

# ОСОБЕННОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ $2\pi$ -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ФИНИТНЫМ СПЕКТРОМ ФУРЬЕ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ

И. С. Дмитриев, М. П. Сличенко

ОАО «Концерн «Созвездие», г. Воронеж

Статья получена 23 декабря 2013 г.

**Аннотация.** Получено точное замкнутое выражение, позволяющее вычислять значения  $2\pi$ -периодической функции с финитным спектром Фурье, а также ее производной произвольного порядка в произвольной точке в виде конечной взвешенной суммы отсчетов функции на ее периоде. Проанализировано ядро полученного разложения.

**Ключевые слова:** периодическая функция, финитный спектр, интерполяция, теорема отсчетов.

**Abstract.** The exact closed expression is received, allowing to calculate values of  $2\pi$ -periodic function with a finite spectrum Fourier, and also its derivative of a random order in an arbitrary point in the form of the final weighed sum of references of function on its phase. The kernel of the received expansion is analysed.

**Keywords:** periodic function, finite spectrum, interpolation, the sampling theorem.

Во многих областях науки и техники существует задача восстановления непрерывной достаточно гладкой функции угловой координаты с областью определения  $[0, 2\pi)$  по ее дискретным отсчетам, т.е. значениям функции в некоторых, в частном случае эквидистантных, точках области определения. Такая задача актуальна, например, в антенной технике при экспериментальном измерении диаграмм направленности антенных систем, и особенно – в радиопеленгации, когда оценка пеленга получается путем максимизации некоторой решающей функции (см., например, [1]). В последнем случае для применения численных методов оптимизации желательно иметь аналитическое выражение не только самой решающей функции, но и хотя бы первой ее

производной. Для вычисления такой функции необходимо априорное знание характеристик данной антенной системы в реальном окружении, рассчитанных методами вычислительной электродинамики или измеренных экспериментально и представленных в виде таблицы. То есть значения максимизируемой функции, по форме аналогичной некоторой диаграмме направленности, могут быть непосредственно рассчитаны на практике только в дискретном множестве табличных точек, и для отыскания ее максимума необходимо корректно интерполировать функцию на интервалах между табличными точками.

Можно показать, что любая физически реализуемая решающая функция или диаграмма направленности  $R(\theta)$  удовлетворяет необходимым условиям применимости теоремы отсчетов Котельникова [2] при условии ее бесконечного периодического продолжения в обе стороны от области определения. Следовательно, значение данной функции для произвольного  $\theta \in [0, 2\pi)$  полностью определяется значениями в эквидистантных точках  $m\Delta\theta$  на бесконечной оси азимутов, и может быть вычислено в соответствии с выражением [2-3]:

$$R(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{R}(m\Delta\theta) \operatorname{sinc}\left(\frac{M}{2}\theta - m\pi\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R\left(\frac{2\pi}{M} \operatorname{mod}(m, M)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{M}{2}\theta - m\pi\right), \quad (1)$$

где  $\tilde{R}(\theta)$  – функция, полученная бесконечным периодическим продолжением функции  $R(\theta)$ ;  $\Delta\theta = 2\pi/M$  – шаг дискретизации;  $M$  – число отсчетов интерполируемой функции на периоде, определенное в соответствии с теоремой отсчетов;  $\operatorname{mod}(m, M)$  – остаток от целочисленного деления  $m$  на  $M$ ;  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Сложность вычисления на практике значений интерполируемой функции в соответствии с выражением (1) связана с необходимостью суммирования бесконечного числа значений. При практической реализации вычислений ряд (1) обычно аппроксимируют суммой конечного числа слагаемых, что приводит к погрешности вычисления решающей функции. Данная погрешность

называется ошибкой усечения [3]. В работе [4] оценивается погрешность аппроксимации правой части (1) в виде конечной суммы и отмечено, что ошибка усечения при интерполяции периодических функций не убывает с ростом числа используемых слагаемых правой части (1).

Цель настоящей работы – разработать подход, позволяющий с нулевой ошибкой усечения представлять  $2\pi$ -периодические функции с финитным спектром Фурье в виде суммы конечного числа слагаемых.

Учитывая свойство  $2\pi$ -периодичности исходной функции, правую часть можно переписать в следующем виде

$$R(\theta) = \sum_{m=0}^{M-1} R(2\pi m/M) V_M(\theta - 2\pi m/M), \quad (2)$$

где

$$V_M(\theta - 2\pi m/M) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \left[ \frac{M}{2} \theta - (m + kN)\pi \right], \quad m = \overline{0, M-1}. \quad (3)$$

Таким образом, бесконечную сумму (1) можно абсолютно точно представить в виде конечной суммы в соответствии с выражением (2) при условии получения замкнутых аналитических выражений для ядра данного разложения. Авторами настоящей работы были получено следующее замкнутое выражения ядра (3):

$$V_M(\theta) = \frac{1}{M} \sin(M\theta/2) \begin{cases} \operatorname{ctg}(\theta/2), & \operatorname{mod}(M, 2) = 0 \\ \operatorname{cosec}(\theta/2), & \operatorname{mod}(M, 2) = 1 \end{cases}. \quad (4)$$

Ядро (4) представляет собой импульсную характеристику интерполирующего фильтра для интерполяции периодических функций с финитным спектром Фурье с высшей гармонической составляющей с номером  $m_b < M/2$  по последовательности отсчетов, состоящей из  $M$  эквидистантных отсчетов на период. Она периодична по переменной  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Комплексная частотная характеристика этого фильтра получается преобразованием Фурье импульсной характеристики и представляет собой

отрезок ряда Фурье. Коэффициенты одностороннего комплексного ряда Фурье для ядра  $V_M(\theta)$  имеют следующий вид:

$$C_m = \frac{1}{M} \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & 1 \leq m < M/2 \\ 1, & m = M/2 \\ 0, & m > M/2 \end{cases} \quad (5)$$

для четного числа  $M$  отсчетов и

$$C_m = \frac{1}{M} \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & 1 \leq m < M/2 \\ 0, & m > M/2 \end{cases} \quad (6)$$

для нечетного  $M$ .

С учетом (5)-(6) можно получить другое эквивалентное представление импульсной характеристики (4) для четного и нечетного числа отсчетов соответственно:

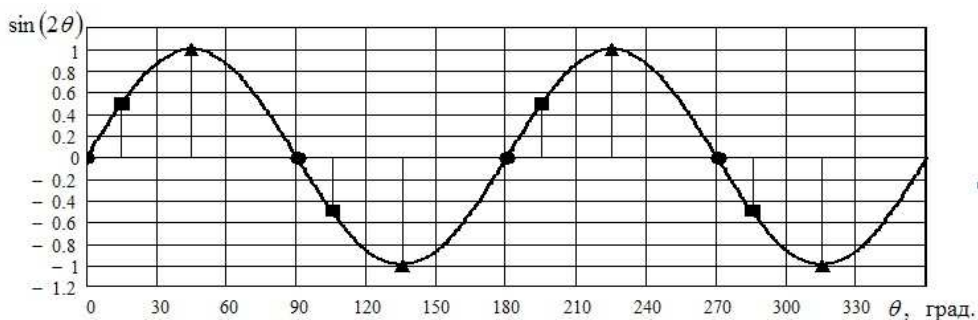
$$V_M(\theta) = \frac{1}{M} \left( 1 + 2 \begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} \cos(m\theta) + \cos(M\theta/2), & \text{mod}(M,2) = 0 \\ \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} \cos(m\theta) & \text{mod}(M,2) = 1 \end{cases} \right). \quad (7)$$

Непосредственно из (4) легко получить третье эквивалентное представление импульсной характеристики:

$$V_M(\theta) = \frac{\text{sinc}(M\theta/2)}{\text{sinc}(\theta/2)} \begin{cases} \cos(\theta/2), & \text{mod}(M,2) = 0 \\ 1, & \text{mod}(M,2) = 1 \end{cases}. \quad (8)$$

Однако рассмотрение спектра (5) импульсной характеристики фильтра для четных  $M$  показывает, что этот спектр избыточен, его составляющая с номером  $M/2$  является неинформативной. Если интерполируемая функция имеет спектральную составляющую с ненулевой амплитудой на частоте среза фильтра Котельникова, однозначное восстановление функции в общем случае невозможно, что иллюстрируется рис. 1. Здесь кружками, квадратами и

треугольниками изображены отсчеты функции  $\sin(2\theta)$ , взятые с начальной фазой 0, 15 и 45 градусов соответственно. Как видно из представленного графика, в зависимости от соотношения фаз импульсов дискретизации с частотой  $M$  и спектральной составляющей интерполируемой функции на частоте  $M/2$  амплитуды отсчетов могут изменяться от нуля до значения амплитуды рассматриваемой спектральной составляющей. При этом фаза «восстановленной» по таким отсчетам синусоиды может принимать значения в диапазоне от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  относительно истинного значения. Это хорошо согласуется с тем фактом, что коэффициент передачи фильтра Котельникова как функция частоты, претерпевая разрыв на частоте среза, имеет на этой частоте значение 0,5 – среднее между значениями в полосе пропускания и в полосе задержки. То есть даже непрерывная синусоида с этой частотой проходит через фильтр с затуханием 6 дБ против 0 дБ в полосе пропускания. Более подробно данный вопрос исследован в работе [5].



**Рис.1** Отсчеты синусоиды с частотой  $F_d/2$

Для однозначного восстановления выборки сигнала, содержащей наивысшую гармонику порядка  $N$ , необходимо не менее  $(2N + 1)$  отсчетов. Таким образом, граница применимости теоремы отсчетов определяется строгим неравенством  $F_B < F_d/2$ , хотя многие авторы, в том числе, в классических учебных пособиях (см, например, [6]) ошибочно определяют ее нестрогим неравенством  $F_B \leq F_d/2$ . (Здесь  $F_B$  – частота наивысшей спектральной составляющей интерполируемой функции с ненулевой энергией, а  $F_d$  – частота дискретизации). Эта неопределенность обусловлена тем, что доказательство

теоремы отсчетов Котельникова [2] базируется на интегральных преобразованиях Фурье функций с гладким спектром, а частный случай наличия в спектре интерполируемой функции дискретной спектральной составляющей на частоте  $F_d/2$ , на которой коэффициент передачи фильтра Котельникова равен  $1/2$ , отдельно не рассмотрен.

Целесообразно ввести понятие достаточного числа  $M_0$  отсчетов периодической функции с финитным спектром на период:

$$M_0 = 2N + 1, \tag{9}$$

где  $N$  – номер наивысшей гармоники в спектре интерполируемой функции.

Тогда для произвольного числа  $M \geq M_0$  эквидистантных отсчетов функции на периоде выражение (2) можно переписать в следующем виде:

$$R(\theta) = \frac{M_0}{M} \sum_{m=0}^{M-1} R(2\pi m/M) V_{M_0}(\theta - 2\pi m/M) \begin{cases} \cos(\theta/2), & \text{mod}(M, 2) = 0 \\ 1, & \text{mod}(M, 2) = 1 \end{cases}$$

При вычислении реакции интерполирующего фильтра в спектральной области произведение спектральных составляющих сигнала и импульсной характеристики фильтра с номером  $M/2$  должно быть равно нулю. Поэтому целесообразно для упрощения расчетов положить равной нулю соответствующую спектральную составляющую характеристики фильтра в правых частях (7)-(8). Тогда, выражения (4), (7) и (8) примут следующий вид:

$$V_M(\theta) = \frac{1}{M} \operatorname{cosec}(\theta/2) \begin{cases} \sin[(M-1)\theta/2], & \text{mod}(M, 2) = 0 \\ \sin[M\theta/2], & \text{mod}(M, 2) = 1 \end{cases}$$

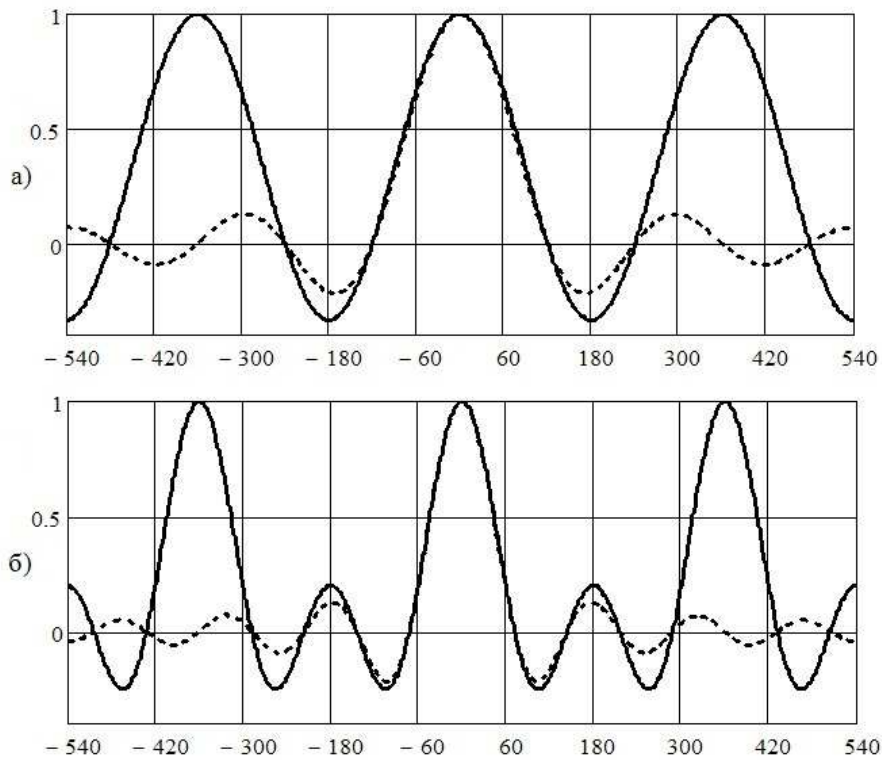
или

$$V_M(\theta) = \frac{1}{M} \left[ 1 + 2 \begin{cases} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}-1} \cos(m\theta) & \text{mod}(M, 2) = 0 \\ \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} \cos(m\theta) & \text{mod}(M, 2) = 1 \end{cases} \right], \tag{10}$$

где

$$V_M(\theta) = \frac{\text{sinc}(M\theta/2)}{\text{sinc}(\theta/2)} \begin{cases} \frac{M-1}{M} \cos(\theta/2), & \text{mod}(M,2)=0 \\ 1, & \text{mod}(M,2)=1 \end{cases} \quad (11)$$

На рис. 2 в качестве иллюстрации приведены графики ядер разложения  $V_3(\theta)$  и  $V_5(\theta)$  на протяжении 3-х периодов интерполируемой функции по оси абсцисс. Для сравнения на том же рисунке приведены графики аperiodического ядра Котельникова для той же частоты дискретизации  $\text{sinc}\left(\frac{M}{2}\theta\right)$ .



**Рис.2** Графики функций  $V_3(\theta)$  (а) и  $V_5(\theta)$  (б)

Из выражения (10) видно, что ядро  $V_M(\theta)$  является бесконечно дифференцируемой функцией. Следовательно, дифференцированием выражения (2) легко получить выражение для производной  $p$ -го порядка интерполируемой функции  $R(\theta)$ :

$$R^{(p)}(\theta) = \sum_{m=0}^{M-1} R(m\Delta\theta) V_M^{(p)}(\theta - m\Delta\theta), \quad \Delta\theta = 2\pi/M \quad (12)$$

Правая часть выражения (2) представляют собой скалярное произведение

$$R(\theta) = \mathbf{R}^T \mathbf{V}(\theta) \quad (13)$$

$M$ -мерного вектора  $\mathbf{R}$  отсчетов интерполируемой функции  $R(\theta)$  и  $M$ -мерной вектор-функции  $\mathbf{V}(\theta)$  ядер разложения (2):

$$\mathbf{R} = \{R(m\Delta\theta)\}, \quad \mathbf{V}(\theta) = \{V_M(\theta - n\Delta\theta)\},$$

$(\cdot)^T$  – оператор транспонирования,  $m = \overline{0, M-1}$ ,  $n = \overline{0, M/2}$ .

Аналогичным образом, производную (12)  $p$ -го порядка функции  $R(\theta)$  запишем как

$$R^{(p)}(\theta) = \mathbf{R}^T \mathbf{V}^{(p)}(\theta), \quad (14)$$

где  $\mathbf{V}^{(p)}(\theta)$  – производная  $p$ -го порядка вектор-функции  $\mathbf{V}(\theta)$ .

С учетом того, что операция дифференцирования не создает новых спектральных составляющих, производная произвольного порядка от функции с финитным спектром имеет финитный спектр Фурье с тем же значением верхней частоты. Из этого следует, что если по формуле (12) вычислить вектор  $\mathbf{R}^{(p)}$  значений производной  $p$ -го порядка интерполируемой функции в точках ее отсчетов, то выражение для производной в произвольной точке можно записать в следующем виде:

$$R^{(p)}(\theta) = (\mathbf{R}^{(p)})^T \mathbf{V}(\theta), \quad (15)$$

т.е. значение производной может быть вычислено в одном цикле со значением самой функции по формуле (13). Это позволяет сэкономить вычислительные ресурсы при выполнении повторяющихся вычислений, например, в итерационных процедурах оптимизации. Однако это правило следует с осторожностью применять к функциям «с практически финитным спектром», у которых энергия спектральных составляющих на частотах  $F \geq F_d/2$  пренебрежимо мала, но не равна нулю. Поскольку операция дифференцирования перераспределяет энергию процесса в сторону верхних частот, для обеспечения нужной точности вычислений по формуле (15) может потребоваться увеличение частоты дискретизации.



## Выводы

Получено точное замкнутое представление  $2\pi$ -периодической функции в виде конечной взвешенной суммы ее отсчетов на периоде с нулевой ошибкой усечения. Получено замкнутое выражение для ядра данного разложения, представляющего собой взвешенную сумму бесконечного числа ядер Котельникова. Показано, что ядро разложения является  $2\pi$ -периодической функцией и достаточно просто выражается через значение аргумента интерполируемой функции и число ее отсчетов на периоде. Исследованы особенности поведения алгоритма интерполяции вблизи верхней частоты, равной половине частоты дискретизации. Полученные результаты носят общий характер и найдут свое практическое применение в различных областях науки и техники, в которых решается задача интерполяции периодических функций. В частности, предложенный подход позволяет представить диаграммы направленности произвольных антенных систем, измеренные с заданным шагом по аргументу, в виде аналитических функций.

## Литература

- 1 Дмитриев И.С., Сличенко М.П. Максимально правдоподобное обнаружение и оценивание направления прихода и амплитуды напряженности радиоволны с помощью многоканального радиопеленгатора с антенной системой произвольной конфигурации. Антенны. 2011. Вып.5(168). С. 59-64.
- 2 Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. М.: Физматлит, 2008. Собрание трудов. Т. 1. «Радиофизика. Информатика, телекоммуникации». С. 90-108.
- 3 Джерри. А. Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор. ТИИЭР. 1977. Т.65. № 11. С. 53-89.
- 4 Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: «Наука», 1971. – 408 с.

5 Харкевич А.А. Спектры и анализ. Изд. 3-е, перераб. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы. 1957. – 238 с.

6 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: «Высшая школа», 2000. – 462 с.