

УДК 537.877

ИМПЕДАНС ДЛИННОВОЛНОВОЙ ВИБРАТОРНОЙ АНТЕННЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

П. С. Глазунов ², В. А. Вдовин ¹, А. И. Слепков ²

¹ Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, г. Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

² МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
119234, г. Москва, ул. Ленинские Горы, 1, стр. 2

Статья поступила в редакцию 19 октября 2018 г., после доработки – 23 января 2019 г.

Аннотация. В большинстве задач об излучении электромагнитных волн источник излучения, как правило, находится в диэлектрике или вакууме. Однако большой интерес также представляют прикладные задачи, в которых излучение и дифракция происходят в изотропных средах с произвольными электромагнитными характеристиками: проводящих средах, средах с отрицательной вещественной частью диэлектрической проницаемости, метаматериалах и т.д. К числу подобных прикладных задач относятся: дезинтеграция минеральных руд и декапсуляция наночастиц с помощью электромагнитных импульсов, возбуждение объёмных и поверхностных плазмонов, задачи создания томографов, ближнепольная СВЧ микроскопия и многие другие. По конкретной тематике можно найти достаточно большой объём литературы, но весьма затруднительно найти работы, посвященные обобщению теории, используемой при решении вышеописанных задач, несмотря на его относительную простоту. В настоящей статье авторы произвели методическое обобщение, уточнили сложившуюся терминологию, а также дали ссылки на полезные источники с тем, чтобы сформировать общий теоретический фундамент для решения прикладных задач подобного класса. В качестве примера рассмотрено обобщение формул для импеданса длинноволновой вибраторной антенны при её нахождении в проводящей среде. Особое внимание уделено эффекту экранирования зарядов излучателя зарядами проводимости среды.

Ключевые слова: проводящие среды, излучение электромагнитных волн, распространение электромагнитных волн, изотропные среды с произвольными электромагнитными характеристиками, уравнения Максвелла, эффект экранирования.

Annotation. As a rule, the source of electromagnetic waves radiation is located in vacuum or dielectric medium. Nevertheless the problems of electromagnetic waves radiation in isotropic medium with arbitrary electrodynamic characteristics (conductivity, electric and magnetic permeability) are of great practical interest. There are many examples of such practical problems: mineral ores disintegration and nanoparticles decapsulation by electromagnetic pulses, volume and surface plasmon excitation, the problem of underwater radio communication, nearfield microwave microscopy and etc. A lot of scientific literature devoted to these specific issues can be found. However, there is not enough information on the generalization of the theories used to solve such practical problems. The purpose of this article is to make a methodical generalization, clarify current terminology and thus to form theoretical groundwork for solving issues of this type. A generalization of the formulas for the impedance of a long-wavelength dipole antenna when it is in a conducting medium is considered as an example. Particular attention is paid to the effect of shielding the charges of the radiator by conduction charges of the medium.

Key words: conducting media, electromagnetic waves radiation, electromagnetic waves propagation, isotropic media with arbitrary electrodynamic characteristics, Maxwell's equations.

Введение

Задачи, в которых распространение электромагнитных волн происходит в средах, существенно отличающихся по характеристикам от воздушного пространства и вакуума, начали рассматривать практически сразу же после открытия электромагнитных волн. Примером может служить исследование Зоммерфельда о распространении радиоволн вблизи поверхности Земли [1-2]. Для адекватного описания затухания электромагнитной волны,

распространяющейся вблизи земной поверхности, необходимо было рассмотреть проникновение волны внутрь почвы, которая является проводящей средой. В настоящее время задачи о распространении и дифракции волн в изотропных средах с произвольными электромагнитными характеристиками возникают в различных областях науки. Под изотропией здесь понимается отсутствие выделенного в пространстве направления (при этом изотропная среда может быть неоднородной или композитной). К числу прикладных задач, затрагивающих данную область физики, относятся: дезинтеграция минеральных руд [3-9] и декапсуляция наночастиц с помощью электромагнитных импульсов [10-13], возбуждение объёмных и поверхностных плазмонов [14-18], ближнепольная СВЧ микроскопия [19-22], магнитоиндукционная томография [23-27], и многие другие.

По конкретной тематике можно найти достаточно большой объём литературы, но весьма затруднительно найти работы, посвященные обобщению теории, используемой при решении вышеописанных задач, несмотря на его относительную простоту. Действительно, в классических учебниках и монографиях по радиофизике, например [28-33], подробно рассматривается проблема введения сторонних токов и зарядов, а также задача об излучении антенн заданной конструкции, но не затрагиваются вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн в средах с временной дисперсией, поскольку излучатели чаще всего расположены в воздушном пространстве. В классической литературе по теоретической физике, например, [34-35], наоборот, основное внимание уделяется выводу законов дисперсии, а проблема введения сторонних токов опускается. Кроме того, почти всегда на характеристики материальных сред накладываются ограничения (например, часто пренебрегают токами смещения по сравнению с токами проводимости или используют приближённые граничные условия). В тоже время, при решении новых, упомянутых выше, задач, в которых излучение и дифракция происходят в изотропных средах с произвольными электромагнитными характеристиками, априори неизвестно какими свойствами среды можно

пренебречь, а какими нет. Поэтому необходимо учитывать все свойства сред без лишних допущений. По этой причине авторы настоящей статьи посчитали уместным провести методическое обобщение, уточнить сложившуюся терминологию, привести ссылки на полезные источники с целью формирования общего теоретического фундамента для решения прикладных задач подобного класса. Материал, излагаемый далее в разделах 1-5, является общеизвестным и служит только для облегчения понимания результатов данной работы.

1. Токи и заряды материальной среды. Сторонние токи и заряды

Система уравнений Максвелла для случая бесконечной материальной среды в системе единиц СИ записывается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / \partial t \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) / \partial t + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

В уравнениях (2)-(3) $\rho(\mathbf{r}, t)$ - заряды проводимости среды (свободные заряды), $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ - токи проводимости среды (свободные токи). С физической точки зрения понятно, что система (1)-(4) может иметь лишь тривиальное решение, если в среде не будут присутствовать источники излучения, поэтому возникает необходимость их введения. По пунктам сформулируем основные свойства, которым, по мнению авторов, должны удовлетворять источники возбуждения электромагнитных волн, чтобы задача была корректной как с математической, так и с физической точек зрения (по вопросу введения сторонних токов и зарядов смотрите также [28-33]):

- 1) Будем считать, что источниками излучения служат заряженные частицы, заряд которых может быть как положительным, так и отрицательным. (Иначе, появляется несимметричность: заряды в источнике возбуждения могут быть только одного знака)
- 2) В общем случае, эти частицы не обязаны быть частицами, обеспечивающими проводимость материальной среды, а также её

поляризацию или намагниченность (хотя в частном случае это возможно). Они могут быть инородными, взятыми извне. Поэтому в дальнейшем данные частицы будут называться сторонними, а токи и заряды, создаваемые этими сторонними частицами, будут называться сторонними токами и зарядами, и обозначаться как $\mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$, $\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$.

- 3) Токи и заряды, не являющиеся сторонними, будут называться токами и зарядами среды. Их, как правило, разделяют на свободные (обеспечивающие проводимость) и связанные (обеспечивающие поляризацию или намагниченность) токи и заряды. Свободные токи и заряды будут обозначаться $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$.
- 4) Будем считать, что сторонние частицы взаимодействуют с частицами материальной среды лишь посредством классических электромагнитных взаимодействий. Это означает, что токи и заряды среды и сторонние токи и заряды являются взаимопроникаемыми, и при движении в материальной среде сторонние частицы не испытывают никакого сопротивления со стороны среды, кроме электромагнитного. Данное предположение принимается в целях упрощения задачи, поскольку в этом случае она становится чисто электродинамической и не приходится принимать во внимание, например, гидродинамическую вязкость или упругую (или пластическую) деформацию материальной среды.
- 5) Считается, что законы движения сторонних частиц известны или их можно задать. Иными словами, в материальной среде присутствует N частиц, законы движения которых будем считать известными и будем называть такие частицы сторонними:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), \quad i=1\dots N \quad (5)$$

Это необходимо для того, чтобы можно было рассчитать макроскопические сторонние токи и заряды по формулам:

$$\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) dV \quad (6)$$

$$\mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} \sum_{i=1}^N q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) dV / \Delta V, \quad (7)$$

где q_i - заряд i -ой сторонней частицы, ΔV - физически малый объём, по которому производится усреднение микроскопических величин, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ - дельта функция Дирака.

- 6) Вообще говоря, сторонние частицы совершают свои движения под действием некоторых внешних сил, природа которых не обязательно должна быть электромагнитной. Эти внешние силы не играют существенной роли при постановке или решении задачи электродинамики, хотя с физической точки зрения понятно, что они должны существовать для того, чтобы сторонние частицы двигались по заданным законам (5).
- 7) Токи и заряды среды заранее не известны и подлежат определению. Они возбуждаются сторонними токами и зарядами и являются своего рода откликом среды на возмущение электромагнитного поля, создаваемого сторонними токами и зарядами.
- 8) Из всего вышеперечисленного следует, что в правых частях уравнений (2)-(3) следует заменить $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow \rho(\mathbf{r}, t) + \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$. Уравнение непрерывности, таким образом, будет иметь вид:

$$\partial(\rho(\mathbf{r}, t) + \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)) / \partial t + \text{div}(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (8)$$

- 9) Сделаем важное предположение: сторонние токи и заряды не могут переходить в заряды и токи среды и наоборот. Таким образом, уравнение непрерывности (8) распадается на два:

$$\partial \rho(\mathbf{r}, t) / \partial t + \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9)$$

$$\partial \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) / \partial t + \text{div} \mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (10)$$

Уравнение (10) предполагает, что первоначальный набор из N сторонних частиц не изменяется со временем.

2. Материальные уравнения. Фурье разложение величин, входящих в уравнение Максвелла

Рассмотрим изотропные среды, тогда в случае статики в любой точке пространства \mathbf{r} выполняются соотношения:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma_{\text{st}}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0\chi_{\varepsilon}^{\text{st}}(\mathbf{r})\mathbf{E} \quad (12)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mu_0\chi_{\mu}^{\text{st}}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (13)$$

Здесь $\chi_{\varepsilon}^{\text{st}}(\mathbf{r})$, $\chi_{\mu}^{\text{st}}(\mathbf{r})$ - относительные диэлектрическая и магнитная восприимчивости среды соответственно в случае статики, $\sigma_{\text{st}}(\mathbf{r})$ - проводимость среды в случае статики. Величины $\chi_{\varepsilon}^{\text{st}}(\mathbf{r})$, $\chi_{\mu}^{\text{st}}(\mathbf{r})$, $\sigma_{\text{st}}(\mathbf{r})$ не зависят от времени, но могут являться функциями от пространственных координат. Далее для краткости все рассуждения будут проведены только для проводимости $\sigma_{\text{st}}(\mathbf{r})$, поскольку для диэлектрической и магнитной восприимчивостей $\chi_{\varepsilon}^{\text{st}}(\mathbf{r})$, $\chi_{\mu}^{\text{st}}(\mathbf{r})$ будут справедливы аналогичные рассуждения.

Понятно, что в общем случае, когда векторы электромагнитного поля зависят от времени произвольным образом, уравнение (11) не выполняется. Действительно, при появлении электрического поля электроны начинают двигаться не сразу, поскольку обладают массой. Для того чтобы установился равновесный ток, описываемый уравнением (11), необходимо, чтобы прошёл некоторый промежуток времени. Кроме того, очевидно, что электрическое поле во все предшествующие моменты времени влияет на величину тока в настоящий момент времени. Поэтому при произвольной зависимости электромагнитных полей от времени необходимо положить [34-35]:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{\text{st}}(\mathbf{r}) \int_0^{\infty} f(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') dt' \quad (14)$$

Здесь $f(\mathbf{r}, t')$ - некоторая функция, описывающая меру влияния электрического поля \mathbf{E} в предшествующий момент времени $t - t'$ на ток \mathbf{j} в настоящий момент времени t в точке с радиус-вектором \mathbf{r} , $\sigma_{st}(\mathbf{r})$ - проводимость среды в статическом случае из (11). Рассмотрим свойства функции $f(\mathbf{r}, t')$. Пусть постоянное и однородное электрическое поле амплитудой E_0 появляется в момент времени $t = 0$. Тогда формула (14) принимает вид:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{st}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0 \int_0^t f(\mathbf{r}, t') dt' \quad (15)$$

Из (15) видно, что функция $f(\mathbf{r}, t')$ описывает релаксацию системы к статическому случаю в точке \mathbf{r} : при $t \rightarrow \infty$, $\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma_{st}(\mathbf{r}) \int_0^t f(\mathbf{r}, t') dt' \rightarrow \sigma_{st}(\mathbf{r})$, поэтому

$$\int_0^{\infty} f(\mathbf{r}, t') dt' = 1 \quad (16)$$

Из (16) в свою очередь следует, что при $t \rightarrow \infty$ функция $f(\mathbf{r}, t') \rightarrow 0$ - это необходимо для сходимости интеграла (16) (при этом $f(\mathbf{r}, t')$ не обязательно должна быть монотонной функцией t').

Разложим $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t')$ в интегралы Фурье, взяв при этом зависимость $e^{-i\omega t}$ (также как и в [28-29]). Далее комплексные Фурье-амплитуды соответствующих физических величин будут обозначаться символом « ^ »:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (17)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (18)$$

Заметим, несмотря на то, что подынтегральные выражения в (17)-(18) представляют собой комплекснозначные функции, после интегрирования в левых частях уравнений (17)-(18) получаются действительные функции. Подставим выражения (17)-(18) в (14), получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega &= \sigma_{st}(\mathbf{r}) \int_0^{\infty} f(\mathbf{r}, t') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' = \\ &= \sigma_{st}(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \left(\int_0^{\infty} f(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \right) d\omega \end{aligned} \quad (19)$$

В (19) был изменён порядок интегрирования. Далее обозначим

$\sigma_{st}(\mathbf{r}) \int_0^{\infty} f(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt' = \hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)$, перенесём все слагаемые в левую часть и запишем

их под одним интегралом, получим: $\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) - \hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} e^{-i\omega t} d\omega = 0$.

Из теоремы о единственности интегрального представления Фурье, следует, что:

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (20)$$

В формуле (20) $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ имеют смысл комплексных амплитуд векторов тока и напряжённости электрического поля, $\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)$ имеет смысл комплексной амплитуды проводимости среды на циклической частоте ω (поскольку по определению это есть коэффициент пропорциональности между комплексной амплитудой вектора тока и комплексной амплитудой вектора напряжённости электрического поля). Модуль $\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)$ описывает во сколько раз величина тока отличается от величины напряжённости электрического поля по абсолютному значению. Фаза $\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)$ описывает разность фаз между током и напряжённостью электрического поля (очевидно, что ток в силу принципа причинности и в силу того, что электроны обладают некоторой инертностью, всегда должен немного отставать по фазе от напряжённости электрического

поля). Далее везде реальную составляющую какой-либо комплексной величины $a \in \mathbb{C}$ будем обозначать a_1 , мнимую - a_2 , её модуль- $|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$.

Проводя аналогичные рассуждения с $\chi_\varepsilon^{\text{st}}(\mathbf{r}), \chi_\mu^{\text{st}}(\mathbf{r})$ в материальных уравнениях (12)-(13), найдём что:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (22)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0(1 + \hat{\chi}_\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)) = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r(\mathbf{r}, \omega)$, $\hat{\mu}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0(1 + \hat{\chi}_\mu(\mathbf{r}, \omega)) = \mu_0 \hat{\mu}_r(\mathbf{r}, \omega)$, где $\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{r}, \omega), \hat{\mu}_r(\mathbf{r}, \omega)$ - комплексные амплитуды относительной диэлектрической и магнитной проницаемостей. В дальнейшем будем пользоваться именно материальными соотношениями (20)-(22).

Разложим все остальные величины в интегралы Фурье вида (17)-(18) и подставим их в уравнение Максвелла (1)-(4). В каждом из уравнений объединив все слагаемые под одним интегралом, и воспользовавшись теоремой о единственности интегрального представления Фурье, найдём, что комплексные амплитуды соответствующих физических величин должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\text{rot } \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (23)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (24)$$

$$\text{rot } \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (25)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (26)$$

Уравнения непрерывности (9)-(10) примут вид:

$$i\omega \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega) = \text{div } \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = \text{div } (\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)) \quad (27)$$

$$i\omega \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \omega) = \text{div } \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (28)$$

Далее исключим из уравнений (23)-(26) $\hat{j}(\mathbf{r}, \omega), \hat{D}(\mathbf{r}, \omega), \hat{B}(\mathbf{r}, \omega), \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega)$, используя соответственно формулы (20), (21), (22), (27):

$$\operatorname{rot} \hat{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \hat{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \hat{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad (29)$$

$$\operatorname{div} \left[(\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) + i\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)/\omega) \hat{E}(\mathbf{r}, \omega) \right] = \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (30)$$

$$\operatorname{rot} \hat{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\hat{E}(\mathbf{r}, \omega) [\omega \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) + i\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \omega)] + \hat{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (31)$$

$$\operatorname{div} (\hat{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \hat{H}(\mathbf{r}, \omega)) = 0 \quad (32)$$

Далее, там, где это не важно, для краткости будем опускать зависимость всех величин из уравнений (29)-(32) от ω и \mathbf{r} , а также для удобства введём коэффициенты:

$$\hat{\xi} = \hat{\varepsilon} + i\hat{\sigma}/\omega, \quad \hat{\xi}_r = \hat{\xi} / \varepsilon_0 \quad (33)$$

Коэффициент $\hat{\xi}$ в литературе называется по-разному. В [28-29,31] – комплексная диэлектрическая проницаемость, в [30] – комплексная диэлектрическая постоянная среды, в [32] – полная комплексная диэлектрическая проницаемость. В настоящей статье данный коэффициент называется обобщенной диэлектрической проницаемостью, поскольку, по мнению авторов, такая терминология правильно отражает его суть (это обобщение диэлектрической проницаемости для случая сред, обладающих проводимостью). Отметим что, в литературе, как правило, обобщённая диэлектрическая проницаемость и классическая диэлектрическая проницаемость обозначается одной и той же буквой ε , что приводит к путанице. Коэффициент $\hat{\xi}_r = \hat{\xi} / \varepsilon_0$ назовём относительной обобщенной диэлектрической проницаемостью. С учётом вышеописанных допущений и введения коэффициента (33) уравнения (29)-(32) можно переписать в наиболее удобной форме:

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}} = i\omega \hat{\mu} \hat{\mathbf{H}} \quad (34)$$

$$\operatorname{div}(\hat{\xi} \hat{\mathbf{E}}) = \hat{\rho}_{\text{ex}} \quad (35)$$

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} = -i\omega \hat{\xi} \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}} \quad (36)$$

$$\operatorname{div}(\hat{\mu} \hat{\mathbf{H}}) = 0 \quad (37)$$

Эта форма удобна тем, что схожа с формой записи системы уравнений Максвелла (1)-(4) в случае гармонической зависимости всех величин от времени при отсутствии проводимости среды с точностью до замены $\hat{\varepsilon} \rightarrow \hat{\xi}, \hat{\mathbf{j}} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}, \hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_{\text{ex}}$. Уравнения (34)-(37) не содержат свободных и связанных зарядов и токов среды, однако их влияние на процессы излучения и распространение электромагнитных волн описывается введённым коэффициентом $\hat{\xi}$. Таким образом, дальше возможно использование классической теории потенциалов и мультипольного разложения.

Отметим, что уравнения (34)-(37) справедливы не только в том случае, когда $\hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\varepsilon}$ являются скалярными величинами, зависящими от радиус-вектора \mathbf{r} , но и в том случае, когда $\hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\varepsilon}$ являются тензорными величинами, зависящими от радиус-вектора \mathbf{r} , т.е. когда материальные соотношения (20)-(22) имеют вид:

$$\hat{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{j=1}^3 \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \hat{E}_j(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\hat{D}_i(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{j=1}^3 \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \hat{E}_j(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\hat{B}_i(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \hat{H}_j(\mathbf{r}, \omega).$$

В таком случае произведения $\hat{\mu} \hat{\mathbf{H}}, \hat{\xi} \hat{\mathbf{E}}$ в (34)-(37) необходимо понимать как

суммы: $\sum_{i,j=1}^3 e_i \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \hat{H}_j(\mathbf{r}, \omega)$, $\sum_{i,j=1}^3 e_i \hat{\xi}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \hat{E}_j(\mathbf{r}, \omega)$, где e_i -единичные орты декартовой системы координат, $\hat{\xi}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) + i\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, \omega)/\omega$. О разделимости уравнений Максвелла в случае анизотропных сред можно посмотреть в [36].

3. Соотношения Крамерса-Кронига для случая изотропных сред с произвольными значениями проводимостей, магнитных и диэлектрических восприимчивостей

Соотношения Крамерса-Кронига являются следствием теоремы Коши [37] (из теории функции комплексной переменной). Рассмотрим функцию комплексной переменной $\chi(\omega)$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Пусть $\chi(\omega)$ аналитическая в области G , пусть Γ - замкнутый контур, целиком лежащий в G . Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} = \begin{cases} \chi(\omega), \text{ если } \omega \text{ внутри } \Gamma \\ \chi(\omega)/2, \text{ если } \omega \text{ на } \Gamma \\ 0, \text{ если } \omega \text{ вне } \Gamma \end{cases}$$

Причём, если ω лежит на контуре Γ , то интеграл понимается в смысле главного значения.

Далее все рассуждения будем проводить для проводимости $\hat{\sigma}(\omega)$, поскольку аналогичные рассуждения будут также справедливы и для $\hat{\chi}_{\varepsilon}(\omega)$, $\hat{\chi}_{\mu}(\omega)$.

Рассмотрим проводимость как функцию комплексного аргумента:

$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{\sigma}(\omega_1 + i\omega_2) = \sigma_{st} \int_0^{\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' = \sigma_{st} \int_0^{\infty} f(t') e^{i\omega_1 t'} e^{-\omega_2 t'} dt' \quad (38)$$

Из формулы (38) следует, что $\hat{\sigma}(\omega)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости (легко проверить, что для неё выполняется необходимое и достаточное условие аналитичности: существование

непрерывных первых частных производных $\partial\hat{\sigma}(\omega_1, \omega_2)/\partial\omega_1$, $\partial\hat{\sigma}(\omega_1, \omega_2)/\partial\omega_2$, для которых оказываются справедливы условия Коши-Римана).

Применим формулу Коши к функции $\hat{\sigma}(\omega)$, в качестве контура интегрирования Γ выбрав контур, состоящий из отрезка вещественной оси от $-R$ до $+R$ (этот отрезок будем обозначать просто буквой R) и полуокружности радиуса R в верхней полуплоскости $\omega_2 > 0$ (её мы обозначим C_R). Получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma=R+C_R} \frac{\hat{\sigma}(\omega')d\omega'}{\omega' - \omega} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}(\omega)$$

или

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{-i}{\pi} \text{v.p.} \int_{-R}^{+R} \frac{\hat{\sigma}(\omega')d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{-i}{\pi} \int_{C_R} \frac{\hat{\sigma}(\omega')d\omega'}{\omega' - \omega} \quad (39)$$

В выражении (39) устремим $R \rightarrow \infty$, при этом интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю, поскольку согласно (38) в верхней полуплоскости $\omega_2 > 0$, $\hat{\sigma}(\omega) \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$. В итоге получим соотношения Крамерса-Кронига для $\hat{\sigma}(\omega)$:

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{-i}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\sigma}(\omega')d\omega'}{\omega' - \omega} \quad (40)$$

Соотношение (40) остаётся справедливым для функций $\hat{\chi}_\varepsilon(\omega) = \hat{\varepsilon}_r(\omega) - 1$, $\hat{\chi}_\mu(\omega) = \hat{\mu}_r(\omega) - 1$.

Для функции $\hat{\chi}_\xi(\omega) = \hat{\xi}_r(\omega) - 1$ соотношение (40) принимает несколько другой вид. Используем то, что $\hat{\chi}_\xi(\omega) = \hat{\chi}_\varepsilon(\omega) + i\hat{\sigma}(\omega)/\omega$, а также алгебраическое тождество $\frac{1}{\omega'(\omega' - \omega)} \equiv \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\omega' - \omega} - \frac{1}{\omega'} \right)$. Контур интегрирования Γ возьмём

такой же, как ранее, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}_{\xi}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} &= \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}_{\varepsilon}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{i\hat{\sigma}(\omega')}{\omega'} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}_{\varepsilon}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{i}{\omega} \left[\frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}(\omega') d\omega'}{\omega'} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Устремляя $R \rightarrow \infty$, и применяя теорему Коши к каждому из интегралов, стоящих в правой части (41) придём к формуле:

$$\hat{\chi}_{\xi}(\omega) = \frac{-i}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\chi}_{\xi}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{i\hat{\sigma}(0)}{\omega} \quad (42)$$

Здесь $\hat{\sigma}(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\sigma}(\omega) = \sigma_{st}$ - проводимость среды при $\omega \rightarrow 0$, которая равна проводимости среды в случае статики (согласно принципу соответствия). Вывод соотношения (42) для случая не зависящей от частоты проводимости, а также свойства функций $\hat{\sigma}(\omega)$, $\hat{\chi}_{\varepsilon}(\omega)$, $\hat{\chi}_{\mu}(\omega)$, как функций комплексного аргумента можно найти в [34-35].

В конце параграфа приведём ссылки на модели, используемые для нахождения зависимостей $\hat{\sigma}(\omega)$, $\hat{\chi}_{\varepsilon}(\omega)$, $\hat{\chi}_{\mu}(\omega)$. Классический случай диэлектрической проницаемости разреженного нейтрального газа рассмотрен в [34]. При этом решается классическое уравнение Ньютона для связанных с ядрами электронов в поле плоской электромагнитной волны. В [34] также можно найти вывод формул, описывающих характерное поведение диэлектрической проницаемости при низких и высоких частотах в общем случае. Классический случай для нахождения $\hat{\sigma}(\omega)$ (модель Друде) рассмотрен в [38]. Более сложные модели диэлектрической проницаемости и проводимости, применимые для жидкостей рассмотрены в [39]. Модели, применимые для композитных, анизотропных материалов и киральных сред рассмотрены в [40].

4. Теория электромагнитных потенциалов для случая однородных изотропных сред с произвольными электромагнитными характеристиками.

Чтобы воспользоваться далее классической теорией потенциалов, предположим, что величины $\hat{\sigma}(\omega)$, $\hat{\mu}(\omega)$, $\hat{\epsilon}(\omega)$ не зависят от пространственных переменных и являются скалярами, таким образом, их можно беспрепятственно выносить из-под дифференциальных операторов. Основные результаты показаны ниже.

Уравнения для комплексных амплитуд потенциалов электромагнитного поля без калибровки имеют вид [34-35]:

$$\Delta \hat{A} + k^2 \hat{A} = \text{grad} \left\{ -i\omega \hat{\mu} \hat{\xi} \hat{\phi} + \text{div} \hat{A} \right\} - \hat{\mu} \hat{J}_{\text{ex}} \quad (43)$$

$$\Delta \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = i\omega \left\{ -i\omega \hat{\mu} \hat{\xi} \hat{\phi} + \text{div} \hat{A} \right\} - \hat{\rho}_{\text{ex}} / \hat{\xi} \quad (44)$$

В выражениях (43)-(44) коэффициент k играет роль волнового числа в материальной среде, причём:

$$k^2 = \omega^2 \hat{\xi} \hat{\mu} \quad (45)$$

При калибровке Лоренца:

$$i\omega \hat{\mu} \hat{\xi} \hat{\phi} = \text{div} \hat{A} \quad (46)$$

уравнения (43)-(44) принимают вид:

$$\Delta \hat{A} + k^2 \hat{A} = -\hat{\mu} \hat{J}_{\text{ex}} \quad (47)$$

$$\Delta \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = -\hat{\rho}_{\text{ex}} / \hat{\xi} \quad (48)$$

Связь комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля и комплексных амплитуд потенциалов задаётся соотношениями:

$$\hat{H} = \frac{1}{\hat{\mu}} \text{rot} \hat{A} \quad (49)$$

$$\hat{E} = -\text{grad}\hat{\phi} + i\omega\hat{A} \quad (50)$$

В формуле (48) коэффициент $\hat{\xi}$ описывает эффект экранирования сторонних зарядов источника, зарядами среды. При $\omega \rightarrow 0$ (что соответствует случаю статики) знаменатель дроби в правой части (48) стремится к ∞ , поскольку $\hat{\xi} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \sigma_{st}/\omega$. Это соответствует полной экранировке. При $\omega \rightarrow \infty$, $\hat{\xi} \rightarrow \epsilon_0$, так как, если частота излучения достаточно велика, из-за инертности электроны не успевают ускориться, приобрести скорость и вообще сместиться. Поэтому при достаточно высоких частотах поле почти не взаимодействует с электронами (естественно, такое рассуждение не применимо для случая таких высоких частот, что электромагнитное излучение необходимо описывать уже с точки зрения квантовой механики). Для наглядности введём коэффициент экранирования, характеризующий этот эффект.

$$s_{scr} = |\hat{\xi}|/\epsilon_0\epsilon_r = |\hat{\xi}_r|/\epsilon_r \quad (51)$$

Этот коэффициент показывает во сколько раз наличие зарядов проводимости среды вследствие экранировки уменьшает эффективный заряд излучателя (под эффективным зарядом понимается сторонний заряд излучателя с учётом экранирующего его заряда среды).

Рассмотрим волновое число k и найдём в нём реальную и мнимую части:

$$k = k_1 + ik_2 \quad (52)$$

Возведем выражение (52) в квадрат, получим:

$$\text{Re}(k^2) = k_1^2 - k_2^2 \quad (53)$$

$$\text{Im}(k^2) = 2k_1k_2 \quad (54)$$

Решив систему (53)-(54), можно найти коэффициенты k_1, k_2 , однако мы найдём их более простым способом. Заметим, что:

$$|k^2| = |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (55)$$

Складывая и вычитая уравнения (53), (55) получим соответственно:

$$k_1^2 = \frac{|k^2| + \text{Re}(k^2)}{2} \quad (56)$$

$$k_2^2 = \frac{|k^2| - \text{Re}(k^2)}{2} \quad (57)$$

Если не делать никаких предположений относительно $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ (кроме уже сделанного предположения о том, что все эти величины скаляры) и считать, что каждая из этих величин может обладать реальной и мнимой частями, то используя формулы (46), (56)-(57), и учитывая, что $|k^2| = |k|^2 = \omega^2 |\xi| |\mu|$, получим:

$$k_1 = \pm \omega \sqrt{[|\mu| |\xi| + (\mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2)]/2} \quad (58)$$

$$k_2 = \pm \omega \sqrt{[|\mu| |\xi| - (\mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2)]/2} \quad (59)$$

В формулах (58)-(59) присутствует неоднозначность в выборе знака. Выбор необходимо осуществлять следующим образом. Во-первых, знак произведения $k_1 k_2$ определяется формулой (54). Во-вторых, если среда не является активной, то коэффициент k_2 должен описывать диссипацию энергии электромагнитных волн в среде и поэтому должен быть положительным. Если же неизвестно, является ли среда активной, то правильнее будет выбирать знак не у k_2 , а у k_1 . В таком случае выбирать знак у k_1 необходимо таким образом, чтобы групповая скорость $v_{gr} = \left(\frac{\partial k_1(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \geq 0$ (это соответствует тому, что энергия исходит от источника излучения, а не наоборот). Если же в задаче $k_2 = 0$, то выбор знака k_1 можно осуществить следующим образом. Можно «искусственно» ввести у рассматриваемой среды поглощение при помощи добавления проводимости $\sigma = const > 0$. Тогда $k_2 > 0$, а знак произведения $k_1 k_2$ по-прежнему будет определяться формулой (54). Решив задачу для $k_2 > 0$,

затем можно перейти к пределу $k_2 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$. Данный приём называется принципом предельного поглощения [41].

Если предположить что величины $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ имеют лишь реальные части, которые равны соответственно ε, μ, σ , то формулы (58)-(59) упрощаются и соответствуют формулам из [42]:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]} \quad (60)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1 \right]} \quad (61)$$

Уравнения (47)-(48) являются уравнениями Гельмгольца с комплексным волновым числом, решения которых в случае излучения в бесконечных областях известны (и выглядят в точности так же, как и в случае чисто вещественного волнового числа, что доказывается в [41]):

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \hat{\xi}_{V'}} \int \frac{\hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \quad (62)$$

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \quad (63)$$

Рассмотрим формулы (62)-(63) более подробно. Из этих формул следует, что экранирование сказывается лишь на комплексной амплитуде потенциала $\hat{\phi}$. На комплексную амплитуду векторного потенциала \hat{A} экранирование не оказывает эффекта. Причиной этого является то, что в природе (как предполагает классическая электродинамика) не существует магнитных зарядов, поэтому токи $\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}$ ничем не могут быть экранированы.

В качестве примера рассмотрим точечный источник, расположенный в

начале системы координат: $\hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') = q_{\text{ex}} \delta(\mathbf{r}')$, $\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') = \mathbf{I}_{\text{ex}} \delta(\mathbf{r}')$. В этом случае формулы (62)-(63) приобретают вид:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}} \frac{q_{\text{ex}} e^{ikr}}{r} = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}} \frac{q_{\text{ex}} e^{ik_1 r} e^{-k_2 r}}{r} \quad (64)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \frac{\mathbf{I}_{\text{ex}} e^{ikr}}{r} = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \frac{\mathbf{I}_{\text{ex}} e^{ik_1 r} e^{-k_2 r}}{r} \quad (65)$$

Из формул (64)-(65) видно, что реальная часть волнового числа k описывает v_{ph} - скорость распространения постоянной фазы волны Φ_0 :

$$0 = d\Phi_0/dt = d(k_1 r - \omega t)/dt = k_1 v_{\text{ph}} - \omega \Rightarrow v_{\text{ph}} = \omega/k_1$$

Мнимая часть k описывает затухание амплитуды волны. В таких случаях, обычно вводят величину, равную расстоянию, на котором амплитуда плоской волны затухала бы в e раз - глубину скин-слоя:

$$\delta = 1/k_2$$

5. Граничные условия для случая однородных изотропных сред с произвольными электромагнитными характеристиками

Классические граничные условия для векторов электромагнитного поля на границе раздела двух материальных сред I, II для уравнений (1)-(4) записываются следующим образом:

$$(\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (66)$$

$$(\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = \rho_s \quad (67)$$

$$(\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = 0 \quad (68)$$

$$[\mathbf{n}_{II,I}, (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II})] = \mathbf{j}_s \quad (69)$$

В формулах (66)-(69) $\mathbf{n}_{II,I}$ - нормаль к границе раздела сред, направленная из среды II в среду I, $\boldsymbol{\tau}$ - тангенциальный вектор на границе раздела сред, ρ_s -

поверхностные свободные заряды среды, j_s - поверхностные свободные токи среды. При этом предполагается, что на границе раздела сред отсутствуют поверхностные сторонние токи и заряды j_{ex}, ρ_{ex} . Об условиях применимости граничных условий (66)-(69) смотрите [34-35].

Далее предположим, что влиянием поверхностных свободных токов среды j_s можно пренебречь и положим $j_s = 0$ (это приближение часто оказывается уместным, поскольку, как правило, поверхностная проводимость среды много меньше объёмной и почти весь ток течёт по объёму среды). Тогда из (69) следует равенство тангенциальных компонент вектора H .

Далее возьмём частную производную по времени от выражения (67), получим:

$$\left(\frac{\partial D_I}{\partial t} - \frac{\partial D_{II}}{\partial t}, n_{II,I} \right) = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (70)$$

В выражении (70) более подробно рассмотрим $\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$. Поскольку считается, что по поверхности ток не течёт, то заряд на поверхность может попадать лишь из объёма среды. Таким образом, с учётом выбора нормали:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -(\mathbf{j}_I - \mathbf{j}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) \quad (71)$$

Подставляя (71) в (70) получим:

$$\left(\left(\frac{\partial D_I}{\partial t} + \mathbf{j}_I \right) - \left(\frac{\partial D_{II}}{\partial t} + \mathbf{j}_{II} \right), \mathbf{n}_{II,I} \right) = 0 \quad (72)$$

Вновь перейдём к комплексным амплитудам электромагнитных векторов. Предположим, что в каждой из сред выполняются материальные соотношения (20)-(22), с помощью которых из уравнений (68), (72) исключим величины D_I , D_{II} , j_I , j_{II} , B_I , B_{II} . Тогда в итоге получим:

$$(\hat{\mathbf{E}}_I - \hat{\mathbf{E}}_{II}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (73)$$

$$(\hat{\xi}_I \hat{\mathbf{E}}_I - \hat{\xi}_{II} \hat{\mathbf{E}}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = 0 \quad (74)$$

$$(\hat{\mu}_I \hat{\mathbf{H}}_I - \hat{\mu}_{II} \hat{\mathbf{H}}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = 0 \quad (75)$$

$$(\hat{\mathbf{H}}_I - \hat{\mathbf{H}}_{II}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (76)$$

Уравнения (73)-(76) являются обобщением классических граничных условий для векторов электромагнитного поля (66)-(69). Заметим, что условие (74) можно вывести и из уравнения (35) классическим способом - интегрируя уравнение (35) по объёму цилиндра, основания которого находятся по разные стороны от границы раздела сред, а затем устремляя высоту этого цилиндра к нулю.

6. Обобщение формул электростатики для случая гармонически меняющихся величин

Часто для вычисления электродинамических характеристик излучающей системы используют электростатическое приближение. Данное упрощение справедливо, когда требуется найти электромагнитное поле в области пространства, для которой расстояние от любой точки источника до точки наблюдения много меньше длины волны излучения, то есть:

$$|k| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1 \quad (77)$$

В таком случае в решениях уравнения Гельмгольца (62)-(63), разлагая экспоненту в подынтегральных выражениях в ряд Тейлора $e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 1 - ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + O(|k|^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2)$, получаем:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}_V} \int \frac{\hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' - \frac{ik}{4\pi\hat{\xi}_V} \int \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' + O(|k|^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2) \quad (78)$$

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' - \frac{ik\hat{\mu}}{4\pi} \int \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' + O(|k|^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2) \quad (79)$$

В силу уравнения непрерывности (28) второе слагаемое в выражении (78) равно нулю:

$$\int_{V'} \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' = \frac{1}{i\omega} \int_{V'} \text{div} \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' = \frac{1}{i\omega} \oint_S (\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}'), d\mathbf{S}) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

В выражении (79) второе слагаемое при помощи (28) может быть выражено через дипольный момент системы:

$$\int_{V'} \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' = -i\omega \hat{\mathbf{d}}, \text{ где } \hat{\mathbf{d}} = \int_{V'} \mathbf{r}' \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz'$$

Таким образом, в области пространства, удовлетворяющей условию (77) формулы (78)-(79) приобретают вид:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \hat{\xi}_{V'}} \int \frac{\hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' + O(|k|^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2) \quad (80)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' - \frac{k\omega \hat{\mu} \hat{\mathbf{d}}}{4\pi} + O(|k|^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2) \quad (81)$$

Подставляя формулы (80)-(81) в (50), имея в виду (28),(45) и пользуясь соотношениями, следующими из векторного анализа, в которых индекс у дифференциального оператора показывает на какие координаты (штрихованные или не штрихованные) данный оператор действует

$$\text{div}_r \left(\frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\text{div}_{r'} \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') \right)$$

$$\text{grad}_r \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') \right) = \frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - 3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

можно показать, что вклад первого слагаемого выражения (80) в комплексную амплитуду электрического поля имеет нулевой порядок малости по малому параметру (77). Вклад первого слагаемого в формуле (81) – второй порядок малости, а вклад второго слагаемого в (81) – третий порядок. При вычислении

магнитного поля по формуле (49) ненулевой вклад даёт только первое слагаемое из соотношения (81). Далее рассмотрим два случая:

1) Случай, когда в излучателе $\hat{\rho}_{ex} \neq 0$, $\hat{j}_{ex} \neq 0$. Тогда для расчёта электрического поля имеет смысл учитывать лишь нулевой порядок малости (первое слагаемое в формуле (80)). При этом слагаемое, соответствующее первому порядку малости в формуле (80), как было показано, равно нулю. Поэтому в итоге электрическое поле вычисляется с точностью до первого включительно порядка малости. Для расчёта магнитного поля используется первое слагаемое из формулы (81), таким образом, магнитное поле вычисляется с точностью до второго включительно порядка малости.

2) Если же в излучателе $\hat{\rho}_{ex} = 0$, $\hat{j}_{ex} \neq 0$, то потенциал $\hat{\phi}(\mathbf{r})$, согласно (62), равен нулю, и тогда для расчёта электрического поля следует использовать первое слагаемое выражения (81). Для расчёта магнитного поля также используется первое слагаемое из формулы (81). Таким образом, в данном случае, как электрическое, так и магнитное поля вычисляются с точностью до второго порядка малости включительно.

Поэтому в случае 1) с точностью до первого порядка малости включительно, и в случае 2) с точностью до второго порядка малости включительно, можно считать, что:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}} \int_V \frac{\hat{\rho}_{ex}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz', \quad \hat{A}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \int_V \frac{\hat{j}_{ex}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \quad (82)$$

С другой стороны, известно, что выражения (82) являются решениями уравнений Пуассона типа:

$$\Delta \hat{\phi}(\mathbf{r}) = -\hat{\rho}_{ex}(\mathbf{r})/\hat{\xi} \quad (83)$$

$$\Delta \hat{A}(\mathbf{r}) = -\hat{\mu} \hat{j}_{ex}(\mathbf{r}) \quad (84)$$

таким образом, корректность используемого электростатического приближения при выполнении условия (77) доказана.

7. Импеданс длинноволновой вибраторной антенны, находящейся в проводящей среде. Учёт экранировки

В качестве первого поясняющего примера приведём обобщение импеданса плоского конденсатора. Пусть площадь поперечного сечения его обкладок S , расстояние между ними d , а пространство между обкладками заполнено средой, обладающей абсолютной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и удельной проводимостью $\sigma \in \mathbb{R}_+$. В классическом случае $C = \varepsilon S/d$. Для проведения обобщения в силу уравнения (83), необходимо сделать замену: $\varepsilon \rightarrow \hat{\xi}$, где $\hat{\xi}$ определяется из соотношения (33). Таким образом, $\hat{C} = \hat{\xi} S/d = (\varepsilon + i\sigma/\omega) S/d$, а импеданс $\hat{Z} = -1/i\omega\hat{C} = id/S(\omega\varepsilon + i\sigma)$

Данную задачу можно решить и классическим способом. Очевидно, что конденсатор с вышеописанным заполнением можно рассматривать как параллельно соединённые резистор с сопротивлением $R = d/S\sigma$ и конденсатор, между обкладками которого находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε . Используя формулу для параллельного соединения сопротивлений, получим то же самое:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 / (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) = (R / -i\omega C) / (R + 1 / -i\omega C) = id/S(\omega\varepsilon + i\sigma)$$

Видно, что способы эквивалентны, однако использование обобщения сокращает количество выкладок. Стоит отметить, что физический смысл комплексной ёмкости \hat{C} - это отношение комплексной амплитуды заряда к комплексной амплитуде разности потенциалов:

$$\hat{C} = \hat{Q}/\hat{U}, |\hat{C}| = |\hat{Q}|/|\hat{U}|, \arg(\hat{C}) = \arg(\hat{Q}) - \arg(\hat{U}).$$

В качестве следующего примера приведём обобщение формулы для импеданса длинноволновой вибраторной антенны при её нахождении в проводящей среде. Для определённости будем считать, что антенна конструктивно представляет собой симметричный вибратор Герца. При этом,

согласно положениям (8)-(10), провода излучателя изолированы от проводящей среды, например, тонким слоем диэлектрика.

Считается, что импеданс длинноволновой вибраторной антенны состоит в основном из ёмкостного сопротивления [43], при временной зависимости $e^{-i\omega t}$:

$$\hat{Z} = 1/-i\omega C \quad (85)$$

При расчёте ёмкости используется модель длинного провода круглого сечения, применяется электростатическое приближение. Ёмкость рассчитывается относительно пространственной бесконечности. Основные детали расчёта приведены в [43]:

$$C_0 = \frac{4\pi l \varepsilon}{2 \left[\ln \left(\frac{l}{a} \right) + \ln 2 - 1 \right]} \quad (86)$$

Формула (86) справедлива для провода длины l , радиуса поперечного сечения a , находящегося в бесконечной диэлектрической среде с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε при $l \gg a$. Обобщение для случая нахождения провода в среде, обладающей проводимостью, снова, согласно (83)-(84), производится заменой: $\varepsilon \rightarrow \hat{\xi}$:

$$\hat{C} = \frac{4\pi l \hat{\xi}}{2 \left[\ln \left(\frac{l}{a} \right) + \ln 2 - 1 \right]} \quad (87)$$

График сравнения импеданса антенны, находящейся в диэлектрике с некоторой относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = const \in \mathbb{R}$, и проводящей среде с такой же относительной диэлектрической проницаемостью ε_r и проводимостью $\sigma = const \in \mathbb{R}$ в относительных единицах показан на рис.1.

Здесь \hat{Z}_0 - импеданс длинноволновой антенны, находящейся в диэлектрике, рассчитанный по классической формуле (86), \hat{Z} - импеданс

длинноволновой антенны в среде с проводимостью, рассчитанный по формуле (87) .

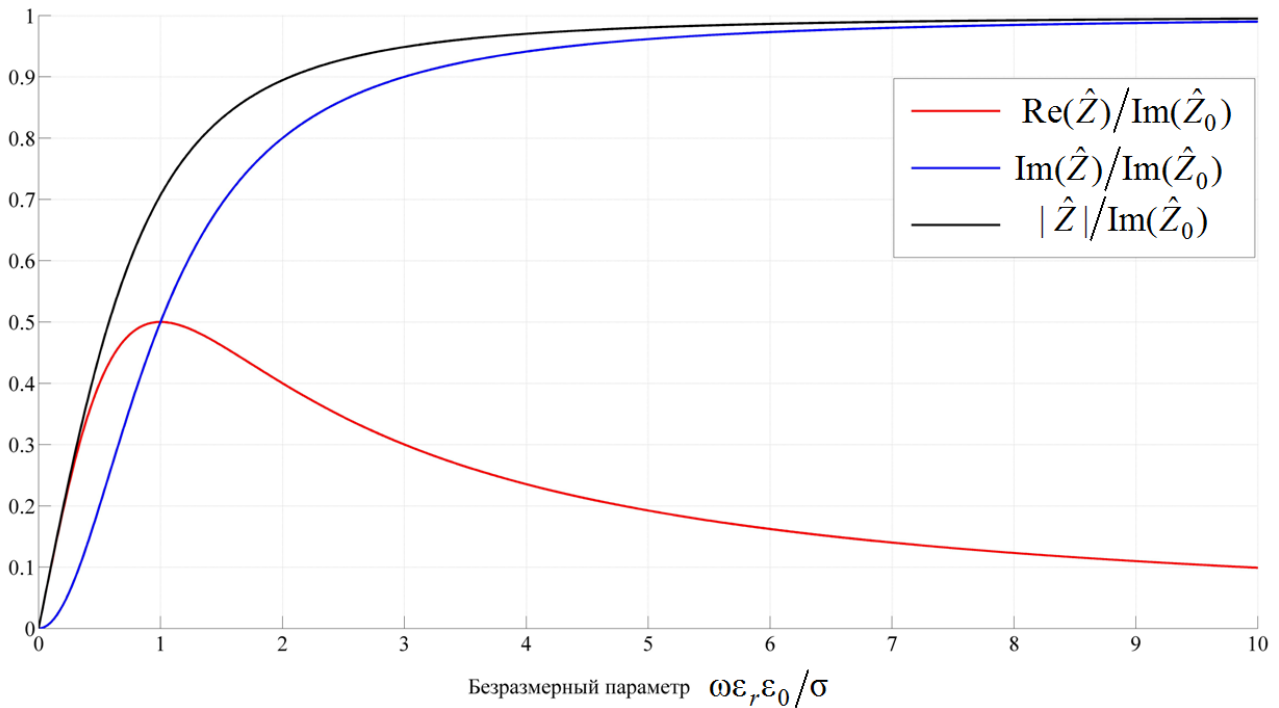


Рис.1 График сравнения импедансов двух антенн.

Из графика видна одна интересная особенность. При нахождении антенны в проводящей среде её входной импеданс уменьшается. Это объясняется тем, что в проводящей среде $|\xi| = \sqrt{(\epsilon_r\epsilon_0)^2 + (\sigma/\omega)^2}$ больше, чем $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ в диэлектрике, поэтому и модуль ёмкости провода, посчитанный по формуле (87) больше, чем ёмкость, посчитанная по формуле (86): $|\hat{C}| > |C_0|$. Тогда, согласно (85), это означает, что $|\hat{Z}| < |\hat{Z}_0|$. Кроме того, прослеживается и ещё одна особенность: в случае нахождения антенны в диэлектрике её импеданс, как было замечено ранее, обладает в основном лишь реактивной (ёмкостной) частью, а в случае нахождения антенны в проводящей среде её импеданс обладает как реактивным (ёмкостным), так и активным сопротивлением. Причём активная часть сопротивления (красный график) имеет максимум, соответствующий $\omega\epsilon_r\epsilon_0/\sigma = 1$. Активная часть импеданса

возникает за счёт токов, индуцируемых в проводящей среде, окружающей антенну.

При увеличении (уменьшении) частоты излучения различия между импедансами антенн становится всё меньше (больше), что объясняется уменьшением (увеличением) вклада слагаемого σ/ω в $\xi = \varepsilon_r \varepsilon_0 + i\sigma/\omega$.

Если внутренне сопротивление генератора много меньше импеданса антенны, можно считать, что к антенне подводится напряжение холостого хода генератора, таким образом, одинаковые генераторы подводят к двум антеннам одно и то же напряжение. Если использовать данное предположение, то амплитуда тока, генерируемого в антенне, расположенной в диэлектрике $|I_0|$, будет относиться к амплитуде тока антенны, расположенной в проводящей среде $|\hat{I}|$ как: $|I_0|/|\hat{I}| = |\hat{Z}|/|Z_0| = |\hat{Z}|/\text{Im}(Z_0)$, что иллюстрирует чёрный график на рис. 1.

Поскольку амплитуда тока в длинноволновой вибраторной антенне пропорциональна её дипольному моменту, можно считать, что аналогичное отношение справедливо и для дипольных моментов:

$$|d_0|/|\hat{d}| = |I_0|/|\hat{I}| = |\hat{Z}|/\text{Im}(Z_0) \quad (88)$$

Формула (88) позволяет соотнести амплитуды электрических полей антенн. Известно, что амплитуда полей точечного диполя, находящегося в бесконечном диэлектрике, с учётом ближнего поля даётся соотношением [35]:

$$\hat{E}_0 = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \times \frac{e^{ikr}}{r} \times \left\{ \left[1 + i(kr)^{-1} - (kr)^{-2} \right] \hat{d} + \left[-1 - 3i(kr)^{-1} + 3(kr)^{-2} \right] \mathbf{n}(\mathbf{n}, \hat{d}) \right\} \quad (89)$$

Здесь, \hat{d} - комплексная амплитуда вектора дипольного момента антенны, \mathbf{n} - единичный вектор, направленный из места расположения точечного диполя в точку наблюдения, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Обобщение формулы (89) снова производится с помощью замены $\varepsilon \rightarrow \hat{\xi}$:

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{k^2}{4\pi\hat{\xi}} \times \frac{e^{ikr}}{r} \times \left\{ \left[1 + i(kr)^{-1} - (kr)^{-2} \right] \hat{\mathbf{d}} + \left[-1 - 3i(kr)^{-1} + 3(kr)^{-2} \right] \mathbf{n}(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{d}}) \right\} \quad (90)$$

При этом в формуле (90) волновой вектор k определяется уже из соотношений (52),(60)-(61).

Для проведения сравнительного анализа выберем направление, перпендикулярное дипольному моменту, так что $(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{d}}) = 0$. Далее, используя (45), можно показать, что $k^2 / 4\pi\hat{\xi} = \mu\omega^2 / 4\pi$. Предположим, что магнитные проницаемости обеих сред одинаковы. Тогда вдоль выбранного направления амплитуда напряжения антенны, расположенной в диэлектрике $|\hat{\mathbf{E}}_0|$, будет относиться к амплитуде напряжения антенны, расположенной в проводящей среде $|\hat{\mathbf{E}}|$ как:

$$\frac{|\hat{\mathbf{E}}_0|}{|\hat{\mathbf{E}}|} = e^{\text{Im}(k)r} \frac{|1 + i(k_0r)^{-1} - (k_0r)^{-2}| |d_0|}{|1 + i(kr)^{-1} - (kr)^{-2}| |d|} = e^{\text{Im}(k)r} \frac{|1 + i(k_0r)^{-1} - (k_0r)^{-2}|}{|1 + i(kr)^{-1} - (kr)^{-2}|} \frac{|\hat{\mathbf{Z}}|}{\text{Im}\hat{\mathbf{Z}}_0} \quad (91)$$

Во избежание путаницы в формуле (91) все величины, относящиеся к диэлектрической среде, снабжены индексом «0», а величины, относящиеся к проводящей среде, написаны без индексов.

Для построения графиков зависимостей отношения амплитуд $|\hat{\mathbf{E}}_0|/|\hat{\mathbf{E}}|$ удобно использовать два безразмерных параметра $p_1 = \omega r \sqrt{\varepsilon\mu/2}$ и

$p_2 = \omega\varepsilon_r\varepsilon_0/\sigma$, поскольку все величины, входящие в выражение (91) могут быть через них выражены:

$$\frac{|\hat{\mathbf{Z}}|}{\text{Im}\hat{\mathbf{Z}}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/p_2^2}}, \quad \text{Im}(k)r = p_1 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 1/p_2^2}}$$

$$k_0r = p_1\sqrt{2}, \quad kr = p_1 \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + 1/p_2^2}} + i\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 1/p_2^2}} \right]$$

Однако, без использования каких-либо приближений, формула (91) трудно поддаётся анализу. Поэтому далее рассмотрим два случая, когда точка наблюдения находится в ближней или дальней зоне.

Сначала проведём сравнение амплитуд при достаточно малых расстояниях, соответствующих ближней зоне: $k_0 r \ll 1$ и $|k| r \ll 1$. Тогда формула (92) упрощается:

$$|\hat{\mathbf{E}}_0|/|\hat{\mathbf{E}}| = \frac{|k|^2}{|k_0|^2} \times \frac{|\hat{Z}|}{\text{Im} \hat{Z}_0} \quad (92)$$

На рис.2 приведён график $|\hat{\mathbf{E}}_0|/|\hat{\mathbf{E}}|$, вычисленный по формуле (92) в зависимости от безразмерного параметра $\omega \epsilon_r \epsilon_0 / \sigma$.

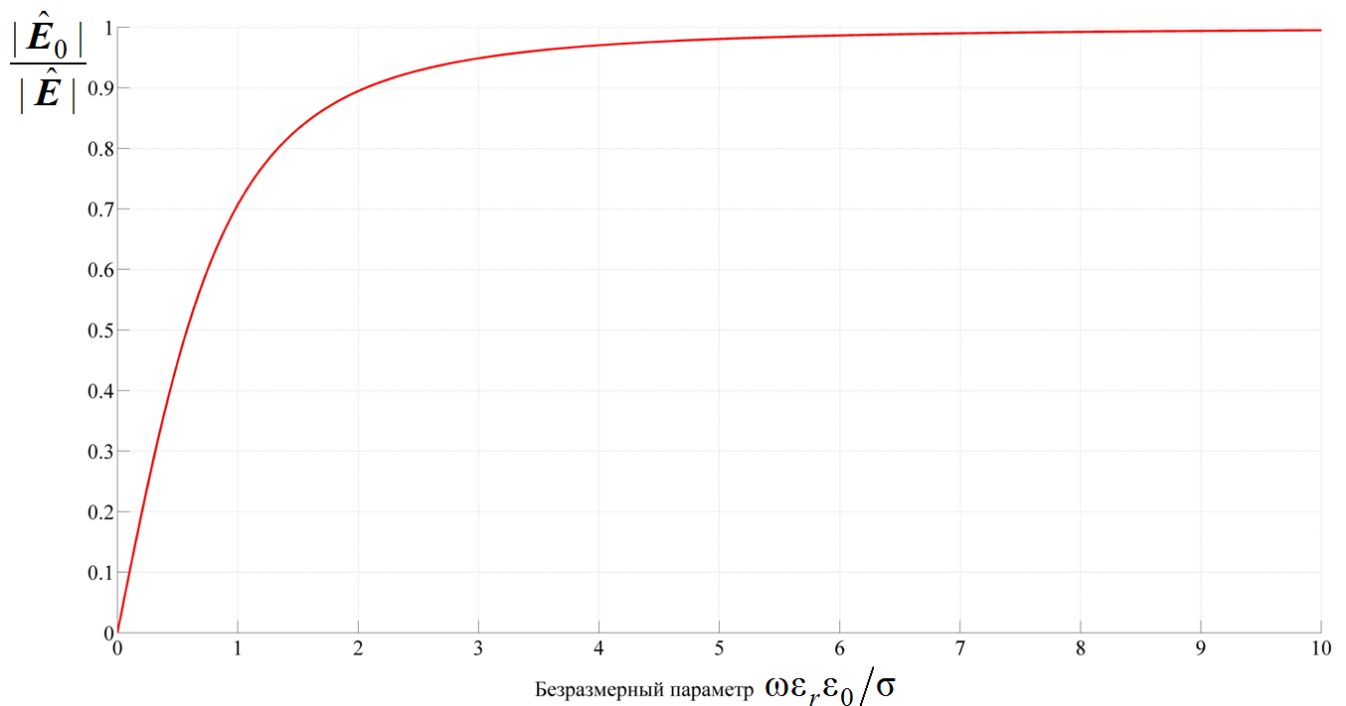


Рис.2 График сравнения амплитуд электрического поля в ближней зоне двух антенн, питаемых одинаковыми генераторами.

Из графика на рис.2 видно, что в ближней зоне при подключении к одинаковым генераторам в общем случае амплитуда электрического поля длинноволновой антенны, помещенной в проводящую среду больше, чем у аналогичной антенны, находящейся в диэлектрике.

Интересно заметить, что данное преимущество возникает исключительно из-за учёта различных входных импедансов антенн, что можно показать, исключив их влияние. Допустим, что к антеннам подключены разные генераторы, которые подобраны таким образом, что создают в антеннах равные токи, а значит и равные дипольные моменты. Тогда в формулах (91)-(92) исчезают множители $\frac{|d_0|}{|d|}$, $\frac{|\hat{Z}|}{\text{Im} \hat{Z}_0}$. Получается, что в ближней зоне

$$|\hat{\mathbf{E}}|/|\hat{\mathbf{E}}_0| = |k_0|^2/|k|^2 = 1/s_{scr} \quad (93)$$

Где s_{scr} - коэффициент экранирования, определяемый формулой (51). Таким образом, при равенстве дипольных моментов, отношение амплитуд полей двух антенн в ближней зоне определяется коэффициентом экранирования, показывающим, во сколько раз уменьшается эффективный заряд излучателя вследствие экранировки. График зависимости коэффициента экранирования s_{scr} от безразмерного параметра $\omega\epsilon_0\epsilon_r/\sigma$ изображён на рис. 3.

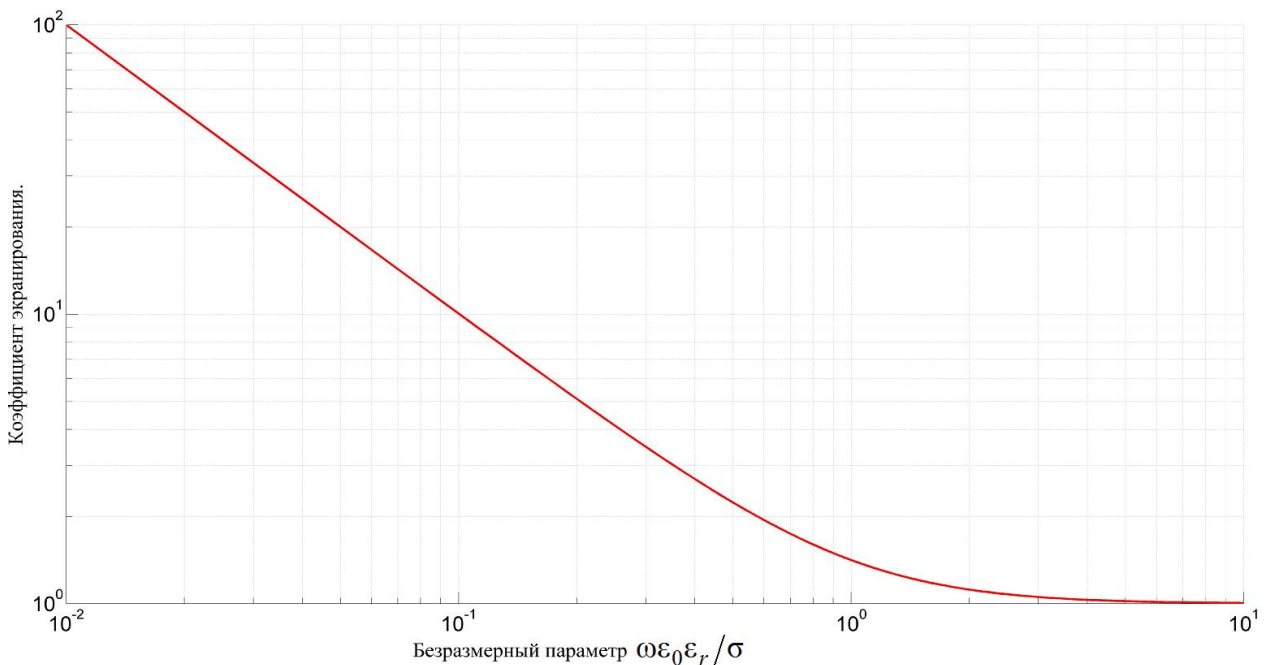


Рис.3 Зависимость коэффициента экранирования s_{scr} от безразмерного параметра $\omega\epsilon_0\epsilon_r/\sigma$ в логарифмическом масштабе.

Как видно из графика, коэффициент экранирования изменяется в широких пределах. При $\omega \rightarrow \infty, s_{scr} \rightarrow 1$, это соответствует тому, что электроны не успевают сдвинуться под действием электрического поля высокой частоты. При $\omega \rightarrow 0, s_{scr} \rightarrow \infty$, что соответствует полной экранировке в случае классической электростатики.

Вернёмся к формуле (91), построим график зависимости $|\hat{E}_0|/|\hat{E}|$, от безразмерного параметра $\omega \epsilon_r \epsilon_0 / \sigma$ в дальней волновой зоне: $k_0 r \gg 1$ и $|k| r \gg 1$. В таком случае из формулы (91) следует:

$$\frac{|\hat{E}_0|}{|\hat{E}|} = e^{\text{Im}(k)r} \frac{|\hat{Z}|}{\text{Im} \hat{Z}_0} \quad (94)$$

Отношение $|\hat{E}_0|/|\hat{E}|$ в формуле (94) зависит уже от двух безразмерных параметров: $p_1 = \omega r \sqrt{\epsilon \mu / 2} = k_0 r / \sqrt{2}$, $p_2 = \omega \epsilon_r \epsilon_0 / \sigma$. График зависимости отношения амплитуд $|\hat{E}_0|/|\hat{E}|$ от параметра p_2 при различных значениях параметра p_1 изображён на рис.4.

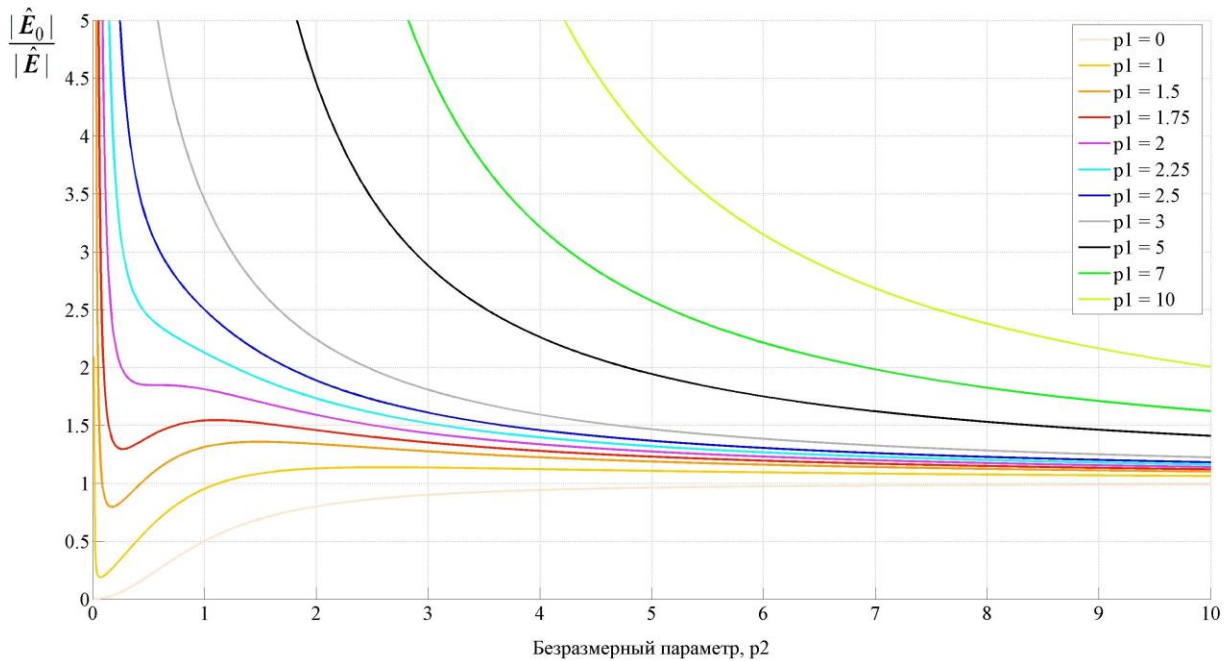


Рис.4 График зависимости отношения амплитуд $|\hat{E}_0|/|\hat{E}|$ от параметра $p_2 = \omega \epsilon_r \epsilon_0 / \sigma$ при различных значениях параметра $p_1 = k_0 r / \sqrt{2}$.

Из графика видно, что в общем случае зависимость отношения амплитуд $|\hat{E}_0|/|\hat{E}|$ от параметра p_2 в дальней зоне во многом определяется параметром p_1 . Так, в зависимости от величины параметра p_1 график может иметь или не иметь локальный минимум. Другими словами, при заданных характеристиках сред для какого-то конкретного расстояния от излучателя до точки наблюдения r может существовать или не существовать частота излучения ν , обеспечивающая минимум отношения амплитуд $|\hat{E}_0|/|\hat{E}|$. Можно доказать, что минимум достигается в том случае, когда: $p_2^2 = 1 / (2p_1^2 - 1)$, таким образом, если $p_1 > 1/\sqrt{2}$, всегда будет наблюдаться минимум. Однако, в минимуме параметр $|k|r$ должен быть большим, поскольку по предположению мы рассматриваем дальнюю зону. Поскольку $|k|r \sim \text{Im}(k)r = p_1\sqrt{p_1\sqrt{2}-1}$, это означает, что параметр p_1 также должен быть много больше единицы.

8. Заключение

В работе предложен последовательный вывод уравнений Максвелла для изотропных сред с произвольными электромагнитными характеристиками. Записанные уравнения, в частности, позволяют решить задачу об излучении для случая нахождения источника излучения в проводящей среде. Было показано, что задача сводится к задаче излучения в диэлектрической среде с заменой $\hat{\epsilon} \rightarrow \hat{\xi}, \hat{j} \rightarrow \hat{j}_{\text{ex}}, \hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_{\text{ex}}$. Показано, что наличие проводимости приводит к экранированию зарядов источника зарядами проводимости среды. Предложенный подход можно применять в случае произвольной зависимости электромагнитных полей от времени, предварительно разложив компоненты электромагнитных полей в интегралы Фурье. Записанные уравнения могут быть использованы для решения широкого круга актуальных на сегодняшний день задач, например для повышения эффективности дезинтеграции минеральных руд с помощью электромагнитных импульсов, декапсуляции наночастиц в медицинских приложениях, анализу возбуждения объёмных и

поверхностных плазмонов, в физике конденсированных сред и других приложений.

Литература

1. Sommerfeld A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie // Annalen der Physik. 1909. V. 333. № 4. P. 665-736.
2. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Издательство иностранной литературы, 1950. -457 с.
3. П. С. Глазунов, В. А. Вдовин, А. И. Слепков. Термические эффекты воздействия электромагнитного излучения на проводящие частицы, интегрированные в диэлектрическую среду // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2016. N7. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jull6/1/text.pdf>
4. В.А. Чантурия и др. Использование мощных электромагнитных импульсов в процессах дезинтеграции и вскрытия упорного золотосодержащего сырья // Физико-технические проблемы обогащения полезных ископаемых. 2001. N 4. с. 95-106.
5. Бунин И.Ж. Теория и практика применения комбинированных физико-химических и энергетических воздействий на геоматериалы и водные суспензии // Горный Журнал. 2017. N 11. с. 77-83.
6. А.В. Киореску. Механизмы воздействия микроволнового излучения на процессы выщелачивания минерального сырья. // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал), 2015
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mehanizmy-vozdeystviya-mikrovolnovogo-izlucheniya-na-protsessy-vyschelachivaniya-mineralnogo-syrya>
7. В.В. Крымский, Ю.Г. Мингажева. Воздействие наносекундных электромагнитных импульсов на сульфидную руду. // Сборник трудов конференции томского политехнического университета, 2017.
URL: http://earchive.tpu.ru/bitstream/11683/45085/1/conference_tpu-2017-C11_V2_p396-398.pdf

8. В. А. Вдовин, Ю. В. Гуляев, В. А. Черепенин, В.А. Чантурия. Нетепловое воздействие мощных электромагнитных импульсов на золотосодержащую горную породу // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. №9. с. 1129-1133.

9. В. А. Чантурия, И. Ж. Бунин, М. В. Рязанцева, И. А. Хабарова. Изучение методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии изменения состава и химического состояния атомов поверхности халькопирита и сфалерита до и после обработки наносекундными электромагнитными импульсами // Физико-технические проблемы обогащения полезных ископаемых. 2013. N 3. с. 157-168.

URL:<http://www.sibran.ru/upload/iblock/0f3/0f3778d8ad1138bad23ef5d1f2da1ced.pdf>

10. Ю.В. Гуляев и др. Дистанционная декапсуляция нанокompозитных липосом, содержащих внедренные проводящие наночастицы, при воздействии импульсного электрического поля // Радиотехника и электроника, 2015, Т. 60, N10, с. 1051-1063.

URL:<https://istina.msu.ru/download/11969338/1evFVI:u6p5sO6F4mfxwx0qP2wemURrDkQ/>

11. Ю.В. Гуляев и др. Влияние наностержней золота на активацию липосомальных капсул ультракороткими электрическими импульсами // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2016. N11. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/nov16/7/text.pdf>

12. Ю.В. Гуляев и др. Дистанционная активация полиэлектролитных нанокompозитных микрокапсул с помощью импульсного микроволнового воздействия // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. N12. URL: <http://jre.cplire.ru/mac/dec14/25/text.pdf>

13. Ю.В. Гуляев и др. Дистанционная активация с помощью импульсного электрического поля нанокompозитных микрокапсул на основе комплексов липидов, полимеров и проводящих наночастиц // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. N11. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/nov14/9/text.pdf>

14. Майер, С.А. Плазмоника: теория и приложения. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 296 с.
15. В. Ю. Шишков, Е. С. Андрианов, А. А. Пухов, А. П. Виноградов. Параметрическое усиление SERS фононами металлических плазмонных структур // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2017. N11. URL : <http://jre.cplire.ru/jre/nov17/11/text.pdf>
16. В. В. Шевченко. Поверхностные электромагнитные волны на плоских границах электропроводящих сред с высокой проводимостью, волна Ценнека // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2013. N7. URL : <http://jre.cplire.ru/jre/jul13/7/text.pdf>
17. Б. А. Князев, А. В. Кузьмин. Поверхностные электромагнитные волны: от видимого диапазона до микроволн // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2007. Том 2, выпуск 1. С. 108-122
URL:http://www.phys.nsu.ru/vestnik/catalogue/2007/01/Vestnik_NSU_07T2V1_p108_p122.pdf
18. В.Ф. Названов. Поверхностные электромагнитные волны оптического диапазона (плазмоны-поляритоны): свойства, применение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2015. Т. 15, вып. 1
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/poverhnostnye-elektromagnitnye-volny-opticheskogo-diapazona-plazmony-polyaritony-svoystva-primenenie>
19. К. П. Гайкович, А. И. Смирнов, Д. В. Янин. Методы ближнепольной резонансной СВЧ диагностики биологических тканей. // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2017. N2. URL : <http://jre.cplire.ru/jre/feb17/5/text.pdf>
20. К. П. Гайкович, Е. С. Максимович, М. И. Сумин. Ближнепольное импульсное СВЧ профилирование подповерхностных диэлектрических неоднородностей. // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2017. N2. URL : <http://jre.cplire.ru/jre/feb17/6/text.pdf>
21. Д. А. Усанов, С. С. Горбатов, В. Ю. Кваско. Ближнеполевой СВЧ-микроскоп с низкоразмерным резонатором типа "индуктивная диафрагма –

емкостная диафрагма" // Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2010. N. 6 с. 66-69.

URL: <http://www.eltech.ru/assets/files/university/izdatelstvo/radioelektronika/2010-06.pdf#page=66>

22. Fei Wang etc. Quantitative impedance characterization of sub-10nm scale capacitors and tunnel junctions with an interferometric scanning microwave microscope. // Nanotechnology. 2014. V.25 N.40

URL:https://www.nanomicrowave.eu/mm_files/do_123/co_26728/Quantitative%20impedance%20characterization.pdf

23. А. В. Корженевский, В. А. Черепенин. Магнитоиндукционная томография // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 1998. N1.

URL : <http://jre.cplire.ru/jre/dec98/1/text.html>

24. А. В. Корженевский. Использование искусственных нейронных сетей для решения обратных задач электроимпедансной и магнитоиндукционной томографии // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2001. N11.

URL : <http://jre.cplire.ru/jre/dec01/7/text.html>

25. А.В. Корженевский. Бесконтактная томография электропроводящих сред квазистатическим переменным электрическим полем // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 6. С. 761.

26. И. К. Лакеев, А. В. Корженевский, Т. С. Туйкин. Разработка программного обеспечения для многопроцессорной архитектуры персонального электроимпедансного маммографа ПЭМ. // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2017. N12.

URL: <http://jre.cplire.ru/jre/dec17/9/text.pdf>

27. А. В. Корженевский, С. А. Сапецкий. Магнитоиндукционная томография для медицинских приложений // Альманах клинической медицины. 2008. N17-1

URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/magnitoinduksionnaya-tomografiya-dlya-meditsinskih-prilozheniy>

28. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. -440 с.

29. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995. -600 с.
30. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1983. -296 с.
31. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах: В 2-х книгах. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. -824 .
32. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. – 2-е изд. – М.: Наука. Физматлит, 1999. -496 с.
33. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. М.: Мир, Т1, 1978. -555 с.
34. Денисов В.И. Введение в электродинамику сплошных сред: Учебное пособие.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. -168 с.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. Пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. -5-е изд., стереотип. – М.: Физматлит, 2016. -656 с.
36. Андрушкевич, И. Е., Жизневский, В. А., Шиенок, Ю. В. О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла. // Вестник Витебского государственного университета. 2005. N 1 (35). с. 112-118.
URL:<https://lib.vsu.by/xmlui/bitstream/handle/123456789/8340/112-118.pdf?sequence=1>
37. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функции комплексной переменной: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
38. Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перевод с английского Г.В. Воскресенского и Л.С. Соловьёва. Под ред. Э.Л. Бурштейна. Издательство «Мир», Москва, 1965.
39. Садовский И.Н. и др. Анализ моделей диэлектрической проницаемости водной среды, используемых в задачах дистанционного зондирования акваторий. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН), 2013, 60 с.

URL:<http://csl.isc.irk.ru/BD/Books/%D0%B2%D0%BE%D0%B4%20%D1%81%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B0.pdf>

40. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов / Под ред. Б. З. Каценеленбаума. М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 208 с.
41. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. Пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. -416 с.
42. Матвеев А. Н. Оптика: Учеб. Пособие для физ. спец. Вузов. – М.:Высш. шк., 1985. – 351 с.
43. Пистолькорс А.А. Антенны. Государственное издательство литературы по вопросам связи и радио. Москва 1947. -481 с.

Для цитирования:

П. С. Глазунов, В. А. Вдовин, А. И. Слепков. Импеданс длинноволновой вибраторной антенны, находящейся в проводящей среде. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/1/text.pdf>
DOI 10.30898/1684-1719.2019.2.1