

УДК 621.396.96

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ В ПРОЦЕДУРАХ НАБЛЮДЕНИЯ В  
АВИАЦИОННЫХ БОРТОВЫХ РЛС.  
ЧАСТЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АНТЕННОЙ, ЛУЧЕВОЙ И  
СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ**

**А. С. Богачев, В. И. Меркулов, В. С. Чернов, И. Р. Загребельный**  
**АО «Концерн «Вега», 121170, Москва, Кутузовский проспект, 34**

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2018 г.

**Аннотация.** Приведены сведения о математических моделях относительного движения воздушных объектов в антенной, лучевой и сферической системах координат, используемых в задачах оценивания координат и параметров их движения в бортовых РЛС летательных аппаратов. Проанализированы особенности практического использования этих моделей в алгоритмах траекторного сопровождения воздушных объектов.

**Ключевые слова:** математическая модель, относительное движение, воздушный объект, бортовая РЛС, система координат.

**Abstract.** Information is presented on mathematical models of the relative movement of air objects in antenna, beam and spherical coordinate systems used in problems of estimating the coordinates and parameters of their movement in airborne radars. Features of practical use of these models in algorithms of trajectory support of air objects taking into account the available structure of airborne measuring instruments are analyzed. General information about dynamic models of the air object's movement is given.

**Key words:** mathematical model, relative movement, air object, airborne radar, coordinate system.

В [1] дана общая характеристика различных математических моделей движения воздушных объектов, используемых при решении задач оценивания их координат и параметров движения в радиолокационных системах мониторинга окружающего пространства. Рассмотрены математические модели относительного движения воздушных объектов в траекторной системе координат (СК) летательного аппарата - носителя бортовой РЛС.

Проанализированы возможности практического применения математических моделей движения в алгоритмах траекторного сопровождения воздушных объектов.

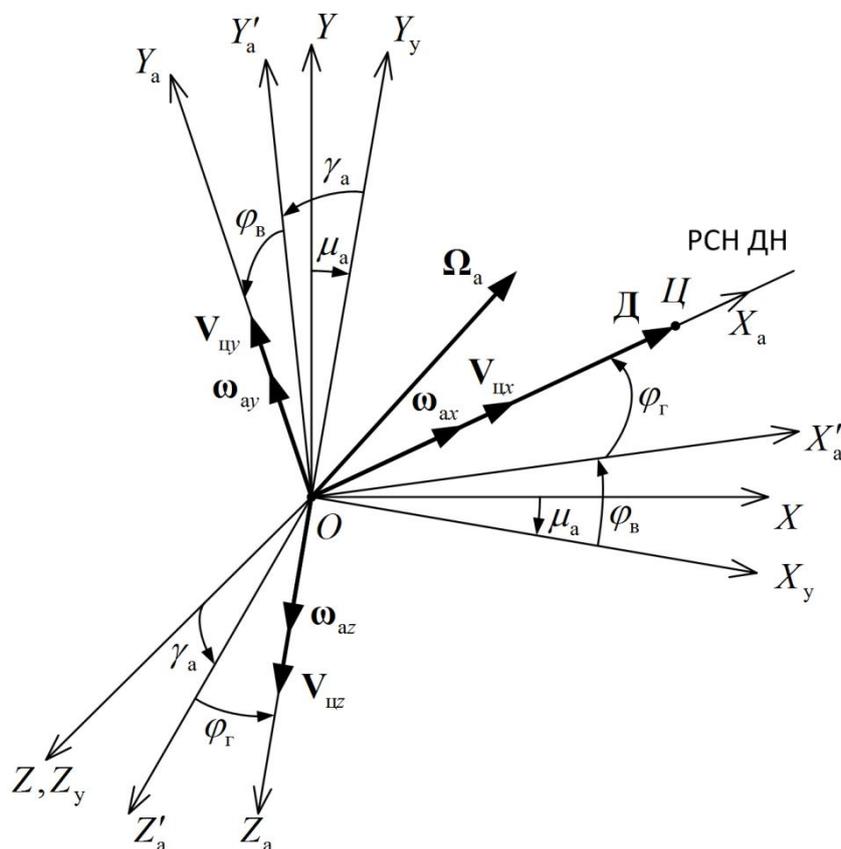
Кроме траекторной СК относительное движение воздушного объекта может быть представлено и в других системах координат, начало которых связано с центром масс носителя бортовой РЛС: антенной, лучевой и сферической СК. Необходимость использования этих СК обусловлена наличием разных режимов функционирования БРЛС.

*Цель статьи* – обобщение сведений об известных моделях относительного движения воздушного объекта в антенной, лучевой и сферической системах координат и анализ возможностей их использования для оценивания координат и параметров движения наблюдаемых объектов.

### **Модель движения воздушного объекта в антенной системе координат**

В режиме непрерывной пеленгации бортовая РЛС (БРЛС) сопровождает воздушный объект (ВО) по дальности, скорости сближения (доплеровской частоте) и угловым координатам. При этом в БРЛС автоматически измеряются: дальность до воздушного объекта  $D(t)$ , скорость ее изменения  $\dot{D}(t)$ , углы бортовых пеленгов ВО в азимутальной  $\varphi_r(t)$  и угломестной  $\varphi_b(t)$  плоскостях, а также угол поворота антенны БРЛС по крену (угол крена антенны)  $\gamma_a(t)$ . Кроме того, вычисляются угловые скорости  $\omega_r(t) = d\varphi_r(t)/dt$ ,  $\omega_b(t) = d\varphi_b(t)/dt$  и  $\omega_\gamma(t) = d\gamma_a(t)/dt$ .

Особенностью режима сопровождения одиночной цели является отслеживание лучом антенны углового положения ВО с помощью электромеханического привода, что позволяет при необходимости измерять угловые скорости вращения антенны при установке на антенну соответствующих датчиков.



**Рис. 1** Взаимное положение связанной, установочной и антенной СК

При измерении координат и параметров движения ВО используется ряд правых прямоугольных СК, в том числе самолетная *связанная*  $OXYZ$ , *установочная*  $OX'_aY'_aZ'_a$  и *антенная*  $OX_aY_aZ_a$  СК [2]. Все указанные СК, как и траекторная СК  $OX_kY_kZ_k$ , имеют начало в центре масс воздушного наблюдателя (ВН). При применении в БРЛС антенны зеркального типа выносом ее относительно центра масс ВН пренебрегают. *Установочная* СК  $OX'_aY'_aZ'_a$  повернута вокруг оси  $OZ$  относительно связанной СК  $OXYZ$  на установочный угол антенны БРЛС  $\mu_a$  (рис. 1). При функционировании БРЛС в

режиме непрерывной пеленгации (РНП) ось  $OX_a$  антенной СК  $OX_aY_aZ_a$  ориентируется по равносигнальному направлению диаграммы направленности (РСН ДН) антенны.

Измерение дальности  $D(t)$ , ее производной  $\dot{D}(t)$  и угловых координат осуществляется в *антенной* СК, причем углы  $\varphi_r(t)$  и  $\varphi_b(t)$  характеризуют собой отклонения линии визирования (ЛВ) ВО в *антенной* СК относительно осей  $OX_yY_yZ_y$  установочной СК (с учетом угла  $\gamma_a(t)$ ). Взаимное положение осей *антенной* и *связанной* СК, как видно из рис. 1, определяется углами пеленга ВО  $\varphi_r$  и  $\varphi_b$ , а также углами  $\mu_a$  и  $\gamma_a$ ; векторы  $\omega_{ax} = \omega_{ax} \mathbf{i}_{a0}$ ,  $\omega_{ay} = \omega_{ay} \mathbf{j}_{a0}$ ,  $\omega_{az} = \omega_{az} \mathbf{k}_{a0}$ , где  $\omega_{ax}$ ,  $\omega_{ay}$ ,  $\omega_{az}$  – проекции вектора угловой скорости  $\Omega_a$  на оси *антенной* СК;  $\mathbf{i}_{a0}$ ,  $\mathbf{j}_{a0}$ ,  $\mathbf{k}_{a0}$  – орты *антенной* СК.

В алгоритмах обработки информации БРЛС для определенности координатных преобразований переход от *установочной* к *антенной* СК осуществляется по определенным правилам, например, путем последовательных поворотов на углы  $\gamma_a$ ,  $\varphi_r$  и  $\varphi_b$  (рис. 1).

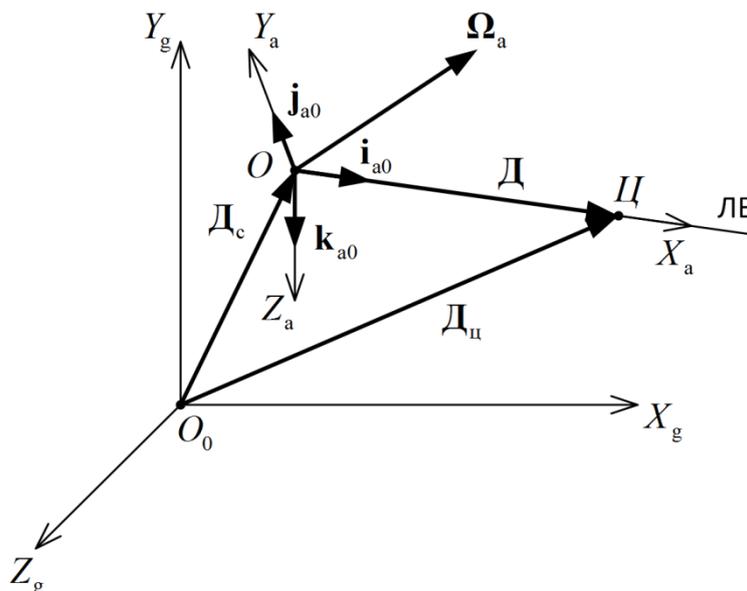
*Антенная* СК  $OX_aY_aZ_a$  вращается с угловой скоростью  $\Omega_a(t)$  относительно *нормальной земной* СК  $O_0X_gY_gZ_g$  и соответственно *нормальной* СК  $OX_gY_gZ_g$ . При этом в процессе движения ВН и ВО ось  $OX_a$  *антенной* СК, совпадающая с РСН ДН антенны, постоянно ориентируется на ВО, т.е. в направлении вектора  $D$ . Таким образом, направление оси  $OX_a$  совпадает с ЛВ ВО в *антенной* СК.

В алгоритмах обработки информации необходимо учитывать, что измерение дальности и угловых координат ВО БРЛС осуществляет с погрешностями. В результате этого ось  $OX_a$  *антенной* СК, ориентируясь по РСН ДН, не совпадает с истинным пространственным положением ЛВ ВО, которое определяется углами  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_b$ . Данные углы характеризуют взаимное



Получим математическую модель движения ВО в *антенной* СК. При этом будем исходить из того, что при решении задач управления воздушным движением и наведения ВО практически невозможно определить, насколько отличаются ветровые потоки в районах ВО и ВН. Поэтому обычно в алгоритмах обработки информации на этапах наведения ВН ветер не учитывается, а земная и воздушная скорости отождествляются как для ВН, так и для ВО [2]. С учетом вышесказанного в дальнейшем для вектора воздушной скорости ВО используется обозначение  $V_{ц}$ , а для вектора воздушной скорости ВН – соответственно  $V_c$ .

Проанализируем движение точки Ц (см. рис. 1 и 3).



**Рис. 3** Взаимное положение нормальной земной и антенной СК

Как и при получении модели движения ВО в *траекторной* СК [1], далее для определенности СК  $OX_aY_aZ_a$  будем именовать подвижной, а СК  $O_0X_gY_gZ_g$  (и соответственно с точки зрения вращательного движения СК  $OX_gY_gZ_g$ ) – неподвижной. Движение ВО (точки Ц) в подвижной СК определим как относительное, а саму СК  $OX_aY_aZ_a$  – относительной. Движение ВО в СК

$O_0X_gY_gZ_g$ , принимаемую за неподвижную, определим как абсолютное, а саму СК  $O_0X_gY_gZ_g$  (и соответственно с точки зрения вращательного движения СК  $OX_gY_gZ_g$ ) – абсолютной. Антенная СК вращается, как отмечалось выше, с угловой скоростью  $\Omega_a(t)$  относительно СК  $O_0X_gY_gZ_g$  и  $OX_gY_gZ_g$ .

Пренебрегая различием ветровых потоков в районах расположения ВН и ВО, абсолютную производную вектора  $\mathbf{V}_\Pi$  согласно правилу дифференцирования векторов [2] можно представить в виде векторного соотношения

$$\frac{d\mathbf{V}_\Pi(t)}{dt} = \dot{\mathbf{V}}_\Pi(t) = \frac{\tilde{d}\mathbf{V}_\Pi(t)}{dt} + \Omega_a(t) \times \mathbf{V}_\Pi(t), \quad (1)$$

где  $d\mathbf{V}_\Pi(t)/dt = \mathbf{a}_\Pi(t)$  – вектор абсолютного ускорения ВО;  $\tilde{d}\mathbf{V}_\Pi(t)/dt$  – вектор относительного ускорения ВО (локальная производная);  $\mathbf{V}_\Pi(t)$  – вектор воздушной скорости ВО, который в СК  $OX_aY_aZ_a$  может быть представлен в координатной форме

$$\mathbf{V}_\Pi(t) = V_{\Pi x}(t)\mathbf{i}_{a0} + V_{\Pi y}(t)\mathbf{j}_{a0} + V_{\Pi z}(t)\mathbf{k}_{a0}, \quad (2)$$

где  $V_{\Pi x}(t)$ ,  $V_{\Pi y}(t)$ ,  $V_{\Pi z}(t)$  – проекции вектора  $\mathbf{V}_\Pi(t)$  на оси антенной СК  $OX_aY_aZ_a$ .

Соответственно входящая в (1) относительная производная вектора воздушной скорости ВО  $\mathbf{V}_\Pi(t)$  в проекциях на оси  $OX_aY_aZ_a$  имеет вид

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{V}_\Pi(t)}{dt} = \dot{V}_{\Pi x}(t)\mathbf{i}_{a0} + \dot{V}_{\Pi y}(t)\mathbf{j}_{a0} + \dot{V}_{\Pi z}(t)\mathbf{k}_{a0}. \quad (3)$$

В соответствии с (1) имеем

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{V}_\Pi(t)}{dt} = \mathbf{a}_\Pi(t) - \Omega_a(t) \times \mathbf{V}_\Pi(t). \quad (4)$$

Представим векторное соотношение (4) в проекциях на оси антенной СК.

Векторному соотношению (4) с учетом (2), (3) будет соответствовать система дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{cases} \dot{V}_{\text{цх}}(t) = a_{\text{цх}}(t) + \omega_{\text{аз}}(t)V_{\text{цу}}(t) - \omega_{\text{ау}}(t)V_{\text{цз}}(t), & V_{\text{цх}}(t_0) = V_{\text{цх}0}, \\ \dot{V}_{\text{цу}}(t) = a_{\text{цу}}(t) + \omega_{\text{ах}}(t)V_{\text{цз}}(t) - \omega_{\text{аз}}(t)V_{\text{цх}}(t), & V_{\text{цу}}(t_0) = V_{\text{цу}0}, \\ \dot{V}_{\text{цз}}(t) = a_{\text{цз}}(t) + \omega_{\text{ау}}(t)V_{\text{цх}}(t) - \omega_{\text{ах}}(t)V_{\text{цу}}(t), & V_{\text{цз}}(t_0) = V_{\text{цз}0}. \end{cases} \quad (5)$$

Воспользуемся гипотезой о постоянстве проекций вектора абсолютного ускорения ВО  $\mathbf{a}_{\text{ц}}(t)$  на оси антенной СК. В соответствии с такой гипотезой получим

$$\begin{cases} \dot{a}_{\text{цх}}(t) = 0, & a_{\text{цх}}(t_0) = a_{\text{цх}0}, \\ \dot{a}_{\text{цу}}(t) = 0, & a_{\text{цу}}(t_0) = a_{\text{цу}0}, \\ \dot{a}_{\text{цз}}(t) = 0, & a_{\text{цз}}(t_0) = a_{\text{цз}0}. \end{cases} \quad (6)$$

где  $a_{\text{цх}}(t)$ ,  $a_{\text{цу}}(t)$ ,  $a_{\text{цз}}(t)$  – проекции вектора  $\mathbf{a}_{\text{ц}}(t)$  на оси СК  $OX_a Y_a Z_a$ .

Как и при получении модели в *траекторной* СК [1], для преодоления априорной неопределенности в задании математических моделей угловых скоростей  $\omega_{\text{ах}}(t)$ ,  $\omega_{\text{ау}}(t)$  и  $\omega_{\text{аз}}(t)$ , входящих в (5), воспользуемся принципом распределения информации. Учитывая, что в современных БРЛС широко используются оптимальные и квазиоптимальные (субоптимальные) алгоритмы оценивания угловых координат ВО и соответствующих угловых скоростей, погрешностями определения проекций вектора  $\mathbf{\Omega}_a(t)$  можно пренебречь.

Подставив в (5) измеренные (вычисленные) значения угловых скоростей, с учетом (6) получим систему дифференциальных уравнений, описывающих ММ движения ВО в *антенной* СК:

$$\begin{cases} \dot{V}_{\text{цх}}(t) = a_{\text{цх}}(t) + \omega_{\text{азн}}(t)V_{\text{цу}}(t) - \omega_{\text{аун}}(t)V_{\text{цз}}(t), & V_{\text{цх}}(t_0) = V_{\text{цх}0}, \\ \dot{a}_{\text{цх}}(t) = 0, & a_{\text{цх}}(t_0) = a_{\text{цх}0}, \\ \dot{V}_{\text{цу}}(t) = a_{\text{цу}}(t) + \omega_{\text{ахн}}(t)V_{\text{цз}}(t) - \omega_{\text{азн}}(t)V_{\text{цх}}(t), & V_{\text{цу}}(t_0) = V_{\text{цу}0}, \\ \dot{a}_{\text{цу}}(t) = 0, & a_{\text{цу}}(t_0) = a_{\text{цу}0}, \\ \dot{V}_{\text{цз}}(t) = a_{\text{цз}}(t) + \omega_{\text{аун}}(t)V_{\text{цх}}(t) - \omega_{\text{ахн}}(t)V_{\text{цу}}(t), & V_{\text{цз}}(t_0) = V_{\text{цз}0}, \\ \dot{a}_{\text{цз}}(t) = 0, & a_{\text{цз}}(t_0) = a_{\text{цз}0}. \end{cases} \quad (7)$$

Данная система дифференциальных уравнений определяет динамику вектора состояния

$$\mathbf{X}^T(t) = [V_{ix}(t) \quad a_{ix}(t) \quad V_{iy}(t) \quad a_{iy}(t) \quad V_{iz}(t) \quad a_{iz}(t)].$$

Математическая модель (7) является линейной. Она значительно проще ранее полученной модели в траекторной СК, так как уменьшилась ее размерность до шести переменных состояния. Кроме того, отпадает необходимость в определении проекций вектора углового ускорения на оси *антенной* СК. Следует, однако, отметить, что модель движения ВО в *антенной* СК является менее детальной по сравнению с моделью в *траекторной* СК [1]. В частности, она не позволяет непосредственно получить оценки проекций вектора относительной скорости ВО. Недостатком обеих полученных моделей движения ВО является то, что в них не учитываются случайные воздействия, которым подвержены ВН и ВО.

Проанализируем возможность реализации ММ (7) в алгоритмах траекторного сопровождения, для чего получим векторное соотношение для скорости ВО.

При сделанных допущениях относительно ветровых потоков векторное соотношение для вектора скорости ВО применительно к *антенной* СК принимает вид [2]:

$$\mathbf{V}_v(t) = \mathbf{V}_c(t) + \mathbf{V}_d(t) + \mathbf{\Omega}_a(t) \times \mathbf{D}(t).$$

Соответственно векторное соотношение наблюдения можно представить в форме

$$\mathbf{V}_{ви}(t) = \mathbf{V}_{си}(t) + \mathbf{V}_{ди}(t) + \mathbf{\Omega}_{аи}(t) \times \mathbf{D}_и(t), \quad (8)$$

где индекс «и» означает измеренное (вычисленное) значение соответствующих векторов.

Система скалярных соотношений наблюдения, соответствующих векторному выражению (8), получена в [2] и приведена к виду

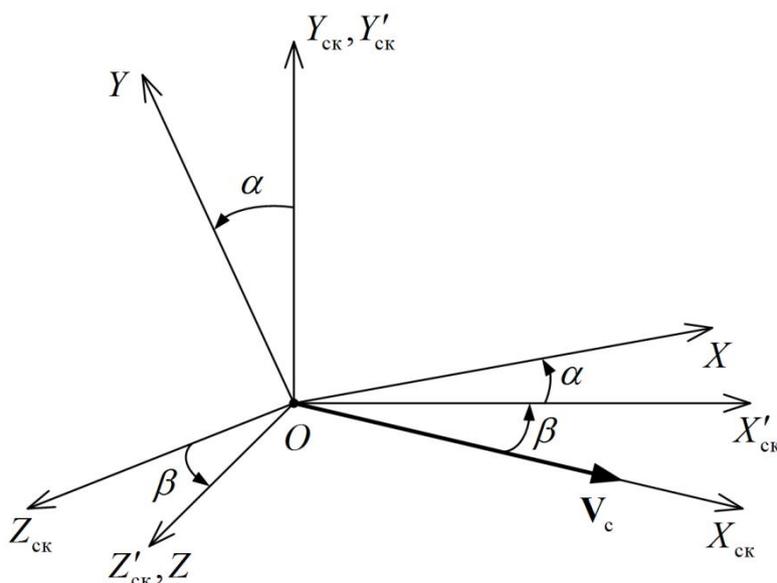
$$\begin{cases} V_{цхи}(t) = V_{схи}(t) + \dot{D}_и(t), \\ V_{цуи}(t) = V_{суй}(t) + \omega_{ази}(t)D_и(t), \\ V_{цзи}(t) = V_{сзи}(t) - \omega_{ауи}(t)D_и(t). \end{cases} \quad (9)$$

В алгоритмах комплексной обработки информации при определении параметров движения ВО с помощью БРЛС входящие в выражения (9) измеренные значения  $\omega_{ахи}(t)$ ,  $\omega_{ауи}(t)$  и  $\omega_{ази}(t)$  проекций вектора угловой скорости  $\Omega_a(t)$  обычно вычисляются на основе измеренных значений первичных угловых параметров  $\varphi_{ги}$ ,  $\varphi_{ви}$ ,  $\varepsilon_{ги}$ ,  $\varepsilon_{ви}$ ,  $\psi_и$ ,  $\theta_и$ ,  $\gamma_и$ , а также  $\mu_a$  и  $\gamma_{аи}$  (рис. 2). Алгоритм вычисления проекций вектора угловой скорости вращения ЛВ ВО на оси антенной СК включает в себя операции координатных преобразований, дифференцирования и сглаживания, реализуемые в цифровой форме [2].

Параметры  $D_и(t)$ ,  $\dot{D}_и(t)$ ,  $\varphi_{ги}(t)$ ,  $\varphi_{ви}(t)$ ,  $\gamma_{аи}(t)$  в рассматриваемом алгоритме измеряются БРЛС, а параметры  $\varepsilon_{ги}(t)$ ,  $\varepsilon_{ви}(t)$ ,  $\dot{\varphi}_{ги}(t)$ ,  $\dot{\varphi}_{ви}(t)$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ги}(t)$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ви}(t)$  вычисляются в бортовой вычислительной системе (БВС).

Проекция вектора  $V_c(t)$  на оси антенной СК вычисляются в БВС путем координатных преобразований вектора воздушной скорости ВН  $V_{сн}(t)$ , измеренного в скоростной СК (рис. 4) с учетом измеренных значений углов атаки  $\alpha_и$ , скольжения  $\beta_и$ , а также углов  $\varphi_{ги}$ ,  $\varphi_{ви}$ ,  $\gamma_{аи}$  и  $\mu_a$ .

Как следует из (9), погрешности измерений (вычислений) проекций вектора  $V_{ц}(t)$  обусловлены погрешностями определения первичных параметров:  $V_c(t)$ ,  $D(t)$ ,  $\dot{D}(t)$  углов и угловых скоростей. Эти погрешности на практике обычно аппроксимируются аддитивными стационарными белыми гауссовскими шумами, образующими вектор погрешностей измерений (шумов наблюдения).



**Рис. 4** Угловое положение скоростной СК относительно связанной СК

В совокупности уравнения состояния (7) и соотношения наблюдения (9) содержат всю необходимую информацию для решения задачи синтеза оптимальной (в рамках сделанных ранее допущений) системы оценивания параметров движения ВО в антенной СК  $OX_a Y_a Z_a$  как в непрерывном, так и в дискретном времени, с использованием алгоритмов оптимальной линейной фильтрации.

Для получения практически реализуемого алгоритма оценивания постановку задачи синтеза упрощают. С этой целью в [2] осуществлена декомпозиция вектора состояния  $\mathbf{X}(t)$ , описываемого системой дифференциальных уравнений (7), на три независимых подвектора, каждый из которых соответствует одной из осей СК  $OX_a Y_a Z_a$ . Например, первый подвектор состояния  $\mathbf{X}_1^T(t) = [V_{цх}(t) \ a_{цх}(t)]$  определяется дифференциальными уравнениями [2]:

$$\begin{cases} \dot{V}_{цх}(t) = a_{цх}(t) + \omega_{азн}(t)V_{цу}(t) - \omega_{аун}(t)V_{цз}(t), & V_{цх}(t_0) = V_{цх0}, \\ \dot{a}_{цх}(t) = 0, & a_{цх}(t_0) = a_{цх0}. \end{cases} \quad (10)$$

Проведение вышеуказанной декомпозиции вектора состояния приводит к тому, что в субоптимальной системе оценивания параметров движения ВО будут

реализованы три независимых, практически идентичных канала обработки информации применительно к каждой из осей антенной СК  $OX_a Y_a Z_a$ .

В заключение отметим, что математическая модель относительного движения ВО в антенной СК является линейной и значительно проще, чем модель движения в траекторной СК. Кроме того, отсутствует необходимость в использовании проекций вектора углового ускорения на оси *антенной СК*. Однако модель движения ВО в антенной СК является менее детальной по сравнению с моделью в траекторной системе координат.

### Математические модели относительного движения в лучевой СК

Выше была рассмотрена математическая модель относительного движения в *антенной СК* применительно к режиму непрерывной пеленгации одиночного ВО, в котором ось антенны БРЛС непрерывно отслеживает положение линии визирования ВО - ВН. Однако в современных БРЛС обычно осуществляется многоцелевое сопровождение, в процессе которого выполняется механическое и/или электронное сканирование лучом диаграммы направленности антенны воздушного пространства в режиме секторного или кругового обзора. В этом случае в системах траекторного сопровождения целесообразно применение ММ относительного движения в *лучевой СК*, называемой также *визирной СК*. При этом количество *лучевых СК* в режиме многоцелевого сопровождения должно быть равным числу сопровождаемых ВО.

Ниже в качестве примера приводятся математические соотношения, используемые в каждой из *лучевых СК* для описания математических моделей относительного движения.

Для получения соответствующей ММ воспользуемся векторным соотношением для производной вектора дальности  $D$  [3]

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mathbf{V}_ц(t) - \mathbf{V}_к(t), \quad (11)$$

где  $\mathbf{V}_\Pi(t) = d\mathbf{D}_\Pi(t)/dt$  – вектор земной скорости ВО, т.е. вектор абсолютной скорости движения точки Ц;  $\mathbf{V}_\kappa(t) = d\mathbf{D}_\kappa(t)/dt$  – вектор земной скорости ВН, т.е. вектор абсолютной скорости движения точки О;  $d\mathbf{D}(t)/dt$  – вектор скорости изменения дальности до ВО, определяемый в СК  $O_0X_gY_gZ_g$  (абсолютная производная вектора  $\mathbf{D}(t)$ ).

Кинематическое уравнение (11) в *лучевой* СК, связанной с вектором дальности  $\mathbf{D}$  и вращающейся с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}_\Pi(t)$  относительно нормальной подвижной СК  $OX_gY_gZ_g$ , преобразуется к виду

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{D}(t)}{dt} + \mathbf{\Omega}_\Pi(t) \times \mathbf{D}(t) = \mathbf{V}_\Pi(t) - \mathbf{V}_\kappa(t), \quad (12)$$

где  $\tilde{d}\mathbf{D}(t)/dt$  – локальная производная вектора дальности  $\mathbf{D}$ .

Вектор угловой скорости  $\mathbf{\Omega}_\Pi(t)$  определяется выражением

$$\mathbf{\Omega}_\Pi(t) = \dot{\varepsilon}_\Gamma + \dot{\varepsilon}_B,$$

где  $\dot{\varepsilon}_\Gamma$  и  $\dot{\varepsilon}_B$  – векторы угловых скоростей линии визирования в СК  $O_0X_gY_gZ_g$ .

Отсюда следует, что проекции вектора  $\mathbf{\Omega}_\Pi$  на оси *лучевой* системы координат могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \dot{\varepsilon}_\Gamma \sin \varepsilon_B, \\ \omega_y(t) = \dot{\varepsilon}_\Gamma \cos \varepsilon_B, \\ \omega_z(t) = \dot{\varepsilon}_B. \end{cases} \quad (13)$$

Разложив уравнение (12) по осям *лучевой* СК с учетом уравнений (13), получим три скалярных уравнений относительного движения ВО и ВН [3]:

$$\begin{cases} \dot{D} = V_\Pi [\cos \theta_\Pi \cos \varepsilon_B \cos(\psi_\Pi - \varepsilon_\Gamma) - \sin \theta_\Pi \sin \varepsilon_B] - V [\cos \theta \cos \varepsilon_B \cos(\psi - \varepsilon_\Gamma) - \sin \theta \sin \varepsilon_B], \\ D \dot{\varepsilon}_B = V_\Pi [\sin \theta_\Pi \cos \varepsilon_B - \cos \theta_\Pi \sin \varepsilon_B \cos(\psi_\Pi - \varepsilon_\Gamma)] - V [\sin \theta \cos \varepsilon_B - \cos \theta \sin \varepsilon_B \cos(\psi - \varepsilon_\Gamma)], \\ D \dot{\varepsilon}_\Gamma \cos \varepsilon_B = -V_\Pi \cos \theta_\Pi \sin(\psi_\Pi - \varepsilon_\Gamma) + V \cos \theta \sin(\psi - \varepsilon_\Gamma). \end{cases} \quad (14)$$

где  $\psi_\Pi$  и  $\theta_\Pi$  – углы рыскания и наклона траектории ВО, а  $\psi$  и  $\theta$  – углы рыскания и наклона траектории ВН соответственно.

Из (14) следует, что для использования данной ММ требуется знание скорости ВО  $V_{\Pi}$  и углов рыскания  $\psi_{\Pi}$  и наклона траектории  $\theta_{\Pi}$ , получение которых на практике представляет определенные трудности. Проблема формирования оценок скорости ВО  $V_{\Pi}$  и углов  $\psi_{\Pi}$  и  $\theta_{\Pi}$  является предметом отдельного рассмотрения.

Отметим лишь, что для измерения углов  $\psi_{\Pi}$  и  $\theta_{\Pi}$  можно использовать в качестве дополнительного датчика информации – электронно-оптическую систему (ОЭС) [4, 5]. В ОЭС формируется двумерное оптическое изображение ВО, которое преобразуется в электрические сигналы, поступающие на подсистему распознавания образов. Данная подсистема по специальному алгоритму преобразует полученные данные в ориентацию трехмерного ВО, определяемую углами Эйлера: курса, тангажа и крена. При малых углах атаки и скольжения эти углы равны углам рыскания и наклона траектории ВО соответственно. К точности измерения параметров ориентации предъявляются достаточно жесткие требования. Это обуславливает необходимость использования более совершенных (и, следовательно, дорогостоящих) ОЭС и сложных алгоритмов обработки изображений, приводящих к существенным вычислительным затратам. К недостаткам ОЭС относятся сравнительно небольшая дальность действия (значительно меньше, чем у БРЛС), а также наличие ограничений на работу в сложных метеоусловиях.

Учитывая трудности с практическим использованием уравнений ММ движения (14) в алгоритмах траекторного сопровождения, были рассмотрены возможности ее упрощения для определенных ситуаций применения ВО и ВН.

Так, в частном случае при рассмотрении движения наблюдателя и ВО в *вертикальной* плоскости имеем  $\varepsilon_{\Gamma} = \psi = \psi_{\Pi} = 0$  и кинематические уравнения относительного движения на основании (14) принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{D} = V_{\Pi} \cos(\varepsilon_{\text{B}} - \theta_{\Pi}) - V \cos(\varepsilon_{\text{B}} - \theta), \\ D \dot{\varepsilon}_{\text{B}} = V \sin(\varepsilon_{\text{B}} - \theta) - V \sin(\varepsilon_{\text{B}} - \theta_{\Pi}). \end{cases} \quad (15)$$

При  $\theta_{\text{ц}} = \theta = \varepsilon_{\text{в}} = 0$  из формул (14) получим кинематические уравнения относительного движения в *горизонтальной* плоскости

$$\begin{cases} \dot{D} = V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon_{\text{г}} - \psi_{\text{ц}}) - V \cos(\varepsilon_{\text{г}} - \psi), \\ D \dot{\varepsilon}_{\text{г}} = V \sin(\varepsilon_{\text{г}} - \psi) - V_{\text{ц}} \sin(\varepsilon_{\text{г}} - \psi_{\text{ц}}). \end{cases} \quad (16)$$

На основе этих нелинейных уравнений могут быть получены линеаризованные уравнения относительного движения [6]. Наиболее простыми и наглядными получаются линейные кинематические уравнения в тех случаях, когда в (15) и (16) разности углов небольшие и косинусы разности углов можно заменить единицами, а синусы – аргументами. При выполнении этих условий, например, для *вертикальной* плоскости на основе (15) находим

$$D \dot{\varepsilon}_{\text{в}} + \dot{D} \varepsilon_{\text{в}} = V \theta - V_{\text{ц}} \theta_{\text{ц}}. \quad (17)$$

Продифференцировав (17) во времени и учитывая, что  $V_{\text{ц}} \dot{\theta}_{\text{ц}} = a_{\text{нц}}$  и  $V \dot{\theta} = a_{\text{н}}$  – нормальные ускорения ВО и наблюдателя в скоростной системе координат, которые в условиях проводимой линеаризации совпадают практически с соответствующими трансверсальными ускорениями, а также постоянство скоростей  $V$  и  $V_{\text{ц}}$ , получим

$$D \ddot{\varepsilon}_{\text{в}} + 2 \dot{D} \dot{\varepsilon}_{\text{в}} = a_{\text{нц}} - a_{\text{н}}. \quad (18)$$

Линейное кинематическое уравнение (18) с неизвестным углом  $\varepsilon_{\text{в}}$  имеет переменные коэффициенты  $D$  и  $\dot{D}$ .

Следует также отметить, что в качестве ММ движения ВО в *лучевой* СК можно получить ММ, аналогичную ММ движения (7) в *антенной* СК, если в последней вместо проекций угловой скорости вращения *антенной* СК использовать проекции угловой скорости вращения линии визирования, а также считать, что соответствующие проекции скорости ВО относятся к *лучевой* СК.

Кроме того, известны и другие ММ движения ВО в *лучевой* СК. В частности, в приведенной в [6, 7] модели относительного движения получены уравнения, позволяющие определять составляющие *вектора ускорения*

воздушного объекта в *лучевой* СК. Для данного варианта используется закон изменения вектора дальности, определяемый кинематическим уравнением

$$\frac{dD^2(t)}{dt^2} = \mathbf{a}_ц(t) - \mathbf{a}_к(t). \quad (19)$$

В левую часть уравнения (19) входит вектор относительного ускорения ВО.

Если спроектировать векторное равенство (19) на оси *лучевой* СК, то окончательно получим [6, 7]

$$\begin{cases} a_{цх}(t) = \ddot{D} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)D + a_{кх}, \\ a_{цy}(t) = \dot{\omega}_z D + \omega_x \omega_y D + 2\omega_z \dot{D} + a_{кy}, \\ a_{цz}(t) = -\dot{\omega}_y D + \omega_x \omega_z D - 2\omega_y \dot{D} + a_{кz}. \end{cases} \quad (20)$$

Если в *лучевой* СК отсутствует вращение вокруг оси  $OX_a$ , т.е.  $\omega_x = 0$ , то система уравнений (20) получается более простой. Стабилизация по крену антенны может осуществляться за счет самого наблюдателя.

Анализ уравнения (20) показывает, что для реализации алгоритмов траекторного сопровождения БРЛС должна измерять дальность до ВО  $D$ , скорость  $\dot{D}$  и ускорение  $\ddot{D}$  сближения, составляющие  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  угловой скорости линии визирования, а также угловые ускорения  $\dot{\omega}_x$ ,  $\dot{\omega}_y$  и  $\dot{\omega}_z$ .

Измерение дальности и ее производных возможно в импульсно-доплеровских БРЛС. Составляющие угловой скорости и углового ускорения линии визирования по осям *лучевой* СК вычисляются в БВС при многоцелевом сопровождении ВО. В частности, проекции вектора  $\mathbf{\Omega}_л$  на оси *лучевой* системы координат могут быть вычислены по формулам

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \dot{\varphi}_Г \sin \varphi_B + \omega_{x1} \cos \varphi_Г \cos \varphi_B + \omega_{y1} \sin \varphi_B - \omega_{z1} \sin \varphi_Г \cos \varphi_B, \\ \omega_y(t) = \dot{\varphi}_Г \cos \varphi_B - \omega_{x1} \cos \varphi_Г \sin \varphi_B + \omega_{y1} \cos \varphi_B - \omega_{z1} \sin \varphi_Г \sin \varphi_B, \\ \omega_z(t) = \dot{\varphi}_B + \omega_{x1} \sin \varphi_Г + \omega_{z1} \cos \varphi_Г. \end{cases} \quad (21)$$

где  $\varphi_r$  и  $\varphi_b$  – углы пеленга ВО в связанной СК, а  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$  и  $\omega_{z1}$  – угловые скорости вращения связанной СК.

Угловые ускорения могут быть оценены по значениям угловых скоростей (21) с помощью фильтров, имеющих астатизм второго порядка.

По результатам рассмотрения ММ относительного движения ВО в антенной и *лучевой* СК видно, что по форме записи они достаточно близки. Объясняется это тем, что данные модели являются частными случаями обобщенной ММ, полученной в так называемой произвольной СК [7] и справедливой для любых подвижных систем координат ВН.

В заключение отметим, что отличительной особенностью рассмотренных выше ММ относительного движения ВО является присутствие в них угловых скоростей, а часто и угловых ускорений вращения СК ВН, возможность измерения или вычисления которых должна быть учтена при разработке алгоритмов траекторного сопровождения ВО. Эта возможность во многом зависит от складывающихся условий практического применения ВО и ВН, в том числе и от численных значений расстояний между ними, а также от состава и точности измеряемых БРЛС величин. При больших расстояниях между ВН и ВО значение угловых скоростей может быть весьма незначительным, что делает проблематичным получение оценок угловых скоростей и угловых ускорений вращения СК ВН. Обычно допустимые границы областей применения устанавливаются в процессе имитационного моделирования разрабатываемых алгоритмов сопровождения ВО, основанных на уравнениях, характеризующих математические модели относительного движения и наблюдения. Например, по результатам моделирования алгоритмов траекторного сопровождения с использованием (21) максимальное значение расстояния между ВН и ВО часто выбирается не более 50 км.

Из изложенного выше следует, что математические модели относительного движения в *лучевой* СК целесообразно применять при многоцелевом сопровождении ВО. Однако использование нелинейной ММ

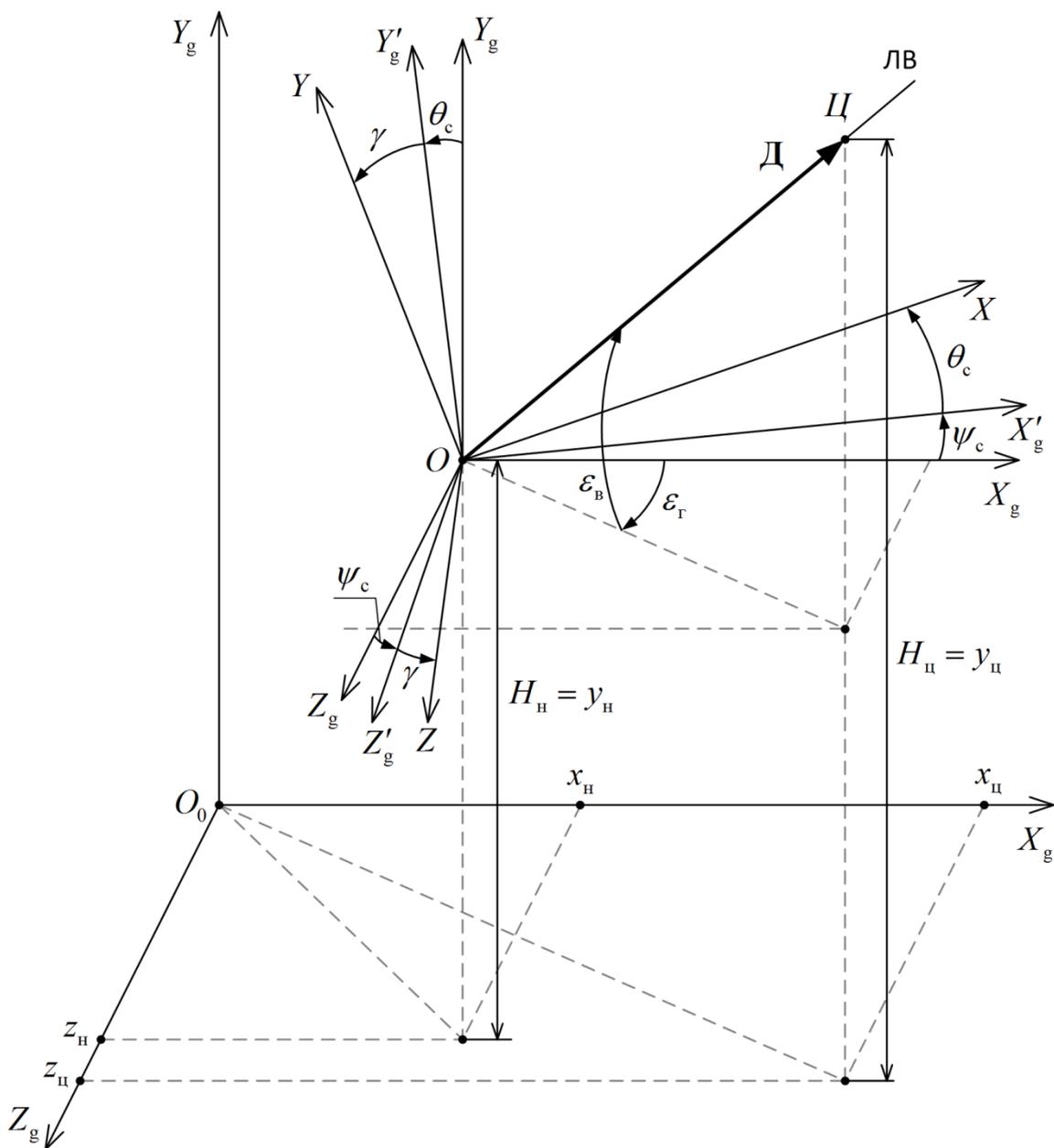
требует знания скорости ВО, а также его углов рыскания и наклона траектории, получение которых на практике представляет определенные трудности. На основе нелинейных уравнений могут быть получены линеаризованные уравнения относительного движения. Наиболее простыми и наглядными получаются линейные кинематические уравнения в вертикальной и горизонтальной плоскостях в тех случаях, когда векторы скоростей ВН и ВО близки к направлению линии визирования в пространстве.

### **Математические модели относительного движения в подвижной сферической системе координат**

Как известно [8], движение ВО лучше всего описывается в декартовой СК. В то же время измерения координат ВО осуществляется бортовой РЛС в сферической СК [9]. Измерения в сферической СК являются линейными и независимыми по различным координатам, что создает благоприятные условия для реализации процедур оценивания координат ВО. Поэтому на практике часто используются модели движения ВО в СК радиолокационного датчика.

В настоящее время разработаны алгоритмы траекторного сопровождения ВО в сферической системе координат ВН, реализация которых имеет определенные особенности, связанные с использованием математических моделей движения ВО в данной СК. Для пояснения этих особенностей воспользуемся рис. 5, на котором показаны неподвижная и подвижная нормальные СК.

Непосредственно начало  $O_0$  нормальной земной СК  $O_0X_gY_gZ_g$  совмещается с некоторой условной (опорной) точкой. Эта прямоугольная СК, ось  $O_0Y_g$  которой направлена вверх по местной вертикали. Оси  $O_0X_g$  и  $O_0Z_g$ , обычно ориентируются по касательным (соответственно к географическому меридиану на север и к географической параллели на восток), проходящим через точку  $O_0$ .



**Рис. 5.** Взаимное положение нормальной земной, нормальной подвижной и сферической СК

Начало подвижной нормальной земной СК  $OX_gY_gZ_g$  совпадает с центром масс ВН, а ее оси параллельны соответствующим осям нормальной земной СК  $O_0X_gY_gZ_g$ .

В нормальной земной СК  $O_0X_gY_gZ_g$  движение ВО и ВН определяется следующими параметрами [2]: координатами ВО  $x_u, y_u = H_u, z_u$ ; координатами ВН  $x_n, y_n = H_n, z_n$ ; наклонной и горизонтальной дальностями  $D$  и  $D_r$ , а также

углами  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_b$ , характеризующими пространственную ориентацию линии визирования (ЛВ) в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно. Эти параметры связаны между собой следующими соотношениями [10]:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(x_{ц} - x_{н})^2 + (y_{ц} - y_{н})^2 + (z_{ц} - z_{н})^2}, \\ D_r &= \sqrt{(x_{ц} - x_{н})^2 + (z_{ц} - z_{н})^2}, \\ \varepsilon_r &= \arctg\left(\frac{z_{ц} - z_{н}}{x_{ц} - x_{н}}\right), \\ \varepsilon_b &= \arctg\left(\frac{y_{ц} - y_{н}}{D_r}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Бортовая РЛС измеряет наклонную дальность  $D$  и углы визирования  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_b$  в сферической СК, при этом для формирования оценок углов визирования используются углы курса  $\psi_c$  и тангажа  $\theta_c$  ВН, измеряемые соответствующими автономными датчиками. Достоинство данной СК состоит в том, что в ней обеспечивается линейная несвязанная по координатам гауссова структура модели измерений. Однако использование уравнений типовых движений ВО в координатах радиолокационного датчика (сферической СК) приводит к нелинейной, координатно-связанной, а также иногда сложной модели [9]. Так, движение ВО с постоянной скоростью имеет простое описание в декартовых координатах. То же самое движение в сферических координатах является нелинейным и достаточно сложным. При этом в модели даже при равномерном прямолинейном движении ВО появляется переменное ускорение (известное как псевдоускорение), что требует включения в вектор состояния компоненты ускорения. Кроме того, преобразованный шум модели процесса является негауссовым и зависящим от состояния при условии, что он гауссов и некоррелирован по координатам в начальных декартовых координатах.

Известны различные варианты описания динамики движения ВО в сферической СК. Упрощенный подход состоит в том, чтобы непосредственно

использовать некоторые расщепленные одномерные модели движения ВО, такие как модели постоянной скорости, постоянного ускорения и модели Зингера для дальности и углов раздельно [8].

Такой подход применяется в ряде случаев, в том числе при многоцелевом сопровождении ВО, при этом используется кинематическая модель траектории ВО, аппроксимируемая применительно к одной из осей сферической СК полиномом степени  $L$  [2]:

$$x(t) = \sum_{l=0}^L a_l t^l,$$

где коэффициенты полинома  $a_l$  – параметры траектории, пропорциональные производным порядка  $l$  координаты  $x(t)$ . Экстраполированное значение координаты  $x$  в момент  $t_{k+1}$  может быть получено разными методами, например, методом наименьших квадратов по измеренным БРЛС ее значениям в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_k$  [2].

Следует отметить, что полиномиальные (многочленные) модели обычно хороши для того, чтобы подогнуть модель к набору данных, т.е. для задачи сглаживания. Однако, первичное назначение сопровождения – предсказание и фильтрация, а не подгонка или сглаживание. Очень трудно разработать несложный и эффективный метод, чтобы определить коэффициенты полинома для общего случая [9]. Тем не менее, множество специальных полиномиальных моделей были разработаны для сопровождения ВО. Из них многие модели можно рассматривать как частные случаи этой общей полиномиальной модели с различными моделями шума [8].

### **Динамические модели движения воздушного объекта**

В динамических моделях используют уравнения *поступательного* движения центра массы ВО под действием внешних сил и уравнения *вращательного* движения ВО относительно центра массы под действием моментов внешних сил. В общем случае на ВО в полете действуют следующие внешние силы: сила тяги двигателя, полная аэродинамическая сила и сила

тяжести. Динамические уравнения получают на основе известных векторных уравнений движения центра массы твердого тела и движения этого тела относительно центра массы [7, 11].

Достоинство динамических моделей – более точное описание движения ВО по сравнению с другими моделями, рассмотренными выше.

Недостатком динамических моделей является увеличение степени нелинейности, размерности пространства состояния и числа параметров модели, в значительной степени неопределенных при отдельном сопровождении. Это приводит к большим сложностям при построении алгоритмов оценивания координат и параметров движения ВО. В частности, известные детальные динамические модели являются ненаблюдаемыми при измерении дальности, углов визирования и скорости сближения [9].

Новый подход к решению задачи оценивания управляющих воздействий рассмотрен в [12-14]. Для получения оценок управляющих воздействий динамическая модель движения управляемого ЛА должна быть приведена к специальному виду. Обычно динамические модели отображаются дифференциальными уравнениями первого порядка, которые с помощью процесса расширения пространства состояний представляются в более общем виде в форме дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода. Это позволяет получить оптимальный фильтр сопровождения ВО в результате решения обратной задачи динамики на основе объединенного принципа максимума.

Применение разработанного на основе объединенного принципа максимума 3D -фильтра сопровождения маневрирующих объектов, реализующего ММ движения в виде дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода, приводит к уменьшению размерности задачи по сравнению с фильтром Калмана, что позволяет снизить вычислительную сложность реализации фильтра. Результаты численного моделирования показали определенное превосходство данного фильтра по точности оценок по

сравнению с фильтром Калмана [13]. Однако возможность практического применения данного метода оценена лишь для рассмотренных вариантов с *неподвижной* РЛС, осуществляющей наблюдение за ВО. Поэтому в случае подвижного ВН для непосредственного использования полученных в [12-14] алгоритмов траекторного сопровождения ВО требуется осуществлять пересчет измеренных значений относительных сферических координат ВО в нормальную земную СК.

Отметим также, что некоторые способы построения *линейных* динамически моделей движения ВО на основе оценки управляющих входных воздействий приведены в [15, 16].

Изложенное выше позволяет сделать следующие **выводы**:

1. При решении задач построения алгоритмов оценивания координат и параметров движения ВО с использованием концепции переменных состояния большое внимание уделяется вопросам разработки математических моделей состояния и наблюдения. При создании математических моделей состояния принципиальное значение имеет выбор модели движения ВО, который определяется, прежде всего, гипотезой о характере движения ЛА. Важную роль при разработке ММ движения ВО играют выбор системы координат, а также определение компонент вектора состояния, векторов входных управляющих и возмущающих воздействий. На практике стремятся получить такие модели, которые были бы достаточно простые и в то же время правильно отражали реальные траектории маневрирующих ВО. Кроме того, ММ движения ВО должны соответствовать решаемым БРЛС информационным задачам, возможностям бортового комплекса оборудования ЛА по измерению необходимых для практической реализации физических величин, а также специфике построения алгоритмов траекторного сопровождения ВО.

2. При разработке ММ движения ВО используются два подхода. При первом подходе составляются ММ абсолютного движения ВО в неподвижной

земной декартовой СК. При этом для реализации алгоритмов траекторного сопровождения в БРЛС результаты измерений относительных сферических координат ВО пересчитываются в неподвижную декартовую СК. Однако при пересчете из-за нелинейной зависимости вектора наблюдения от вектора состояния ошибки косвенных измерений становятся зависимыми по координатам (коррелированными), негауссовскими и зависящими от значений вектора состояния, что существенно усложняет алгоритмы траекторного сопровождения ВО. Кроме того, ММ абсолютного движения ВО, как правило, не позволяют использовать их для решения задачи наведения ЛА. При втором подходе разработка ММ выполняется в траекторной, антенной и сферической СК, непосредственно учитывающих параметры относительного движения ВО, необходимых для осуществления наведения ЛА. При их использовании отсутствует необходимость нелинейного преобразования результатов измерений БРЛС, что упрощает организацию процедур сопровождения ВО.

3. Математическая модель относительного движения ВО и ВН, полученная в траекторной СК, является громоздкой и достаточно сложной для практической реализации в силу своей нелинейности, нестационарности и большой размерности (более девяти переменных состояния). При этом даже упрощенная линейная математическая модель относительного движения по-прежнему остается достаточно сложной для практической реализации.

4. Математическая модель относительного движения ВО в антенной СК является линейной. За счет уменьшения размерности переменных состояния она значительно проще, чем модель движения в траекторной СК. Кроме того, отсутствует необходимость в использовании проекций вектора углового ускорения на оси антенной СК. Однако модель движения ВО в антенной СК является менее детальной по сравнению с моделью в траекторной системе координат. Недостатком обеих полученных моделей движения ВО является то, что в них не учитываются случайные воздействия, которым подвержены ВН и ВО. Для упрощения алгоритмов сопровождения ВО необходимо осуществить

декомпозицию вектора состояния на три независимых подвектора, каждый из которых соответствует одной из осей антенной СК.

5. Математические модели относительного движения в лучевой СК целесообразно применять при многоцелевом сопровождении ВО. Использование нелинейной ММ требует знания скорости ВО, а также его углов рыскания и наклона траектории, получение которых на практике представляет определенные трудности. На основе нелинейных уравнений могут быть получены линеаризованные уравнения относительного движения. Наиболее простыми и наглядными получаются линейные кинематические уравнения в вертикальной и горизонтальной плоскостях в тех случаях, когда векторы скоростей ВН и ВО близки к направлению линии визирования в пространстве.

6. Математические модели относительного движения в сферической системе координат способствуют реализации процедур качественного траекторного сопровождения ВО, так как измерения, осуществляемые в сферической СК, являются линейными и независимыми по различным координатам. Однако использование уравнений типовых движений ВО в сферической СК приводит к нелинейной, координатно-связанной модели, являющейся достаточно сложной. Упрощенный подход состоит в том, чтобы непосредственно использовать некоторые расщепленные одномерные полиномиальные модели движения ВО постоянной скорости, постоянного ускорения и модели Зингера.

7. Перспективным является использование в системах траекторного сопровождения динамических моделей движения воздушного объекта. Однако в настоящее время вопросы построения динамических моделей применительно к относительному движению ВО требуют проведения специальных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 18-08-01083-а, № 16-29-04260 «офи-м».

## Литература

1. А. С. Богачев, В. И. Меркулов, В. С. Чернов, С. Б. Гусаров. Математические модели относительного движения воздушных объектов в процедурах наблюдения в авиационных бортовых РЛС. Часть 1. Математические модели в траекторной системе координат. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb18/5/text.pdf>
2. Ярлыков М.С., Богачев А.С., Меркулов В.И., Дрогалин В.В. Радиоэлектронные комплексы навигации, прицеливания и управления вооружением. Т.2. Применение авиационных радиоэлектронных комплексов при решении боевых и навигационных задач. / Под ред. М.С. Ярлыкова. М.: «Радиотехника». 2012. 256 с.
3. Системы управления и динамика наведения ракет. / Под ред. И.Е. Казакова. Учебник. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1973. 498 с.
4. Шатовкин Р.Р., Янушко Б.Б. Анализ существующих алгоритмов совместной обработки информации бортовой радиолокационной станции и оптико-электронной системы истребителя для решения задачи сопровождения маневренной воздушной цели. // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования» 27-28 апреля 2009 г. Тамбов: ТВВАИУРЭ (ВИ). 2009. С. 97-105.
5. Шатовкин Р.Р., Янушко Б.Б. Алгоритм совместной обработки измерений бортовой радиолокационной станции и оптико-электронной системы истребителя для решения задачи сопровождения маневренной воздушной цели по дальности. // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования» 27-28 апреля 2009 г. Тамбов: ТВВАИУРЭ (ВИ). 2009. С. 105-112.

6. Максимов М.В., Горгонов Г.И. Радиоэлектронные системы самонаведения. М.: Радио и связь. 1982. 304 с.
7. Краснов А.М., Донгаев Г.А., Пермяков Е.М. и др. Авиационные прицельно-навигационные системы. / Под ред. А.М. Краснова. Учебник для слушателей и курсантов ВУЗов ВВС. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 2006. 623 с.
8. X. Rong Li, Vesselin P. Jilkov. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part I: Dynamic Models. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems. Vol. 39. No 4. October 2003. P. 1333-1363.
9. X. Rong Li, Vesselin P. Jilkov. A Survey of Maneuvering Target Tracking. Part III: Measurement Models. Proceedings of SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, CA, USA, Juli-August 2001. (4473-41).
10. Пашко А.Д., Донцов А.А. Модель воздействия активного элемента защиты на управляемую ракету в расчетной точке пространства. // Вестник Московского авиационного института. 2017. Т.34. №1. С. 123-130.
11. Нелюбов А.Н. Летные характеристики и боевое маневрирование летательных аппаратов. Выпуск 1. Математическое моделирование движения летательных аппаратов. / Под ред. А.М. Тарасенкова. ВВИА им. проф. Н.Е Жуковского. 1985. 76 с.
12. Костоготов А.А., Моисеев Д.В., Лазаренко С.В. Оптимальная обработка радиолокационной информации при сопровождении маневрирующих целей. // Общие вопросы радиоэлектроники. Научно-технический сборник. ФГУП «РНИИРС». 2008. Вып. 1. С. 134-145.
13. Костоготов А.А., Кузнецов А.А., Лазаренко С.В., Лосев В.А. Синтез фильтра сопровождения со структурной адаптацией на основе объединенного принципа максимума. // Информационно-управляющие системы. 2015. № 4. С. 2-9.
14. Костоготов А.А., Кузнецов А.А., Лазаренко С.В. и др. Стохастическая пространственная фильтрация параметров движения маневрирующего

объекта на основе ОПМ. // 9-я Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь». 23-25 ноября 2015. ИРЭ им. В.Э. Котельникова РАН. Секция «Обработка сигналов». С. 22-25.

15. Шатовкин Р.Р., Бурлаков С.А. Анализ существующих подходов к моделированию движения маневренной воздушной цели. // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования» 27-28 апреля 2009 г. Тамбов: ТВВАИУРЭ (ВИ). 2009. С. 112-122.
16. Бочкарев А.М., Юрьев А.Н., Долгов М.Н., Щербинин А.В. Цифровая обработка радиолокационной информации при сопровождении целей. // Зарубежная радиоэлектроника. 1991. № 3. С. 3-22.

**Ссылка на статью:**

А. С. Богачев, В. И. Меркулов, В. С. Чернов, И. Р. Загребельный. Математические модели относительного движения воздушных объектов в процедурах наблюдения в авиационных бортовых РЛС. Часть 2. Математические модели в антенной, лучевой и сферической системах координат. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb18/6/text.pdf>