

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.1.10>

УДК 51-74:537.2

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ СЕТОК ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МНОГОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

А. Е. Максимов, С. П. Куксенко

Томский государственный университет систем управления  
и радиоэлектроники, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 40

Статья поступила в редакцию 23 января 2021 г.

**Аннотация.** Описаны особенности квазистатического анализа многопроводных линий передачи методом моментов, основанного на вычислении матриц первичных погонных параметров линии. Приведен краткий обзор методов построения адаптивных сеток. Выполнено сравнение их эффективности на примере вычисления ёмкостных матриц разнообразных многопроводных линий передачи. Определены оптимальные значения параметров методов, дающие уменьшение вычислительных затрат. Показано, что их использование даёт существенный прирост производительности при многовариантном анализе многопроводных линий передачи относительно частых равномерных сеток.

**Ключевые слова:** многопроводные линии передачи, адаптивная сетка, погонные параметры линии передачи, метод моментов.

**Abstract.** The features of the quasi-static analysis of multiconductor transmission lines by the method of moments, based on the calculation of the matrices of the primary per-unit-length parameters of the line, are described. A brief overview of methods for adaptive mesh refinement is given. Comparison of their efficiency is carried out on the example of calculating capacitive matrices of various multiconductor transmission lines. The optimal values of the parameters methods which reduce computation costs are determined. It is shown that their use gives a significant increase in performance in the multivariate analysis of multiconductor transmission lines relatively to fine uniform meshes.

**Key words:** multiconductor transmission lines, adaptive mesh, per-unit-length parameters, method of moments.

## Введение

По мере усложнения конструкций линий, за счёт увеличения числа проводников и слоёв диэлектрических покрытий, аналитические методы всё менее применимы, и поэтому прибегают к использованию численных методов. Так, наиболее широкое применение получили методы конечных разностей, элементов и моментов [1–3]. Среди них видится более эффективным использование последнего, поскольку при этом не требуется искусственное задание граничных условий, эмулирующих удаленные границы, что необходимо при использовании методов конечных разностей и элементов. Это позволяет существенно сократить вычислительные затраты, особенно при многовариантном анализе.

Известно, что для численного анализа какой-либо физической задачи необходимо построить её математическую модель, учитывающую существенные для данной задачи особенности реального объекта (процесса или явления). При этом, математическая модель не идентична исследуемому объекту, а является его приближенным описанием с помощью языка математики и реализуемых на компьютере алгоритмов [4]. Поэтому, в зависимости от универсальности, адекватности, точности и экономичности, модели могут различаться по их сложности и требованиям к вычислительным ресурсам [5]. Процесс построения математической модели для анализа электромагнитных задач формально можно представить в виде нескольких взаимосвязанных этапов, наиболее вычислительно затратными из которых являются построение сетки, формирование системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и её решение [6]. Так, построение сетки оказывает влияние на свойства результирующей СЛАУ и определяет выбор способа вычисления её элементов (численное интегрирование, дифференцирование или выражение в замкнутом виде) и метода её решения (прямой или итерационный) и тем самым,

временные затраты на её формирование и решение [7]. При необходимости многовариантного анализа или оптимизации параметров исследуемой МПЛП эти три этапа повторяются многократно, что существенно усложняет процесс оптимального проектирования РЭС из-за существенного роста вычислительных затрат. Поэтому актуален поиск путей их уменьшения, в частности, за счёт выбора метода построения сетки, поскольку обзор известных исследований (раздел 3) показывает наличие ресурсов для этого.

Цель работы – исследование методов построения сетки при многовариантном анализе МПЛП методом моментов.

Приведем краткое содержание работы. В разделе 1 для ясности дальнейшего изложения приведены особенности квазистатического подхода применительно к анализу МПЛП, основанному на вычислении их матриц первичных погонных параметров, и приведена математическая модель для вычисления ёмкостной матрицы, т.к. этот процесс является самым вычислительно затратным. В разделе 2 приведены пояснения к многовариантному анализу МПЛП, а раздел 3 посвящен рассмотрению методов построения сеток из разных приложений. В разделе 4 приведены результаты вычислительного эксперимента, посвященного исследованию методов построения сеток при одновариантном и многовариантном анализе МПЛП. В конце приведено заключение по работе и указаны дальнейшие перспективы развития темы.

## 1. Математическая модель вычисления ёмкостной матрицы МПЛП

При квазистатическом подходе электрические характеристики, меняющиеся вдоль отрезков МПЛП длиной  $dx$ , характеризуются матрицами первичных погонных параметров  $\mathbf{R}$  (Ом/м),  $\mathbf{L}$  (Гн/м),  $\mathbf{C}$  (Ф/м) и  $\mathbf{G}$  (См/м) или, кратко,  $\mathbf{RLCG}$ -параметрами. Вычисленные матрицы затем используются при решении телеграфных уравнений Хевисайда или производных от них для анализа целостности сигналов, получения временного отклика [8] и других параметров [9]. В случае, когда не учитываются потери в проводниках и

диэлектриках, из которых состоит линия передачи, вычисляются только  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{C}$ . Тогда строгое решение уравнений Максвелла сводится к двум независимым граничным задачам электростатики и магнитостатики, определяющим поведение поперечных электрических и магнитных компонент поля соответственно. При этом, решение первой задачи даёт матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{G}$ , а второй –  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{R}$  [10].

Для уменьшения вычислительных затрат часто прибегают к решению только электростатической задачи, а из вычисленной матрицы  $\mathbf{C}$  находят  $\mathbf{L}$ , а затем  $\mathbf{R}$ . Однако вычисленная таким образом матрица  $\mathbf{L}$  полагается частотно-независимой, тем самым лишь приближенной [11]. На практике это часто приемлемо, например, при проектировании интегральных схем, поскольку частоты сигналов не так высоки и влияние индуктивности проявляется слабо [12]. Поэтому для минимизации затрат времени на получение всех первичных параметров МПЛП особый интерес представляет вычисление матрицы  $\mathbf{C}$  (ёмкостной матрицы [13]), поскольку остальные три матрицы являются её производными.

Поясним особенности вычисления матрицы  $\mathbf{C}$  методом моментов (МоМ) на примере трехпроводной линии передачи, поперечное сечение которой приведено на рисунке 1.

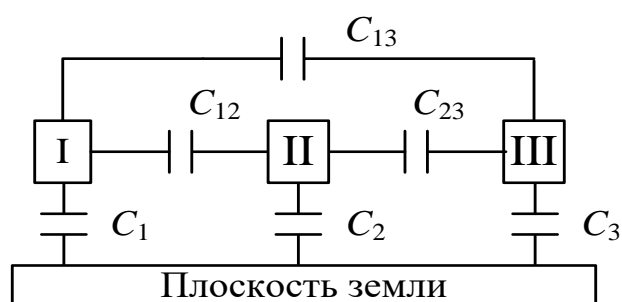


Рис. 1. Поперечное сечение трехпроводной линии передачи.

Рассмотрим задачу нахождения погонных зарядов  $Q$  при известных потенциалах на них. Потенциал опорного проводника (плоскости земли) установим равным 0 В. Разности потенциалов между проводниками и ним обозначим через  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ , а между проводниками –  $V_{12}$ ,  $V_{13}$  и  $V_{23}$ . Тогда, в матричном виде, имеем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{V},$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 + C_{12} + C_{13} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{21} & C_2 + C_{21} + C_{23} & -C_{23} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_3 + C_{31} + C_{32} \end{bmatrix}.$$

В работе [14] представлен подробный вывод моделей вычисления ёмкостной матрицы с использованием МоМ в сочетании с выражениями в замкнутом виде для элементов матрицы СЛАУ, для двумерных и трёхмерных структур с границами произвольной сложности, включающих идеально проводящую плоскость и без неё. Для ясности дальнейшего изложения кратко поясним суть данного подхода на примере двумерной задачи (для трёхмерной задачи подход аналогичен). В качестве операторного уравнения выступает уравнение Пуассона в интегральной форме:

$$\varphi = L^{-1}\rho, \quad L^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma, \quad (1)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – соответствующая функция Грина,  $\mathbf{r}$  – точка наблюдения  $(x, y)$ ,  $\mathbf{r}'$  – точка источника  $(x', y')$ , а  $d\Gamma$  – дифференциал по поверхности структуры. В данной постановке задачи считаются заданными граничные условия по приложенному напряжению  $\varphi$ , при этом требуется найти плотность заряда  $\rho$ . Для двумерного случая функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi}, \quad (2)$$

а

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим математическую модель вычисления ёмкостной матрицы на примере связанной микрополосковой линии (МПЛ), поперечное сечение которой приведено на рисунке 2. Структура содержит два проводника (I и II), которые расположены на диэлектрическом основании с относительной

диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{r2}$  над идеально проводящей (бесконечной) плоскостью.

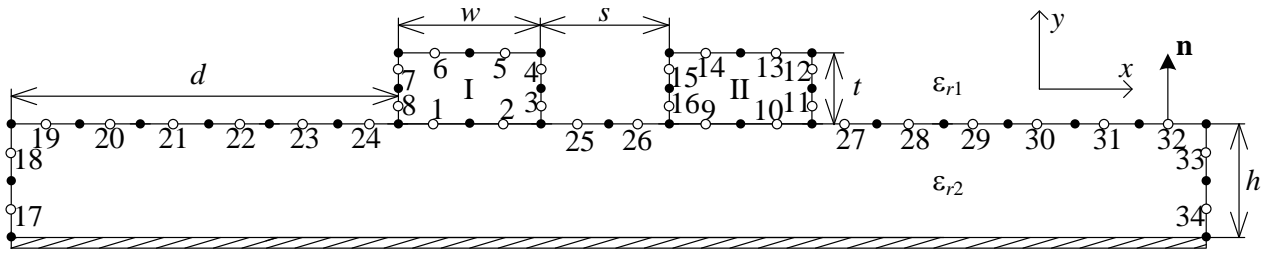


Рис. 2. Поперечное сечение связанной МПЛ.

Для вычисления необходимо пошагово выполнить следующие действия:

1. Дискретизировать границы проводников и диэлектрической подложки (граница раздела двух сред) на небольшие отрезки (подынтервалы) длинами  $l_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . На рисунке 2 деление на подынтервалы показано с помощью закрашенных кругов, а центры подынтервалов отмечены с помощью незакрашенных кругов. Причем сначала дискретизируются проводниковые, а затем диэлектрические границы. В данном случае границы дискретизированы на  $N = 34$  подынтервала, при этом границам проводник-диэлектрик соответствует  $N_C = 16$ , а диэлектрик-диэлектрик –  $N_D = 18$  ( $N = N_C + N_D$ ).

2. Работать в терминах полной плотности заряда  $\sigma_T$ , если в структуре имеются границы соприкосновения диэлектрика с проводником, которая представляет собой сумму плотности свободного и поляризационного зарядов [15, 16]:

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sigma_S(\mathbf{r}) + \sigma_P(\mathbf{r}). \quad (4)$$

При этом, на границе диэлектрик-диэлектрик, полная плотность заряда состоит только из плотности поляризационных зарядов.

3. Учесть наличие плоскости земли с помощью метода зеркальных изображений:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \underline{\mathbf{r}}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'| - \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5)$$

где  $\underline{\mathbf{r}}'$  – точка мнимого источника. Тогда

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right). \quad (6)$$

4. Задать потенциалы (1 В) на проводниковых подынтервалах и подставить выражения для аппроксимации плотности заряда и функции Грина в уравнение (1). Тогда

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \ln \frac{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl', \mathbf{r} \in L_C, \quad (7)$$

где  $dl'$  – элемент контура границ проводник-диэлектрик, а  $L_C$  – длина этого контура.

5. Получить аналогичное уравнение для границ диэлектрик-диэлектрик. При этом следует учесть, что на границе диэлектрик-диэлектрик, между средами с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , нормальная составляющая общего вектора электрического смещения  $\mathbf{D}^n = \epsilon \mathbf{E}^n$  не меняется. Тогда

$$\epsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1^n(\mathbf{r}) = \epsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2^n(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in L_D, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали (рисунок 2),  $\mathbf{E}_1^n(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}_2^n(\mathbf{r})$  – общее электрическое поле в средах 1 (с  $\epsilon_1$ ) и 2 (с  $\epsilon_2$ ) соответственно (в рассматриваемой структуре  $\epsilon_{r1} = 1$  (воздух)), при приближении к линии  $L_D$  границы раздела этих сред. Используя связь потенциала с напряженностью поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ , после математических преобразований получим

$$0 = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] \cdot \mathbf{n} dl, \mathbf{r} \in L_D. \quad (9)$$

6. Выразить полную плотность в виде линейной комбинации из  $N$  известных базисных функций  $\omega_n$  и неизвестных коэффициентов  $\alpha_n$ :

$$\sigma_T = \sum_{n=1}^N \sigma_n \omega_n. \quad (10)$$

Часто используемыми являются кусочно-постоянные базисные функции, которые равны единице на подынтервале с номером  $n$  и нулю вне его. При этом коэффициенты  $\alpha_n$  соответствуют значению равномерной плотности заряда на

подынтервалах с длинами  $l_n$ . Так,  $q_n = l_n \alpha_n$  – погонный заряд на подынтервале длиной  $l_n$  (Кл/м).

7. Подставить (10) в (7) и (9) и, взяв для них скалярные произведения с тестовыми функциями (Дирака), сформировать СЛАУ вида  $\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{S}$  – матрица размера  $N \times N$ , а  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{v}$  –  $N \times 1$ . Вектор  $\mathbf{v}$  содержит единицы в тех строках, которые соответствуют подынтервалам проводник-проводник.

Описанные шаги справедливы, если в структуре имеется один проводник, не считая опорного. При наличии нескольких проводников, описанные выше шаги повторять нет необходимости, а нужно лишь изменить вектор  $\mathbf{v}$ . При этом, все используемые вектора  $\mathbf{v}$  можно заменить на одну матрицу  $\mathbf{V}$ , состоящую из  $N_{\text{COND}}$  столбцов, где  $N_{\text{COND}}$  – число проводников в структуре, не считая опорного. Столбцы этой матрицы соответствуют векторам  $\mathbf{v}$ , сформированным для каждого из проводников. Тогда задача сводится к СЛАУ вида  $\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}$ , где  $\boldsymbol{\Sigma}$  и  $\mathbf{V}$  – матрицы размера  $N \times N_{\text{COND}}$ . Структура полученной СЛАУ приведена на рисунке 3.

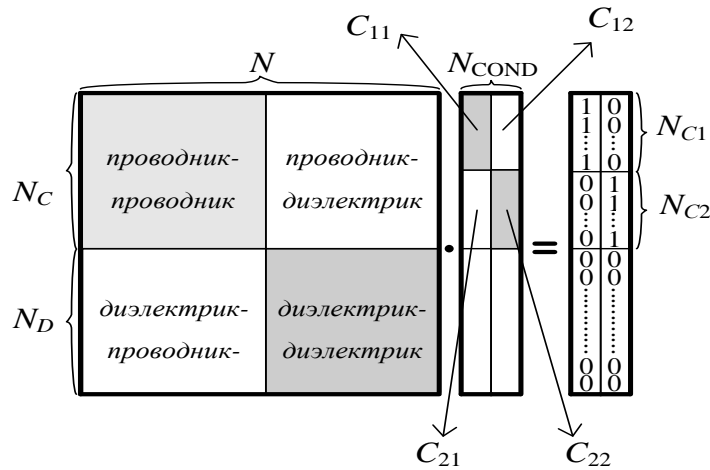


Рис. 3. Структура матрицы СЛАУ с  $N_{\text{COND}}$  правыми частями при использовании метода моментов.

Элементы матрицы  $\mathbf{S}$  вычисляются как:

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \ln \frac{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|} dl', \quad m = 1, \dots, N_C, \quad n = 1, \dots, N, \quad (11)$$



$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[ \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} \right] dl', \quad m = N_C + 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$n = 1, \dots, N, m \neq n,$$

$$s_{mm} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[ \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} \right] dl', \quad (13)$$

$$m = N_C + 1, \dots, N.$$

Для вычисления интегралов в уравнениях (11) – (13) используются численное интегрирование или выражения в замкнутом виде [14]. Полученная матрица  $\mathbf{S}$  является плотной. Если в рассматриваемой структуре отсутствует плоскость земли, то необходимо соблюсти закон сохранения заряда. Поэтому к полученной системе из  $N$  уравнений должно быть добавлено ограничение, что сумма зарядов должна быть равна нулю. В работе [17] это предлагается сделать с помощью системы уравнений

$$f(\sigma_n) = \left[ \sum_{n=1}^{N_C} s_{mn} \sigma_n - \varphi_i \right]^2 \rightarrow \min,$$

$$g(\sigma_n) = \sum_{n=1}^{N_C} \sigma_n l_n \epsilon_{rn} = 0,$$

где  $\epsilon_{rn}$  – относительная диэлектрическая проницаемость около  $n$ -го подынтевала и  $l_n$  – его длина. С помощью множителей Лагранжа  $\Gamma$  эта система приводится к виду

$$\frac{df(\sigma_n)}{d\sigma_n} + \Gamma \frac{dg(\sigma_n)}{d\sigma_n} = 0,$$

давая систему  $N+1$  уравнений с  $N+1$  неизвестными. Коэффициенты дополнительных строки и столбца вычисляются по формулам

$$s_{nN+1} = \frac{l_n}{2s_{nn}}, \quad s_{N+1n} = l_n \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N_C,$$

а соответствующая строка матрицы  $\mathbf{V}$  заполняется нулями. При этом при формировании СЛАУ вместо (5) используется (2).

8. Решить СЛАУ.

9. Вычислить элементы ёмкостной матрицы  $\mathbf{C}$ . При этом учесть, что поверхностная плотность свободных зарядов вычисляется как

$$\sigma_S(\mathbf{r}) = \varepsilon_r(\mathbf{r})\sigma_T(\mathbf{r})/\varepsilon_0, \mathbf{r} \in L_{CD}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_r(\mathbf{r})$  – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, соприкасающегося с поверхностью проводника по контуру  $L_C$ . Тогда элементы ёмкостной матрицы  $\mathbf{C}$  вычисляются как

$$c_{ij} = \int_{L_{C_i}} \frac{\varepsilon_r(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \sigma_T^{(j)}(\mathbf{r}) dl_i / V, V = 1B, \quad (15)$$

где индекс  $i$  – относится к проводнику, по контуру  $L_{C_i}$  которого ведется интегрирование, а  $j$  – к проводнику, находящемуся под потенциалом 1 В, когда остальные проводники под потенциалом 0 В. В матричном виде получим

$$c_{ij} = \sum_{k \in L_{C_i}} \frac{\varepsilon_{rk}}{\varepsilon_0} \sigma_{kj} l_k / V, i, j = 1, \dots, N_{\text{COND}}, V = 1B, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_{rk}$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды на границе с подынтервалом  $k$ . На рисунке 3 наглядно продемонстрированы блоки матрицы  $\Sigma$ , участвующие в вычислении.

В результате, задача нахождения ёмкостной матрицы МПЛП сводится к решению СЛАУ вида  $\mathbf{S}\Sigma = \mathbf{V}$ , с квадратной и плотной матрицей  $\mathbf{S}$  размера  $N \times N$  ( $N = N_C + N_D$ ), связывающей плотности заряда на подобластях дискретизированных границ проводников и диэлектриков, составляющих матрицу  $\Sigma$ , с потенциалами этих подобластей, задаваемых матрицей  $\mathbf{V}$ , обе размера  $N \times N_{\text{COND}}$ . После вычисления  $\Sigma$ , вычисляются элементы искомой ёмкостной матрицы (рисунок 3).

Отдельно стоит отметить, что вычисление методом моментов матрицы  $\mathbf{C}$  отличается от её вычисления, например, методом конечных элементов. Так, при использовании последнего происходит раздельное вычисление элементов матрицы путем решения  $N_{\text{COND}}(N_{\text{COND}}+1)/2$  СЛАУ. Тогда для рассмотренной выше связанной линии потребуется решение трёх СЛАУ, т.к. для экономии вычислительных ресурсов и соблюдения «физичности» вычислений сразу

полагается  $c_{12} = c_{21}$ . При использовании метода моментов число решаемых СЛАУ равно числу проводников в структуре, т.е.  $N_{\text{COND}}$  (рисунок 3).

## 2. Многовариантный анализ и оптимизация МПЛП

Случайные вариации геометрических параметров МПЛП, обусловленные технологическим процессом, а также поиск оптимальных значений этих параметров делают необходимым многократно вычислять матрицы погонных параметров для достижения требуемого технического результата конечного изделия [18]. Тогда, при многовариантном анализе с использованием приведенной в разделе 1 математической модели, требуется повторять п. 6–9 по числу суммарных изменений величин варьируемых параметров, что приводит к росту вычислительных затрат. На практике число вариаций параметров МПЛП часто достаточно велико, что ведёт к существенному росту суммарных вычислительных затрат и, тем самым, затрудняет эффективное проектирование. Поэтому проектирование МПЛП посредством многовариантного анализа или оптимизации является нетривиальной задачей. Для решения этой проблемы возможны следующие подходы: переход к массивно-параллельным вычислениям, адаптация сетки к особенностям решения, разработка новых и совершенствование известных методов решения СЛАУ [19, 20], их комбинация. Данная работа, как уже было сказано выше, посвящена поиску рационального метода построения сетки для многовариантного анализа МПЛП методом моментов.

## 3. Методы построения сеток

По структуре получаемых сеток методы их построения можно условно разделить на методы построения равномерных и неравномерных сеток. Использование последовательного итерационного уточнения этих сеток приводит к, так называемым, адаптивным сеткам, которые, в большей степени, относятся к неравномерным [21]. При этом считается, что использование таких сеток при расчетах позволяет повысить их точность, не увеличивая числа узлов, тем самым экономя машинные ресурсы [22]. Поэтому рекомендуется сгущать

сетку в подобластях резкого изменения контролируемой величины и тем самым повышать точность её вычисления, а для экономии машинных ресурсов использовать разреженную сетку в областях плавного изменения этой величины. Так, использование излишне густой сетки приводит к существенному увеличению затрат времени на вычисления. Для примера, учащение равномерной сетки в 2 раза ведет примерно к 8-кратному увеличению времени решения СЛАУ методом Гаусса. В связи с этим необходим оптимальный выбор сетки для получения требуемого решения с приемлемой точностью. Отдельно отметим, что существующие подходы в большей степени применимы к трехмерным задачам с треугольными или тетраэдральными сетками и слабо применимы для двумерных задач и поверхностных подынтервальных сеток, как на рисунке 2 [23].

Методы построения адаптивных сеток бывают трёх типов:  $h$ -уточнение,  $p$ -уточнение и  $r$ -уточнение [24]. При  $h$ -уточнении один и тот же тип элементов используется для всей сетки, но размер каждого элемента изменяется. В случае  $p$ -уточнения сетка не изменяется, но порядок исходных базисных функций (например, полиномиальных для метода конечных элементов) увеличивается адаптивно. При  $r$ -уточнении используется тот же тип элементов и их количество, которые не изменяются, но положение узла изменяется для их большего сосредоточения в областях с резкими градиентами решения. Так, для трехмерных сеток известны методы для автоматической корректировки плотности сетки в соответствии с формой и сложностью анализируемой задачи. Известно несколько способов построения трехмерных сеток и критерии оценки их качества при использовании методов моментов [25, 26], конечных элементов [27–31] и разностей [32, 33].

Из трех типов  $h$ -уточнение является самым популярным из-за его простоты [34]. Такое уточнение основано на апостериорной оценке ошибки для каждого элемента сетки. Так, начиная с грубой сетки происходит последовательное её учащение в местах, где ошибка выше определенного порога. Анализ выполняется еще раз с использованием вновь построенной

сетки. Полученные результаты сравниваются с результатами предыдущей итерации для получения разницы между ними. Этот процесс повторяется итерационно, пока разница между результатами двух последовательных итераций не будет ниже определенного порога. При этом, процесс оценки ошибки является вычислительно сложным, поэтому в некоторых случаях его вычислительные затраты могут быть сопоставимы с затратами процесса анализа в целом [35, 36].

В части двумерных сеток одной из рекомендаций является использование ручной сегментации на основании особенностей геометрии структуры, что часто даёт неравномерную сетку [37, 38]. Однако, как показывает практика, такой подход применим только для геометрически простых структур.

Применительно к методу моментов известны подходы к локальному учащению сетки с использованием нескольких правил оценки её качества [39, 40]. При этом, выбор их оптимальных параметров, сильно варьирующихся для разных структур, как и в случае с ручным учащением, делает их слабо применимыми на практике при анализе МПЛП.

Известен подход, названный адаптивным итерационным выбором оптимальной сегментации (АИВОС), являющийся, по сути, представителем семейства методов  $h$ -уточнения, но основанный на равномерном (эквидистантном) учащении сетки. Его эффективность показана при анализе МПЛП [41]. Так, существенно сокращены затраты времени при незначительной потере точности. Сравнение выполнено с «ручной» равномерной сегментацией с длиной подынтервала равной трети от толщины проводника  $t/n$  ( $n=3$  подынтервала на торце проводника). Из-за особенностей распределения зарядов по поверхности проводников и используемых кусочно-постоянных базисных функций такая длина подынтервалов часто считается допустимой для получения приемлемой точности решения [42]. Дальнейшее уменьшение длины подынтервалов ведет к росту вычислительных затрат на получение требуемых значений, при этом их уточнение часто оказывается малозначительным, что будет показано в следующем разделе.

Вернемся к рассмотрению методов из работ [39] и [41] (далее метод 1 и метод 2 соответственно). Далее приведены их алгоритмы в виде общего псевдокода.

*Задать исходные параметры структуры (в т. ч. требуемую точность  $tol$ )*

*Задать начальную длину подынтервалов  $l$*

*Задать максимальное допустимое число итераций  $N_{it}^{max}$*

*Выполнить вычисление значения контролируемой величины  $C_0$*

*Для  $i = 1, \dots, N_{it}^{max}$*

*Уменьшить длину подынтервалов*

*Вычислить значение контролируемой величины  $C_i$*

*Если  $|C_i - C_{i-1}| / |C_{i-1}| > tol$*

*Продолжить вычисление*

*Иначе*

*Выход из цикла*

*Увеличить  $i$*

Прокомментируем строку 6 псевдокода. При реализации метода 2 все подынтервалы, полученные на предыдущей итерации, разбиваются пополам. В методе 1 подынтервалы также делятся пополам, но не все. Так, типовое значение составляет  $p=25\%$  от общего количества подынтервалов с максимальными значениями плотности заряда на них [39]. Главное различие в методах заключается в том, что первый даёт изначально неравномерную сетку, а второй – стремится к равномерной. Очевидно, что при стопроцентном учащении в методе 1, он становится эквивалентен методу 2.

В качестве контролируемой величины может выступать один из коэффициентов электростатической индукции, т.е. диагональный элемент матрицы  $C - c_{kk}$ , где  $k$  – порядковый номер проводника в структуре, как это сделано в [41], или норма Фробениуса матрицы  $C$  – [3].

Работа алгоритма начинается с использования грубой сетки, что требует минимальных затрат и является хорошим начальным приближением. Далее, итерационно происходит учащение сетки и анализ полученных результатов.

Достоинством такого построения сетки является возможность в режиме реального времени контролировать ход моделирования. Если результаты от итерации к итерации изменяются несущественно мало, то итерационный процесс останавливается. Также процесс остановится при достижении максимального допустимого числа итераций  $N_{it}^{\max}$ . Это необходимо для того, чтобы в случае отсутствия сходимости алгоритм корректно и за приемлемое время завершил свою работу.

Наконец, выбор начального шага сетки (длины подынтервалов  $l$ ) оказывает существенное влияние на последующие суммарные затраты времени и памяти. Так, при слишком малом начальном шаге сетки эти затраты могут быть высоки, особенно при малой величине требуемой погрешности.

#### 4. Вычислительный эксперимент

Для акцентирования внимания только на особенностях построения сетки, при решении СЛАУ использован метод Гаусса. При вычислениях использованы пакет GNU Octave и персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор – AMD Ryzen 3 3200G, тактовая частота – 3,6 ГГц; объем ОЗУ – 16 Гб; число ядер – 4.

Сначала оценено влияние равномерной сегментации вида  $t/n$  для трёх МПЛП (далее МПЛП 1 [41], МПЛП 2 и МПЛП 3 [43]), поперечные сечения которых приведены на рисунке 4. Параметры МПЛП 1: толщина проводника  $t=0,035$  мм; ширина центрального проводника  $w=0,89$  мм; ширина боковых проводников  $w_1=4,45$  мм; расстояние между соседними проводниками  $s=0,5$  мм; толщины диэлектриков  $h_1=h_3=0,144$  мм,  $h_2=0,22$  мм; толщина паяльной маски  $h_M=0,03$  мм; относительные диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_{r1}=\varepsilon_{r3}=4,5$ ,  $\varepsilon_{r2}=5,4$ ,  $\varepsilon_{rM}=3,5$ . Параметры МПЛП 2:  $t=0,005$  мм;  $w=0,05$  мм;  $s=0,05$  мм;  $d=0,15$  мм;  $h_1=h_2=h_3=0,05$  мм;  $\varepsilon_{r1}=\varepsilon_{r3}=3,8$ ,  $\varepsilon_{r2}=2$ . Параметры МПЛП 3:  $t=0,018$  мм;  $w=1,6$  мм;  $w_1=1$  мм;  $s=0,51$  мм;  $d=3$  мм;  $h=1$  мм;  $\varepsilon_r=4,5$ .

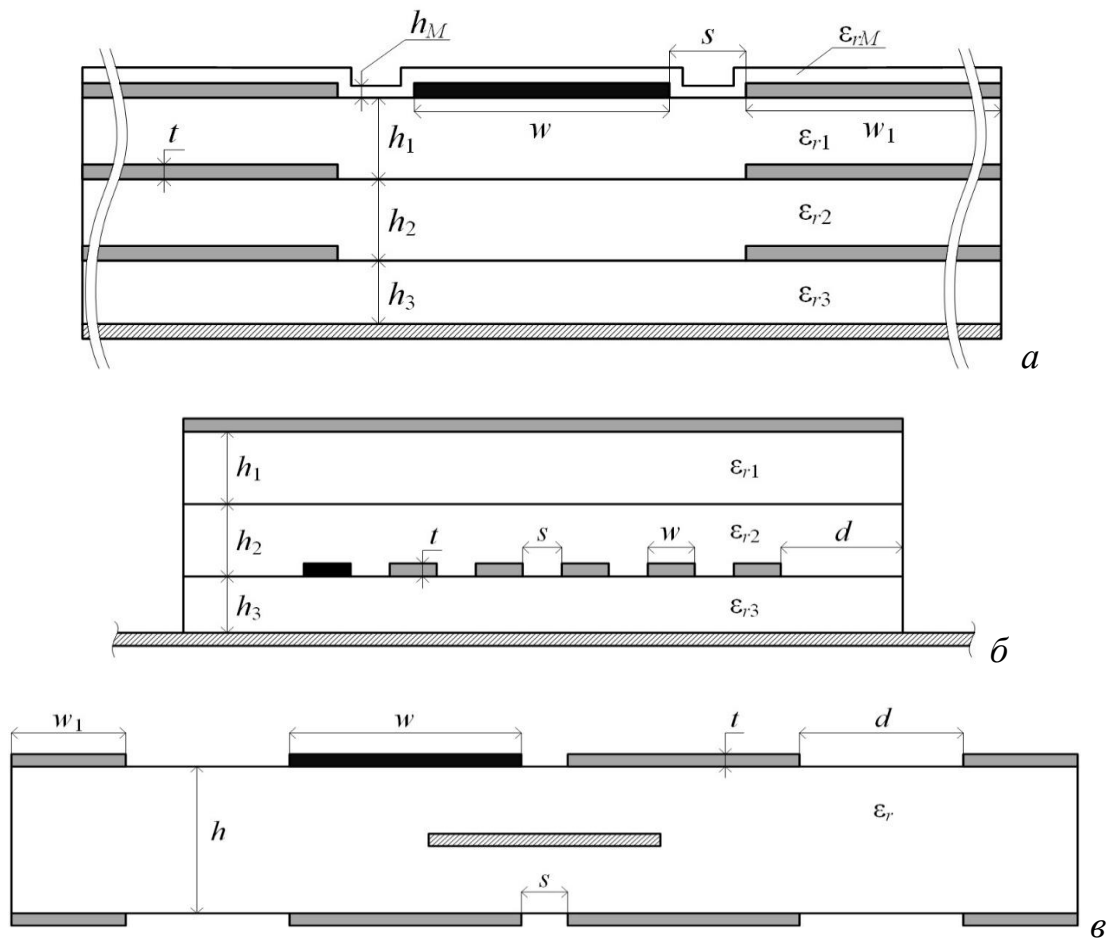


Рис. 4. Поперечное сечение исследуемых структур: 1 (а), 2 (б) и 3 (в) (серым и черным обозначены проводники, белым – диэлектрики).

Полученные результаты (для экономии места только первые строки матриц  $C$ ) при изменении параметра  $n$  приведены в таблицах 1, 2 и 3 соответственно. Здесь и далее в качестве контролируемых величин выступали собственные коэффициенты электростатической индукции контрольных проводников, обозначенных на рисунке 4 черным цветом (этот проводник для всех МПЛП пронумерован первым), т. е. элементы  $c_{11}$ .

Таблица 1. Зависимость элементов строки 1 матрицы  $C$  (пФ/м) МПЛП 1 от  $n$

| $n$ | $N$   | $c_{11}$ | $ c_{12} $ | $ c_{13} $ | $ c_{14} $ | $ c_{15} $ | $ c_{16} $ | $ c_{17} $ |
|-----|-------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1   | 2648  | 128,7856 | 10,3780    | 10,3780    | 7,6477     | 7,6477     | 4,2688     | 4,2688     |
| 3   | 7956  | 128,6525 | 10,5635    | 10,5635    | 7,7476     | 7,7476     | 4,3230     | 4,3230     |
| 5   | 13368 | 127,9622 | 10,5244    | 10,5244    | 7,6846     | 7,6846     | 4,2918     | 4,2918     |
| 7   | 18745 | 127,8564 | 10,5255    | 10,5255    | 7,6792     | 7,6792     | 4,2902     | 4,2902     |



Таблица 2. Зависимость элементов строки 1 матрицы  $\mathbf{C}$  (пФ/м) МПЛП 2 от  $n$ 

| $n$ | $N$   | $c_{11}$ | $ c_{12} $ | $ c_{13} $ | $ c_{14} $ | $ c_{15}  \times 10^4$ | $ c_{16}  \times 10^5$ | $ c_{17} $ |
|-----|-------|----------|------------|------------|------------|------------------------|------------------------|------------|
| 1   | 1622  | 97,4651  | 9,6744     | 0,1347     | 0,0048     | 2,1582                 | 2,5600                 | 22,6833    |
| 3   | 4848  | 98,9526  | 10,0776    | 0,1420     | 0,0051     | 2,0953                 | 0,8090                 | 23,6222    |
| 5   | 8303  | 98,2823  | 10,0367    | 0,1433     | 0,0051     | 2,1114                 | 0,8640                 | 23,7498    |
| 7   | 11930 | 98,2348  | 10,0437    | 0,1432     | 0,0051     | 2,1210                 | 0,8630                 | 23,7925    |

Таблица 3. Зависимость элементов строки 1 матрицы  $\mathbf{C}$  (пФ/м) МПЛП 3 от  $n$ 

| $n$ | $N$   | $c_{11}$ | $ c_{12} $ | $ c_{13} $ | $ c_{14} $ | $ c_{15} $ | $ c_{16} $ | $ c_{17} $ | $ c_{18} $ |
|-----|-------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1   | 2142  | 142,5174 | 10,9488    | 41,5808    | 0,9539     | 5,1370     | 1,4012     | 4,5709     | 1,1860     |
| 3   | 6492  | 141,4274 | 11,7815    | 40,8885    | 1,0344     | 5,4313     | 1,5618     | 4,7797     | 1,3113     |
| 5   | 10870 | 140,9098 | 11,8723    | 40,6935    | 1,0459     | 5,4648     | 1,5864     | 4,7993     | 1,3300     |
| 7   | 15058 | 140,8241 | 11,9284    | 40,6447    | 1,0516     | 5,4851     | 1,5975     | 4,8136     | 1,3387     |

Из таблиц 1–3 видно, что результаты сходятся при учащении сегментации: для каждой из МПЛП переход от  $n=1$  к  $n=3$  приводит к большим изменениям значений элементов матриц  $\mathbf{C}$ , чем переход от  $n=3$  к  $n=5$  и, тем более от  $n=5$  к  $n=7$ . При этом МПЛП 2 отличается худшей поэлементной сходимостью по сравнению с двумя другими линиями: т. к. она характеризуется наличием слабой ёмкостной связи между удаленными друг от друга проводниками, то в соответствующей ей матрице  $\mathbf{C}$  присутствуют элементы, отличающиеся между собой на несколько порядков. Именно элементы с малыми значениями и дают наибольшую поэлементную погрешность (до 69 %). При этом различия в матрицах  $\mathbf{C}$ , оцениваемые как по контролируемой величине ( $\Delta_n^C$ ), так и через матричные нормы в виде

$$\Delta_n = \|\mathbf{C}_{t/(n-2)} - \mathbf{C}_{t/n}\|_F / \|\mathbf{C}_{t/(n-2)}\|_F, \quad (17)$$

где  $\|\cdot\|_F$  – норма Фробениуса, а  $n=3, 5, 7$ , существенно меньше. Так, различия по контролируемой величине и (17) составили (в процентах):

- МПЛП 1 –  $\Delta_3^C=0,10$ ,  $\Delta_5^C=0,54$ ,  $\Delta_7^C=0,08$ ,  $\Delta_3=1,69$ ,  $\Delta_5=0,37$ ,  $\Delta_7=0,15$ ;
- МПЛП 2 –  $\Delta_3^C=1,53$ ,  $\Delta_5^C=0,68$ ,  $\Delta_7^C=0,05$ ,  $\Delta_3=0,10$ ,  $\Delta_5=0,54$ ,  $\Delta_7=0,09$ ;

- МПЛП 3 –  $\Delta_3^C=0,76$ ,  $\Delta_5^C=0,37$ ,  $\Delta_7^C=0,06$ ,  $\Delta_3=0,51$ ,  $\Delta_5=0,56$ ,  $\Delta_7=0,06$ .

Видно, что сегментация  $t/3$  в целом приемлема для получения различия в точности контролируемой величины (элемент  $c_{11}$ ) менее 1% [44]. Поэтому далее для оценки эффективности методов 1 и 2 использована именно она.

Для всех рассмотренных МПЛП произведены вычисления методами 1 и 2 при разной начальной длине подынтервалов, задаваемой как  $l=k\omega$ , где  $k=0,5; 1; 1,5; 2; 3$ . Для метода 1 также изменялся процент разбиваемых подынтервалов  $p=5; 15; 25\%$  (для метода 2  $p=100\%$ ). На основании предварительных вычислений было установлено, что оптимальными по точности и вычислительным затратам значениями параметра  $tol$  для методов 1 и 2 являются  $10^{-3}$  и  $10^{-2}$  соответственно. При вычислениях полагалось  $N_{it}^{max}=30$ . В таблицу 4 сведены результаты вычислений:  $\Delta C = |C - C_{t/3}| / |C_{t/3}|$  (в процентах), где  $C_{t/3}$  и  $C$  – значения  $c_{11}$ , полученные соответственно при сегментации  $t/3$  и методом 1 или 2; отношения объема памяти  $V_{t/3}$  и времени  $T_{t/3}$  при сегментации  $t/3$  к аналогичным значениям  $V$  и  $T$ , полученным соответствующим методом 1 или 2 за число итераций  $N_{it}$ .

Из таблицы 4 видно, что метод 1 дает существенную экономию как машинной памяти, так и времени вычисления. При этом, чем меньше значение  $p$ , тем больше эта экономия. Так, например, при  $p=5\%$  экономия памяти составляет от 137 до 453 раз, а времени – от 35 до 107 раз, а при  $p=25\%$  экономия памяти от 0,7 до 107 раз и времени от 0,3 до 35 раз. Однако, этот метод обладает для исследованных МПЛП достаточно низкой точностью ( $\Delta C$  в большинстве случаев больше 1% и доходит до 18%), что делает его не приемлемым при анализе всех рассмотренных МПЛП. Следует отметить, что корреляция параметров  $l$  и  $\Delta C$  для данного метода мала. Метод 2, напротив, показывает высокую зависимость от параметра  $l$ . Так, одновременно высокой точности ( $\Delta C \leq 1\%$ ) и экономии машинных ресурсов (памяти и времени от 4 до 15 раз) удастся достичь лишь при  $k=2$ . В остальных случаях либо слишком велика погрешность вычисления, либо отсутствует экономия машинных ресурсов. Поэтому далее использован метод 2 и  $k=2$ .

Таблица 4. Результаты использования методов 1 и 2 относительно сегментации при  $t/3$  для МПЛП 1–3

| $k$ | Метод | $p, \%$ | МПЛП 1   |            |             |             | МПЛП 2   |            |             |             | МПЛП 3   |            |             |             |
|-----|-------|---------|----------|------------|-------------|-------------|----------|------------|-------------|-------------|----------|------------|-------------|-------------|
|     |       |         | $N_{it}$ | $\Delta C$ | $V_{t/3}/V$ | $T_{t/3}/T$ | $N_{it}$ | $\Delta C$ | $V_{t/3}/V$ | $T_{t/3}/T$ | $N_{it}$ | $\Delta C$ | $V_{t/3}/V$ | $T_{t/3}/T$ |
| 0,5 | 1     | 5       | 13       | 7,14       | 271,3       | 64,1        | 5        | 6,90       | 137,0       | 45,5        | 23       | 2,90       | 197,5       | 35,0        |
|     |       | 15      | 11       | 8,29       | 52,0        | 33,6        | 7        | 0,37       | 34,2        | 17,3        | 20       | 1,57       | 18,8        | 6,5         |
|     |       | 25      | 15       | 2,78       | 1,9         | 1,0         | 13       | 1,33       | 0,7         | 0,3         | 19       | 14,80      | 1,9         | 0,9         |
|     | 2     | 100     | 6        | 0,18       | 1,9         | 1,9         | 2        | 19,36      | 62,4        | 65,6        | 9        | 0,51       | 0,7         | 0,5         |
| 1   | 1     | 5       | 19       | 1,07       | 224,5       | 76,6        | 10       | 0,07       | 204,9       | 40,5        | 18       | 17,92      | 453,1       | 107,5       |
|     |       | 15      | 17       | 1,44       | 28,2        | 14,6        | 12       | 0,43       | 25,0        | 10,4        | 21       | 1,59       | 15,4        | 5,3         |
|     |       | 25      | 17       | 2,57       | 2,2         | 1,2         | 9        | 0,45       | 15,2        | 9,3         | 19       | 14,80      | 1,9         | 0,9         |
|     | 2     | 100     | 6        | 0,10       | 10,5        | 15,6        | 5        | 1,25       | 3,7         | 3,3         | 9        | 0,44       | 1,0         | 0,8         |
| 1,5 | 1     | 5       | 17       | 1,50       | 407,8       | 92,8        | 11       | 0,78       | 266,8       | 66,7        | 18       | 17,92      | 453,1       | 107,5       |
|     |       | 15      | 16       | 2,20       | 38,8        | 20,1        | 9        | 0,75       | 86,1        | 35,4        | 21       | 1,59       | 15,4        | 5,3         |
|     |       | 25      | 17       | 1,63       | 3,5         | 2,0         | 16       | 0,82       | 1,0         | 0,4         | 19       | 14,80      | 1,9         | 0,9         |
|     | 2     | 100     | 6        | 0,15       | 24,1        | 26,7        | 5        | 1,71       | 7,7         | 7,5         | 8        | 0,36       | 6,7         | 6,0         |
| 2   | 1     | 5       | 20       | 6,15       | 315,4       | 80,7        | 10       | 0,99       | 403,8       | 47,4        | 18       | 17,92      | 453,1       | 107,5       |
|     |       | 15      | 27       | 3,25       | 3,0         | 1,3         | 10       | 0,61       | 106,5       | 30,6        | 21       | 1,59       | 15,4        | 5,3         |
|     |       | 25      | 19       | 0,89       | 1,5         | 0,7         | 7        | 0,84       | 107,3       | 35,2        | 19       | 14,80      | 1,9         | 0,9         |
|     | 2     | 100     | 7        | 0,39       | 15,2        | 15,1        | 6        | 0,82       | 3,6         | 3,5         | 8        | 0,36       | 6,7         | 6,3         |
| 3   | 1     | 5       | 27       | 1,29       | 159,0       | 36,4        | 12       | 3,76       | 397,8       | 104,3       | 18       | 17,92      | 453,1       | 107,5       |
|     |       | 15      | 15       | 0,58       | 100,2       | 53,7        | 11       | 4,31       | 110,3       | 29,6        | 21       | 1,59       | 15,4        | 5,3         |
|     |       | 25      | 18       | 2,41       | 2,7         | 1,5         | 13       | 3,59       | 9,6         | 4,7         | 19       | 14,80      | 1,9         | 0,9         |
|     | 2     | 100     | 7        | 0,20       | 24,1        | 24,6        | 6        | 1,43       | 9,3         | 9,2         | 2        | 62,27      | 18292,6     | 2784,8      |

Для МПЛП 3, представляющей наибольший практический интерес, выполнена оценка эффективности метода 2 относительно сегментации при  $t/3$  на примере раздельного изменения номинальных величин  $t$  и  $w$  в диапазоне  $m$  от минус 5 % до плюс 5 % (дисперсия параметров линии передачи [45]). Первые вычисления выполнены при  $m=0$  % (приведены в таблице 4), вторые –

минус 5 %, третьи – минус 4 % и т. д. (итого 11 вычислений). Полученные результаты аналогично таблице 4 сведены в таблицу 5 кроме  $N_{it}$ , т. к. для всех значений  $t$  и  $w$  потребовалось 8 итераций.

Из таблицы 5 видно, что использование выявленных оптимальных, по критерию минимальных вычислительных затрат, параметров метода 1 позволяет существенно повысить производительность. Так, для 11 вычислений суммарный выигрыш в машинной памяти достиг 6,7 раза, а времени – 8,3 раза, относительно густой и равномерной сетки, как при отдельном изменении  $t$ , так и –  $w$ . При этом очевидно, что при одновременном изменении этих параметров, экономия вычислительных затрат будет еще больше.

Таблица 5. Результаты использования метода 2 при  $k=2$  относительно сегментации при  $t/3$  для МПЛП 3 при изменении  $t$  и  $w$  в диапазонах  $\pm 5\%$

| $m, \%$ | Изменение $t$ |                  |                  |                  | Изменение $w$ |                  |                  |                  |
|---------|---------------|------------------|------------------|------------------|---------------|------------------|------------------|------------------|
|         | $\Delta C$    | $N_{\text{э}}/N$ | $V_{\text{э}}/V$ | $T_{\text{э}}/T$ | $\Delta C$    | $N_{\text{э}}/N$ | $V_{\text{э}}/V$ | $T_{\text{э}}/T$ |
| -5      | 0,37          | 2,72             | 7,4              | 9,2              | 0,28          | 2,55             | 6,5              | 8,0              |
| -4      | 0,07          | 2,69             | 7,2              | 8,9              | 0,30          | 2,56             | 6,5              | 8,1              |
| -3      | 0,36          | 2,66             | 7,1              | 8,8              | 0,31          | 2,56             | 6,6              | 8,1              |
| -2      | 0,07          | 2,64             | 7,0              | 8,6              | 0,33          | 2,57             | 6,6              | 8,2              |
| -1      | 0,07          | 2,61             | 6,8              | 8,4              | 0,35          | 2,57             | 6,6              | 8,2              |
| 1       | 0,08          | 2,56             | 6,6              | 8,1              | 0,38          | 2,59             | 6,7              | 8,3              |
| 2       | 0,36          | 2,54             | 6,4              | 8,0              | 0,40          | 2,69             | 6,7              | 8,3              |
| 3       | 0,36          | 2,51             | 6,3              | 7,8              | 0,42          | 2,60             | 6,8              | 8,4              |
| 4       | 0,09          | 2,48             | 6,2              | 7,6              | 0,43          | 2,61             | 6,8              | 8,4              |
| 5       | 0,36          | 2,46             | 6,1              | 7,5              | 0,45          | 2,61             | 6,8              | 8,4              |

## Заключение

Таким образом, в работе приведено наглядное описание математической модели для вычисления ёмкостной матрицы МПЛП, основанной на использовании квазистатического подхода и метода моментов. Кратко рассмотрены методы адаптивного построения сетки. Выполнено сравнение

двух методов при изменении их параметров и выявлены их оптимальные значения по критерию минимальных вычислительных затрат относительно густой равномерной сетки. Это позволяет экономить вычислительные ресурсы при одновариантном и многовариантном анализе МПЛП в диапазоне её параметров. Так, на примере оценки влияния дисперсии параметров МПЛП на разброс значений её ёмкостной матрицы показано, что эта экономия существенна. При этом использованный метод достаточно просто интегрировать в существующие САПР. Далее целесообразно оценить его эффективность при оптимизации параметров МПЛП.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по проекту FEWM-2020-0039.

### Литература

1. FasterCap – Fast field solvers [Электронный ресурс]. URL: <http://www.fastfieldsolvers.com> (дата обращения: 22.01.2021).
2. FEMM – Finite element method magnetics [Электронный ресурс]. URL: [www.femm.info](http://www.femm.info) (дата обращения: 22.01.2021).
3. Zhou Y., Li Z., Shi W. Fast capacitance extraction in multilayer, conformal and embedded dielectric using hybrid boundary element method. *44th ACM / IEEE Design Automation Conference*. 2007. P. 835–840.
4. Самарский А. А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. Москва, Физматлит. 2005. 320 с.
5. Bermúdez A., Gómez D., Salgado P. *Mathematical models and numerical simulation in electromagnetism*. Cham/Heidelberg/New York/Dordrecht/London: Springer. 2014. 432 p.
6. Григорьев А. Д. *Методы вычислительной электродинамики*. Москва, Физматлит. 2013. 430 с.
7. Maiti C.K. *Computer aided design of micro- and nanoelectronic devices*. Singapore: World Scientific Publishing Company. 2016. 455 p.

8. Заболоцкий А. М., Газизов Т.Р. *Временной отклик многопроводных линий передачи*. Томск, Томский государственный университет. 2007. 152 с.
9. Bhatti A.A. A computer based method for computing the N-dimensional generalized ABCD parameter matrices of N-dimensional systems with distributed parameters. *The twenty-second southeastern symposium on system theory (Cookeville, USA)*. 1990. P.590–593.
10. Shafieipour M., de Silva J., Kariyawasam A. et al. Fast computation of the electrical parameters of sector-shaped cables using single-source integral equation and 2D moment-method discretization. *Proceeding of International Conference on Power Systems Transients (IPST)*. 2017. P.1–6.
11. Djordjevic A.R., Sarkar T.K., Rao S.M. Analysis of finite conductivity cylindrical conductors excited by axially-independent TM electromagnetic field. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1985. Vol.MTT–33. P.960–966.
12. Pant S., Chiprout E. Power grid physics and implications for CAD. *Proceedings of the 43rd Design Automation Conference (DAC)*. 2006. P.199–204.
13. Paul C.R. *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons. 2008. 800 p.
14. Газизов Т.Р. *Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях*. Томск, Изд-во НТЛ. 2003. 212 с.
15. Bazdar M.B., Djordjevic A.R., Harrington R.F. et al. Evaluation of quasi-static matrix parameters for multiconductor transmission lines using Galerkin's method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1994. Vol.42. No.7. P.1223–1228.
16. Rao S.M., Sarkar T.K., Harrington R.G. The electrostatic field of conducting bodies in multiple dielectric media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1984. Vol.32. No.11. P.1441–1448.
17. Scheinfein M.R., Palusinski O.A. Methods of calculation of electrical parameters for electronic packaging applications. *Transactions of the International Society for Computer Simulation*. 1987. Vol.4. P. 187–254.

18. Кечиев Л.Н. *Проектирование печатных плат для цифровой быстродействующей аппаратуры*. Москва, ООО «Группа ИДТ». 2007. 616 с.
19. Yang L., Guo X., Wang Z. An efficient method MEGCR for solving systems with multiple right-hand sides in 3-D parasitic inductance extraction. *Proceedings of the Design Automation Conference*. 2004. P.702–706.
20. Kuksenko S.P., Ahunov R.R., Gazizov T.R. Choosing order of operations to accelerate strip structure analysis in parameter range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol.2015. No.3. P.1–6.
21. Лебедев А.С., Лисейкин В.Д., Хакимзянов Г.С. Разработка методов построения адаптивных сеток. *Вычислительные технологии*. 2002. Т.7. №3. С.29–43.
22. Фуско В. *СВЧ-цепи. Анализ и автоматизированное проектирование*. Пер. с англ. Москва, Радио и связь. 1990. 288 с.
23. Rylander T., Ingelstrom P., Bondeson A. *Computational electromagnetics*. New York: Springer. 2013. 286 p.
24. Meyer F.J., Davidson D.B. Adaptive-mesh refinement of finite-element solutions for two-dimensional electromagnetic problems. *IEEE Antennas and propagation*. 1996. Vol.37. No.5. P.77–83.
25. Das A., Nair R.R., Gope D. Efficient adaptive mesh refinement for MoM-based package-board 3D full-wave extraction. *IEEE 22nd. Conference on Electrical Performance of Electronic Packaging and Systems (EPEPS)*. 2013. P.239–242.
26. Kim S.K., Peterson A.F. Correlation analysis of error estimators for the EFIE. *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*. 2016. P. 315–316.
27. Lee W.H., Kim T.-S., Cho M.H. et al. Content-adaptive finite element mesh generation of 3-D complex MR volumes for bioelectromagnetic problems. *Proceedings of IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference*. 2005. P.4373–4376.

28. Zhao Y., Xiu X.Z., Ho S.L. et al. An adaptive mesh method in transient finite element analysis of magnetic field using a novel error estimator. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2012, Vol.48. No.11. P.4160–4163.
29. Matsutomo S., Noguchi S., Yamashita H. Adaptive mesh generation method utilizing magnetic flux lines in two-dimensional finite element analysis. *IEEE Transactions on magnetics*. 2012. Vol.48. No.2. P.527–530.
30. Noguchi S., Naoe T., Igarashi H. et al. A new adaptive meshing method using non-conforming finite element method. *IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*. 2016. 1 p.
31. Noguchi S., Naoe T., Igarashi H. A new adaptive mesh refinement method in FEA based on magnetic field conservation at elements interfaces and nonconforming mesh refinement technique. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2017. Vol.53. No.6. P.1–4.
32. Liu Y., Sarris C.D. AMR-FDTD: A dynamically adaptive mesh refinement scheme for the finite-difference time-domain technique. *IEEE AP-S International symposium*. 2005. P.134–137.
33. Van Londersele A., de Zutter D., vande Ginste D. Huygens subgridding combined with the 2D fully collocated implicit FDTD method. *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*. 2016. P.2025–2026.
34. Labridis D.P. Comparative presentation of criteria for adaptive finite-element mesh generation in multiconductor eddy-current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2000. Vol.36. No.1. P.267–280.
35. Cendes Z., Shenton D. Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1985. Vol.21. No.5. P.1811–1816.
36. Grätsch T., Bathe K.-J. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers and Structures*. 2005. Vol.83. P.235–265.
37. Dworsky N. *Introduction to numerical electrostatics using MATLAB*. Hoboken, New Jersey. John Wiley and Sons. 2014. 456 p.



38. Sadiku M.N.O. *Numerical techniques in electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press. 2009. 710 p.
39. Makarov S. N., Noetscher G. M., Nazarian A. *Low-frequency electromagnetic modeling for electrical and biological systems using MATLAB*. Hoboken, New Jersey. John Wiley and Sons. 2016. 589 p.
40. Lezhnin E. V., Kuksenko S. P. Algorithm of nonequidistant segmentation of boundaries of conductors and dielectrics for computer-aided design of strip structures. *Proceedings of IEEE 2017 International Multi-conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*. 2017. P.468–471.
41. Аширбакиев Р.И., Салов В.К. Адаптивный итерационный выбор оптимальной сегментации границ проводников и диэлектриков в задачах электростатики. *Доклады ТУСУР*. 2013. №3(29). С.159–161.
42. Gibson W.C. *The method of moments in electromagnetics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC. 2008. 272 p.
43. Черникова Е. Б., Газизов Т.Р. Модальное разложение сверхкороткого импульса в 8-проводных зеркально-симметричных структурах. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2020. № 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.12>.
44. Swanson D.G., Hofer W.J. *Microwave circuit modeling using electromagnetic field simulation*. Norwood, Artech House Publishers. 2003. 474 p.
45. Медведев А. М., Мылов Г.В., Кечиев Л.Н. Проблемы технологического обеспечения параметров линий передачи в МПП. *Технологии ЭМС*. 2012. №3(42). С.1–6.

**Для цитирования:**

Максимов А.Е., Куksenko С.П. Исследование методов построения адаптивных сеток при квазистатическом анализе многопроводных линий передачи методом моментов. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2021. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.1.10>