированы в работе [9].

Сопровождение ВО в смешанных СК при неподвижном радиолокационном датчике является самым естественным и широко распространенным подходом [9]. При этом модель движения ВО смоделирована в неподвижной декартовой СК, а модель измерений в сферической или полярной СК радиолокационного датчика. Поскольку измерения связаны с декартовыми координатами ВО нелинейными зависимостями, то в алгоритмах сопровождения применяются нелинейными методы оценивания и фильтрации. Основные трудности при разработке алгоритмов сопровождения в смешанных СК связаны с аппроксимацией нелинейных измерений в соответствии с первыми несколькими членами их разложения в ряд Тейлора.

В случае подвижного радиолокационного датчик в процессе измерений происходит перемещение в пространстве датчика относительно ВО. Для учета данного явления при формировании прогнозных значений измерений необходимо пересчитывать абсолютные декартовые координаты ВО в СК, начало которой совпадает с центром масс воздушного носителя бортовой РЛС, а оси параллельны осям неподвижной СК. Данная процедура предполагает вычитание из абсолютных декартовых координат ВО соответствующих абсолютных декартовых координат носителя БРЛС. На основании полученных относительных декартовых координат ВО можно определить его сферические либо полярные координаты.

При использовании в алгоритмах сопровождения декартовых координат необходимо осуществлять пересчет измеренных БРЛС значений сферических координат ВО в неподвижную прямоугольную нормальную земную СК, привязанную к некоторой опорной (условной) точке на земной поверхности. В результате будут сформированы косвенные измерения прямоугольных координат ВО в нормальной земной СК. Однако при пересчете из-за нелинейной зависимости вектора наблюдение от вектора состояния ошибки косвенных измерений становятся зависимыми по координатам (коррелированными), негауссовскими и зависящими от значений вектора состояния, что существенно усложняет алгоритмы траекторного сопровождения ВО [5, 9].

В свою очередь при использовании моделей движения в СК радиолокационного датчика отсутствует необходимость нелинейного преобразования результатов измерений БРЛС, что упрощает организацию процедур сопровождения ВО. При этом принципиальной особенностью ММ движения в СК наводимого ЛА является возможность учета относительного движения ВО.

Таким образом, при разработке эффективных алгоритмов траекторного сопровождения ВО необходимо иметь сведения об известных ММ движения в различных СК. Эти модели могут существенно отличаться по виду уравнений, описывающих движение ВО.

В настоящее время разработаны разнообразные модели абсолютного движения ВО *в неподвижной прямоугольной СК*, общие сведения о которых приведены в [10-16]. При этом наиболее подробный обзор моделей движения маневрирующих ВО выполнен в работе [10].

Отметим, что системы траекторного сопровождения не располагают знанием точной динамической модели движения ВО, поскольку истинное динамическое поведение маневрирующего ВО при полете в текущий момент времени неизвестно. Поэтому при разработке ММ движения ВО было использовано два основных подхода.

При первом подходе фактически неслучайное детерминированное по природе управляющее воздействие на ВО аппроксимируется как вероятностный процесс, обладающий определенными свойствами. При втором подходе типовые траектории ВО описываются некоторыми представительскими моделями движения с заданными параметрами [10].

В зависимости от степени связанности между движениями по различным координатам разработанные модели для маневрирующих ВО подразделяются на *одномерные* (координатно-независимые), *двумерные* и *трехмерные*.

В координатно-независимых моделях, как правило, входное управляющее воздействие моделируется не в виде неизвестного детерминированного процесса, а как вероятностный процесс [10].

В принципе большинство маневров ВО связаны по различным координатам. Для простоты в координатно-независимых моделях в разработанных моделях маневра предполагается, что эта связь координат слабая и ею можно пренебречь. Это можно считать справедливым для случаев, когда входное управляющее воздействие может быть смоделировано как вероятностный процесс.

Для координатно-независимых моделей маневра предложенные модели классифицируются на три группы: модели белого шума, марковские модели процесса, полумарковские модели скачкообразного процесса.

Для моделей белого шума входное управляющее воздействие смоделировано как белый шум и включает модели с постоянным вектором скорости, постоянным ускорением и полиномиальные модели.

В марковских моделях движения входное управляющее воздействие смоделировано как процесс, который имеет временную автокорреляцию. Они включают хорошо известную модель Зингера, ее различные модификации и некоторые другие модели.

В полумарковские моделях скачкообразного процесса входное управляющее воздействие смоделировано как скачкообразный процесс.

Отметим, что в одномерных моделях, отображающих движущуюся силу (обычно ускорение) в виде случайного процесса, не учитывается фактическая динамика ВО или его кинематика [10].

Известно [10], что большинство маневров ВО может быть представлено как движения в виде разворотов с различными угловыми скоростями поворота.

Для модели движения *разворота* предложены двумерные и трехмерные модели маневра ВО. При этом используются как кинематические модели, так и динамические.

Кинематические модели более соответствуют геометрии пространственных траекторий, чем вероятностные модели. В этих моделях закон изменения положения вектора скорости ВО задается в СК, непосредственно связанной с ВО.

В динамических моделях дополнительно учитываются в явном виде управляющие входные воздействия (тяга двигателя, отклонение элеронов и рулей направления и высоты), осуществляемые пилотом и аппроксимируемые как вероятностные процессы. Динамические модели наиболее точно отображают пространственное движение ВО, но они являются и более сложными для реализации в алгоритмах траекторного сопровождения.

Выше были указаны ММ абсолютного движения ВО, описывающие маневр ВО в неподвижной прямоугольной СК.

В настоящее время разработаны также различные ММ относительного движения ВО. Однако в известной научно-технической литературе отсутствуют обзорные материалы, в которых бы приводились обобщенные данные о ММ относительного движения ВО и областях их целесообразного применения при решении задач наведения. В дальнейшем для определенности будем называть ЛА-носитель БРЛС воздушным наблюдателем (ВН).

Цель статьи - обобщение сведений об известных моделях относительного движения ВН и ВО и анализ возможностей их использования для оценивания координат и параметров движения ВО.

По существу материалы статьи представляют собой обзор ММ относительного движения ВО и ВН, в чем и состоит ее основное отличие от обзоров ММ движения ВО [10-16], в которых не рассматривается возможность перемещения радиолокационного датчика в пространстве.

В качестве СК, в которых возможен учет относительного движение ВО и ВН, наиболее часто рассматриваются траекторная, антенная и лучевая СК [6, 17]. Возможно также применение подвижной сферической СК ВН.

Ниже приводятся характеристики ММ, описывающих относительное движение ВО в указанных СК. При рассмотрении ММ будет также учитываться возможность использования их в разрабатываемых алгоритмах траекторного сопровождения ВО.

Модель движения воздушного объекта в траекторной системе координат

При рассмотрении ММ движения ВО используются следующие прямоугольные правые СК: нормальная земная СК $O_0X_gY_gZ_g$, нормальная СК $OX_gY_gZ_g$ и траекторная СК $OX_kY_kZ_k$ (рис. 1) [6].

При решении задач управления и наведения ЛА начало нормальной земной СК $O_0X_gY_gZ_g$ совмещается с пунктом управления (наведения) или с некоторой условной (опорной) точкой на поверхности Земли. При описании динамики полета в атмосфере земные СК (в том числе СК $O_0X_gY_gZ_g$) обычно считаются инерциальными, а Земля принимается плоской, т.е. осуществляется пренебрежение вращением местной вертикали при движении летательного аппарата. При таких допущениях вектор абсолютной скорости движения центра масс ЛА заменяется на вектор земной скорости $\mathbf{V}_к$, а вектор абсолютной угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на вектор угловой скорости относительно нормальной земной СК (земной угловой скорости) [6]. Направление осей O_0X_g, O_0Z_g неизменно относительно Земли и выбирается в соответствии с задачей. На рис. 1 оси O_0X_g и O_0Z_g ориентированы по касательным (соответственно к географическому меридиану на север и к географической параллели на восток), проходящим через точку O_0. Ось O_0Y_g направлена вверх по местной вертикали.

Нормальная СК $OX_gY_gZ_g$ – это подвижная система координат, начало которой O обычно совмещается с ЛА, ось OY_g направлена по местной вертикали, а оси OX_g, OZ_g – в соответствии с задачей (при относительно небольших расстояниях между точками O_0 и O параллельно осям нормальной земной СК).

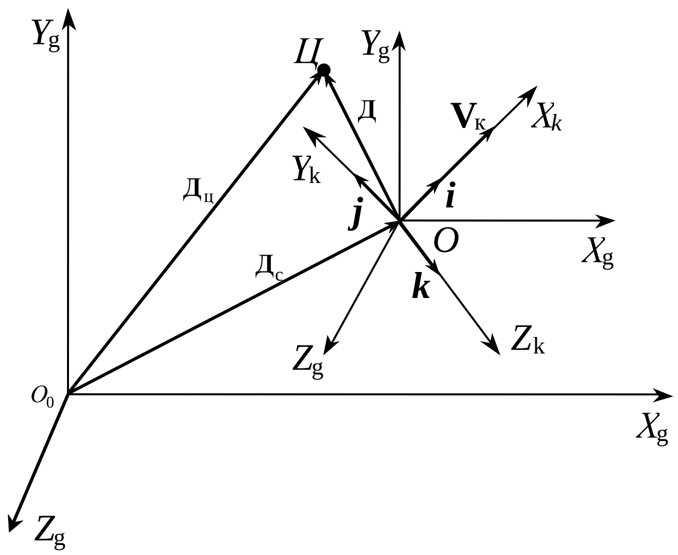

Рис. 1 Взаимное положение нормальной земной, нормальной подвижной и траекторной СК

Начало *траекторной СК* $OX_kY_kZ_k$ совмещено с центром масс ЛА, ось ОX_k совпадает с направлением вектора земной скорости $\mathbf{V}_к$, а ось OY_k лежит в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости OX_gZ_g и проходящей через ось OX_k. Ось OY_k обычно направлена вверх от поверхности Земли. Ось OZ_k направлена вправо от оси OX_k и всегда параллельна местной горизонтальной плоскости Земли (плоскости OX_gZ_g). Использование траекторной СК позволяет достаточно просто задавать вектор абсолютной (земной) скорости $\mathbf{V}_к$ движения ЛА, так как он направлен вдоль оси OX_k. В этой СК наглядно представляются радиусы кривизны траектории движения ЛА в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Направление осей траекторной СК относительно нормальной СК определяется углом пути (курса, рыскания) ψ и углом наклона траектории Θ. Угол ψ – это угол между осью OX_g нормальной СК и направлением вектора путевой скорости $\mathbf{V_п}$ ЛА – проекции вектора $\mathbf{V}_к$ на плоскость OX_gZ_g, а угол Θ определяется между плоскостью OX_gZ_g и вектором $\mathbf{V}_к$ (рис. 2).

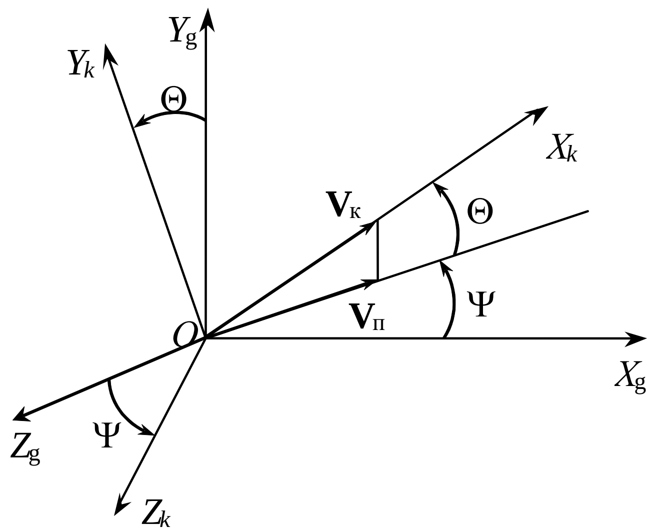

Рис. 2 Взаимное положение нормальной подвижной и траекторной СК

Положение ВО (точка *Ц*) и ВН (точка *О*) в нормальной земной СК $O_0X_gY_gZ_g$ определяется векторами $\mathbf{Д_ц}$ и $\mathbf{Д_с}$ соответственно (рис. 1). Относительное положение ВО характеризуется вектором $\mathbf{Д}$, так что выполняется векторное соотношение

$$\mathbf{Д}_ц(t) = \mathbf{Д}_с(t) + \mathbf{Д}(t)\,. \tag{2}$$

С ВН связана его траекторная СК $OX_kY_kZ_k$, вращающаяся вокруг центра масс ВН относительно нормальной СК $OX_gY_gZ_g$ с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}\ (t)$.

Продифференцировав по времени левую и правую части векторного соотношения (2), получим

$$\mathbf{V}_ц(t) = \mathbf{V}_к(t) + \mathbf{V}_{сб}(t)\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{V}_ц(t) = \mathrm{d}\mathbf{Д}_ц(t)/\mathrm{d}t$ – вектор земной скорости ВО, т.е. вектор абсолютной скорости движения точки *Ц*; $\mathbf{V}_к(t) = \mathrm{d}\mathbf{Д}_c(t)/\mathrm{d}t$ – вектор земной скорости ВН, т.е. вектор абсолютной скорости движения точки *О*; $\mathbf{V}_{сб}(t) = \mathrm{d}\mathbf{Д}(t)/\mathrm{d}t$ – вектор скорости сближения ВО с ВН, определяемый в СК $O_0X_gY_gZ_g$ (абсолютная производная вектора $\mathbf{Д}(t)$).

Далее воспользуемся правилом дифференцирования векторов (ПДВ), согласно которому абсолютная производная $\mathrm{d}\boldsymbol{a}(t)/\mathrm{d}t$ вектора $\boldsymbol{a}(t)$, заданного своими проекциями $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ на оси подвижной (вращающейся) СК, равна сумме относительной (локальной) производной $\tilde{d}\boldsymbol{a}(t)/dt$ вектора $\boldsymbol{a}(t)$ и векторного произведения угловой скорости $\mathbf{\Omega}(t)$ подвижной СК на этот вектор [6]:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{a}(t)}{\mathrm{dt}} + \mathbf{\Omega}(t)\times\boldsymbol{a}(t), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j} + a_z(t)\,\mathbf{k}$; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – орты подвижной СК; символ “×” означает операцию векторного произведения.

Согласно ПДВ (4) абсолютная производная вектора $\mathbf{Д}(t)$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{Д}}(t) = \mathbf{V}_{\text{Д}}(t) + \mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{Д}(t), \tag{5}$$

где $\mathbf{V}_{\text{Д}}(t) = \tilde{\mathrm{d}}\mathbf{Д}(t)/\mathrm{d}t$ – вектор относительной скорости точки *Ц*; $\mathbf{\Omega}(t)$ – вектор угловой скорости вращения траекторной СК относительно СК $OX_gY_gZ_g$. Подставив (5) в выражение (3), получим

$$\mathbf{V}_{\text{ц}}(t) = \mathbf{V}_{\text{к}}(t) + \mathbf{V}_{\text{Д}}(t) + \mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{Д}(t). \tag{6}$$

Выразим абсолютное ускорение точки *Ц* через составляющие ускорений в СК $OX_kY_kZ_k$, применив ПДВ (4) к векторам в правой части соотношения (6). В результате после ряда преобразований абсолютная производная вектора скорости точки *Ц* будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_{\text{ц}}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{V}}_{\text{ц}}(t) = \frac{\tilde{d}\mathbf{V}_{\text{к}}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{V}_{\text{к}}(t) + \frac{\tilde{d}\mathbf{V}_{\text{Д}}(t)}{\mathrm{d}t} + 2\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{V}_{\text{Д}}(t) +$$

$$+\frac{\tilde{\mathrm{d}}\mathbf{\Omega}(t)}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{Д}(t) + \mathbf{\Omega}(t)\times[\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{Д}(t)]. \tag{7}$$

Векторное уравнение (7) можно представить в виде

$$\boldsymbol{a}_{\text{ц}}(t) = \boldsymbol{a}_{\text{отн}}(t) + \boldsymbol{a}_{\text{пер}}(t) + \boldsymbol{a}_{\text{кор}}(t), \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{a}_{\text{ц}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_{\text{ц}}(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}_{\text{отн}}(\mathrm{t}) = \tilde{\mathrm{d}}\mathbf{V}_{\text{Д}}(t) / \mathrm{d}t \; -$$

абсолютное и относительное ускорения точки *Ц*;

$$\boldsymbol{a}_{\text{пер}}(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\mathbf{V}_{\text{к}}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{V}_{\text{к}}(t) + \frac{\tilde{\mathrm{d}}\mathbf{\Omega}(t)}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{Д}(t) + \mathbf{\Omega}(t) \times [\mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{Д}(t)] \; -$$

полное переносное ускорение точки *Ц*;

$$\boldsymbol{a}_{\text{кор}}(t) = 2\mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{V}_{\text{Д}}(t) -$$

поворотное или кориолисово ускорение.

Из (8) следует, что относительное ускорение

$$\boldsymbol{a}_{\text{отн}}(t) = \boldsymbol{a}_{\text{ц}}(t) - \boldsymbol{a}_{\text{пер}}(t) - \boldsymbol{a}_{\text{кор}}(t) \,. \tag{9}$$

Представим векторы $\boldsymbol{a}_{\text{ц}}(t)$ и $\boldsymbol{a}_{\text{отн}}(t)$, а также векторы, входящие в выражения для ускорений $\boldsymbol{a}_{\text{пер}}(t)$ и $\boldsymbol{a}_{\text{кор}}(t)$, в виде разложений по ортам **i**, **j**, **k** траекторной СК $OX_kY_kZ_k$. В результате получим следующие векторные соотношения [6]

$$\boldsymbol{a}_{\text{ц}}(t) = a_{\text{ц}x}(t)\,\mathbf{i} + a_{\text{ц}y}(t)\,\mathbf{j} + a_{\text{ц}z}(t)\,\mathbf{k}\,,$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{отн}}(t) = \tilde{\mathrm{d}}\mathbf{V}_{\text{Д}}(t) / \mathrm{d}t = \dot{\mathrm{V}}_{\text{Д}x}(\mathrm{t})\mathbf{i} + \dot{\mathrm{V}}_{\text{Д}y}(\mathrm{t})\mathbf{j} + \dot{\mathrm{V}}_{\text{Д}z}(\mathrm{t})\mathbf{k}\,,$$

где

$$\dot{V}_{Дl}(t) = \mathrm{d}V_{Дl}(t) / \mathrm{d}t\,, \quad (l=x,y,z);$$

$$\mathbf{V}_{\text{Д}}(t) = V_{Дx}(t)\,\mathbf{i} + V_{Дy}(t)\,\mathbf{j} + V_{Дz}(t)\,\mathbf{k};$$

$$\mathbf{Д}(t) = Д_x(t)\,\mathbf{i} + Д_y(t)\,\mathbf{j} + Д_z(t)\,\mathbf{k};$$

$$V_{Дx}(t) = \dot{Д}_x(t);\;\; V_{Дy}(t) = \dot{Д}_y(t);\;\; V_{Дz}(t) = \dot{Д}_z(t); \tag{10}$$

$$\tilde{\mathrm{d}}\mathbf{V}_{\text{к}}(t) / \mathrm{d}t = \dot{\mathrm{V}}_{\text{к}}(t)\mathbf{i}\,;$$

$$\mathbf{\Omega}(t) = \omega_x(t)\,\mathbf{i} + \omega_y(t)\,\mathbf{j} + \omega_z(t)\,\mathbf{k};$$

$$\tilde{\mathrm{d}}\mathbf{\Omega}(t) / \mathrm{d}t = a_{\omega x}(t)\mathbf{i} + a_{\omega y}(t)\mathbf{j} + a_{\omega z}(t)\mathbf{k}\,,$$

где $a_{\omega x}(t) = \dot{\omega}_x(t)$, $a_{\omega y}(t) = \dot{\omega}_y(t)$, $a_{\omega z}(t) = \dot{\omega}_z(t)$ – проекции вектора углового ускорения $\boldsymbol{a}_{\omega}(t)$ на оси траекторной СК.

Кроме того, применим правило координатного представления к векторным произведениям, входящим в выражения для ускорений $\boldsymbol{a}_{\text{пер}}(t)$ и $\boldsymbol{a}_{\text{кор}}(t)$. Согласно данному правилу, например, векторное произведение $\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{Д}(t)$ с использованием проекций данных векторов на оси СК $OX_kY_kZ_k$ может быть представлено в виде определителя

$$\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{Д}(t)=\det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_{\text{x}}(t) & \omega_{\text{y}}(t) & \omega_{\text{z}}(t)\\ Д_{\text{x}}(t) & Д_{\text{y}}(t) & Д_{\text{z}}(t)\end{bmatrix}=[\omega_{\text{y}}(t)Д_{\text{z}}(t)-\omega_{\text{z}}(t)Д_{\text{y}}(t)]\mathbf{i}+$$

$$+[\omega_{\text{z}}(t)Д_{\text{x}}(t)-\omega_{\text{x}}(t)Д_{\text{z}}(t)]\mathbf{j}+[\omega_{\text{x}}(t)Д_{\text{y}}(t)-\omega_{\text{y}}(t)Д_{\text{x}}(t)]\mathbf{k}\,. \qquad (11)$$

В результате координатного представления в (9) векторных произведений с учетом соотношений (10) и выполнения ряда преобразований для проекций относительного ускорения ВО получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{Д}_x(t)=V_{Дx}, \quad Д_x(t_0)=Д_{x0},\\
&\dot{V}_{Дx}(t)=a_{\text{ц}x}-\dot{V}_к-(a_{\omega y}+\omega_x\omega_z)Д_z+(a_{\omega z}-\omega_x\omega_y)Д_y+\\
&\qquad +(\omega_y^2+\omega_z^2)Д_x-2\omega_yV_{Дz}+2\omega_zV_{Дy},\ V_{Дx}(t_0)=V_{Дx0},\\
&\dot{Д}_y(t)=V_{Дy}, \quad Д_y(t_0)=Д_{y0},\\
&\dot{V}_{Дy}(t)=a_{\text{ц}y}-\omega_zV_к-(a_{\omega z}+\omega_x\omega_y)Д_x+(a_{\omega x}-\omega_y\omega_z)Д_z+\\
&\qquad +(\omega_x^2+\omega_z^2)Д_y-2\omega_zV_{Дx}+2\omega_xV_{Дz},\ V_{Дy}(t_0)=V_{Дy0},\\
&\dot{Д}_z(t)=V_{Дz}, \quad Д_z(t_0)=Д_{z0},\\
&\dot{V}_{Дz}(t)=a_{\text{ц}z}+\omega_yV_к-(a_{\omega x}+\omega_y\omega_z)Д_y+(a_{\omega y}-\omega_x\omega_z)Д_x+\\
&\qquad +(\omega_x^2+\omega_y^2)Д_z-2\omega_xV_{Дy}+2\omega_yV_{Дx},\ V_{Дz}(t_0)=V_{Дz0}.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Для упрощения записей в правых частях уравнений (12) опущен аргумент t.

Из анализа уравнений (12) следует, что для получения модели относительного движения ВО и ВН необходимо располагать данными о земной скорости ВН, ее производной, а также об угловых скоростях и угловых ускорениях, характеризующих вращательное движение траекторной СК. Кроме того, необходимо задаться гипотезой о характере изменения во времени проекций вектора абсолютного ускорения точки *Ц* на оси СК $OX_kY_kZ_k$. Простейшей является гипотеза о равенстве нулю этих проекций. Согласно более сложной гипотезе предполагается, что проекции вектора абсолютного ускорения точки *Ц* на оси СК $OX_kY_kZ_k$ не равны нулю и постоянны во времени, т.е.

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_{\text{ц}x}(t)=0, \quad a_{\text{ц}x}(t_0)=a_{\text{ц}x0},\\
&\dot{a}_{\text{ц}y}(t)=0, \quad a_{\text{ц}y}(t_0)=a_{\text{ц}y0},\\
&\dot{a}_{\text{ц}z}(t)=0, \quad a_{\text{ц}z}(t_0)=a_{\text{ц}z0}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Что же касается математических моделей для проекций векторов угловой скорости и углового ускорения на оси траекторной СК, то их получение на практике представляет большие трудности. Поэтому целесообразно воспользоваться *принципом распределения информации* [6], согласно которому часть измерительной информации используется для формирования отдельных компонент вектора состояния в качестве управляющих воздействий.

В рассматриваемом случае для этих целей используем параметры $\{V_к(t),\ldots,a_{\omega z}(t)\}$, которые могут быть измерены (вычислены) в бортовой информационно-вычислительной системе ВН. Если известны *математические модели* погрешностей измерения (вычисления) данных параметров, описываемые дифференциальными (разностными) уравнениями, то согласно принципу распределения информации в уравнения (12) вместо истинных значений параметров $\{V_к(t),\ldots,a_{\omega z}(t)\}$ подставляются разности между измеренными (вычисленными) значениями параметров и погрешностями их измерения (вычисления). Например, вместо угловой скорости $\omega_x(t)$, входящей во второе уравнение системы (12), необходимо подставить $\omega_{xи}(t)–\delta\omega_x(t)$, где $\omega_{xи}(t)$ – измеренное значение угловой скорости, а $\delta\omega_x(t)$ – погрешность ее измерения.

Дополнив преобразованную систему (12) дифференциальными уравнениями (13) и уравнениями, описывающими погрешности измерения (вычисления) параметров $\{V_к(t),\ldots,a_{\omega z}(t)\}$, получим математическую модель относительного движения ВО и ВН в траекторной СК. В этой модели в качестве переменных состояния будут выступать параметры $\{Д_x(t), V_{Дx}(t), a_{цx}(t),\ldots,a_{цz}(t)\}$, а также погрешности $\{\delta V_к(t),\ldots,\delta a_{\omega z}(t)\}$ в совокупности с дополнительными параметрами, используемыми для их описания. При этом измеренные значения параметров $V_{ки}(t)$ и $\dot{V}_{ки}(t)$ будут играть роль детерминированных управляющих воздействий, а параметры $\{\omega_{xи}(t),\ldots,a_{\omega zи}(t)\}$ – известных функций времени при переменных состояния. Погрешности измерений определяются по результатам проведения экспериментальных исследований комплекса оборудования ВН с применением процедуры юстировки.

Использование принципа распределения информации позволяет решить проблему априорной неопределенности в задании параметров $\{V_к(t),\ldots,a_{\omega z}(t)\}$. Однако получающаяся при этом модель относительного движения ВО и ВН является громоздкой и достаточно сложной для практической реализации в силу своей нелинейности, нестационарности и большой размерности (более девяти переменных состояния).

Данная математическая модель может быть упрощена, если пренебречь погрешностями измерения (вычисления) параметров $\{V_к(t),\ldots,a_{\omega z}(t)\}$ ввиду их малости. Низкий уровень погрешностей измерения (вычисления) данных параметров в современных авиационных радиоэлектронных комплексах (РЭК) достигается благодаря реализации в них алгоритмов оптимальной (субоптимальной) комплексной обработки навигационной информации. Получаемая в этом случае математическая модель относительного движения ВО и ВН становится *линейной* и описывается девятикомпонентным вектором состояния

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t) = [Д_x(t)\;\; V_{Дx}(t)\;\; a_{цx}(t)\;\; Д_y(t)\;\; V_{Дy}(t)\;\; a_{цy}(t)\;\; Д_z(t)\;\; V_{Дz}(t)\;\; a_{цz}(t)]. \quad (14)$$

Располагая измеренными (вычисленными) значениями параметров $Д_x$, $Д_y$ и $Д_z$, а также статистическими моделями и соответствующими статистическими характеристиками погрешностей их определения, можно приступать к синтезу оптимальных (субоптимальных) алгоритмов оценивания координат и параметров движения ВО в непрерывном (дискретном) времени. Значения $Д_x$, $Д_y$ и $Д_z$ и статистические характеристики погрешностей их определения могут быть вычислены по данным измерений БРЛС, функционирующей в режиме непрерывной пеленгации, и навигационных измерителей угловых координат авиационного РЭК.

Анализ полученной после сделанных упрощений математической модели относительного движения ВО и ВН в траекторной СК $OX_kY_kZ_k$ (несмотря на отмеченные ранее преимущества использования данной системы координат) показывает, что она по-прежнему остается достаточно сложной для практической реализации. Поэтому задача состоит в том, чтобы опираясь на вышеизложенный подход и используя полученные аналитические соотношения, в наибольшей степени упростить математическую модель относительного движения.

Изложенное выше позволяет сделать следующие **выводы:**

1. Для разработки эффективных алгоритмов управления и оценивания координат и параметров движения ВО в БРЛС необходимо использовать математические модели относительного движения ВО, которые могут иметь разный уровень сложности. Чем больше объем априорной информации, тем достовернее может быть построена модель и тем полнее ее соответствие действительности. Однако степень сложности используемой модели всегда ограничена сверху сложностью практической реализуемости и вычислительными возможностями.

2. Математическая модель относительного движения ВО и ВН, полученная в траекторной СК, является громоздкой и достаточно сложной для практической реализации в силу своей нелинейности, нестационарности и большой размерности (более девяти переменных состояния). При низком

уровне погрешностей измерения (вычисления) скорости и производной скорости ВН, угловой скорости и углового ускорения траекторной СК математическую модель относительного движения ВО и ВН с девятикомпонентным вектором состояния (14), можно считать линейной. Однако даже упрощенная математическая модель относительного движения по-прежнему остается достаточно сложной для практической реализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 15-08-04000-а., № 16-29-04260 «офи-м».

Литература

1. *Верба В.С.* Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. Принципы построения, проблемы разработки и особенности функционирования. М.: «Радиотехника». 2014. 528 с.

2. *Антипов В.Н., Колтышев Е.Е., Янковский В.Т.* и др. Радиолокационные комплексы истребителей / Под ред. *В.Н. Лепина*. М.: «Радиотехника». 2014. 296 с.

3. *Ярлыков М.С., Богачёв А.С., Меркулов В.И., Дрогалин В.В*. Радиоэлектронные комплексы навигации, прицеливания и управления вооружением летательных аппаратов. Т.1. Теоретические основы / Под ред. *М.С. Ярлыкова*. М.: «Радиотехника». 2012. 504 с.

4. *Белик Б.В., Белов С.Г., Верба В.С.* и др. Авиационные системы радиоуправления / Под ред. *В.С. Вербы, В.И. Меркулова*. Монография. М.: «Радиотехника». 2014. 376 с.

5. Справочник по радиолокации / Под ред. *М.И. Сколника*. Пер. с англ. под общей ред. *В.С. Вербы*. Третье издание. В 2 книгах. М.: Техносфера. 2014. Книга 2. 680 с.

6. *Ярлыков М.С., Богачёв А.С., Меркулов В.И., Дрогалин В.В.* Радиоэлектронные комплексы навигации, прицеливания и управления вооружением. Т.2. Применение авиационных радиоэлектронных комплексов

при решении боевых и навигационных задач / Под ред. *М.С. Ярлыкова*. М.: «Радиотехника». 2012. 256 с.

7. *Меркулов В.И., Харьков В.П., Рогов А.В.* Математические модели информационно-управляющих систем в пространстве состояний // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2006.Т. 4. № 7. С. 35-43.

8. *Верба В.С., Меркулов В.И., Дрогалин В.В.* и др. Оценивание дальности и скорости в радиолокационных системах. Ч. 3 / Под ред. *В.С. Вербы* и *В.И. Меркулова*. М.: «Радиотехника». 2010. 472 с.

9. *X. Rong Li, Vesselin P. Jilkov*. A Survey of Maneuvering Target Tracking. Part III: Measurement Models. Proceedings of SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, CA, USA, Juli-August 2001. (4473-41).

10. *X. Rong Li, Vesselin P. Jilkov*. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part I: Dynamic Models. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems. Vol. 39. No 4. October 2003. P. 1333-1363.

11. *Шатовкин Р.Р., Бурлаков С.А..* Анализ существующих подходов к моделированию движения маневренной воздушной цели // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования» 27-28 апреля 2009 г. Тамбов: ТВВАИУРЭ (ВИ). 2009. С. 112-122.

12. *Бочкарев А.М., Юрьев А.Н., Долгов М.Н., Щербинин А.В.* Цифровая обработка радиолокационной информации при сопровождении целей // Зарубежная радиоэлектроника. 1991. № 3. С. 3-22.

13. *Гриценко Н.С., Кириченко А.А. , Коломейцева Т.А.* и др. Оценивание параметров движения маневрирующих объектов // Зарубежная радиоэлектроника. 1983. № 4. С. 3-29.

14. *Горшков С.А., Солонар А.С.* Сопоставление методов адаптивной дискретной фильтрации координат маневрирующих целей // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2006.Т. 4. № 6. С. 14-30.

15. *Бар-Шалом Яков., Ли Хьяо-Ронг*. Траекторная обработка. Принципы,

способы и алгоритмы. Часть 2 / Пер. с англ. М.: МГТУ им. Н.Э Баумана. 2011. 239 с.

16. *Фарина А., Студер Ф.* Цифровая обработка радиолокационной информации. М.: Радио и связь. 1993. 320 с.

17. Системы управления и динамика наведения ракет / Под ред. *И.Е. Казакова*. Учебник. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1973. 498 с.

Ссылка на статью:
А. С. Богачев, В. И. Меркулов, В. С. Чернов, С. Б. Гусаров. Математические модели относительного движения воздушных объектов в процедурах наблюдения в авиационных бортовых РЛС. Часть 1. Математические модели в траекторной системе координат. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. №2. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/feb18/5/text.pdf