

Математическое моделирование киральных волноведущих систем

А.Н. Боголюбов, Н.А. Мосунова, Д.А. Петров

Кафедра математики физического факультета МГУ

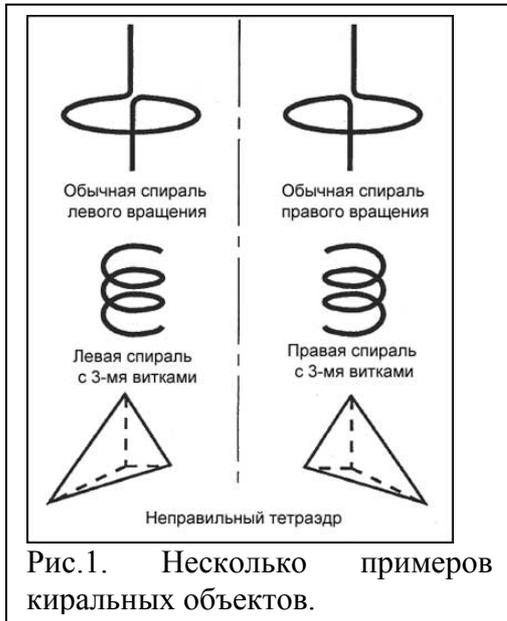
Получена 01.07.2005 г.

Оглавление

<i>Введение</i>	2
<i>Материальные уравнения киральной среды</i>	4
<i>Неограниченная киральная среда</i>	6
<i>Создание киральных сред</i>	7
<i>Киральные волноводы</i>	10
<i>Методы расчета киральных волноводов</i>	16
Метод конечных разностей	16
Метод Бубнова-Галеркина	19
Метод конечных элементов	22
Метод векторных цепей	26
<i>Применение метода векторных цепей для расчета плоско-параллельного кирального волновода</i>	26
<i>Открытый киральный плоско-параллельный волновод</i>	28
Метод функции Грина	31
<i>Разложение волнового поля в биизотропной среде</i>	32
<i>ДФГ электромагнитного типа</i>	35
<i>Применение полученных результатов</i>	36
<i>Заключение</i>	38
<i>Литература</i>	39

Введение

Киральные среды были известны с начала 19 столетия. Термин киральный происходит от греческого слова «рука». Это понятие ввел в науку английский ученый-физик Уильям Томсон. Он определил киральность, как



свойство объекта не совпадать, не совмещаться со своим зеркальным отображением (в плоском зеркале) ни при каких перемещениях и вращениях.

В категорию киральных попадают многие объекты, как природные, так и искусственные. Примерами могут служить молекулы сахаров, аминокислот, ДНК и органических полимеров, относящиеся к природным киральным структурам, а также такие обычные объекты, как проволочная спираль, лист Мёбиуса и неправильный тетраэдр, которые считаются искусственными. Несколько примеров простых киральных объектов представлено на Рис.1.

Среды из киральных молекул (или содержащие киральные объекты) называются киральными. Такие среды хорошо исследованы в оптике, включая кристаллооптику, где они называются активными или гиротропными.

Концепция электромагнитной киральности объединяет как оптическую активность, которая вызывает поворот плоскости поляризации плоских оптических волн, так и циркулярный дихроизм, проявляющийся в изменение вида поляризации волны.

Еще в своих опытах начала 19 столетия известный французский физик Доминик Франсуа Араго показал, что плоскость поляризации линейно поляризованной волны, проходящей через кристалл кварца в направлении, совпадающем с его оптическими осями, поворачивается. Эксперименты Жана Батиста Био выявили зависимость оптической активности от толщины кристалла и от длины падающей волны. Он также обнаружил, что оптическая активность свойственна и некоторым жидкостям. В 1848 году Луи Пастер постулировал, что оптически активные молекулы представляют собой трехмерные киральные объекты, геометрическая форма которых и является причиной оптической активности.

Киральность и связанная с ней оптическая активность начали вновь привлекать внимание современных ученых после микроволновых экспериментов Линдмана [1] и Пикеринга [2]. В микроволновом диапазоне они получили результаты, схожие с аналогичными для оптических частот. Они также разработали макроскопическую модель для явлений, связанных с киральностью, работая в микроволновом диапазоне, а не оптическом, и

используя проволочные спирали вместо киральных молекул. Эти ученые проиллюстрировали молекулярный процесс, ответственный за оптическую активность, пользуясь моделью в микроволновом диапазоне.

В нашей стране киральными средами занимались и занимаются Е.Н. Коршунова, А.Н. Сивов, А.Д. Шатров и другие ученые. В частности, ими получено одно из наиболее существенных свойств, которое киральность проявляет в случае, если система волн в волноводе с параметром киральности равным нулю является вырожденной. В безграничной среде киральность снимает вырождение, существующее между плоскими волнами с различными направлениями линейной поляризации. Собственные волны в киральном волноводе приобретают различные постоянные распространения и вполне определенные состояния поляризации.

На физическом факультете МГУ разработкой численных алгоритмов расчета киральных сред начали заниматься относительно недавно. На кафедре математики исследования в этой области проводят проф. Моденов В.П., проф. Боголюбов А.Н. и их сотрудники. В частности, математическое моделирование прямоугольного волновода, заполненного киральной средой, было выполнено Цветковым И.В. и Ромашиним А.В., которыми была проведена серия расчетов постоянных распространения первой и второй невырожденных мод прямоугольного волновода [3].

В последнее время в связи с прогрессом в области полимерных технологий появились новые синтезированные киральные материалы, которые способствовали развитию интереса к исследованиям в этой области.

Можно выделить множество направлений и научных проблем, исследуемых и решаемых в области электродинамики и оптики киральных сред, имеющих как чисто теоретический интерес, так и серьезное практическое применение, например, в построении интегрированных оптических приборов и микросхем, волноведущих и волнопередающих систем, проектировании антенн и поглощающих покрытий с заданными электродинамическими свойствами, а также во многих других аспектах радиотехники и прикладной электродинамики. Далее некоторые из этих вопросов будут затронуты более подробно. Однако основной целью данной работы является рассмотрение основных методов математического моделирования волноведущих систем с киральным заполнением.

Материальные уравнения киральной среды

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в среде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \vec{E}, \vec{B} - это усредненные по физически малому объему и промежутку времени значения микроскопических полей (напряженность электрического поля и индукция магнитного поля, соответственно). Вводятся также вектор электрической индукции $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ (\vec{P} - макроскопический вектор поляризации среды) и вектор напряженности магнитного поля $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ (\vec{M} - макроскопический вектор намагниченности среды), а ρ, \vec{j} - усредненные плотности заряда и тока свободных носителей зарядов.

Легко убедиться, что система содержит 8 скалярных уравнений и 12 неизвестных. Таким образом, неизвестных больше, чем уравнений, поэтому система недоопределена.

Общие линейные соотношения (материальные уравнения), связывающие векторы электромагнитного поля в произвольной линейной среде можно записать в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \xi\vec{H}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} + \zeta\vec{E}, \quad (1.2)$$

где материальные параметры $\varepsilon, \mu, \xi, \zeta$ - некоторые величины (в общем случае диадные функции частоты). Стоит отметить, что эта запись предполагает гармоническую зависимость полей от времени, то есть, например, $\vec{E}(t) = \vec{E}e^{-i\omega t}$. Такие линейные среды общего вида называются бианизотропными. Приведенные соотношения описывают линейные анизотропные среды и учитывают эффекты пространственной дисперсии первого порядка по волновому вектору плоских волн.

В биизотропных средах материальные параметры являются скалярами или псевдоскалярами. В случае, когда биизотропная среда является взаимной, один из материальных параметров, называемый коэффициентом взаимности (или Теллегена), обращается в ноль. Таким образом, наиболее общая взаимная линейная среда характеризуется тремя комплексными материальными параметрами: ε, μ, χ . Параметр связи электрического и магнитного полей χ называется параметром киральности. Он может быть отличным от нуля только в средах, называемых киральными, которые содержат элементы, обладающие зеркальной симметрией. Итак, изотропная киральная среда является частным случаем бианизотропной среды.

Существует несколько распространенных форм записи материальных уравнений киральной среды:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} - i\chi \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} + i\chi \vec{E},\end{aligned}\quad (1.3)$$

где ε, μ, χ - диэлектрическая постоянная, магнитная постоянная и параметр киральности рассматриваемой киральной среды соответственно.

Другой формой записи материальных уравнений является:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_c \vec{E} + i\xi_c \vec{B} \\ \vec{H} &= i\xi_c \vec{E} + \vec{B} / \mu_c,\end{aligned}\quad (1.4)$$

где $\varepsilon_c = \varepsilon - \chi^2 / \mu$, $\mu = \mu_c$, $\xi_c = -\chi / \mu$ (ξ_c иногда называют киральным адмитансом). В такой форме записи материальных уравнений ε_c зависит от киральности, а в случае обращения параметра киральности в ноль переходит в диэлектрическую постоянную для обычной диэлектрической среды.

Отметим также, что при рассмотрении электромагнитной модели обычной (некиральной) среды полагают, что она описывает свойства сплошной среды. Киральные же свойства связаны с проявлением дискретной структуры среды.

Киральный параметр χ пропорционален отношению $\frac{a}{\lambda}$, где a - линейный

размер частицы-элемента среды, λ - длина волны. При $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ киральные

свойства среды исчезают. Таким образом, учет киральных свойств означает учет влияния «крупинки» среды или пространственной дисперсии. В оптике естественных сред значение отношения $\frac{a}{\lambda}$ оказывается порядка $10^{-3} - 10^{-4}$,

вследствие чего оптическая активность в естественных средах и не нашла своего применения из-за малости эффекта. Исключением можно считать лишь жидкие кристаллы. С развитием новых технологий в производстве искусственных электромагнитных сред величину $\chi = C \frac{a}{\lambda}$ удалось значительно увеличить. В этом случае киральность уже не является малой поправкой, и свойства киральной среды могут кардинально отличаться от свойств некиральной среды.

Неограниченная киральная среда.

Наиболее рациональный способ анализа электромагнитных полей в биизотропных средах основан на введении новых векторов поля, для которых уравнения Максвелла распадаются на две независимые (для случая однородной среды) системы дифференциальных уравнений первого порядка [4]. Этот подход основан на факторизации векторного волнового уравнения. Не имея возможности привести здесь все необходимые выкладки, отметим тот важный факт, что задача нахождения собственных волн в случае гармонической зависимости полей от времени для биизотропной среды сводится к решению двух несвязанных задач для двух обычных изотропных сред. Таким образом, собственные волны в безграничных однородных биизотропных средах оказываются циркулярно поляризованными (право циркулярно поляризованная – RCP и лево циркулярно поляризованная – LCP). Постоянными распространения для киральной среды имеют вид:

$$k_{\pm} = \omega \left[\pm \chi + \sqrt{\varepsilon \mu} \right] \quad (2.1)$$

Для наглядности приведем таблицу, в которой сравниваются характеристики обычной изотропной среды и киральной изотропной среды:

Характеристики	Изотропная среда	Изотропная киральная среда
Материальные уравнения	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} - i \chi \vec{H}$ $\vec{B} = \mu \vec{H} + i \chi \vec{E},$
Уравнение Гельмгольца	$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0$	$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k^2 \vec{E} - 2\omega \chi \nabla \times \vec{E} = 0$
Волновые числа	$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$	$k_{\pm} = \omega \left[\pm \chi + \sqrt{\varepsilon \mu} \right]$
Собственные моды	Линейно поляризованные	Поляризованы циркулярно
Внутренний импеданс	$\eta = \sqrt{\mu / \varepsilon}$	$\eta = \sqrt{\mu / \varepsilon}$
Условия для диссипации энергии	$\text{Im}(\varepsilon) \geq 0$ $\text{Im}(\mu) \geq 0$	$\text{Im}(\varepsilon) \geq 0$ $\text{Im}(\mu) \geq 0$ $\text{Im}(\varepsilon) \text{Im}(\mu) \geq (\text{Im}(\chi))^2$

Создание киральных сред

Поскольку нашей целью является математическое моделирование широкого класса волнующих систем с киральным заполнением, целесообразно будет кратко рассмотреть вопрос о создании таких сред.

В последние годы наблюдается особый интерес к искусственным киральным средам микроволнового диапазона. В ряде теоретических работ [5]-[8] были получены результаты, демонстрирующие несомненную пользу от применения таких материалов, однако, они проводились для произвольного параметра киральности. Чтобы эти результаты были более обоснованными, необходимо исследовать, какие же значения параметра киральности действительно достижимы на практике, и, таким образом, установить возможно ли сделать киральность достаточно большой для всевозможных предполагаемых приложений (материалы, поглощающие излучение, защитные кожухи для антенн, волноводы и антенны). Также важно обнаружить возможные нежелательные побочные эффекты, вносимые киральностью.

Рассмотрим создание некоторых киральных образцов с внедрением спиралей и результаты измерений материальных параметров (комплексная магнитная и диэлектрическая проницаемость и параметр киральности) с использованием цилиндрического волновода [9], [10].

Обычно киральные материалы производят путем включения случайно ориентированных проводящих киральных объектов в подложку из эпоксидной смолы, силиконового каучука или резины [11]-[12]. Киральные объекты получают сворачиванием проводящей проволоки в несколько оборотов.

Эпоксидная смола является прозрачной, что облегчает контроль за включениями. Резину же требуется дегазировать в течение примерно 40 минут для уменьшения числа пузырьков. Спирали добавляют в вязкую смолу по отдельности, а необходимой толщины добиваются использованием нескольких слоев. Процедура позволяет в некоторой степени контролировать ориентацию и концентрацию спиралей, а также уменьшить скопление и осаждение объектов. Требуется немало экспериментов, чтобы установить оптимальное время и температуру для такой процедуры.

Однако большие сложности возникают с очисткой и структурированием материала подложки, а также с получением включений одинаковой формы, размера и равномерностью их дальнейшего распределения в веществе (Рис.2).

После внесения спиралей в подложку случайные неоднородности и очаги анизотропии уже невозможно удалить. Для их исключения были разработаны



Рис.2. Рентгеновская фотография 20-мм кирального слоя в 50-мм киральном волноводе

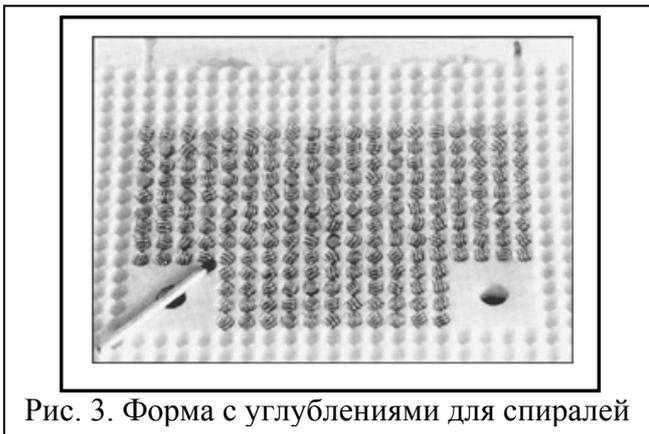


Рис. 3. Форма с углублениями для спиралей

зернистые (с шарообразными частицами) киральные среды, что значительно повысило качество получаемого материала. Для электрической изоляции и случайности ориентации каждая спираль в процессе опрессовки под давлением помещается в диэлектрическую пену. В результате получается объект, имеющий форму шара (размер около 6мм). Затем спирали рассеиваются по тефлоновой матрице (форме) (Рис.3), которая заливается обычным двухкомпонентным пенополиуретаном (за один цикл производится примерно 8400 киральных объектов, которых достаточно, чтобы заполнить цилиндрический волновод длиной 0.79м и 50мм в диаметре). Материал может быть разбавлен случайным добавлением шариков из пены без киральных включений.

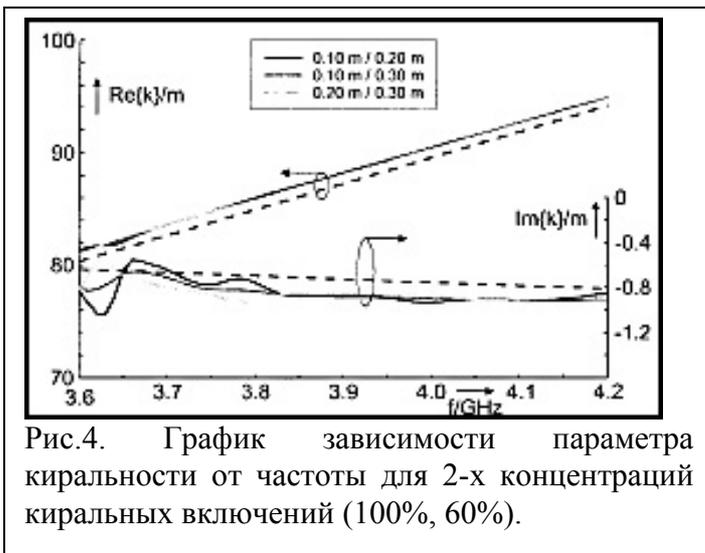


Рис.4. График зависимости параметра киральности от частоты для 2-х концентраций киральных включений (100%, 60%).

Результаты измерений параметра киральности, проведенных для искусственной среды, созданной по описанной выше методике, для различных концентраций киральных включений (100%, 60%) представлены на Рис.4. В работах [9]-[12] предложено несколько методик измерения материальных параметров киральной среды, но, по сути, они являются расширением стандартной процедуры определения комплексных магнитной и диэлектрической проницаемости обычной среды, заполняющей волновод. Методики основаны на специальных свойствах, проявляемых волноводами с киральным заполнением, которые мы рассмотрим более подробно в этом обзоре.

Стоит отметить, что для определения некоторых свойств кирального материала до его производства, были разработаны аналитические методы оценки материальных параметров [13]-[14], которые достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным.

Например, применяется метод, когда киральные включения и материал подложки рассматриваются по отдельности. Сначала пытаются описать взаимодействие электромагнитной волны с киральной частицей. Процесс заключается в расчете поля, рассеянного киральным объектом. А на втором

этапе полученные результаты усредняют для получения электромагнитных свойств всей рассматриваемой среды.

Используя эти методы, можно, в частности, получить характеристики антиотражающих киральных покрытий [13], нанесенных на проводящую поверхность. Оказывается, киральный слой уменьшает мощность отражаемой волны на 8dB в области, составляющей примерно 20% от

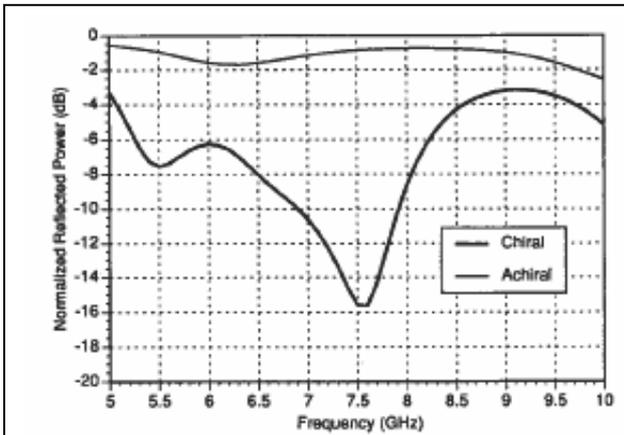


Рис.5. График зависимости мощности отраженного излучения от частоты для киральной пластины, помещенной на проводник, и диэлектрического слоя.

исследуемого частотного диапазона от 5ГГц до 10ГГц. Этот результат демонстрирует, что слой из искусственного кирального материала значительно превосходит по своим антиотражающим характеристикам слой из некиральной подложки (Рис.5).

Отметим, что можно достичь и большой эффективности, если провести оптимизацию материальных параметров среды и толщины антиотражающего слоя. К сожалению, наиболее эффективное поглощение происходит в достаточно узком диапазоне,

близком к резонансной частоте спиралей. Возможно, интервал частот можно расширить, используя спирали нескольких видов или добавив другие киральные объекты.

Киральные волноводы

Как отмечалось ранее, для распространяющихся плоских волн в неограниченной киральной среде существует два типа мод: плоские волны с правой круговой поляризацией (RCP) и левой круговой поляризацией (LCP), имеющие различные волновые числа k_+ и k_- . Если материальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_c \vec{E} + i\xi_c \vec{B}; \\ \vec{H} &= i\xi_c \vec{E} + \vec{B} / \mu_c, \end{aligned} \quad (3.1)$$

то в этом случае волновые числа определяются следующими формулами:

$$k_{\pm} = \pm \omega \mu_c \xi_c + \sqrt{\omega^2 \mu_c \varepsilon_c + (\omega \mu_c \xi_c)^2}. \quad (3.2)$$



Рис.6. Цилиндрический киральный волновод

Рассмотрим цилиндрический волновод с идеально проводящими стенками, направленный параллельно оси z (Рис.6). Для заданных частот ω нужно определить волновое число γ вдоль этой оси. Положим зависимость поля от z внутри волновода в виде $e^{\gamma z}$ (гармоническая зависимость полей от времени подразумевается сразу). Используя уравнения Максвелла и материальные уравнения, можно выразить поперечные

компоненты полей \vec{E}, \vec{H} через их продольные компоненты:

$$\begin{bmatrix} E_x; E_y; H_x; H_y \end{bmatrix}^T = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x}; \frac{\partial E_z}{\partial y}; \frac{\partial H_z}{\partial x}; \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \quad (3.3)$$

где $[a_{ij}]$ - матрица размерности 4 на 4, элементы которой определяются материальными параметрами среды, частотой распространяющейся волны и постоянной распространения, а $h^2 = (\gamma^2 + k_+^2)(\gamma^2 + k_-^2)$.

Затем получают систему дифференциальных уравнений для продольных компонент, в каждом из которых участвует как E_z так и H_z :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + \left[\gamma^2 + \frac{k_+^2 + k_-^2}{2} \right] \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} \pm 2i\omega^2 \mu_c \xi_c \begin{Bmatrix} \mu_c H_z \\ (\varepsilon_c + \xi_c^2 \mu_c) E_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Решение таких систем уравнений, называемых смешанными, достаточно сложно.

Из полученной системы следует очень важное свойство киральных волноводов: поля E_z и H_z внутри волновода могут обращаться в ноль только одновременно, что, в свою очередь, влечет полное исчезновение поля. Другими словами, все распространяющиеся моды в киральном волноводе являются гибридными, и ни ТМ (поперечная магнитная), ни ТЕ (поперечная электрическая), ни ТЕМ (поперечная электромагнитная) моды не могут распространяться по отдельности.

Для получения несмешанной системы в (3.4) можно сделать замену переменных:

$$\begin{cases} E_z = p_1 U_1 + p_2 U_2 \\ H_z = q_1 U_1 + q_2 U_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 - константы, которые нужно выбрать так, чтобы переменные разделились.

Таким образом, получаем систему относительно U_1, U_2 с разделенными переменными, которая более проста для решения, особенно в некоторых частных случаях (отметим, что до этого форма поперечного сечения волновода значения не имела):

$$\begin{cases} \nabla_t^2 U_1 + S_1 U_1 = 0 \\ \nabla_t^2 U_2 + S_2 U_2 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

где $S_1 = k_+^2 + \gamma^2, S_2 = k_-^2 + \gamma^2, \nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Рассмотрим, например, плоско-параллельный киральный волновод, бесконечный в направлениях x и z [10], для которого теоретическое рассмотрение более просто, но вместе с тем основные свойства, характерные для киральных волноводов, сохраняются.

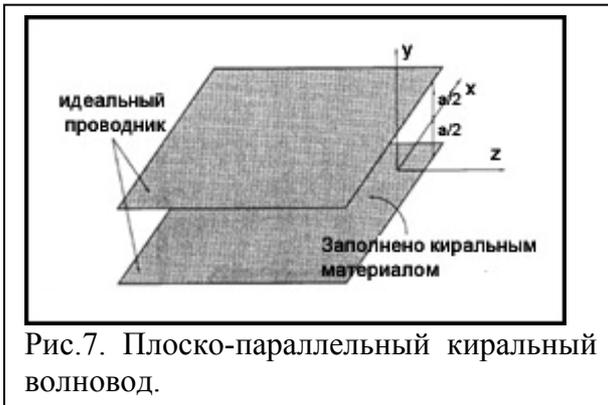


Рис.7. Плоско-параллельный киральный волновод.

Такой волновод состоит из двух параллельных идеально проводящих плоскостей, находящихся на расстоянии a друг от друга, бесконечных в направлениях x и z , область между которыми заполнена изотропным киральным веществом (Рис.7). Пользуясь подходом, описанным ранее, достаточно просто получаем решения системы

дифференциальных уравнений с разделенными переменными:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} \cos(\sqrt{S_1}y) + A_{12} \sin(\sqrt{S_1}y) \\ U_2 &= A_{21} \cos(\sqrt{S_2}y) + A_{22} \sin(\sqrt{S_2}y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решения известны с точностью до констант $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$, которые следует определить. Для этого учитываем граничные условия и приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов, для нетривиального решения которой необходимо отличие от нуля ее определителя. Из этого условия получаем важное соотношение, называемое дисперсионным, из которого определяется постоянная распространения γ ($\gamma = i\beta$) для любой наперед заданной частоты:

$$2\sqrt{\left[1-\left(\frac{\beta}{k_+}\right)^2\right]}\left[1-\left(\frac{\beta}{k_-}\right)^2\right]\left\{1-\cos\left(k_+a\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{k_+}\right)^2}\right)\cos\left(k_-a\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{k_-}\right)^2}\right)\right\}+ \\ +\left\{2-\left(\frac{\beta}{k_+}\right)^2-\left(\frac{\beta}{k_-}\right)^2\right\}\sin\left(k_+a\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{k_+}\right)^2}\right)\sin\left(k_-a\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{k_-}\right)^2}\right)=0. \quad (3.8)$$

Это уравнение можно представить в виде произведения двух множителей: $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2 = 0$, следовательно, уравнение может иметь два решения.

Здесь мы представили γ в виде $\gamma = i\beta$, где β - действительное число, что соответствует волновым модам, распространяющимся в положительном направлении оси z (так как если γ - действительное, то мы получим затухающие моды). Без ограничения общности можно также считать β положительным.

Таким образом, зная постоянную распространения, можно определить значения коэффициентов $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$. Теперь мы полностью определили вид введенных переменных U_1, U_2 , через которые выражаются поперечные значения полей в волноводе.

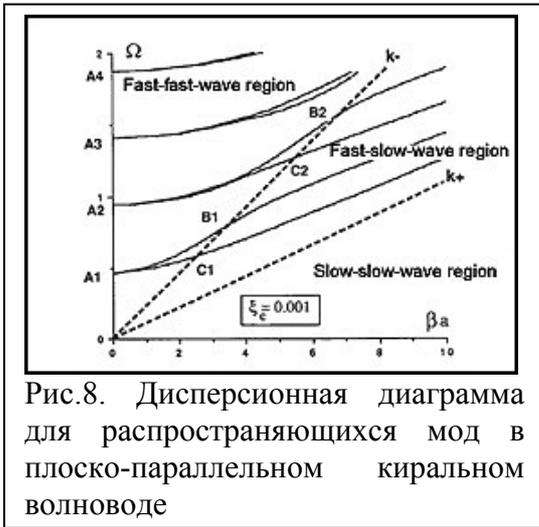


Рис.8. Дисперсионная диаграмма для распространяющихся мод в плоско-параллельном киральном волноводе

Так как есть формулы, позволяющие получить поперечные значения поля в киральном волноводе при известных продольных компонентах, то поле полностью определено.

Так как для неограниченной киральной среды существует два типа волновых чисел k_+ и k_- , то на дисперсионной $\omega - \beta$ диаграмме (диаграмме Бриллюена) выделяют три области для постоянной распространения β (Рис.8).

А именно:

- область быстро-быстрых волн (Fast-Fast-Wave region), где $\beta < k_- < k_+$
- область быстро-медленных волн (Fast-Slow-Wave region), где $k_- < \beta < k_+$
- область медленно-медленных волн (Slow-Slow-Wave region), где $k_- < k_+ < \beta$

Такие названия областей связаны с тем, что фазовая скорость волны, распространяющейся в волноводе, определяется как $v_{p,z} = \omega/\beta$, а для мод в неограниченной киральной среде $v_+ = \omega/k_+$, $v_- = \omega/k_-$. Очевидно, что из неравенств для волновых чисел, приведенных ранее, следуют неравенства и для фазовых скоростей.

График (Рис.8) демонстрирует зависимость безразмерной величины $\Omega \equiv \omega a \sqrt{\mu \epsilon}$ от волнового числа вдоль оси z .

Упомянутые выше области ограничены осями Ω и β и граничат друг с другом по прямым k_+ и k_- .

Частотой отсечки называется такая частота, при которой постоянная распространения β обращается в ноль. Эти частоты определяются из дисперсионного соотношения и для плоского волновода имеют вид:

$$\Omega_c \equiv \omega_c a \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{n\pi}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \xi_c^2 + 1}}, \quad (3.9)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Они обозначены на диаграмме точками A_1, A_2, \dots . Отметим, что в

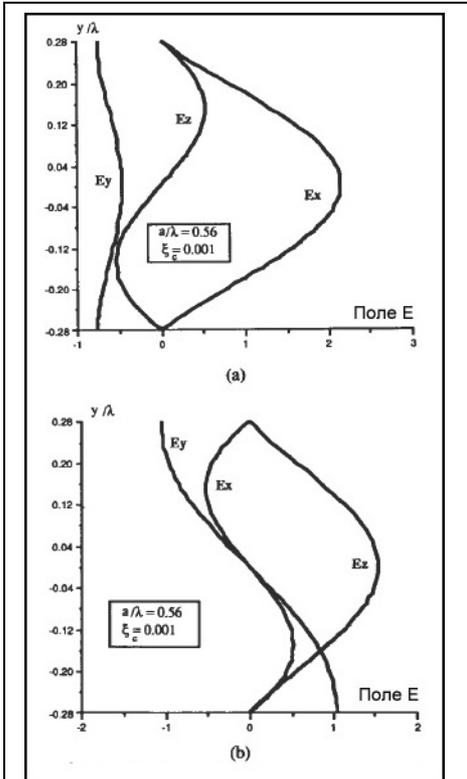


Рис.9. Компоненты электрического поля в плоско-параллельном волноводе в области быстро-быстрых волн. Существует две кривые для каждой частоты отсечки.
а) четная мода;
б) нечетная мода.

киральном волноводе частоты отсечки находятся ближе друг к другу, чем частоты в обычном волноводе без кирального заполнения.

Как уже отмечалось ранее, в киральном волноводе не поддерживаются ТЕМ моды, поэтому наиболее низкая частота отсечки отлична от нуля.

Из дисперсионной диаграммы видно, что изображенные на ней кривые, имеющие одну начальную точку, раздваиваются с ростом величины β . Другими словами, для любой заданной частоты, большей частоты отсечки основной моды, существует пара мод, называемых бифуркированными, с различными постоянными распространения и одной и той же частотой отсечки. Это свойство также следует из дисперсионного соотношения (3.8), в котором левую часть можно представить в виде произведения двух множителей. Так как необходимо, чтобы левая часть равнялась нулю, что выполняется при равенстве нулю одного из множителей ($\Delta_1 = 0$ или $\Delta_2 = 0$), то мы получаем два значения постоянных распространения для фиксированной частоты. Отсюда и следует

явление, называемое бифуркацией мод. Это важнейшее свойство киральных волноводов.

Заметим, что дисперсионные кривые в области быстро-быстрых волн пересекают линию k_- в двух точках, которые отмечены на диаграмме, как $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots$. Точки B_1, B_2, \dots относятся к случаю, когда $\Delta_1 = 0$, а C_1, C_2, \dots , когда $\Delta_2 = 0$.

Из того, к какому виду относится данная мода, можно определить тип компонент поля. Например, если в диапазоне быстро-быстрых волн взять одну из раздвоенных мод, отвечающую $\Delta_1 = 0$, то E_z и H_z являются нечетными функциями координаты y , а E_x, E_y, H_x, H_y - четные функции y .

Такая ветвь поля отвечает четной моде. На Рис.9 изображен вид поля, отвечающий приведенному примеру. Существует также и вторая ветвь поля, отвечающая нечетной моде.

В области быстро-медленных волн LCP плоские волны распространяются вдоль оси z с постоянной распространения, большей k_- , поэтому эти волны считаются медленными волнами в волноводе. Такие волны в волноводе с обычным изотропным заполнением не удовлетворяют граничным условиям. В киральном же волноводе существует как LCP волна, так и RCP. Комбинация этих двух типов волн позволяет существовать физическому решению, удовлетворяющему граничным условиям. Это еще одна особенность киральных волноводов.

Оказывается, что в плоско-параллельном киральном волноводе не существует мод, отвечающих области медленно-медленных волн. Это значит, что невозможна такая ситуация, когда оба типа волн (RCP и LCP) распространяются как медленные волны вдоль оси z .

Нужно отметить, что в некиральном случае, когда параметр киральности ξ_c обращается в ноль, прямые k_+ и k_- становятся одной прямой k . Дисперсионные кривые стремятся к этой прямой асимптотически, точки C_1, C_2, \dots и B_1, B_2, \dots объединяются и стремятся в бесконечность, а соответствующие им частоты становятся бесконечно большими. При этом одна из раздвоенных мод переходит в ТМ моду, а другая в ТЕ моду для плоского волновода с обычным изотропным заполнением. Хорошо известно, что для обычного плоского волновода дисперсионные кривые для ТЕ и ТМ мод совпадают, поэтому пропадает явление бифуркации мод, что полностью согласуется со сказанным ранее.

Итак, мы отметили ряд черт, характерных для плоского кирального волновода, бесконечного в направлениях x и z (они также свойственны и киральным волноводам другой геометрии), которые имеют потенциальное применение в интегральных оптических устройствах, телекоммуникационных электронных системах и элементах микросхем. Оптические киральные волноводы могут стать новым видом диэлектрических волноводов в интегральной оптике.

Киральные волноводы прекрасно подходят для применения в направленных ответвителях, которые также используются в качестве оптических переключателей. Основная проблема заключается в передаче энергии из одного волокна в другое, скажем, из волновода А в прилегающий волновод В. Хорошо известно, что максимальная передача энергии от А к В происходит, когда выполнены условия согласования фаз, то есть волновые числа волноводов А и В одинаковы. Так как киральный волновод обладает свойством бифуркации мод даже в одномодовом исполнении, то на любой рабочей частоте существует две моды с различными волновыми числами, распространяющиеся по волноводу А. В этом случае, для оптимальной передачи энергии из волновода А в В будет достаточно равенства постоянной распространения только одной из мод в А и постоянной распространения в В.

Таким образом, использование киральных компонентов позволяет достичь большей гибкости и надежности при разработке направленных ответвителей и световых переключателей.

Так как в прямоугольных киральных волноводах, в отличие от их некиральных аналогов, не могут поддерживаться моды с нулевой частотой отсечки, то они могут быть использованы в качестве антенных подложек и покрытий, позволяя значительно уменьшить мощность поверхностных волн, а следовательно, увеличить КПД антенны.

Методы расчета киральных волноводов.

Для многих приложений требуются методы, которые позволили бы с высокой гарантированной точностью определить характеристики распространения и поля мод в волноведущих системах. Однако для систем со сложным анизотропным, а тем более киральным заполнением точные аналитические решения можно получить только для сильно ограниченного класса объектов. В этом случае необходимо применить численные методы, математическое и компьютерное моделирование. В нашем обзоре мы сосредоточим свое внимание на нескольких методах, достаточно хорошо зарекомендовавших себя при моделировании волноведущих систем со сложным анизотропным заполнением.

Метод конечных разностей

Одним из самых мощных и универсальных методов численного решения задач расчета волноведущих систем со сложной геометрией и сложным, в частности, киральным заполнением является метод конечных разностей [15]. Этот метод позволяет создавать высокоэффективные алгоритмы для решения как прямых задач расчета волноведущих систем, так и обратных задач синтеза подобных систем [16].

Остановимся кратко на основных моментах применения метода конечных разностей к расчету волноведущих систем, общих для всех волноведущих систем [17].

Можно выделить два класса задач, методика применения метода конечных разностей для которых совершенно различна. Первый класс – это задачи возбуждения, заключающиеся в расчете неоднородных по длине волноведущих систем, таких как ответвители, согласующие переходы, изгибы, волноводные трансформаторы и т.д. Под неоднородностями при этом подразумеваются как неоднородности геометрии волноведущей системы, так и неоднородности заполняющей ее среды. Второй класс – это спектральные задачи, заключающиеся в расчете однородных по длине волноведущих систем с неоднородной геометрией поперечного сечения и произвольным изменением свойств заполнений среды в поперечном направлении.

При использовании метода конечных разностей в задачах возбуждения возможны различные подходы. В случае локального характера неоднородности волноведущей системы исходную задачу можно свести к задаче в ограниченной области, используя парциальные условия излучения [18]. Для решения полученной конечно-разностной задачи применяются прямые и итерационные методы. При этом поскольку оператор исходной задачи как правило является несамосопряженным и незнакоопределенным, то, во-первых, необходимо использовать модифицированные итерационные методы с комплексными итерационными параметрами и, во-вторых, использовать метод немонотонной прогонки,

позволяющий вести вычисления в тех случаях, когда метод монотонной прогонки не работает.

Необходимо также отметить подходы, основанные на замене исходной эллиптической системы уравнений на близкую к ней систему, для которой корректна постановка задачи Коши и возможно использование устойчивых алгоритмов для её численного решения. В этом отношении интерес представляют методы параболического уравнения и опорной волны. Другой подход получения устойчивых алгоритмов заключается в регуляризации уравнения Гельмгольца и в использовании алгоритма ограничения спектра и выделения спектральной полосы [17].

При применении метода конечных разностей для решения спектральных волновых задач можно выделить два основных подхода. Во-первых, построение консервативных конечно-разностных схем с помощью метода баланса с использованием прямой постановки задачи. Во-вторых, применение проекционно-сеточных методов, в частности, метода конечных элементов.

Применение метода конечных разностей к расчету волноведущих систем с киральным заполнением мы проиллюстрируем на примере прямоугольного волновода, для которого проанализируем свойства распространяющихся мод и построим дисперсионные кривые для первых двух мод.

Рассмотрим прямоугольный киральный волновод со сторонами a и b и с идеально проводящими стенками. Как и в случае плоско-параллельного кирального волновода (3.4), бесконечного в направлениях x и z , рассмотренного ранее, продольные компоненты E_z и H_z электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} должны удовлетворять уравнению Гельмгольца:

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + \left[\gamma + \frac{k_+^2 + k_-^2}{2} \right] \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} \pm 2i\omega^2 \mu_c \xi_c \begin{Bmatrix} \mu_c H_z \\ (\varepsilon_c + \xi_c^2 \mu_c) E_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

А поперечные компоненты поля $\vec{E}_t = (E_x \ E_y)$ и $\vec{H}_t = (H_x \ H_y)$ удовлетворяют уравнению [7],[19]:

$$(\gamma^2 + k_+^2)(\gamma^2 + k_-^2) \begin{pmatrix} \vec{E}_t \\ \vec{H}_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{T}}^1 & \bar{\bar{T}}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_t E_z \\ \nabla_t H_z \\ e_z \times \nabla_t E_z \\ e_z \times \nabla_t H_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где

$$\bar{\bar{T}}^1 = \begin{pmatrix} \gamma \left(\frac{k_+^2 + k_-^2}{2} + \gamma^2 \right) & -2\omega^2 \mu_c^2 \xi_c \gamma \\ \frac{2j\omega^2 \mu_c^2 \xi_c \gamma}{\eta_c^2} & \gamma \left(\frac{k_+^2 + k_-^2}{2} + \gamma^2 \right) \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\bar{\bar{T}}^2 = \begin{pmatrix} \omega \mu_c \xi_c (-\gamma^2 + k_+ k_-) & -j\omega \mu_c (\gamma^2 + k_+ k_-) \\ j\omega \mu_c (\gamma^2 + k_+ k_-) \eta_c^2 & \omega \mu_c \xi_c (-\gamma^2 + k_+ k_-) \end{pmatrix}, \quad \eta_c = \eta / \sqrt{1 + \eta^2 \xi_c^2} \quad - \quad \text{внутреннее}$$

сопротивление киральной среды, $\eta = \sqrt{\mu_c / \varepsilon_c}$.

Обозначим через \bar{Q} прямоугольное сечение волновода $\bar{Q} \equiv \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ и введем сетку $\bar{\omega}_{h_x h_y} = \bar{\omega}_{h_x} \times \bar{\omega}_{h_y}$, где $\bar{\omega}_{h_x}$ и $\bar{\omega}_{h_y}$ - одномерные равномерные сетки по x и y с шагами h_x и h_y соответственно. Для аппроксимации уравнений (4.1) со вторым порядком $\underline{O}(|h|^2)$, где $|h|^2 = h_x^2 + h_y^2$, используем следующие разностные уравнения:

$$\begin{aligned} L[u] \pm 2i\omega^2 \mu_c^2 \xi_c^2 u &= 0, \\ L[v] \pm 2i\omega^2 \mu_c^2 \xi_c (\varepsilon_c + \xi_c^2 \mu_c) v &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $u = E_z$, $v = H_z$, а оператор $L[u]$ определяется следующим образом:

$$L[u] = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + \left(\gamma + \frac{k_+^2 + k_-^2}{2} \right) u_{i,j}, \quad (4.4)$$

где $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$.

Уравнения (4.3), рассматриваемые во внутренних узлах введенной сетки, необходимо дополнить граничными условиями, которые ставятся в граничных узлах.

На Рис.10 и Рис.11 приведены дисперсионные кривые прямоугольного кирального волновода. Как и при аналитическом рассмотрении плоскопараллельного волновода, на рисунках видно, что частоты отсечки меньше в киральном случае, чем в некиральном. На графиках можно различить три области: область быстро-быстрых, быстро-медленных и медленно-медленных волн. Наблюдается также явление бифуркации мод для моды, которая сводится к TE_{11} моде в некиральном случае, но наблюдается отсутствие бифуркации для моды, которая приближает некиральную TE_{10} моду. Это можно было ожидать. Так как кривая TE_{11} соответствует, на самом деле, обеим модам TE_{11} и TM_{11} в некиральном случае, и так как киральность влияет на TE и TM моды по-разному, то дисперсионные кривые не совпадают, когда параметр киральности не равен 0. Однако у TE_{10} моды нет дубликата TM_{10} в некиральном случае, что объясняет, почему в киральном случае эквивалентная дисперсионная кривая не бифуркируется.

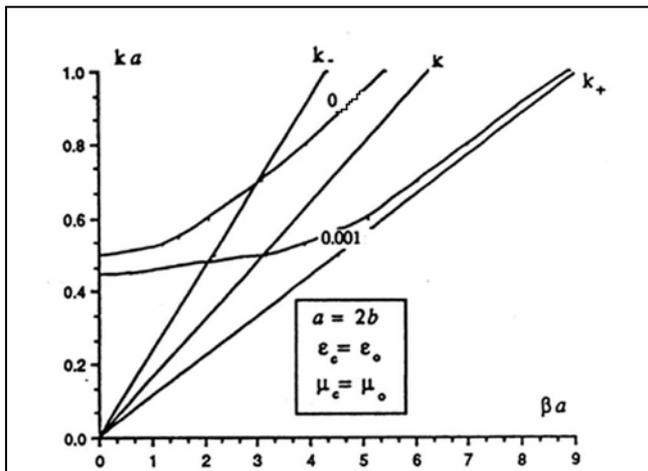


Рис.10. Дисперсионная кривая для прямоугольного волновода со сторонами $a = 2b$. В некиральном случае первая мода – TE_{10} . Нарисована эта мода и эквивалентная мода в киральном случае.

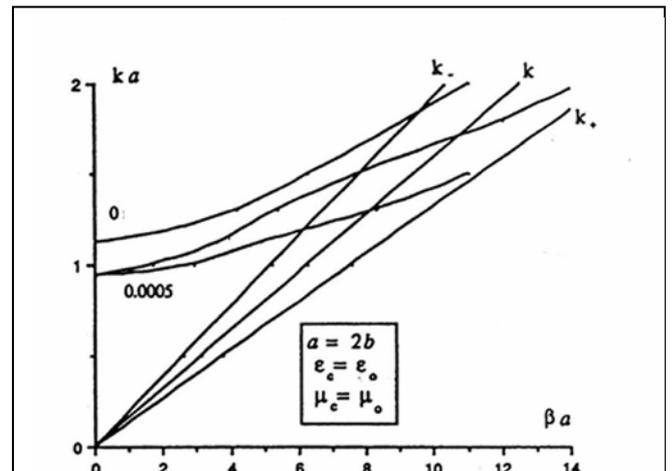


Рис.11. Дисперсионная кривая для прямоугольного волновода ($a = 2b$). Нарисована TE_{11} мода в некиральном случае и эквивалентная мода в киральном случае.

Таким образом, для кирального прямоугольного волновода численно показано, что бифуркация наблюдается для тех мод, которые в пределе некиральной среды приближались TE и TM волны.

Метод Бубнова-Галеркина.

В 1915 году Б.Г. Галеркин опубликовал статью, где предложил приближенный метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Этот метод был применен им к большому числу задач о равновесии стержней и пластин. Несколько ранее И.Г. Бубнов указал на аналогичный метод расчета для приближенного решения вариационных задач, который трактовался им как возможное видоизменение алгоритма метода Ритца. Отличительной особенностью рассуждений Б.Г. Галеркина являлось, во-первых, то, что он не связывал развиваемый им метод с непосредственным решением вариационных задач и считал его общим для решения дифференциальных уравнений; во-вторых, в задачах равновесия он дал трактовку своему методу на основе начала возможных перемещений. Именно эти идеи оказались весьма плодотворными не только применительно к решению задач строительной механики, но и вообще в математической физике.

Метод Галеркина (или Бубнова-Галеркина), а также галеркинская (или "слабая") форма постановки задачи решения дифференциальных уравнений широко известны. В наши дни они лежат в основе алгоритмов решения большого числа задач математической физики из области механики, термодинамики, электромагнетизма, гидродинамики и многих других областей. Создано большое число программных комплексов, реализующих алгоритм метода Галеркина.

Рассмотрим основные положения метода Галеркина более подробно. Пусть дано уравнение с некоторыми краевыми условиями (для определенности возьмем краевые условия I-го рода):

$$A[u(x)] = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \quad (5.1)$$

Будем искать приближенное решение в виде суммы:

$$u(x) \approx y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (5.2)$$

где $\varphi_0(x)$ - некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (5.1), а $\varphi_k(x)$, $1 \leq k < \infty$ - некоторая система линейно-независимых функций, полная в классе непрерывных функций, определенных на отрезке $[a; b]$ и обращающихся в нуль на концах отрезка.

Возьмем вместо $u(x)$ приближенное решение в виде (5.2) и потребуем, чтобы выполнялось условие ортогональности невязки к базисным функциям:

$$\int_a^b \{A[y_n(x)] - f(x)\} \varphi_k(x) dx = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.3)$$

Это дает нам алгебраическую систему для определения коэффициентов c_k .

Найдя из нее коэффициенты, получим приближенное решение

В.П. Моденовым и В.А. Ромашиным для расчета постоянных распространения кирального прямоугольного волновода применялся метод, аналогичный методу Галеркина [3]. Основная идея этого подхода заключается в следующем.

Рассмотрим бесконечный волновод постоянного прямоугольного сечения. Линейные размеры сторон обозначим как a и b . Введем прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость OXY совпадала с поперечным сечением, а координата z исчислялась вдоль продольной оси волновода.

Будем решать задачу на собственные значения для однородной системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = -ik\vec{D} \\ \text{rot } \vec{E} = ik\vec{B} \end{cases} \quad (5.4)$$

с граничным условием I-го рода (идеально проводящие стенки):

$$[\vec{E} \times \vec{n}]_{\Sigma} = 0, \quad (5.5)$$

где \vec{n} - нормаль к боковой поверхности волновода Σ , а $k = \frac{\omega}{c}$.

Материальные уравнения киральной среды возьмем в следующем наиболее общем виде:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= a_{11}(\varepsilon, \mu, \chi) \vec{E} + a_{12}(\varepsilon, \mu, \chi) \vec{H} \\ \vec{B} &= a_{21}(\varepsilon, \mu, \chi) \vec{E} + a_{22}(\varepsilon, \mu, \chi) \vec{H} \end{aligned} \quad (5.6)$$

где ε и μ - комплексные электрическая и магнитная проницаемость соответственно, а χ - действительный параметр киральности. Матрица коэффициентов в (5.6) не должны быть вырожденной и коэффициенты должны удовлетворять специальным предельным соотношениям, чтобы при

устремлении χ к нулю киральная среда вырождалась в диэлектрик. Подставляя материальные уравнения в систему уравнений Максвелла и учитывая регулярность рассматриваемой волноводной системы вдоль оси z , получаем задачу на собственные значения для определения постоянных распространения.

В соответствие с идеей метода Галеркина, приближенное решение задачи мы будем искать в виде:

$$\begin{cases} \vec{E}_t^N = \sum_{n=1}^N A_n^N \vec{E}_{nt} \\ \vec{H}_t^N = \sum_{n=1}^N B_n^N \vec{H}_{nt} \end{cases}, \quad (5.7)$$

где A_n^N и B_n^N – неопределенные коэффициенты. Система вектор-функций $\{\vec{E}_{nt}, \vec{H}_{nt}\}$ представляет собой поперечные части нормальных волн регулярного волновода с однородным диэлектрическим заполнением, которые могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{E}_{nt}^\circ = \frac{i\gamma_n^\circ}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \vec{\nabla} \Phi_n & \vec{E}_{nt}^M = ik\sqrt{\mu} \cdot \vec{\nabla} \Psi_n \\ \vec{H}_{nt}^\circ = -ik\sqrt{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} \Phi_n & \vec{H}_{nt}^M = \frac{i\gamma_n^M}{\sqrt{\mu}} \cdot \vec{\nabla} \Psi_n \end{cases}, \quad (5.8)$$

где $\gamma_n^\circ = \sqrt{k^2 \varepsilon \mu - \alpha_n^2}$, $\gamma_n^M = \sqrt{k^2 \varepsilon \mu - \beta_n^2}$.

Функции Φ и Ψ являются решениями краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta \Phi_n + \alpha_n^2 \Phi_n = 0 \\ \Phi_n|_C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \Psi_n + \beta_n^2 \Psi_n = 0 \\ \left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial \vec{n}} \right|_C = 0 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Можно показать, что построенная таким образом система $\{\vec{E}_{nt}, \vec{H}_{nt}\}$ является полной. Для того чтобы значения $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ представляли собой точное решение системы уравнений Максвелла нужно, чтобы после подстановки этих значений система уравнений (5.4) удовлетворялась тождественно, а это эквивалентно следующему требованию ортогональности:

$$\begin{cases} \iint_S \left\{ [\vec{\nabla} \times \vec{H}]_t - ik [a_{11} \vec{E}_t + a_{12} \vec{H}_t] \right\} \vec{E}_{mt}^* ds = 0 \\ \iint_S \left\{ [\vec{\nabla} \times \vec{E}]_t + ik [a_{21} \vec{E}_t + a_{22} \vec{H}_t] \right\} \vec{H}_{mt}^* ds = 0 \end{cases}, \quad (5.10)$$

где индекс « t » означает проекцию вектора на плоскость, перпендикулярную оси z .

Подставляя в (5.10) разложения (5.7), получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $2N$ относительно A_n^N и B_n^N , коэффициенты которой вычисляются через интегралы. Для волновода прямоугольного поперечного сечения остается два ненулевых интеграла.

Таким образом, получена СЛАУ вида $A(\chi, \lambda)\bar{x} = 0$. Требуется найти такие $\lambda(\chi)$, при которых указанная система имела бы решение. Решение этой задачи сводится к отысканию корней уравнения $\det A(\chi, \lambda) = 0$. Данное уравнение решается методом редукции к задаче Коши.

Была проведена серия расчетов постоянных распространения первой и второй невырожденных мод прямоугольного волновода. Во всех рассмотренных режимах присутствовала одна распространяющаяся волна без вырождения. Оказалось, что мнимая часть постоянной распространения убывает с увеличением коэффициента киральности, то есть среда становится более прозрачной. Интересно поведение второй невырожденной моды в прямоугольном волноводе с увеличением коэффициента киральности. При некотором значении параметра киральности затухающая мода становится распространяющейся.

Метод конечных элементов.

Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод для решения самых разнообразных задач математической физики и техники. Популярность этого метода объясняется простотой его физической интерпретации, а также ясностью и четкостью численного алгоритма, что существенно облегчает программирование сложных задач математической физики [20].

В своей основе метод конечных элементов является вариационным, или в более широком плане, проекционным методом [21]. Его возникновение связано с классическими работами Б.Г. Галеркина, И.Г. Бубнова и В. Ритца.

Математические основы метода конечных элементов были сформулированы известным математиком Р. Курантом в 1943 году. Исходная область, в которой ищется решение, разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых используются, как правило, четырехугольники или треугольники. Решение локально аппроксимируется кусочно-полиномиальными функциями. Делая подобласти достаточно малыми, либо выбирая достаточно высокую степень полиномов, можно добиться того, чтобы аппроксимирующая функция достаточно точно передавала локальное поведение решения. Этот метод может применяться для областей произвольной формы и граничных условий общего вида, причем возможно нерегулярное разбиение области. Таким образом, на расположение элементов при разбиении области не накладываются ограничения, что позволяет применять метод конечных элементов без использования глобальной фиксированной системы координат.

В проекционно-сеточных методах используется слабая формулировка исходной задачи, когда искомое решение должно удовлетворять не дифференциальной краевой задаче, а некоторому интегральному соотношению. Локальная аппроксимация решения аналогична разложению его по системе финитных базисных функций, носителями которых являются подобласти разбиения (конечные элементы). В силу выбора системы

базисных функций коэффициенты разложения оказываются равными значениям разлагаемой функции в вершинах многоугольников разбиения (узлах сетки). Для определения этих коэффициентов используется либо вариационный подход, когда коэффициенты находятся из условия минимизации функционала (методы типа Ритца), или проекционный подход, когда коэффициенты определяются из проекционных соотношений (метод типа Галеркина). В результате исходная задача сводится к системе алгебраических уравнений весьма высокого порядка с сильно разреженной матрицей, то есть к разностной схеме. Таким образом, проекционно-сеточные методы, как это и следует из их названия, являются комбинацией собственно проекционных методов и конечно-разностных (сеточных) методов. Полученная в результате разностная задача (схема) обрабатывается в дальнейшем стандартными методами, разработанными в теории разностных схем.

Первые попытки применения метода конечных элементов к расчету волноведущих систем относятся к середине шестидесятых годов прошлого века. К этому времени техника этого метода была хорошо разработана, и он успешно применялся для решения граничных задач механики. Были построены достаточно эффективные алгоритмы и на их основе созданы программы для обработки разреженных матриц, возникающих при решении методом конечных элементов начально-краевых задач. Первые работы были посвящены расчетам с помощью метода конечных элементов металло-диэлектрических волноводов, затем разработанная в этих работах техника была обобщена на открытые волноведущие структуры с произвольной формой поперечного сечения.

При применении метода конечных элементов к расчету волноведущих систем выяснилось, что не все получаемые решения имеют физический смысл и соответствуют реально распространяющимся модам [22]. Проблема борьбы с фиктивными решениями, называемыми часто «духами», является одной из актуальных и сложных. Существуют два основных подхода к борьбе с ними: апостериорный, когда истинные моды отделяют от фиктивных после процесса вычислений, и априорный, когда используются такие постановки задач, при которых фиктивные решения не возникают [23], [24], [25]. Одним из наиболее эффективных методов борьбы с нефизическими решениями является использование в методе конечных элементов смешанных конечных элементов [17].

Одним из перспективных подходов в плане применения метода конечных элементов к математическому моделированию волноведущих систем является использование суперэлементов. Этот метод был предложен в работах Л.Г. Страховой и Р.П. Федоренко более 25 лет назад и использовался для решения ряда сложных задач диффузии, теории упругости, кинетики ядерных реакций и в некоторых других областях [26]. Отметим, что хотя метод суперэлементов был предложен достаточно давно, теоретически он исследован сравнительно слабо. В этой связи значительный интерес представляет работа [27].

В качестве примера применения метода конечных элементов для расчета волновода с киральным заполнением можно привести работу [28]. Благодаря введению дополнительных граничных условий на нормальные составляющие поля, автору удалось избавиться от появления фиктивных решений и создать весьма экономичный алгоритм, гарантирующий хорошую точность вычислений.

Рассмотрим произвольный волновод, заполненный киральной средой, взяв материальные уравнения среды в виде (эта форма аналогична форме (1.4)):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 [\varepsilon] \vec{E} + i\xi_c \vec{B} \\ \vec{H} &= i\xi_c \vec{E} + [\mu_0 [\mu]]^{-1} \vec{B} \end{aligned} \quad (6.1)$$

где \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , ε_0 , μ_0 , $[\varepsilon]$, $[\mu]$, ξ_c - напряженности электрического и магнитного поля, индукции электрического и магнитного поля, диэлектрическая проницаемость вакуума, магнитная проницаемость вакуума, относительная диэлектрическая проницаемость и относительная магнитная проницаемость (матрицы 3x3) и параметр киральности соответственно. К уравнениям системы уравнений Максвелла и уравнениям (6.1), рассматриваемым в некоторой области Q , необходимо добавить граничные условия на поверхности и, если необходимо, условия сопряжения. По аналогии с методом конечных элементов для некиральных сред, запишем уравнения Максвелла в интегральной форме. Предполагая временную зависимость в виде $\exp(-i\omega t)$, получим из первых двух уравнений системы (1.1):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} = i\omega \mu_0 [\mu] (\vec{H} - i\xi_c \vec{E}) \\ \nabla \times \vec{H} &= -i\omega \vec{D} = -i\omega [(\varepsilon_0 [\varepsilon] + \xi_c^2 \mu_0 [\mu]) \vec{E} + i\xi_c \mu_0 [\mu] \vec{H}] \end{aligned} \quad (6.2)$$

Умножим уравнения (6.2) на достаточно гладкие функции \vec{H} и \vec{E} и проинтегрируем по всей области Q , где ищется решение. Разобьем область Q на малые подобласти (элементы) и запишем результат в виде суммы интегралов по конечным элементам:

$$\begin{aligned} \sum_e \iint_e (\vec{E}^* \cdot (i\nabla \times \vec{H} - \omega [(\varepsilon_0 [\varepsilon] + \xi_c^2 \mu_0 [\mu]) \vec{E} + i\xi_c \mu_0 [\mu] \vec{H}]) + \vec{H}^* \cdot \\ \cdot (-i\nabla \times \vec{E} - \omega \mu_0 [\mu] (\vec{H} - i\xi_c \vec{E}))) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Применим в (6.3) формулу интегрирования по частям, учитывая граничные условия на поверхности S и условия на границе всех элементов. Тогда можно показать, что оба требования: необходимое требование непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей и дополнительное условие на нормальные составляющие векторов индукции электрического и магнитного полей будут выполнены явно.

Построим систему базисных функций и разложим решение и функции \vec{H} и \vec{E} по этой системе. Используя стандартную процедуру метода Галеркина [29], получаем следующую задачу на собственные значения:

$$(\omega[P] + \beta[Q] + [R])(Y) = \{0\}, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{Y} = (\{E_x\}, \{E_y\}, \{E_z\}, \{H_x\}, \{H_y\}, \{H_z\})^T$ - вектор-столбец, элементами которого являются значения компонент электрического и магнитного полей в узлах сетки.

Расписывая (6.3) в покомпонентной форме, можно получить выражения для квадратных разреженных матриц $[P]$, $[Q]$, $[R]$. Заметим, что для недиссипативных структур эти матрицы самосопряженные.

Наиболее важное свойство задачи (6.4) – это разреженность её матрицы. Такая особенность гарантирует, что максимальное число ненулевых матричных элементов в каждой строке не зависит от размера матрицы. Следовательно, для задач с большим количеством вычислений можно использовать технику обработки разреженных матриц, что сэкономит значительную часть времени и повысит эффективность метода [30].

С помощью описанного процесса достигается ряд преимуществ: отсутствие фиктивных мод («духов»), разреженность матриц в задаче на собственные значения и возможность обрабатывать как постоянную распространения, так и собственную частоту как собственные значения спектральной задачи. Таким образом, задача на собственные значения (6.4) содержит в себе, как ω -постановку, так и β -постановку алгебраической проблемы собственных значений.

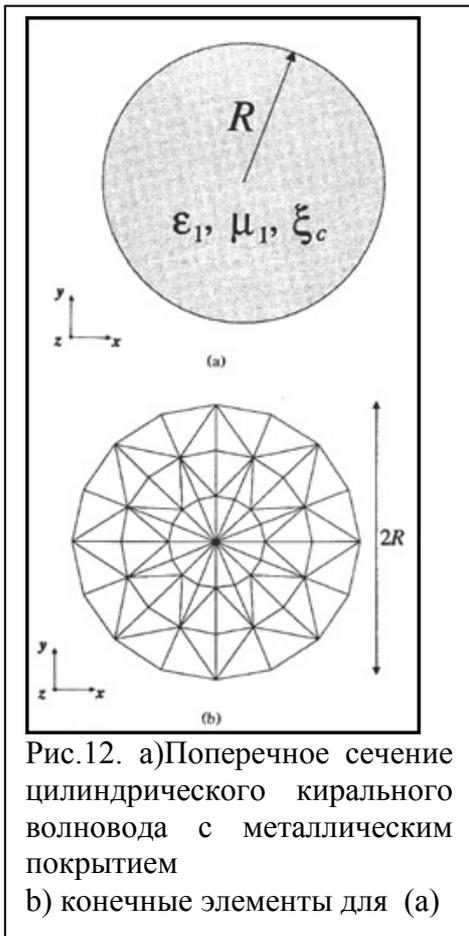


Рис.12. а) Поперечное сечение цилиндрического кирального волновода с металлическим покрытием
б) конечные элементы для (а)

Соответствие между результатами, полученными по МКЭ, и точным решениям оказалось очень хорошим.

Например, рассмотрим киральный цилиндрический волновод. Система, изображенная на Рис.12, представляет собой волновод радиуса R , заполненный киральной средой, стенки которого являются идеально проводящими. На Рис.12(б) показано разбиение области, в которой ищется решение, на конечные треугольные элементы (триангуляция области). С помощью метода конечных элементов были построены дисперсионные кривые для основной моды $HE_{1,1}$ и мод более высокого порядка $EH_{1,1}, HE_{2,1}$.

Так как все моды кирального волновода являются гибридными, то обозначение $EH_{m,n}$ используется для мод, которые в некиральном случае превращаются в $TM_{m,n}$ моды обычного волновода, а $HE_{m,n}$ - для мод, переходящих в $TE_{m,n}$. Здесь, n и m означают азимутальное и радиальное квантовые числа, где n предполагает азимутальную зависимость в виде $e^{in\Phi}$, m означает номер моды.

радиальное квантовые числа, где n предполагает азимутальную зависимость в виде $e^{in\Phi}$, m означает номер моды.

Дисперсионные кривые исследуемого волновода изображены на рис.13, где крестиками обозначены результаты, полученные при помощи метода конечных элементов, а сплошная линия показывает точное решение, полученное из дисперсионного уравнения. Нетрудно заметить, что результаты прекрасно согласуются друг с другом.

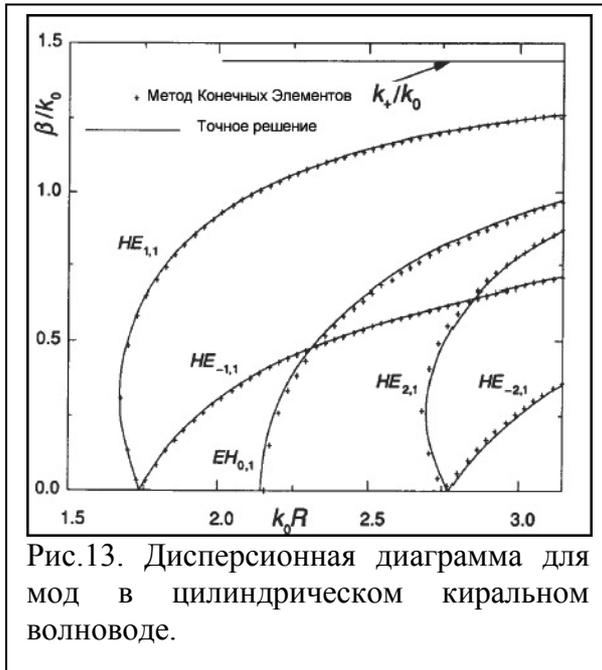


Рис.13. Дисперсионная диаграмма для мод в цилиндрическом киральном волноводе.

Отметим некоторые специфические черты кирального волновода, которые проявляются при его моделировании методом конечных элементов:

- Отсутствие чистых ТЕ и ТМ мод, то есть, все моды являются гибридными или смешанными.
- Каждая киральная мода разделяется на две ветви с различными постоянными распространения, зависящие от знака n , однако, частоты отсечки для двух таких ветвей

одинаковые (явление бифуркации мод).

- Существует «обратная область», где фазовые и групповые скорости имеют противоположный знак.
- Для больших частот, при параметре киральности $\xi_c > 0$ ($\xi_c < 0$) постоянные распространения стремятся к k_+ (k_-) (постоянные распространения для неограниченной киральной среды).

Таким образом, многие характерные свойства, наблюдаемые для плоско-параллельного и прямоугольного киральных волноводов, сохраняются и для цилиндрического волновода.

Метод векторных цепей

Применение метода векторных цепей для расчета плоско-параллельного кирального волновода

Ядром метода векторных цепей является уравнение, содержащее диадную матрицу передачи, которое связывает тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля на противоположных сторонах слоя. Эти соотношения содержат всю информацию о слое и постоянных распространения волн, а матрицы очень полезны при анализе плоских стратифицированных структур, потому что каждый слой может быть представлен своей матрицей, а для получения матрицы, описывающей всю структуру, достаточно будет перемножить матрицы всех слоев.

При решении задач электродинамики наряду с системой единиц CGS часто используют систему «Си», поэтому будет целесообразно рассмотреть в этом разделе обзор её применение. Материальные уравнения для киральной среды принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} - i\chi \sqrt{\varepsilon\mu} \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} + i\chi \sqrt{\varepsilon\mu} \vec{E}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Диадные матричные выражения, связывающие тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на противоположных сторонах пластины, содержат всю необходимую информацию о волноводе и его постоянных распространения. Все соотношения приведены в двумерном пространстве Фурье с постоянной распространения, взятой в качестве переменной Фурье. В зависимости от того, какой набор компонент поля известен, соотношения принимают различный вид. В данном случае, будем использовать следующие выражения:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_{t+} \\ \vec{n} \times \vec{H}_{t+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}_{t-} \\ \vec{n} \times \vec{H}_{t-} \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

которые определяют зависимость между тангенциальными компонентами электрического и магнитного полей на верхней (индекс «+») и нижней (индекс «-») поверхности пластины. Таким образом, если поля на нижней стороне пластины известны, выражение (7.2) дает нам поля на верхней стороне и наоборот, если взять обратную матрицу передачи. Диадные компоненты $\bar{a}_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ получены в работе [31]:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \frac{1}{2} \left[(\cosh(\beta_+ d) + \cosh(\beta_- d)) \bar{I}_t - \left(\frac{k_+}{\beta_+} \sinh(\beta_+ d) - \frac{k_-}{\beta_-} \sinh(\beta_- d) \right) \vec{n} \times \bar{I}_t + \right. \\ &\left. + \frac{\sinh(\beta_+ d)}{k_+ \beta_+} - \frac{\sinh(\beta_- d)}{k_- \beta_-} \bar{K} \bar{K} \times \vec{n} \right], \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= -i \frac{\eta}{2} \left[(\cosh(\beta_- d) - \cosh(\beta_+ d)) \vec{n} \times \bar{I}_t - \left(\frac{k_-}{\beta_-} \sinh(\beta_- d) + \frac{k_+}{\beta_+} \sinh(\beta_+ d) \right) \bar{I}_t + \right. \\ &\left. + \frac{\sinh(\beta_- d)}{k_- \beta_-} + \frac{\sinh(\beta_+ d)}{k_+ \beta_+} \bar{K} \bar{K} \right], \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{21} &= -i \frac{1}{2\eta} \left[(\cosh(\beta_- d) - \cosh(\beta_+ d)) \vec{n} \times \bar{I}_t - \right. \\ &\left. - \left(\frac{k_-}{\beta_-} \sinh(\beta_- d) + \frac{k_+}{\beta_+} \sinh(\beta_+ d) \right) \bar{I}_t + \frac{\sinh(\beta_- d)}{k_- \beta_-} + \frac{\sinh(\beta_+ d)}{k_+ \beta_+} \bar{K} \times \vec{n} \bar{K} \times \vec{n} \right], \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{22} &= \frac{1}{2} \left[(\cosh(\beta_- d) + \cosh(\beta_+ d)) \bar{I}_t - \right. \\ &\left. - \left(\frac{k_+}{\beta_+} \sinh(\beta_+ d) - \frac{k_-}{\beta_-} \sinh(\beta_- d) \right) \vec{n} \times \bar{I}_t + \frac{\sinh(\beta_+ d)}{k_+ \beta_+} - \frac{\sinh(\beta_- d)}{k_- \beta_-} \vec{n} \times \bar{K} \bar{K} \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Двумерная переменная Фурье в плоскости образца обозначена \bar{K} . Для плоских волн она равна постоянной распространения волн через пластину и удовлетворяет равенству:

$$\beta_{\pm} = \sqrt{K^2 - (k_{\pm})^2}, \quad (7.7)$$

где β_{\pm} - это ортогональная компонента постоянной распространения по отношению к плоскости пластины. В формулах (7.3)-(7.6) $\bar{I}_i = \frac{\bar{K} \cdot \bar{K}}{K^2} + \frac{\bar{K} \times \bar{n} \bar{K} \times \bar{n}}{K^2}$ обозначает двумерную единицу диадности, а $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

Открытый киральный плоско-параллельный волновод

Рассмотрим киральную пластину толщины d с относительными материальными параметрами ε_c, μ_c , параметром $n_c = \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}$ и параметром киральности χ , помещенную в однородную некиральную среду с характеристиками $\varepsilon_u, \mu_u, n_u = \sqrt{\varepsilon_u \mu_u}$ и $\varepsilon_l, \mu_l, n_l = \sqrt{\varepsilon_l \mu_l}$ в полупространствах над и под пластиной соответственно.

Для моделирования киральной пластины можно использовать эквивалентные диадные матричные компоненты. Два полупространства над и под пластиной соответствуют двум диадным импедансам $\bar{Z}_{cj}, j = u, l$ или адмитансам \bar{Y}_{cj} , являющимися двумерными обратными матрицами характеристических импедансов. Импедансы имеют следующий вид:

$$\bar{Z}_{cj} = i \frac{k_j \eta_j}{\beta_j} \frac{\bar{K} \times \bar{n} \bar{K} \times \bar{n}}{K^2} - i \frac{\beta_j \eta_j}{k_j} \frac{\bar{K} \bar{K}}{K^2} = Z_{ci}^{TE} \frac{\bar{K} \times \bar{n} \bar{K} \times \bar{n}}{K^2} + Z_{ci}^{TM} \frac{\bar{K} \bar{K}}{K^2}, j = u, l \quad (7.8)$$

где $\beta_j = \sqrt{K^2 - k_j^2}, j = u, l$ и введены стандартные обозначения: $k_j = k_0 \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$ и $\eta_j = \sqrt{\mu_0 \mu_j / \varepsilon_0 \varepsilon_j}, j = u, l$. Индексы TE и TM относятся к TE - и TM -поляризованным полям. Соответствующие адмитансы можно записать в следующей форме:

$$\bar{Y}_{cj} = \bar{Z}_{cj}^{-1} = -i \frac{\beta_j}{k_j \eta_j} \frac{\bar{K} \times \bar{n} \bar{K} \times \bar{n}}{K^2} + i \frac{k_j}{\beta_j \eta_j} \frac{\bar{K} \bar{K}}{K^2} = Y_{ci}^{TE} \frac{\bar{K} \times \bar{n} \bar{K} \times \bar{n}}{K^2} + Y_{ci}^{TM} \frac{\bar{K} \bar{K}}{K^2}, j = u, l \quad (7.9)$$

На поверхности пластины наложим импедансные граничные условия:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{t+} &= -\bar{Z}_{cu} \cdot \bar{n} \times \bar{H}_{t+}, \\ \bar{E}_{t-} &= \bar{Z}_{cl} \cdot \bar{n} \times \bar{H}_{t-}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Использование уравнения (7.2) и исключение тангенциальных компонент электрического поля приводит к равенству:

$$\left(\bar{Z}_{cu} \cdot \bar{a}_{21} \cdot \bar{Z}_{cl} + \bar{Z}_{cu} \cdot \bar{a}_{22} + \bar{a}_{11} \bar{Z}_{cl} + \bar{a}_{12} \right) \cdot \bar{n} \times \bar{H}_{t-} = 0. \quad (7.11)$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение, если диадный определитель в скобках равен 0, что приводит к характеристическому уравнению для определения постоянной распространения киральной пластины. Группируя диады следующим образом:

$$\bar{\bar{a}}_{ij} = a_{ij}^{TM} \frac{\bar{K}\bar{K}}{K^2} + a_{ij}^{TE} \frac{\bar{K} \times \bar{n}\bar{K} \times \bar{n}}{K^2} + a_{ij}^{ME} \frac{\bar{K}\bar{K} \times \bar{n}}{K^2} + a_{ij}^{EM} \frac{\bar{n} \times \bar{K}\bar{K}}{K^2}, \quad (7.12)$$

и используя уравнения (7.3)-(7.6) и определенные свойства симметрии диад $\bar{\bar{a}}_{ij}$, получаем, что постоянную распространения волн можно определить, решив следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(Z_{cu}^{TM} Z_{cl}^{TM} a_{12}^{TM} + (Z_{cu}^{TM} + Z_{cl}^{TM}) a_{11}^{TM} + a_{12}^{TM} \right) \cdot \\ & \cdot \left(Z_{cu}^{TE} Z_{cl}^{TE} a_{21}^{TE} + (Z_{cu}^{TE} + Z_{cl}^{TE}) a_{11}^{TE} + a_{12}^{TE} \right) + \\ & + \left(Z_{cu}^{TM} Z_{cl}^{TE} a_{21}^{ME} + Z_{cu}^{TM} a_{22}^{ME} + Z_{cl}^{TE} a_{11}^{ME} + a_{12}^{ME} \right) \cdot \\ & \cdot \left(Z_{cl}^{TM} Z_{cu}^{TE} a_{21}^{EM} + Z_{cu}^{TE} a_{22}^{EM} + Z_{cl}^{TM} a_{11}^{EM} + a_{12}^{EM} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Аналогичное уравнение можно записать для адмитансов.

В случае кирального заполнения, как уже неоднократно упоминалось ранее, чистых ТЕ и ТМ-мод, как в некиральном случае, существовать не может и все моды – гибридные. После определения диад $\bar{\bar{a}}_{ij}$ и граничных условий, формулы (7.13) можно применять для любых плоско-параллельных волноводов, имеющих произвольный тип изотропного и определенный тип анизотропного поверхностного импеданса.

Если верхнее и нижнее полупространства идентичны $\bar{Z}_{cu} = \bar{Z}_{cl}$, характеристическое уравнение принимает более простую форму:

$$\begin{aligned} & \left((Z_{cu}^{TM})^2 a_{21}^{TM} + 2Z_{cu}^{TM} a_{11}^{TM} + a_{12}^{TM} \right) \cdot \left((Z_{cu}^{TE})^2 a_{21}^{TE} + 2Z_{cu}^{TE} a_{11}^{TE} + a_{12}^{TE} \right) + \\ & \left((\eta_u)^2 a_{12}^{ME} + Z_{cu}^{TM} a_{11}^{EM} + Z_{cu}^{TE} a_{11}^{ME} + a_{12}^{ME} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

После некоторых преобразований характеристическое уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & 2\omega^2 u_+ u_- (1 - \chi^2) \left\{ (n_c^2 - n_u^2)^2 - \left[(n_c^2 + n_u^2)^2 + 4n_c^2 n_u^2 \right] \cos u_+ \cos u_- \right\} + \\ & + \left\{ \omega^2 (n_c^2 + n_u^2)^2 \left[u_+^2 (1 - \chi)^2 + u_-^2 (1 + \chi)^2 \right] - 4 \left[u_+^2 u_-^2 n_u^4 + \omega^4 n_c^4 (1 - \chi^2)^2 \right] \right\} \times \\ & \times \sin u_+ \sin u_- + 4(n_c^2 + n_u^2) \omega u_- (1 - \chi) \left[u_+^2 n_u^2 - \omega^2 n^2 (1 + \chi)^2 \right] \cos u_- \sin u_+ \\ & + 4(n_c^2 + n_u^2) \omega u_+ (1 + \chi) \left[u_-^2 n_u^2 - \omega^2 n_c^2 (1 - \chi)^2 \right] \cos u_+ \sin u_- = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Нормированные постоянные (нормированная частота V , нормированная постоянная распространения b и параметры u, ω, u_{\pm}) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= d\sqrt{k^2 - k_u^2} = \sqrt{u^2 + \omega^2} & u &= d\sqrt{k_c^2 - K^2} \\ \omega &= d\sqrt{K^2 - k_u^2} & b &= \frac{\omega}{V} & u_{\pm} &= d\sqrt{k_{\pm}^2 - K^2}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $k_c = k_0 n_c$.

В других работах (например, [32]) открытый плоско-параллельный киральный волновод исследовался, используя совершенно противоположный метод: поля в волноводе и внешней области выражались, как комбинация

экспоненциальной функции с неизвестными коэффициентами. Характеристическое уравнение для распространяющихся мод решалось после наложения требования непрерывности на поверхности образца. Характеристическое уравнения, полученное таким способом, совпадает с (7.15), что подтверждает действенность метода векторных цепей.

Открытый плоско-параллельный киральный волновод был изучен другим способом в работе [33]. Характеристическое уравнение получалось с помощью приравнивания определителя системы из восьми линейных однородных алгебраических уравнений к нулю, и вследствие сложной природы определителя, явная форма характеристического уравнения получена не была. Однако в работе [32] было показано, что требования непрерывности для полей на поверхности пластины уменьшают число уравнений до 4, так что результирующее характеристическое уравнение можно получить гораздо проще.

В работе [32] было показано, что уравнение (7.15) можно разделить на 2 части: одна соответствует симметричным или четным TE - и TM -модам, а другая – антисимметричным или нечетным TE - и TM -модам некирального дубликата данной пластины.

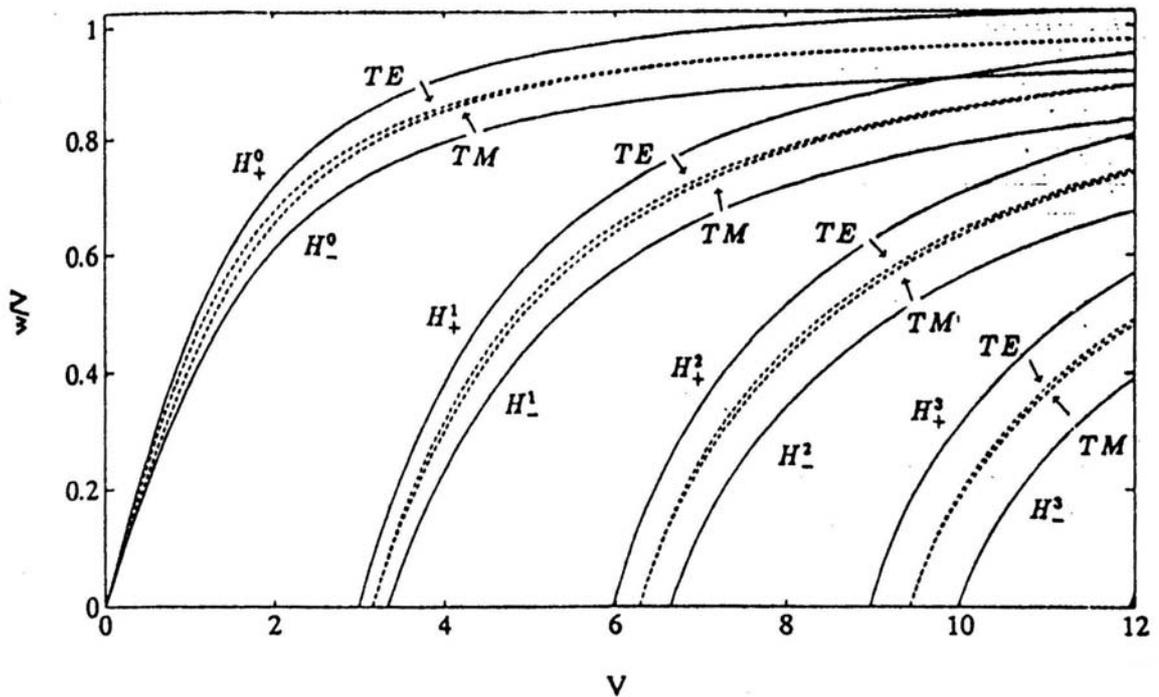


Рис.14. Дисперсионные кривые для киральной пластины, введённой в однородную среду. Пунктирные кривые обозначают TE- и ТМ-моды для соответствующей некиральной пластины. Сплошные кривые обозначают дисперсионные кривые для гибридных мод киральной пластины.

На Рис.14 видно, как киральность влияет на дисперсионные характеристики открытого кирального волновода. Все частоты отсечки, кроме основной моды, смещаются, и TE и ТМ кривые, которые практически вырождались, теперь сдвинуты далеко друг от друга.

Метод функции Грина

Рассмотрим прямоугольный киральный волновод. Используя материальные уравнения:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + i\chi \vec{B} \\ \vec{H} &= i\chi \vec{E} + \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{aligned} \quad (8.1)$$

и используя уравнения Максвелла, получаем уравнение Гельмгольца для электрического поля в киральной среде:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - 2\omega\mu\chi \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = i\omega\mu \vec{J}. \quad (8.2)$$

Можно ввести две ортогональные векторные функции $M_{\varepsilon mn}(\hbar)$ и $N_{\varepsilon mn}(\hbar)$, которые определяют ДФГ (диадную функцию Грина) [34]. В киральной среде оператор ротора в уравнении (8.2) переводит одну волновую функцию в другую. Как было замечено в работе [35], для модифицированных и

нормированных волновых функций $W_{\epsilon_{mn}}(\hbar)$ и $V_{\epsilon_{mn}}(\hbar)$, оператор ротора в соотношении (8.2) становится просто линейным оператором. Эту пару нормированных векторных волновых функций можно использовать, чтобы построить ДФГ:

$$V_{\epsilon_{mn}}(\hbar) = \frac{M_{\epsilon_{mn}}(\hbar) + N_{\epsilon_{mn}}(\hbar)}{\sqrt{2}}, \quad (8.3)$$

$$W_{\epsilon_{mn}}(\hbar) = \frac{M_{\epsilon_{mn}}(\hbar) - N_{\epsilon_{mn}}(\hbar)}{\sqrt{2}}. \quad (8.4)$$

Отметим, что по определению, $W_{\epsilon_{mn}}(\hbar)$ и $V_{\epsilon_{mn}}(\hbar)$ - это решения однородного волнового уравнения только при определенном аргументе k . Например, подставляя $V_{\epsilon_{mn}}(\hbar)$ обратно в однородное уравнение (8.2), мы удовлетворяем следующему уравнению:

$$k^2 - 2\omega\mu\chi k - \omega^2\mu\epsilon = 0. \quad (8.5)$$

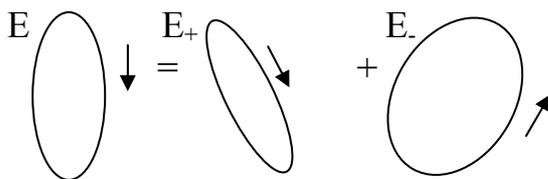
Аналогично, подставляя $W_{\epsilon_{mn}}(\hbar)$ в однородное уравнение (8.2), получаем:

$$k^2 + 2\omega\mu\chi k - \omega^2\mu\epsilon = 0. \quad (8.6)$$

Причем эти функции применимы только к сферическим и цилиндрическим геометриям, где четные и нечетные волновые функции удовлетворяют граничным условиям Дирихле или Неймана. Но вышеупомянутый метод нельзя использовать для получения ДФГ в прямоугольном волноводе, так как результирующая линейная комбинация лишь частично удовлетворяет граничным условиям Дирихле и Неймана.

Разложение волнового поля в биизотропной среде

В однородной среде поле можно представить в виде двух слагаемых, каждое из которых представляет собой поле для изотропной среды:



$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}_+ \\ \vec{H}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{E}_- \\ \vec{H}_- \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Такое разложение поля основывается на двух постулатах: 1) в биизотропной среде существует каждое из двух поляризованных полей \vec{E}_+, \vec{H}_+ и \vec{E}_-, \vec{H}_- , которые эквивалентны полям в изотропных средах с параметрами ϵ_+, μ_+ и ϵ_-, μ_- соответственно; 2) эти два волновых поля независимы в однородной биизотропной среде.

Материальные уравнения в биизотропной среде возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} + \xi \cdot \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} + \zeta \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (8.8)$$

с ξ и ζ , определяемыми как

$$\xi = (\tau - i\chi')\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (8.9)$$

$$\zeta = (\tau + i\chi')\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (8.10)$$

где τ параметр Теллегена, а $\chi' = -\eta\chi$ - параметр киральности.

а) Эквивалентная изотропная среда

Соотношение между четырьмя векторами поля можно переписать, используя первый постулат, в виде:

$$\vec{D}_{\pm} = \varepsilon\vec{E}_{\pm} + \xi\vec{H}_{\pm} = \varepsilon_{\pm}\vec{E}_{\pm}, \quad (8.11)$$

$$\vec{B}_{\pm} = \zeta\vec{E}_{\pm} + \mu\vec{H}_{\pm} = \mu_{\pm}\vec{H}_{\pm}, \quad (8.12)$$

где $\varepsilon_{\pm}, \mu_{\pm}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$(\varepsilon - \varepsilon_{\pm})(\mu - \mu_{\pm}) - \xi\zeta = 0, \quad (8.13)$$

$$(\mu_{\pm} - \mu)^2 + 2\eta\zeta\tau(\mu_{\pm} - \mu) + \zeta^2\eta^2 = 0, \quad (8.14)$$

где было использовано соотношение $\xi + \zeta = 2\tau\sqrt{\mu\varepsilon}$. Обозначив $\tau = \sin\vartheta$, выражения для μ_{+} и μ_{-} будут иметь вид:

$$\mu_{\pm} = \mu \mp i\zeta\eta e^{\mp i\theta} = \mu(\cos\theta \pm \chi')e^{\mp i\theta}. \quad (8.15)$$

Аналогично имеем:

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon(\cos\theta \pm \chi')e^{\mp i\theta}. \quad (8.16)$$

Таким образом, два волновых импеданса η_{+} и η_{-} можно записать в виде:

$$\eta_{\pm} = \sqrt{\frac{\mu_{\pm}}{\varepsilon_{\pm}}} = \eta e^{\mp i\theta}, \quad (8.17)$$

а волновые числа k_{+} и k_{-} :

$$k_{\pm} = \omega\sqrt{\mu_{\pm}\varepsilon_{\pm}}. \quad (8.18)$$

К тому же векторы волнового поля должны удовлетворять соотношению:

$$\vec{E}_{\pm} = \mp i\eta_{\pm}\vec{H}_{\pm}. \quad (8.19)$$

Заметим, что волновые числа k_{\pm} зависят как от коэффициента киральности, так и от коэффициента Теллегена, и для непоглощающей среды, волновые числа k_{\pm} оба положительны, если удовлетворяется неравенство $\cos\vartheta > |\chi'|$ или

$$\tau^2 + \chi'^2 < 1. \quad (8.20)$$

Это условие является ограничением на коэффициент киральности и Теллегена, при невыполнении которого меняется природа среды. Далее считаем, что это неравенство выполнено.

б) Источники полей

Разделим источники на две части:

$$\vec{J} = \vec{J}_{+} + \vec{J}_{-}, \quad (8.21)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{+} + \vec{M}_{-}, \quad (8.22)$$

где \vec{M} - магнитные токи. Запишем уравнения Максвелла для полей с источниками:

$$\nabla \times \vec{E}_{\pm} = -i\omega\mu_{\pm}\vec{H}_{\pm} - \vec{M}_{\pm}, \quad (8.23)$$

$$\nabla \times \vec{H}_{\pm} = \pm i\omega\varepsilon_{\pm}\vec{E}_{\pm} + \vec{J}_{\pm}, \quad (8.24)$$

$$\nabla \times \vec{H}_{\pm} = i\omega\varepsilon_{\pm}\vec{E}_{\pm} \mp \frac{i\vec{M}_{\pm}}{\eta_{\pm}}, \quad (8.25)$$

$$\nabla \times \vec{E}_{\pm} = -i\omega\mu_{\pm}\vec{H}_{\pm} \mp i\eta_{\pm}\vec{J}_{\pm}, \quad (8.26)$$

в которых должны выполняться следующие равенства:

$$\vec{M}_{+} = i\eta_{+}\vec{J}_{+}, \quad \vec{M}_{-} = -i\eta_{-}\vec{J}_{-}. \quad (8.27)$$

Запишем источники в виде:

$$\vec{J}_{\pm} = \frac{1}{2\cos\vartheta} \left(e^{\pm i\vartheta} \vec{J} \mp \frac{i\vec{M}}{\eta} \right), \quad (8.28)$$

$$\vec{M}_{\pm} = \frac{1}{2\cos\vartheta} \left(e^{\mp i\vartheta} \vec{M} \pm i\eta\vec{J} \right). \quad (8.29)$$

Соответствующие выражения для волнового вектора поля могут быть получены следующим образом:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_{\pm} - k_{\pm}^2 \vec{E}_{\pm} = \left(-i\omega\mu_{\pm}\vec{E}_{\pm} - \nabla \times \vec{E}_{\pm} \right), \quad (8.30)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}_{\pm} - k_{\pm}^2 \vec{H}_{\pm} = \left(-i\omega\varepsilon_{\pm}\vec{M}_{\pm} + \nabla \times \vec{J}_{\pm} \right). \quad (8.31)$$

Заметим, что дополнительный член с ротором в соотношении (8.2) исчезает, и уравнения для волнового вектора имеют такую же форму, как и соответствующие уравнения в некиральной среде. Для получения электрического поля, созданного электрическим током, сначала получим выражения для ДФГ $\vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}')$ и $\vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}')$ электрического и магнитного типа соответственно. Эти две функции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') - k_{\pm}^2 \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{I}\delta(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (8.32)$$

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') - k_{\pm}^2 \nabla \times \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla \times \vec{I}\delta(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (8.33)$$

где $\delta(\vec{r}, \vec{r}')$ представляет собой дельта-функцию Дирака, и \vec{I} обозначает единичный оператор диады. Граничные условия на абсолютно проводящих стенках, которым удовлетворяют электрические и магнитные двухэлементные функции Грина, следуют из следующей формулы:

$$\vec{n} \times \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{n} \times \nabla \times \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (8.34)$$

Точно также для получения магнитного поля, создаваемого источниками электрического тока, сначала надо получить ДФГ $\vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}')$ и $\vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}')$, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') - k_{\pm}^2 \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{I}\delta(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (8.35)$$

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') - k_{\pm}^2 \nabla \times \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla \times \vec{I}\delta(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (8.36)$$

Граничные условия на абсолютно проводящих стенках, которым удовлетворяют электрические и магнитные диадные функции Грина, тогда переписутся в виде:

$$\vec{n} \times \nabla \times \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{n} \times \nabla \times \nabla \times \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (8.37)$$

После получения соответствующих ДФГ, электромагнитные поля E_{\pm} и H_{\pm} , созданные источниками электрического тока \vec{J} , можно получить в виде интегралов от диадных функций Грина электрического и магнитного типа:

$$\vec{E}_{\pm}(\vec{r}) = -i\omega\mu_{\pm} \iiint_V \vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{\pm}(\vec{r}') dV' - \iiint_V \nabla \times [\vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot \vec{M}_{\pm}(\vec{r}') dV', \quad (8.38)$$

$$\vec{H}_{\pm}(\vec{r}) = -i\omega\varepsilon_{\pm} \iiint_V \vec{G}_{HM}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{M}_{\pm}(\vec{r}') dV' - \iiint_V \nabla \times [\vec{G}_{EJ}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot \vec{J}_{\pm}(\vec{r}') dV', \quad (8.39)$$

где V - это объем, занимаемый источниками в области, а индексы EJ и HM относятся к электрической и магнитной диадным функциям соответственно.

ДФГ электромагнитного типа

Для того чтобы получить ДФГ электромагнитного типа в спектральной области используются два метода: 1) прямое двухэлементное представление на основе единичных координатных векторов; 2) не прямое двухэлементное представление на основе разложения волновых векторных собственных функций. Используя второй способ, построим ДФГ электромагнитного типа. Скалярные собственные функции $\psi_{\epsilon_{mn}}(h)$ получаются методом разделения переменных. В случае прямоугольного волновода они имеют следующий вид:

$$\psi_{\epsilon_{mn}}(h) = \begin{cases} \cos k_x(x) & \cos k_y(y) \\ \sin k_x(x) & \sin k_y(y) \end{cases} e^{ihz}, \quad (8.40)$$

где четные и нечетные моды получены на основе метода разделения переменных и согласования с граничными условиями на проводящих стенках. Использование четных или нечетных мод зависит от типа волн ТЕ или ТМ. Известно, что собственные значения k_x и k_y равны:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (8.41)$$

Кроме того, волновые векторные собственные функции в прямоугольнике можно выразить через скалярные собственные функции следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\epsilon_{mn}}(h) = \nabla \times [\psi_{\epsilon_{mn}}(h) \hat{\mathbf{z}}], \quad (8.42)$$

$$\mathbf{N}_{\epsilon_{mn}}(h) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times [\psi_{\epsilon_{mn}}(h) \hat{\mathbf{z}}], \quad (8.43)$$

где k_c^2 определяется выражением:

$$k^2 = h^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 = h^2 + k_c^2. \quad (8.44)$$

Эти волновые векторные функции ортогональны не только друг другу (в рамках одного набора), а также и одна по отношению к другой (в разных наборах). Для ДФГ электромагнитного типа, содержащего сингулярность, значения в области $z > z'$ задаются формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{EJ}^{(+,-)}(\vec{r}, \vec{r}') &= -\frac{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{k_{(+,-)}^2} + \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{K_{g(+,-)} k_c^2} \times \\ &\times \left[\mathbf{M}_{\text{emn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{M}'_{\text{emn}}(\pm K_{g(+,-)}) + \mathbf{N}_{\text{omn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{N}'_{\text{omn}}(\pm K_{g(+,-)}) \right], \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{HM}^{(+,-)}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{ik_{(+,-)}}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{K_{g(+,-)} k_c^2} \times \\ &\times \left[\mathbf{M}_{\text{emn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{N}'_{\text{emn}}(\pm K_{g(+,-)}) + \mathbf{N}_{\text{omn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{M}'_{\text{omn}}(\pm K_{g(+,-)}) \right], \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{HM}^{(+,-)}(\vec{r}, \vec{r}') &= -\frac{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{k_{(+,-)}^2} + \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{K_{g(+,-)} k_c^2} \times \\ &\times \left[\mathbf{M}_{\text{omn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{M}'_{\text{omn}}(\pm K_{g(+,-)}) + \mathbf{N}_{\text{emn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{N}'_{\text{emn}}(\pm K_{g(+,-)}) \right], \end{aligned} \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{EJ}^{(+,-)}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{ik_{(+,-)}}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{K_{g(+,-)} k_c^2} \times \\ &\times \left[\mathbf{N}_{\text{emn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{M}'_{\text{emn}}(\pm K_{g(+,-)}) + \mathbf{M}_{\text{omn}}(\mp K_{g(+,-)}) \mathbf{N}'_{\text{omn}}(\pm K_{g(+,-)}) \right], \end{aligned} \quad (8.48)$$

где каждое из написанных выше уравнений (8.45)-(8.48) представляет собой четыре формулы (+, -) для волн с левосторонней и правосторонней круговой поляризацией и с ± или ∓ для случаев $z > z'$ и $z < z'$

$$K_{g\pm}^2 = k_{\pm}^2 - k_c^2. \quad (8.49)$$

Здесь δ_0 - символ Кронекера. После подстановки этих диадных функций Грина в выражение (8.38) (8.39) сумма двух напряженностей поля "плюс" или "минус" используется для получения полной напряженности электрического и магнитного поля соответственно.

Применение полученных результатов

а) Биизотропная среда

ДФГ, определяемые выражениями (8.45)-(8.48), справедливы для биизотропной среды.

Используя τ из формул (8.9) (8.10), определяем угол ϑ как $\tau = \sin \vartheta$. Затем, используя угол ϑ , устанавливаем соотношение между разложенным источником тока и нормальным источником тока:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\pm} &= \frac{1}{2\cos \vartheta} \left(\vec{J} e^{\pm i\vartheta} \mp \frac{i}{\eta} \vec{M} \right), \\ \vec{M}_{\pm} &= \frac{1}{2\cos \vartheta} \left(\vec{M} e^{\mp i\vartheta} \pm i\eta \vec{J} \right). \end{aligned} \quad (8.50)$$

Используя ϑ и выражения (8.9) (8.10) повторно, определяем разложенные диэлектрическую и магнитную проницаемости следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm} &= \varepsilon (\cos \vartheta \pm \chi') e^{\pm i\vartheta}, \\ \mu_{\pm} &= \mu (\cos \vartheta \pm \chi') e^{\pm i\vartheta}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Используя соотношение (8.48), получаем следующие выражения для внутреннего импеданса и волнового числа:

$$\eta_{\pm} = \eta e^{\pm i\theta}, \quad k_{\pm} = \omega \sqrt{\mu_{\pm} \varepsilon_{\pm}}. \quad (8.52)$$

Подставляя эти значения в ДФГ, с помощью соотношений (8.45)-(8.48) можно определить диадные компоненты.

б) Киральная среда

Как было уже отмечено, киральная среда является частным случаем биизотропной среды с $\xi = -\zeta$ в материальных уравнениях или $\tau = 0$ в выражениях (8.9) (8.10).

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 \text{ так как } \tau = 0, \\ \varepsilon_{\pm} &= (1 \pm \chi') \varepsilon, \\ \mu_{\pm} &= (1 \pm \chi') \mu, \\ \eta_{\pm} &= \eta, \\ k_{\pm} &= k (1 \pm \chi'). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Таким образом, ДФГ имеют ту же самую форму, что и в выражениях (8.45)-(8.48).

Представленный метод решения электромагнитной задачи, основанный на разделении уравнений для векторного волнового поля и соединяющий в себе разложение собственных векторных волновых функций с декомпозицией ДФГ, пригоден не только для прямоугольных волноводов, но и для волноводов произвольного поперечного сечения.

Заключение

Интенсивное исследование киральных сред началось ещё в прошлом веке. Однако следует отметить, что до сих пор не существует законченной аналитической модели искусственной среды, содержащей киральные элементы. Для получения количественных характеристик необходимо использовать численные методы математической физики. Только таким образом удастся получить приемлемое количественное соответствие вычисленных данных с результатами физического эксперимента.

В данной работе авторы не ставили перед собой задачи показать, какой из методов расчета киральных систем является наиболее точным и предпочтительным, а решили дать представление о том, что несмотря на сложность задачи о поведении электромагнитных полей и волн в киральных средах в предположении, что материальные уравнения для них известны, существующих методов уже вполне достаточно, чтобы вести расчеты с требуемой точностью.

В статье рассмотрены основные методы расчета волноведущих систем с киральным заполнением: метод конечных разностей, метод Бубнова-Галеркина, метод конечных элементов, метод векторных цепей, метод функции Грина.

Дано представление о том, что такое киральная среда, как ее получают, отражены результаты расчета в различных системах единиц, отмечены основные особенности киральных волноводов, а также их практическое применение.

Таким образом, разработанные численные и математические методы позволяют решать задачи моделирования сложных биизотропных и бианизотропных материалов, что способствует их использованию при разработке и исследовании новых устройств и систем, имеющих широкое практическое применение.

Литература.

1. Lindman K.F.-Annalen der Physik, 1920, V.63, №4
2. W. H. Pickering, experiment performed at Caltech, 1945, private communication.
3. В.П. Моденов, И.В. Цветков, «Метод Галеркина в электродин. волноводе с киральной средой», Вестник Московского Университета, 2004, Серия 3, Физика Астрономия, №3.
4. С. А. Третьяков, “Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизатропные материалы,” Радиотехника и электроника, том 39, вып. 10, 1994.
5. V. K. Varadan, V. V. Varadan, A. Lakhtakia, “On the possibility of designing anti-reflection coatings using chiral composites,” J. Wave-Material Interaction, vol. 2, no. 1, pp. 71-81, 1987.
6. H. Cory and I. Rosenhouse, “Minimisation of reflection coefficient at feed of radome-covered reflection antenna by chiral device,” Electron. Lett., vol. 27, no. 25, pp. 2345-2347, 1990.
7. P. Pelet and N. Engheta, “The theory of chirovaveguides,” IEEE Trans. Antennas Propogat., vol. 38, pp. 90-98, 1990.
8. D. L. Jaggard, J. C. Lui, A. Grot, and P. Pelet, “Thin wire antennas in chiral media,” Electron. Lett., vol. 27, pp. 234-244, 1991.
9. G. Busse, J. Reinert, M. Klemt, and A. F. Jacob, “On chirality measurements in circular waveguides,” Advances in complex electromagnetic materials, Eds. Norwell, MA: Kluwer, 1997, pp. 333-339.
10. G. Busse, J. Reinent, A. F. Jacob, “Waveguide characterization of chiral material experiments,” IEEE Transactions on microwave theory and technique, vol. 47, no. 3, march 1999.
11. R. D. Hollinger, V. V. Varadan, D. K. Ghodgaonkar, and V. K. Varadan, “Experimental characterization of isotropic chiral composites in circular waveguides,” Radio SCI., vol. 27, no. 2, pp. 161-168, 1992.
12. A. Sihvola, M. Oksanen, and F. Hujanen, “Broadband microwave measurement and analysis of artificial chiral material ” Proc. 24th European Microwave Conf., Cannes, France, Sept. 1994, pp. 378-383.
13. A. F. Bahr, K. R. Clausing, “An approximate model for artificial chiral material”, IEEE transactions on antennas and propagation, vol.42, no.12, dec 1994.

14. C. R. Brewitty-Taylor, P. G. Ledered, F. C. Smith, S. Haq, "Measurement and prediction of helix-loaded composites", IEEE transactions on antennas and propagation, vol. 47, no. 4, april 1999.
15. А.А. Самарский, «Теория разностных схем», М.: Наука, 1983.
16. А.Н. Боголюбов, А.В. Красильникова, Д.В. Минаев, А.Г. Свешников, «Метод конечных разностей для решения задач синтеза волноведущих систем», Математическое моделирование, 2000, Т. 12, №1, с. 13-24.
17. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.В. Красильникова, Д.В. Минаев, А.Г. Свешников, «Математическое моделирование волноведущих систем на основе метода конечных разностей», Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники, 1998, №5, с. 39-54.
18. А.Г. Свешников, «Принципы излучения», ДАН СССР, 1950, Т. 3, №5, с. 517-520.
19. Sihvola A.H., Lindell I.V. – Electronics Letters, 1990, vol.26, №2, p.118-119.
20. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.В. Лавренова, «Метод конечных элементов в задачах волноводной дифракции», Электромагнитные волны, 2004, Т. 9, №8, с. 22-25.
21. Г.И. Марчук, В.И. Агошков, «Введение в проекционно-сеточные методы», М.: Наука, 1981.
22. А.Н. Боголюбов, И.А. Буткарев, Д.В. Минаев, И.Е. Могилевский, «Математическое моделирование волноведущих систем на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов», Радиотехника и электроника, 2005, Т. 50, №2, с. 140-151.
23. T. Angkaew, M. Matsuhara, and N. Kumagai, "Finite-element analysis of waveguide modes: A novel approach that eliminates spurious modes," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-35, pp. 117-123, Feb. 1987.
24. J. Svedin, "A numerically efficient finite-element formulation for the general waveguide problem without spurious modes," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 37, pp. 1708-1715, Nov. 1989.
25. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, «Расчет диэлектрических волноводов методом конечных элементов, исключая появление нефизических решений», Вестник Московского университета, Сер. 3, Физика, Астрономия, 1996, №1, с. 9-13.
26. Р.П. Федоренко, «Введение в вычислительную физику», М.: Издательство МФТИ, 1994.

27. М. П. Галахин, Е.Б. Савенков, «К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко», Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, Т. 43, №5, с. 713-729.
28. J. A. M. Svedin, "Propagation analysis of chirowaveguides using the finite-element method," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, no. 10, oct. 1990.
29. А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников, «Математический модели электродинамики». М.: Высшая школа, 1991.
30. С. Писсанецки, «Технология разреженных матриц», М.: Мир, 1988.
31. Tretyakov S.A., Oksanen M.I., Lindell I.V. "Vector circuit theory for isotropic and chiral slabs", J. Electromagn. Waves Appl., vol. 4, no. 7, pp. 613-643, 1990.
32. Oksanen M.I., Koivisto P.K. and Lindell I.V. "Dispersion curves and fields for a chiral slab waveguide", IEE Proc. Part H, vol. 138, no. 4, pp. 327-334, 1991.
33. Cory H. and Rosenhouse, "Electromagnetic wave propagation along a chiral slab", IEE Proc. Part H, vol.138, no. 1, pp. 51-54, 1991.
34. Tai C.T. – 1994, 2nd ed. Piscataway, NJ: IEEE Press.
35. Engheta N., Kowarz M.W. – J.Appl.Phys., 1990, vol.67, №2, p.639-647.