

# ГОЛОГРАММНАЯ МАСКА СО СЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА И ПРЕИМУЩЕСТВА В ПРОИЗВОДСТВЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ

**В. В. Черник**

**Nanotech SWHL, Überlandstrasse 129, 8600 Dübendorf, Switzerland**

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.

**Аннотация.** В работе предложены различные методы уменьшения размеров голограммных масок, оценена их эффективность. Предложен метод расчета дифракции волн, подходящий для использования на слоистых структурах, используемых при изготовлении голограммных масок. Разработан программный модуль, позволяющий моделировать прохождение и отражение плоской волны произвольной поляризации через периодическую неоднородную среду с цилиндрической структурой. Данный программный модуль предполагается использовать для исследования границ применимости и для модификации некоторых приближённых методов решения задач дифракции. Разработанные методы и программы применены также для решения задач из других областей электродинамики, например, в задаче пассивной радиолокации поверхности океана. С помощью полученного программного модуля проведено математическое моделирование таких эффектов, как наличие угла Брюстера и аномалии Вуда. Количественные результаты моделирования с хорошей точностью совпадают с аналитическими формулами.

**Ключевые слова:** дифракция, голография, радиолокация.

**Abstract.** In this paper various methods of reducing the size of holographic masks are proposed and their effectiveness is assessed. A method for diffraction calculation, suitable for use in layered structures of such masks, is proposed. A software module that allows to calculate the transmission and reflection of a plane wave of arbitrary polarization on periodic inhomogeneous medium with a cylindrical structure is developed. This software module is intended to be used for the study of applicability limits of some approximate methods for solving diffraction problems. The developed methods and programs have also been used to solve problems in other fields of

electrodynamics, for example, in the problem of ocean surface radiolocation. Mathematical modeling of effects such as Brewster angle and Wood's anomaly was performed with the resulting software module. Quantitative modeling results are coincide with the analytical formulas with good accuracy.

**Key words:** diffraction, holography, radiolocation.

## Введение

В традиционных методах литографии применяется трафаретная маска, в основных чертах повторяющая топологию процессорного слоя в увеличенном виде. Размер такой маски примерно в 4-5 раз больше размера желаемого изображения. Альтернативная технология субволновой голографической литографии [1-2], активно развивающаяся в настоящее время, использует бинаризованную голограммную маску, которая является реализацией функции пропускания, получаемой на основе классического принципа, предложенного Д. Габором [3]. Голограммная маска, изготовленная способом бинаризации, представляет собой набор отверстий в непрозрачном экране. Одним из главных преимуществ голограммной маски является исключительно высокая степень устойчивости качества изображения к локальным дефектам на маске, что резко увеличивает срок ее службы. Такая маска может быть создана из значительно более крупных зон пропускания, чем проекционная маска, что радикально снижает её стоимость по сравнению с проекционной. Кроме того, в технологии получения голографических изображений высокого разрешения не требуется дорогой и сложный уменьшающий объектив. Но у данной технологии есть и свои проблемы, связанные с тем, что размер голографической маски может превышать размер изображения в 40 раз и более, в зависимости от технологии изготовления маски и от типа изображения. Для контроля и оптимизации качества голографического изображения, полученного с помощью голограммной маски можно использовать (при математическом моделировании прохождения электромагнитных волн через систему отверстий) дифракционную формулу Френеля-Кирхгофа [4], имеющую, однако,

существенные ограничения применимости, связанные с размером и строением элементов, на которых происходит дифракция. Вопросы границ применимости подхода Кирхгофа исследовались во многих работах [4-6], однако, в силу наличия в задаче дифракции на экране большого количества параметров, таких как толщины экранирующего и дополнительных слоев, показатели проводимости и преломления материалов, углы падения диффразирующей волны, эти вопросы и сейчас не теряют актуальности и в ряде случаев нуждаются в отдельном исследовании. Известно, что даже в случае сколь угодно тонкого экрана с помощью формулы Френеля-Кирхгофа можно получать результаты с приемлемой точностью при условии, что диаметр отверстия не меньше  $1,7\lambda$  [6]. Также хорошо известен факт, что отверстия в непрозрачном экране с диаметром  $0,5\lambda$  и меньше практически не пропускают энергию световой волны.

В данной работе представлены различные варианты архитектуры голографической маски, а так же представлен основанный на проекционных методах А.С. Ильинского [7] метод расчета дифракции на периодической структуре, который может быть применен для исследования границ применения формулы Френеля-Кирхгофа, её модификаций, а также для прямого моделирования дифракции на маске со слоистой структурой. Так же данный метод может быть применен для решения некоторых задач радиометрии [8]. Описанные ниже численные методы были реализованы в виде комплекса программ, в данной статье представлены некоторые результаты расчетов.

## **1. Виды голографических масок**

Голографическая маска представляет собой физическую реализацию функции локального ослабления амплитуды проходящей через маску световой волны. Такая функция может быть получена как интенсивность интерференционной картины опорного и объектного источников [3, 4]. Простейший вариант структуры голографической маски представляет собой

непрозрачный экран с отверстиями, в котором необходимая функция ослабления амплитуды приближается плотностью и размером отверстий. Отверстия на такой маске должны быть достаточно велики в силу вышеперечисленных причин, что влечет ограничения на минимально возможный размер такой маски. Именно, голографическая маска со структурой перфорированной пластины, с помощью которой требуется получить изображение высокого разрешения, должна быть в 50-60 раз больше полезного изображения. Для того, чтобы уменьшить данное соотношение, требуется ввести дополнительные фазосдвигающие и затемняющие слои [9]. Так же требуется учесть, что получение высокоразрешенных световых изображений с элементами субволнового размера возможно только при высокой угловой апертуре осветителя. Большие углы падения восстанавливающей волны и сложная многослойная структура маски делают необходимой разработку соответствующей модели дифракции, учитывающей эффекты переотражения на границах слоев, волноводные эффекты в отверстиях. Опишем виды голограмм с различными структурами, укажем на особенности и преимущества.

#### А. Амплитудная (серая) голограмма.

Метод Габора получения голограммы связан с регистрацией интерференции взаимно когерентных опорной и объектной волн. Пусть  $O(\xi, \eta)$  - комплексная амплитуда опорной волны на плоскости голограммы,  $P(\xi, \eta)$  - предметное поле. Тогда

$$T(\xi, \eta) = |O(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)|^2 / |O(\xi, \eta)|^2$$

будем считать функцией серости амплитудной голограммы. Заметим, что

$$T(\xi, \eta)O^*(\xi, \eta) = \frac{(|O(\xi, \eta)|^2 + |P(\xi, \eta)|^2)O^*(\xi, \eta)}{|O(\xi, \eta)|^2} + \frac{P(\xi, \eta)O^{*2}(\xi, \eta)}{|O(\xi, \eta)|^2} + P^*(\xi, \eta).$$

Таким образом, если подсветить пластину с функцией пропускания  $T(\xi, \eta)$ , являющуюся амплитудным корректором, восстанавливающей волной  $O^*(\xi, \eta)$ ,

представляющей собой обращенную опорную волну, то полученную волну можно разложить на три составляющих:

1.  $P^*(\xi, \eta)$ - поле, сопряженное объектному, фокусируется в объектном изображении.

2.  $\frac{(|O(\xi, \eta)|^2 + |P(\xi, \eta)|^2)O^*(\xi, \eta)}{|O(\xi, \eta)|^2}$  - в случае сферической опорной волны и

квадратной голограммы фокусируется в яркое изображение в виде креста, представляющий собой дифракцию на краях квадрата (нулевой порядок дифракции).

3.  $\frac{P(\xi, \eta)O^{*2}(\xi, \eta)}{|O(\xi, \eta)|^2}$  - фокусируется в симметричное объекту относительно

фокуса восстанавливающей волны изображение.

Остается заметить, что для возможности физической реализации голограммы требуется, чтобы в каждой точке коэффициент амплитудной модуляции не превышал единицы. Поэтому, делая перенормировку получим  $T(\xi, \eta) = |O(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)|^2 / M * |O(\xi, \eta)|^2$ , где  $M = \max\{|O(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)|^2 / |O(\xi, \eta)|^2\}$  - константа.

Физической реализацией такой функции пропускания является кварцевая пластина с тонким непрозрачным слоем хрома и множеством отверстий в нем, плотность и размер которых соответствует функции пропускания.

#### Б. Амплитудная голограмма с фазосдвигающим слоем.

Нулевой порядок дифракции концентрирует в себе большую часть энергии восстанавливающей волны, поэтому, интерферируя с полезным изображением, создает существенные помехи. Для устранения составляющей, отвечающей нулевому порядку следует вычесть из функции серости соответствующее действительное слагаемое:

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{|O(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)|^2 - (|O(\xi, \eta)|^2 + |P(\xi, \eta)|^2)}{M_1 * |O(\xi, \eta)|^2}.$$

Очевидно, что функция  $T_1(\xi, \eta)$  принимает отрицательные значения. Модуляция волны отрицательным множителем означает пропорциональное изменение амплитуды и сдвиг фазы на половину длины волны. Поэтому, такая функция серости может быть реализована физически за счет наложения в точках с отрицательной модуляцией дополнительного фазосдвигающего слоя.

Отметим, что в этом случае есть выигрыш в дифракционной эффективности голограммы. Этот факт является следствием неравенства

$$M_1 = \max \left\{ \frac{|O(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)|^2 - (|O(\xi, \eta)|^2 + |P(\xi, \eta)|^2)}{|O(\xi, \eta)|^2} \right\} < M = \max \left\{ \frac{|O(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)|^2}{|O(\xi, \eta)|^2} \right\},$$

которое, в свою очередь, следует из неравенства треугольника. При правильном выборе опорной волны, дифракционная эффективность повышается примерно в пять раз. Это подтверждается численными экспериментами.

#### В. Голограмма с затемняющими слоями.

Одной из возможных проблем создания изображений голографическим путем является отсутствие пропускания света маленькими отверстиями. На голограмме с фазосдвигающим слоем, устраняющим нулевой порядок дифракции, таких отверстий оказывается довольно много. Как показали предыдущие исследования, основанные на приближении Кирхгофа, на голограмме, размеры которой примерно в 5 раз больше размеров изображения, подавляющее большинство зон пропускания имеют размер в диапазоне  $[0; 0,7\lambda]$ . Кроме этого, отверстия размерами  $a \leq 1,7\lambda$  в слое хрома толщиной примерно  $0,5\lambda$  проявляют волноводные свойства. Это приводит к тому, что расчёт излучения отверстий в диапазонах  $0,7\lambda \leq a \leq 1,7\lambda$  сложен, а с учётом погрешностей изготовления голограммной маски недостоверен. При прохождении волновода, волна разбивается на моды, которые распространяются с разной скоростью (дисперсия), затухают при движении по волноводу с разным декрементом, по-разному отражаются от открытых концов волновода, передают энергию друг другу при наличии местных нерегулярностей внутри волновода, а также вследствие конечной проводимости

материала стенок. Таким образом, использовать отверстия, размер которых меньше  $1,7\lambda$ , в маске, которая рассчитана и оптимизирована в рамках теории Кирхгофа, нежелательно.

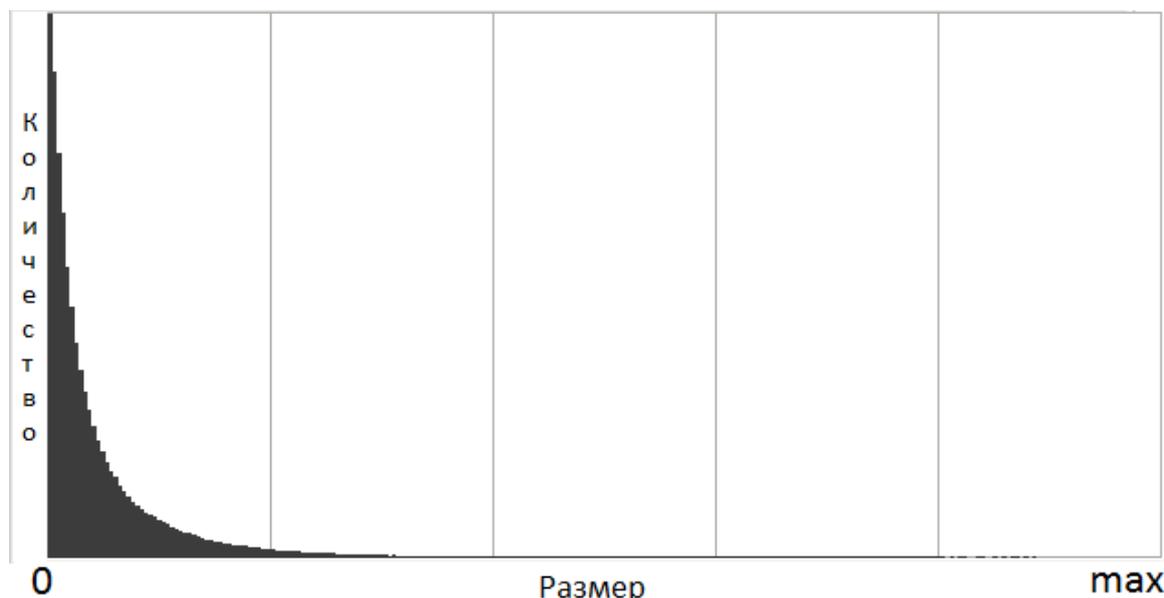


Рис. 1. Типичное распределение количества зон пропускания по размерам амплитудной голограммной маски с фазосдвигающим слоем, синтезированной по Габору.

Для увеличения диапазона используемых размеров зон пропускания приходится существенно увеличивать максимальный размер зоны пропускания, а значит, и размер голограммы. Идея использования затемняющего слоя состоит в том, чтобы отверстия малого размера заменить отверстиями большего размера с наложенным на них фильтром, понижающим коэффициент пропускания. Таким образом можно вывести размеры малых зон пропускания из нежелательного диапазона и таким образом сохранить существенную часть информации. Можно пойти дальше и допустить использование нескольких затемняющих слоев с разными коэффициентами.

Так же из гистограммы распределения размеров отверстий видно, что количество отверстий больших размеров на маске пренебрежимо мало. Этот факт позволяет сделать функцию пропускания маски с перфорированной структурой более равномерной и «светлой» за счет уменьшения размеров малого количества больших отверстий и последующего пропорционального увеличения всех отверстий на маске.

Опишем процедуру перенормировки размеров отверстий и расчета затемняющих слоев более подробно. Пусть  $a_{\max}$  – максимально допустимый размер отверстия на маске (шаг расчетной сетки). Шаг расчетной сетки можно вычислить, опираясь на оценку минимального периода колебаний интерференционной картины  $T \approx \lambda \frac{d}{X}$  [10], где  $d$  - расстояние от маски до изображения,  $X$  - расстояние от наиболее удаленной точки изображения до опорного источника. Достаточно принять  $a_{\max} \approx \frac{\lambda d}{4X}$ . Все отверстия, исходные размеры которых находятся в интервале  $[a_k; a_{\max}]$  уменьшаются до размера  $a_k$ , который выбирается в зависимости от исходного распределения размеров отверстий (Рис. 2). Затем, размеры всех отверстий пропорционально увеличиваются с коэффициентом  $\frac{a_{\max}}{a_k}$ . Таким образом некоторая часть отверстий на маске из интервала размеров  $[0; 1,7\lambda]$  переходит в интервал  $[1,7\lambda; a_{\max}]$ .

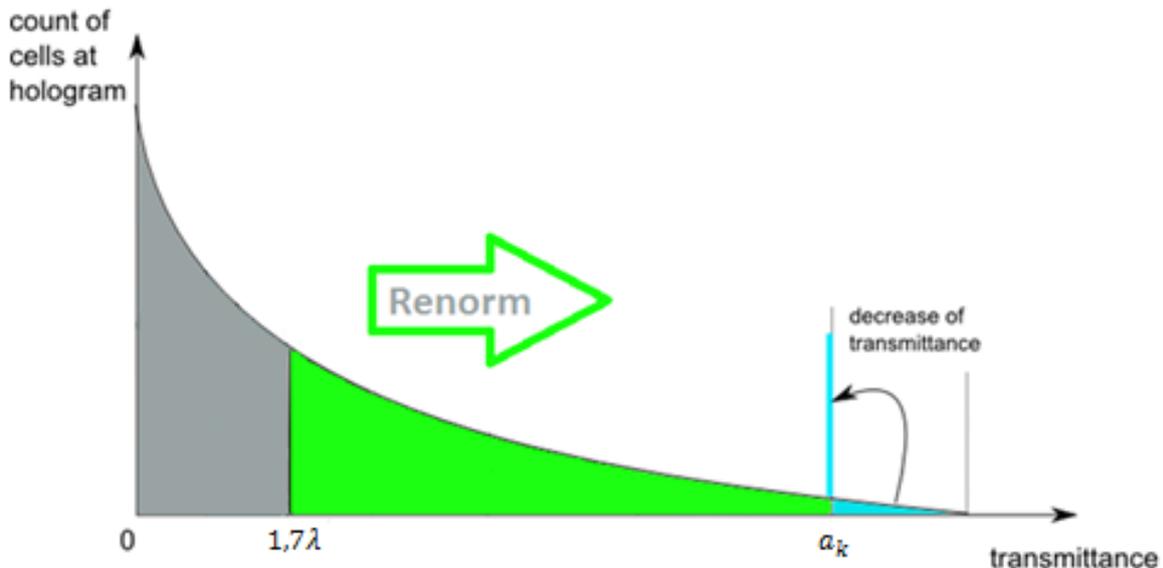


Рис. 2. Первый шаг процедуры перенормировки отверстий. Уменьшение размеров малого количества больших отверстий.

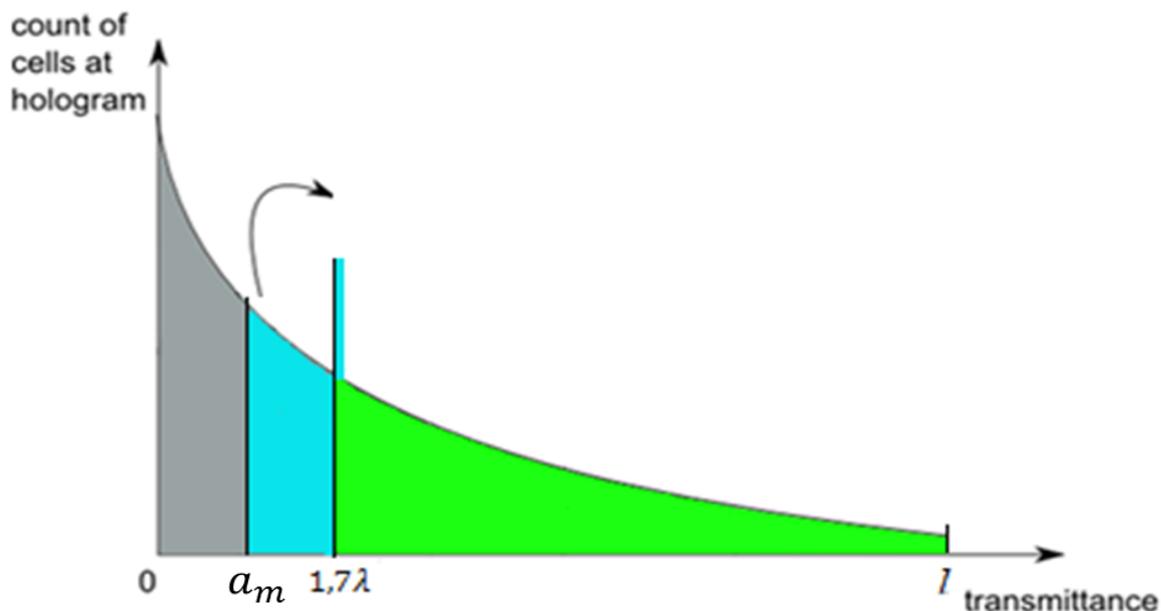


Рис. 3. Второй шаг процедуры перенормировки отверстий. Пропорциональное увеличение размеров всех отверстий.

Далее, все отверстия, размеры которых попадают в интервал  $[\frac{(1,7\lambda)^2}{a_{\max}}; 1,7\lambda]$ , пропорционально увеличиваются с коэффициентом  $\frac{a_{\max}}{1,7\lambda}$  и на них накладывается дополнительный слой вещества, уменьшающий проходящую световую энергию с коэффициентом  $\left(\frac{1,7\lambda}{a_{\max}}\right)^2$ . Аналогично можно поступить с отверстиями, размеры которых попадают в интервал  $[\frac{(1,7\lambda)^3}{a_{\max}^2}; \frac{(1,7\lambda)^2}{a_{\max}}]$ , то есть увеличить их размеры пропорционально с коэффициентом  $\left(\frac{a_{\max}}{1,7\lambda}\right)^2$  и наложить слой, затемняющий с коэффициентом  $\left(\frac{1,7\lambda}{a_{\max}}\right)^4$ , и т.д.

Для расчета толщины, показателей преломления и поглощения фазосдвигающих и дополнительных затемняющих слоев требуется модель дифракции, принципиально отличающаяся от формул Френеля-Кирхгофа. Так же важно, что функция, описывающая распределение оптических показателей в слоях маски, может претерпевать разрывы.

## 2. Оценки размеров голограммных масок с различной структурой

Для оценки размеров масок различной структуры были проведены численные эксперименты на сравнительно небольших изображениях. Получаемые результаты зависят от многих параметров синтезируемых изображений, в частности от характера распределения фазы на соседних элементах. Приводимая ниже таблица будет в дальнейшем уточняться, однако, уже сейчас очевидно, что введение дополнительных слоев постоянной толщины может стать одним из способов существенного уменьшения размера голограммной маски, что имеет большое значение для практического использования голограммных масок.

	Амплитудная голограмма	Амплитудная голограмма с фазосдвигающим слоем	Амплитудная голограмма с фазосдвигающим и одним затемняющим слоем	Амплитудная голограмма с фазосдвигающим и двумя затемняющими слоями	Голограммная маска с непрерывно меняющимися толщинами слоев
Отношение размера маски к размеру изображения	50-60	35-40	24-30	16-20	8-10

## 3. Задача дифракции на слоистой среде

Опишем метод [7], с помощью которого можно моделировать процессы дифракции на системе отверстий в пластине конечной толщины, на слоистых пластинах, а также для тестирования приближенных методов, например, метода Кирхгофа.

Выпишем систему уравнений Максвелла [11] и преобразуем ее для случая Н-поляризации.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon' \vec{E} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \mu \vec{H} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon' \vec{E}) = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (4)$$

Пусть  $\varepsilon' = \varepsilon'(x, y) = \varepsilon(x, y) + \frac{4\pi\sigma(x, y)}{\omega} i$  – комплексная диэлектрическая проницаемость среды не зависит от пространственной координаты  $z$ . Далее, положим  $\varepsilon'(x, y) = \varepsilon'(x, y + a)$ . Так же  $\varepsilon'(x, y) = 1$  при  $x \notin [0; x_{max}]$ ,  $\mu = 1$  везде. Таким образом, объект, на котором происходит дифракция, представляет собой пластину, периодическую по одной координате и цилиндрическую по другой. Световая волна, поляризованная вдоль цилиндрической координаты  $z$ , при дифракции на такой пластине будет сохранять поляризацию. Произвольную плоскую волну можно представить как суперпозицию волн двух данных поляризаций. Рассмотрим более сложный случай  $H$ -поляризации,  $\vec{H} = \overrightarrow{(0, 0, H_z)}$ ,  $\vec{E} = \overrightarrow{(E_x, E_y, 0)}$ . Тогда уравнения Максвелла принимают вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{i\omega\varepsilon'}{c} E_x \quad (1')$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{i\omega\varepsilon'}{c} E_y \quad (1')$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{i\omega}{c} H_x \quad (2')$$

Уравнение (1') является следствием уравнения (1). Из уравнения (4) следует так же, что все компоненты функции зависят только от  $x$  и  $y$ . После некоторых преобразований и подстановок получим уравнение на  $H_z$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + k^2 H_z = 0, \quad (5)$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Будем рассматривать дифракцию плоской волны на описанной структуре (Рис. 4)

В случае  $E$ -поляризации при помощи аналогичных преобразований получим уравнение Гельмгольца на компоненту  $E_z$ .

Будем далее искать решение уравнения (5) в виде

$$H_z(x, y) = u(x, y) = \sum_j B_j(x) \Psi_j(y)$$

где  $\Psi_j(y) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \frac{t+2\pi j}{a} y}$ ,  $t = ka \sin \theta$ ,  $\Delta \Psi_j + \lambda_j \Psi_j = 0$ ,  $\lambda_j = \left(\frac{t+2\pi j}{a}\right)^2$ . То есть, решение представляется в виде разложения по плоским волнам (Рис. 5).

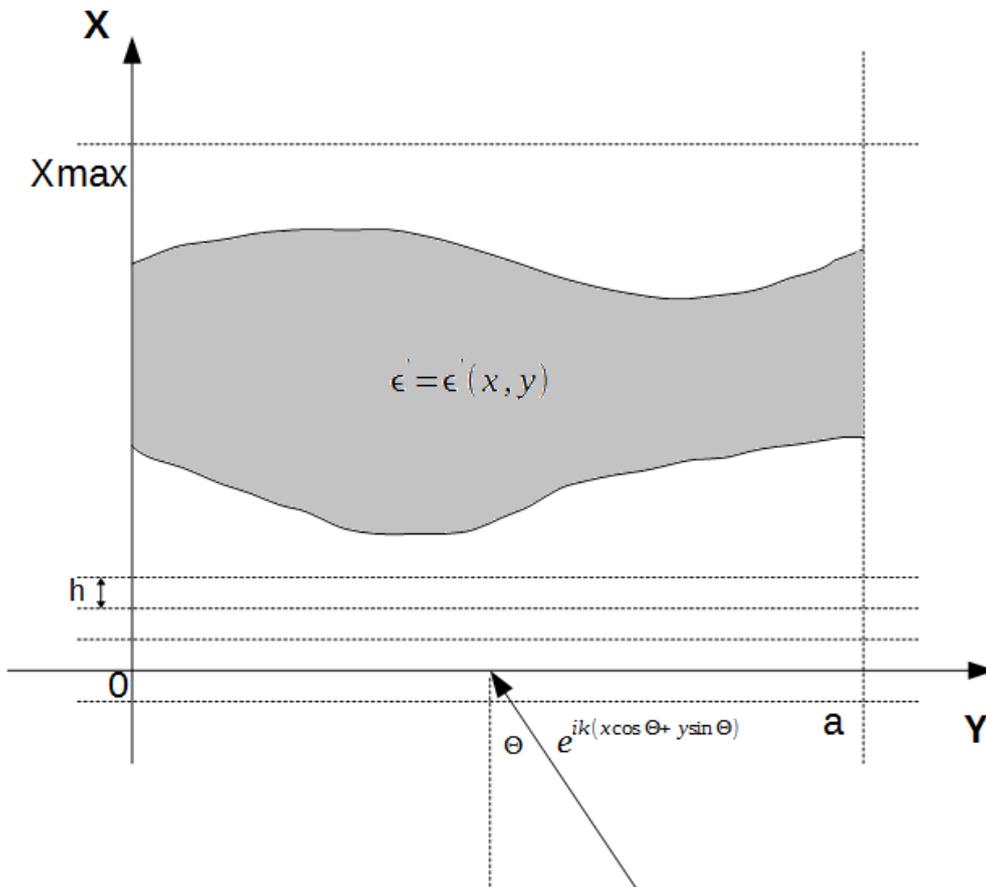


Рис. 4. Схема постановки задачи

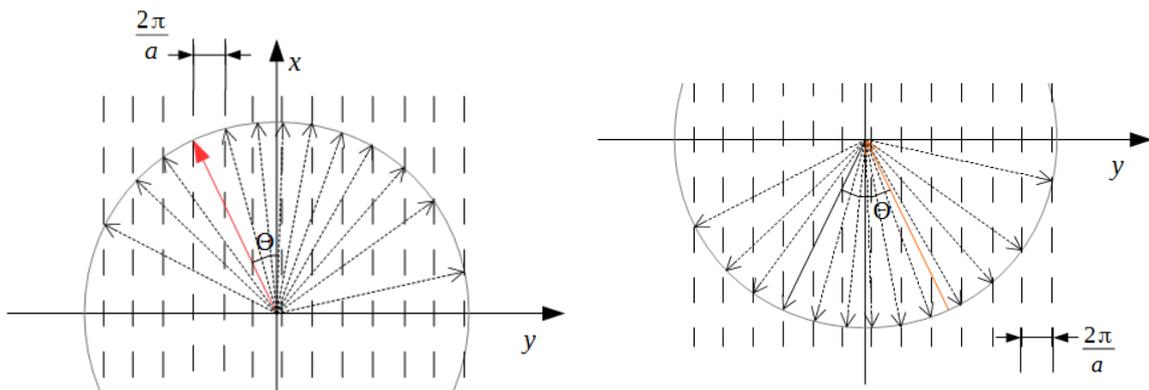


Рис. 5. Базисы для разложения прошедшей и отраженной волн. Красным помечено направление падающей волны.

Краевые условия на неизвестные функции  $B_j(x)$  ставятся исходя из условий излучения [8]:

$$x \leq 0: B_j = \delta_{j0} e^{ikx \cos \theta} + R_j e^{-i\gamma_j x}, \quad \gamma_j = \sqrt{k^2 - \lambda_j},$$

$$x \geq x_{max}: B_j = T_j e^{i\gamma_j x}, \quad \gamma_j = \sqrt{k^2 - \lambda_j}.$$

Эти условия выражают математически, что распространение отраженных и прошедших плоских волн направлено от пластины. Количество рассчитываемых элементов ряда выбираем так же из условий излучения, то есть  $k^2 - \lambda_j \geq 0$  или  $\frac{-a(1+\sin \Theta)}{\lambda} \leq j \leq \frac{a(1-\sin \Theta)}{\lambda}$ . То есть,

$$-N_1 \leq j \leq N_2, \text{ где } N_1 = \left[ \frac{a(1+\sin \Theta)}{\lambda} \right], N_2 = \left[ \frac{a(1-\sin \Theta)}{\lambda} \right].$$

Сделаем необходимые интегральные преобразования с целью перехода к системе ОДУ:

$$\int_0^a \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k^2 u \right) \Psi_j^* dy = 0,$$

отсюда,

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_s \frac{dB_s}{dx} \int_0^a \frac{\Psi_s \Psi_j^*}{\varepsilon'} dy \right) + k^2 B_j - \sum_s B_s \int_0^a \frac{\dot{\Psi}_s \Psi_j^*}{\varepsilon'} dy = 0.$$

Перепишем полученную систему в следующей матричной форме:

$$(Kb')' - (\tilde{K} - k^2 E)b = 0, \quad (6)$$

где  $b = (B_{N_2}, \dots, B_{-N_1})^T$ ,  $K = \{k_{sj}\}$ ,  $k_{sj} = \int_0^a \frac{\Psi_s \Psi_j^*}{\varepsilon'} dy$ ,  $\tilde{K} = \{\tilde{k}_{sj}\}$ ,  $\tilde{k}_{sj} = \int_0^a \frac{\dot{\Psi}_s \Psi_j^*}{\varepsilon'} dy$ ,  $E$  – единичная матрица порядка  $N_1 + N_2 + 1$ ,  $\dot{\Psi}_s = \frac{d\Psi_s}{dy} = i\sqrt{\lambda_s} \Psi_s$ ,  $\dot{\Psi}_j^* = \frac{d\Psi_j^*}{dy} = -i\sqrt{\lambda_j} \Psi_j^*$ , соответственно,  $\tilde{k}_{sj} = \sqrt{\lambda_s \lambda_j} k_{sj}$ . Матрицы  $K$  и  $\tilde{K}$  связаны покомпонентным умножением на симметричную матрицу  $\{\sqrt{\lambda_s \lambda_j}\}$ . Все матрицы имеют порядок  $N_1 + N_2 + 1$ .

Сделаем далее замену  $p = Kb'$ , тогда систему второго порядка (6) можно переписать в виде системы первого порядка

$$\begin{cases} b' = K^{-1}p \\ p' = (\tilde{K} - k^2 E)b \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$x = 0: b'_j + i\gamma_j b_j = 2i\gamma_0 \delta_{j0} e^{i\gamma_0 x} = 2i\gamma_0 \delta_{j0},$$

$$x = x_{max}: b'_j - i\gamma_j b_j = 0,$$

или с учётом замены и матричных обозначений

$$\begin{cases} p' = Ab \\ b' = Bp \end{cases} \quad (8)$$

$$x = 0: p + i\Gamma K b = Kc,$$

$$x = x_{max}: p - i\Gamma K b = 0$$

где введены обозначения  $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{N_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{N_2-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{-N_1} \end{pmatrix},$

$$c = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_2}, 2i\gamma_0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_1} \right)^T, A = (\tilde{K} - k^2 E), B = K^{-1}.$$

Рассмотрим далее следующие вспомогательные задачи Коши. Положим

$$\delta_j = (\delta_{N_2,j}, \delta_{N_2-1,j}, \dots, \delta_{-N_1,j})^T, j = -N_1, \dots, N_2.$$

$$\begin{cases} p^{2,j'} = Ab^{2,j} \\ b^{2,j'} = Bp^{2,j} \end{cases} \quad (9, j)$$

$$x = 0: b^{2,j} = \delta_j, p^{2,j} = 0$$

$$\begin{cases} p^{3,j'} = Ab^{3,j} \\ b^{3,j'} = Bp^{3,j} \end{cases} \quad (10, j)$$

$$x = 0: b^{3,j} = 0, p^{3,j} = \delta_j$$

Используем прямую разностную схему третьего порядка точности для решения задач типов (9, j) и (10, j), именно, для задач вида

$$\begin{cases} p' = Ab \\ b' = Bp \end{cases} \\ x = 0: b = b_0, \quad p = p_0$$

Укажем схему численного решения:

$$h = \frac{x_{max}}{N}, \quad b_n = b(nh), \quad A_n = A(nh), \quad B_n = B(nh), \quad K_n = K(nh), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

где  $N$  – количество шагов разбиения отрезка  $[0, x_{max}]$ .

$$p_{i+1} = p_i + \frac{A_i + A_{i+1}}{2} b_i h + \frac{1}{2} A_i B_i p_i h^2, \quad b_{i+1} = b_i + \frac{1}{2} (B_{i+1} p_{i+1} + B_i p_i) h.$$

Будем искать решение исходной задачи (8) в виде линейной комбинации решений задач (9,j) и (10,s):

$$b = \sum_{j=-N_1}^{N_2} \alpha_j b^{2,j} + \sum_{s=-N_1}^{N_2} \beta_s b^{3,s},$$

$$p = \sum_{j=-N_1}^{N_2} \alpha_j p^{2,j} + \sum_{s=-N_1}^{N_2} \beta_s p^{3,s}.$$

Введём дополнительные обозначения:  $\alpha = (\alpha_{N_2}, \alpha_{N_2-1}, \dots, \alpha_{-N_1})^T$ ,  $\beta = (\beta_{N_2}, \beta_{N_2-1}, \dots, \beta_{-N_1})^T$ . Тогда первое граничное условие задачи (8)

$$p_0 + iK_0 \Gamma b_0 = K_0 c$$

приводит к равенству

$$\beta = K_0 (c - i\Gamma \alpha).$$

Систему уравнений на коэффициенты  $\alpha$  запишем, исходя из краевого условия  $x = x_{max}$ :  $p_N - iK_N \Gamma b_N = 0$  задачи (8). Для этого понадобятся следующие дополнительные матричные обозначения:

$$p_N^l = (p_N^{l,N_2}, p_N^{l,N_2-1}, \dots, p_N^{l,-N_1}), \quad b_N^l = (b_N^{l,N_2}, b_N^{l,N_2-1}, \dots, b_N^{l,-N_1}),$$

То есть,  $p_N^j, b_N^j$  – матрицы, составленные из векторов-решений вспомогательных задач Коши (9, j) и (10, j) в точке  $x = x_{max}$  как из столбцов ( $l \in \{2, 3\}$ ).

Тогда система уравнений на коэффициенты  $\alpha$  можно представить в виде

$$(p_N^2 - (ip_N^3 K_0 + iK_N b_N^2 + K_N \Gamma b_N^3 K_0) \Gamma) \alpha = (iK_N \Gamma b_N^3 - p_N^3) K_0 c$$

Принимая во внимание, что  $\varepsilon'(0, y) = \varepsilon'(x_{max}, y) = 1$ , можно считать, что  $K_0 = K_N = E$ , и

$$(p_N^2 - i\Gamma b_N^2 - (ip_N^3 + \Gamma b_N^3)\Gamma)\alpha = (i\Gamma b_N^3 - p_N^3)c$$

$$\beta = c - i\Gamma\alpha$$

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных уравнений и к обращению матрицы размером  $N_1 + N_2 + 1 \times N_1 + N_2 + 1$ .

Описанный метод был реализован в программном модуле на языке Python. Полученные результаты с высокой точностью соответствуют результатам аналитических решений в простых случаях, а также результатам, полученных с помощью некоторых других приближенных методов [11].

#### 4. Примеры расчетов

В данном разделе приводятся примеры конкретных расчетов с помощью описанного выше метода для моделирования ряда дифракционных явлений на периодических структурах (аномалии Вуда, угол Брюстера) и определения границ применимости приближенных методов (метод Кирхгофа).

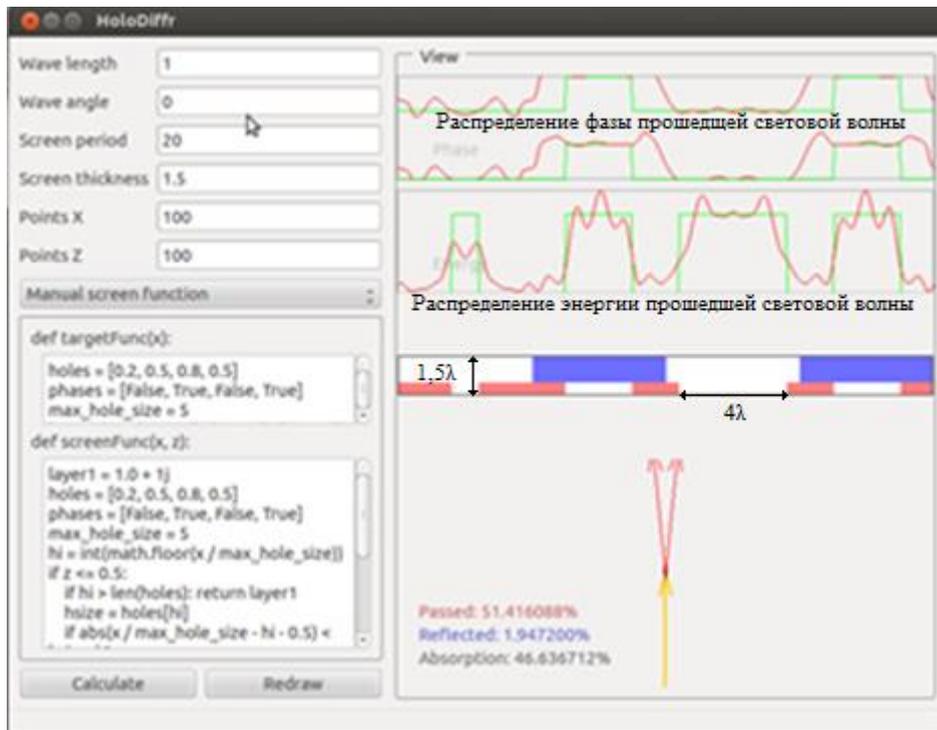


Рис. 6. Пример дифракции на слоистой структуре. Красным цветом обозначены участки, поглощающие световую энергию, синим – прозрачные участки.

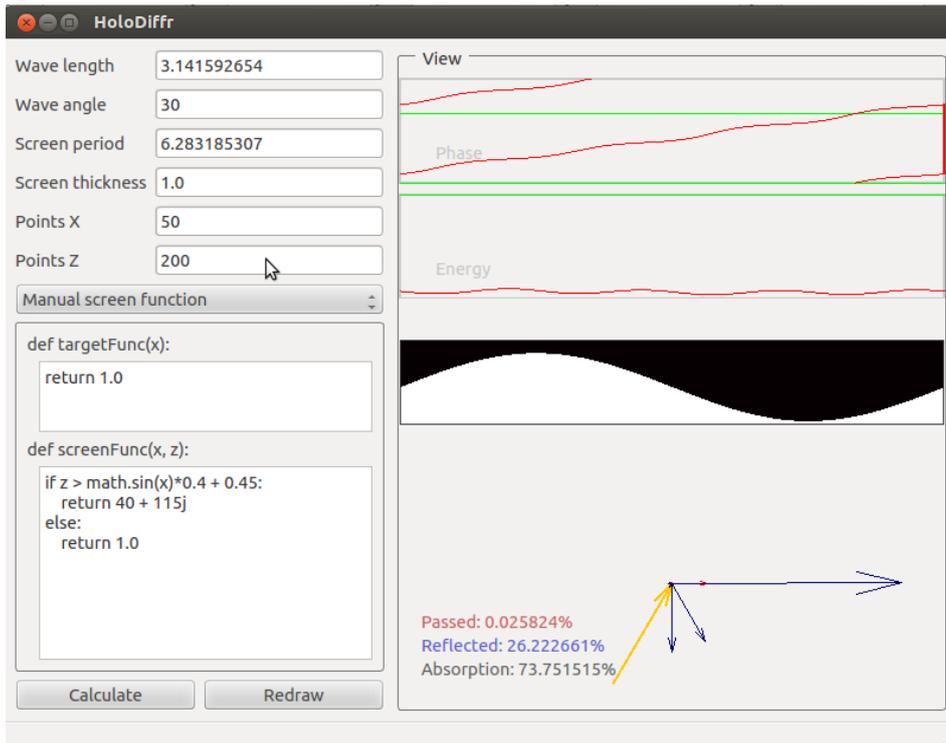


Рис. 7. Пример дифракции на волнистой структуре. Большая часть энергии дифрагированной волны распространяется вдоль поверхности (Аномалия Вуда)

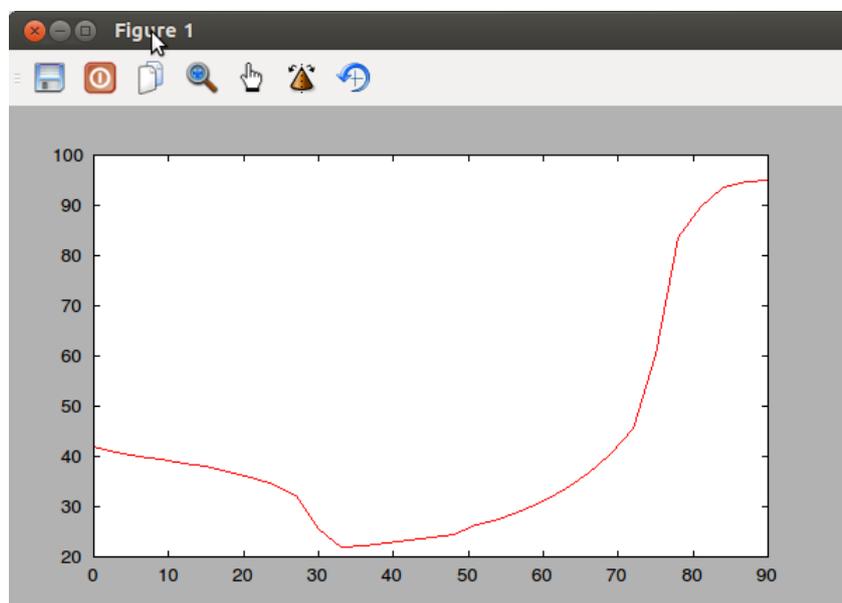


Рис. 8. Результаты расчета дифракции на волнистой структуре. По горизонтальной оси отложен угол падения плоской волны, по вертикальной оси процент отраженной энергии. Минимум отраженной энергии достигается при угле падения около  $33^\circ$ .

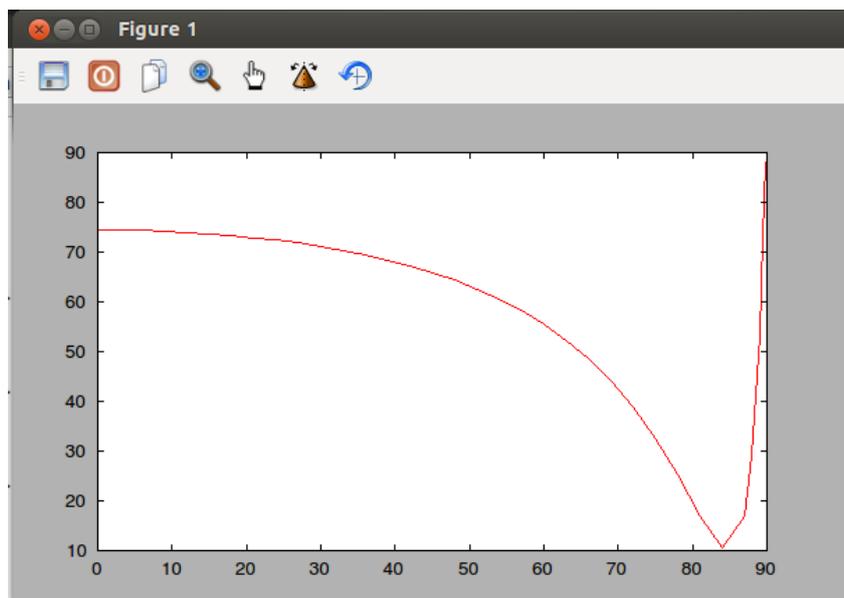


Рис. 9. Результаты расчета дифракции на плоской границе раздела. По горизонтальной оси отложен угол падения плоской волны, по вертикальной оси процент отраженной энергии.

Минимум отраженной энергии достигается при угле падения около  $84^\circ$ .

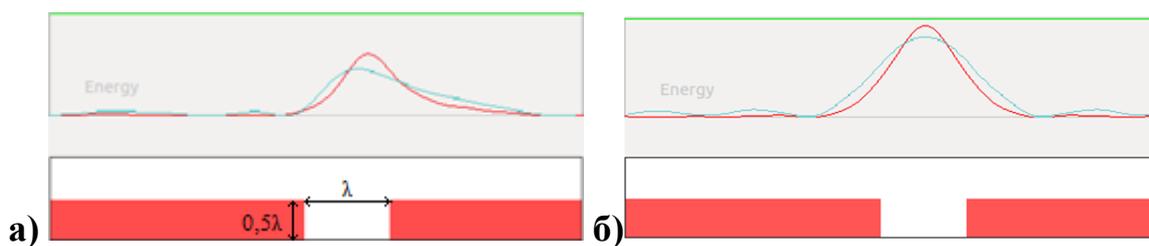


Рис. 9. Сравнение результатов моделирования прохождения а) плоской волны, падающей под углом  $30^\circ$  б) плоской волны, падающей перпендикулярно, через отверстие в поглощающем экране. Красным цветом показано распределение энергии прошедшей волны, рассчитанной в предположениях метода Кирхгофа, голубым цветом аналогичное распределение, рассчитанное описанным методом. Размер отверстия равен длине волн, толщина поглощающего слоя равна половине длины волн.

## 5. Заключение

1. Предложены различные методы уменьшения размеров голограммной маски, оценена их эффективность.

2. Разработан программный модуль, позволяющий рассчитать прохождение и отражение плоской волны произвольной поляризации через периодическую неоднородную среду с цилиндрической структурой. Решение прямой задачи возможно далее осуществить с помощью описанного метода в случае двумерной периодической структуры общего вида. Данный

программный модуль предполагается использовать для исследования границ применимости и для модификации некоторых приближённых методов решения задач дифракции. Аналог указанного программного комплекса будет использован для прямого моделирования прохождения волны через пластину с конечной толщиной и небольшими размерами отверстий.

3. Разработанные методы можно далее использовать также для решения задач из других областей электродинамики, например, для обратной задачи восстановления спектра излучающей поверхности по спектру излучения (с помощью принципа двойственности излучения и поглощения и итерационных методов оптимизации, таких как метод градиентного спуска).

4. Работа программного комплекса проверена путем сравнения с аналитическим решением, а также с другими приближенными методами. С помощью полученного программного модуля возможно математическое моделирование таких эффектов, как наличие угла Брюстера и аномалии Вуда. Количественные результаты моделирования с хорошей точностью совпадают с аналитическими формулами.

### Литература

1. Борисов М.В., Боровиков В.А., Гавриков А.А, Князьков Д.Ю., Раховский В.И., Челюбеев Д.А., Шамаев А.С. Методы создания и коррекции качества голографических изображений геометрических объектов с элементами субволновых размеров // Доклады Академии Наук, 2010, Т. 434, № 3, с. 332-336.
2. Борисов М.В., Гавриков А.А, Князьков Д.Ю., Раховский В.И., Челюбеев Д.А., Шамаев А.С. Способ изготовления голографических изображений рисунка // Патент РФ 2396584 С1. — 2010.
3. Габор Д. Голография (1948-1971г.г.) // Успехи физических наук, Том 9, Вып. 1, 1973г.
4. Борн М. Вольф Э. Основы оптики. – М : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. 713 с.
5. Kottler F., Diffraction at a black screen // Progress in optics, Vol. 4. – pp. 281-314.
6. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. - М.: Радио и связь, 1988.

7. А. С. Ильинский, “Метод исследования задач дифракции волн на периодической структуре”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 14:4 (1974), 1063–1067
8. Д. Ю. Князьков, А. В. Романова, А. С. Шамаев Метод локальных возмущений для приближенного расчета дифракции акустической волны с импедансными условиями на границе раздела сред. – Труды МИАН
9. Borisov M.V., Chelyubeev D.A., Chernik V.V., Gavrikov A.A., Knyazkov D.Y., Mikheev P.A., Rakhovsky V.I., Shamaev A.A. «Phase-shift at subwavelength holographic lithography (SWHL)» in 28th European Mask and Lithography Conference, edited by Uwe F.W. Behringer, Wilhelm Maurer, Proceedings of SPIE Vol. 8352, 83520P, 2012.
10. Калитеевский Н.И., М.: Высшая школа Год издания: 1995 Страницы: 463
11. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: АН СССР, 1957. – 503 с.

**Ссылка на статью:**

Голограммная маска со слоистой структурой. Математические методы расчета и преимущества в производстве и эксплуатации. В. В. Черник. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan17/3/text.pdf>