

УДК 537.874; 537.624

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ. ЧАСТЬ 1. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

А. П. Иванов<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, В. И. Щеглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 25 июня 2017 г.

**Аннотация.** Рассмотрено возбуждение нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Исследование проведено на основе упрощенной модели системы из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромагнитными свойствами. Получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связь между осцилляторами. Отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора. Для типичных параметров задачи о возбуждении гиперзвука СВЧ диапазона в пленке железиттриевого граната выполнена численная оценка коэффициента нелинейного слагаемого. На основе полученной системы уравнений для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более. Показано, что важнейшим условием запазды-

вания является значительное различие времен релаксации осцилляторов. Отмечен пороговый характер реализации запаздывания по амплитуде возбуждения и критический характер по параметру кубической нелинейности первого осциллятора. Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии дополнительного минимума потенциала системы, отделенного от основного потенциальным барьером. Построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при использовании амплитуды второго осциллятора как параметра. Показано, что главной причиной появления минимума является нелинейная связь, пропорциональная произведению квадрата амплитуды колебаний первого осциллятора на первую степень амплитуды колебаний второго осциллятора. Предложенная модель позволяет описать пороговый характер реализации запаздывания и необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого. Исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено критическое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания. Показано, что после превышения критического значения время запаздывания спадает по закону, близкому к обратной пропорциональности. Исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечен нижний критический уровень параметра кубической нелинейности, необходимый для ограничения амплитуды колебаний. Обнаружен верхний критический уровень параметра кубической нелинейности, выше которого происходит подавление запаздывания. Наблюдаемые нижний и верхний критические уровни параметра кубической нелинейности интерпретированы на основе модели динамического потенциала.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, магнитоупругое взаимодействие, потенциал.

**Abstract.** The excitation of nonlinear forced vibrations of magnetization and elastic displacement in normal magnetized ferrite plate having magnetoelastic properties is investigated. This investigation is made on the basis of simplified system consist of

two connected oscillators one of its having gyromagnetic properties. It is derived the system containing two second order differential equations which gives the connection between oscillators. It is drawn the significant role of nonlinear component which having the multiplication of magnetic oscillator vibration amplitude in square on the first degree of elastic oscillator vibration amplitude. For the typical parameters of the task about microwave hypersound vibrations excitation in the film of yttrium iron garnet it is made the numerical appreciation of nonlinear coefficient item. On the basis of obtained equation system for the case when resonance frequencies both oscillators are differed in multiple relation it is made the investigation of forced vibrations development in time. It is shown that in conditions of multiplication of second oscillator frequency in comparison to the first oscillator frequency by defined values of parameters the excitation of vibrations take place with non-stationary delay in time. After the end of this delay the jumping increasing of vibrations amplitude on one-two orders in value take place. It is shown that the significant condition of delay is the large distinctions between the relaxation time of both oscillators. It is found the threshold character of delay realization over the excitation amplitude and critical character over the cubic nonlinearity of first oscillator parameter. For the interpretation of delay effect is proposed the hypothesis about the existence of the additional minimum of system potential separated from the main minimum by potential barrier. It is created the model on dynamical potential which defined the first oscillator vibrations character in connection with the second oscillator amplitude as a task parameter. It is shown that the main reason of minimum appearance is nonlinear connection which is proportional to multiplication of magnetic oscillator vibration amplitude in square on the first degree of elastic oscillator vibration amplitude. The proposed model allows to describing the threshold character of delay realization and the necessity of frequency multiplication of second oscillator in comparison of first oscillator frequency. It is investigated the delay character in wide interval of excitation amplitude variation. It is found the critical value of amplitude which exceeding is the necessary condition of delay. It is shown that after the critical value exceeding the delay time is decreased in the law which is near to opposite proportionality. It is investigat-

ed the dependence of delay and excited vibrations character from the cubic nonlinearity parameter of first oscillator. It is found the lower critical level of cubic nonlinearity parameter which is necessary to the vibrations amplitude limitation. It is found the upper critical level of cubic nonlinearity parameter above which the delay is suppressed. The observed lower and upper critical levels of cubic nonlinearity parameter are explained on the basis of dynamical potential model.

**Key words:** nonlinear vibrations, magnetoelastic interaction, potential.

## Введение

Изучение нестационарных режимов нелинейных колебаний издавна привлекает внимание исследователей [1,2]. Особый интерес представляют нелинейные колебания намагниченности, в том числе сопровождаемые нестационарным параметрическим возбуждением обменных спиновых волн [3,4]. Возбуждение таких волн является типичным примером микроскопического процесса в магнетике, характерная длина которого составляет единицы и доли микрометров [5,6]. В то же время, даже более или менее однородные по пространству колебания намагниченности, типа простого ферромагнитного резонанса (ФМР), могут проявлять весьма разнообразные нестационарные свойства.

Так еще в пионерской работе [7] в эксперименте была наглядно продемонстрирована возможность возбуждения нестационарных колебаний автомодуляционного характера, обусловленных нелинейным взаимодействием намагниченности ферритового образца с электромагнитными колебаниями резонатора. Определенная теоретическая трактовка наблюдаемого явления, основанная на учете нелинейности ФМР с проявлением расстройочного механизма, была дана в работе [8].

В работах [9,10] была отмечена решающая роль в возбуждении нестационарных колебаний магнитоупругого взаимодействия. Ряд работ был посвящен исследованию колебаний автомодуляционного характера на основе модели двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого [11-17].

В работах [18,19] была показана возможность использования такой модели для описания нестационарных колебаний в магнитоупругой среде на основе линейного и квадратичного приближений.

В работах [20,21] в качестве фундамента для формирования различных режимов колебаний было введено понятие потенциала, ответственного за нелинейную связь между осцилляторами.

В работе [22] были рассмотрены нелинейные вынужденные колебания намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Для моделирования таких колебаний предложена упрощенная система из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромангнитными свойствами. На основе такой модели показана возможность возбуждения вынужденных колебаний автомодуляционного характера. Выявлены шесть основных режимов колебаний, для интерпретации которых предложены две модели – обобщенного потенциала и генерации гармоник.

В работе [23] та же задача сведена к модельной системе из двух связанных осцилляторов, имеющей две с половиной степени свободы. Рассмотрены два вида связи между осцилляторами – через переменные и через производные. Для связи через переменные получен потенциал кубического вида с потенциальным барьером. Рассмотрено возбуждение колебаний автомодуляционного характера. Построена модель фазовой задержки, объясняющая явление автомодуляции малой скоростью движения осциллятора вблизи вершины потенциального барьера. Рассмотрены условия возбуждения двухамплитудных и квазихаотических колебаний, а также ухода системы на бесконечность.

Дополнительные особенности возбуждения магнитоупругих колебаний проявляются в режимах умножения и деления частоты [24,25]. Рассмотрены случаи преобразования частоты, как в целочисленном, так и в дробном отношении. Отмечены различные режимы преобразования, в том числе связанные с процессами релаксации, предложены гипотезы для их интерпретации.

Тем не менее, несмотря на выявленное разнообразие режимов связанных нелинейных колебаний, проведенное рассмотрение не является исчерпывающим. Так довольно подробно рассмотрена роль только первых слагаемых потенциала, отвечающих за квадратичную и кубическую нелинейность в их простейшем виде. Роль нелинейности, обусловленная членами четвертого порядка, отражающими смешанную нелинейность первого и второго осцилляторов, оставлена без внимания. Однако предварительное рассмотрение показывает, что учет членов такого порядка приводит к значительному разнообразию новых не реализуемых на прежних уровнях нелинейности режимов. Особенности разнообразия режимов наблюдаются в условиях преобразования частоты. Рассмотрению некоторых таких вопросов посвящена настоящая работа.

## 1. Геометрия задачи и основные уравнения

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [18-25], показана на рис.1. В ее основе лежит плоскопараллельная пластина толщины  $d$ , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины.

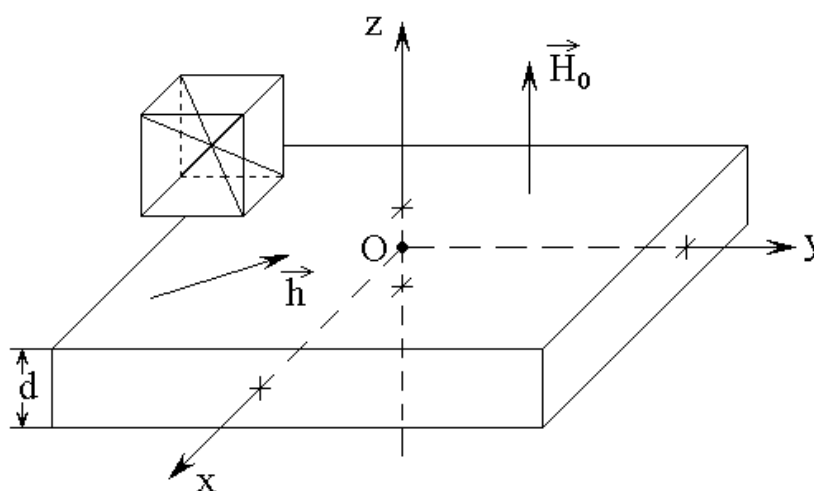


Рис.1. Геометрия задачи. Слева – схема кристаллографической ячейки.

Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле  $\vec{h}$  действует в плоскости пла-

стины. Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам  $z = \pm d/2$ .

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид [18, 19]:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = - \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x \right], \quad (1)$$

а уравнения для  $m_y$  и  $m_z$  получаются циклической перестановкой  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Уравнения для компонент упругого смещения  $u_{x,y}$  имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = - 2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (2)$$

граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = - B_2 m_{x,y} m_z. \quad (3)$$

В этих выражениях  $m_{x,y,z}$  – нормированные компоненты вектора намагниченности,  $u_{x,y}$  – компоненты упругого смещения,  $H_{x,y,z}$  – эффективные поля, определяемые как производные от плотности энергии по компонентам намагниченности,  $\gamma$  – гиромагнитная постоянная,  $\alpha$  – параметра магнитного затухания по Гильберту,  $c_{44}$  – модуль упругости,  $\beta$  – параметр упругого затухания,  $\rho$  – плотность материала магнитной пластины,  $B_2$  – константа магнитоупругого взаимодействия.

## 2. Система в квадратичном приближении

В полном виде система (1)-(3) сводится к решению семи связанных уравнений первого порядка. Однако в работах [20-21] показано, что с высокой точностью такую систему в квадратичном приближении можно приблизить более простой, содержащей всего два уравнения второго порядка (записываем без учета производных):

уравнение для намагниченности:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + a_{13} \cdot m + a_{14} \cdot v + a_{15} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + b_{11} \cdot m^3 + b_{12} \cdot m^2 v + b_{13} \cdot m v^2 = g_{11} \cdot h_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (4)$$

уравнение для редуцированного упругого смещения:

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + a_{23} \cdot v + a_{24} \cdot m + a_{25} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + b_{21} \cdot m^3 + b_{22} \cdot m^2 v + b_{23} \cdot m v^2 = 0. \quad (5)$$

Для задачи, решаемой в настоящей работе, достаточно ограничиться еще более простой системой, являющейся частным случаем предложенной:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (7)$$

В этой системе с целью математической общности произведены замены обозначений переменных:  $m \rightarrow x_1$ ,  $v \rightarrow x_2$ , а также:

$a_{11} \rightarrow 1$ ;  $a_{21} \rightarrow 1$ ;  $a_{12} \rightarrow \beta_1$ ;  $a_{22} \rightarrow \beta_2$ ;  $a_{13} \rightarrow \omega_1^2$ ;  $a_{23} \rightarrow \omega_2^2$ ;  $a_{14} \rightarrow \gamma_1$ ;  $a_{24} \rightarrow \gamma_2$ ;  $b_{11} \rightarrow \delta$ ;  $b_{12} \rightarrow \eta$ ;  $g_{11} \cdot h_0 \rightarrow A$ . Остальные коэффициенты положены равными нулю.



Таким образом, в системе (6)-(7):  $x_1$  и  $x_2$  – нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – параметры затухания той и другой компонент,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – собственные частоты осцилляторов,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – константы их линейной связи,  $\delta$  – параметр кубической нелинейности первого осциллятора,  $\eta$  – параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым,  $A$  и  $\omega_0$  – амплитуда и частота переменного поля.

Выражения приведенных здесь коэффициентов через параметры материала и геометрии задачи приведены в работе [21] и здесь не повторяются ввиду их некоторой громоздкости. Обратимся далее к численной оценке наиболее важных из них.

### 3. Оценка характерных параметров

Для дальнейшего рассмотрения наибольшее значение будет иметь коэффициент  $\eta$  (или  $b_{12}$ ), связанный с параметрами задачи следующим образом:

$$\eta = -\frac{2\gamma^2 B_2}{M_0 d} (3H_p - 2\pi M_0), \quad (8)$$

где введено обозначение:

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0, \quad (9)$$

в котором  $M_0$  – намагниченность насыщения магнитной пластины.

Можно видеть, что в зависимости от величины поля  $H_0$  знак параметра  $\eta$  будет меняться. Критическое значение поля равно:

$$H_C = \frac{14}{3} \cdot \pi M_0, \quad (10)$$

то есть при  $H_0 > H_C$  параметр  $\eta$  отрицателен, а при  $H_0 < H_C$  положителен.

Оценим величину этого параметра при типичной экспериментальной ситуации [26], например в случае пленки железиттриевого граната, толщиной 15 мкм. При этом:  $M_0 = 140$  Гс,  $B_2 = 6.96 \cdot 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>. Далее будем работать

с круговой частотой, поэтому полагаем  $\gamma = 1.76 \cdot 10^7 \text{ Э}^{-1}\text{с}^{-1}$ . Критическое значение поля при этом равно:  $H_C = 2052 \text{ Э}$ . Так как далее параметр  $\eta$  будет интересен именно отрицательным, положим поле заведомо большим критического:  $H_0 = 3000 \text{ Э}$ . Подставляя эти значения в формулу (8), получаем:  $\eta = -5.836 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2}$ .

Полагая типичную частоту ФМР в поле 3000 Э порядка  $10^{11} \text{ с}^{-1}$  (частота круговая –  $\omega = 2\pi f$ ), а также учитывая, что нормированная величина намагниченности имеет порядок около единицы, находим, что характерный порядок величин слагаемых в уравнении (6) будет около  $10^{22} \text{ с}^{-2}$ . Можно видеть, что абсолютное значение  $\eta$  примерно на три порядка больше этой величины. Учтем далее, что параметр  $\eta$  является коэффициентом при произведении переменных  $x_1^2 \cdot x_2$ . При этом переменная  $x_1$ , как нормированная компонента намагниченности, по порядку близка к единице, а переменная  $x_2$  примерно на два порядка меньше этой величины (что получается из оценки реальной связи при заданной константе  $B_2$ ) [27]. Таким образом, можно видеть, что все слагаемые в уравнении (6) имеют один и тот же порядок, то есть параметр  $\eta$ , нормированный на квадрат частоты, может иметь величину порядка  $10^2 - 10^3 \text{ с}^{-2}$ . Важно отметить также, что этот параметр будет отрицательным.

#### 4. Развитие колебаний во времени

Рассмотрим теперь численное решение системы (6)-(7) в режиме умножения частоты. Решение было проведено методом Рунге-Кутты четвертого порядка [28]. Все параметры были нормированы на квадрат частоты, то есть на  $10^{22} \text{ с}^{-2}$ , что дало возможность работать с переменными в безразмерном виде.

Будем рассматривать умножение частоты на три. Зададим следующие величины параметров. Резонансные частоты осцилляторов:  $\omega_1 = 5$ ,  $\omega_2 = 15$ , то

есть резонансная частота второго осциллятора в три раза выше частоты первого. Параметры затухания  $\beta_1$  и  $\beta_2$  варьируются от  $0.1$  до  $1.0$ . Параметры линейной связи, одинаковые для обоих осцилляторов:  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 10$ . Параметр кубической нелинейности первого осциллятора, ограничивающий возможность ухода системы на бесконечность:  $\delta = 5$ . Параметр нелинейной связи между осцилляторами, обсужденный в предыдущем разделе:  $\eta = -200$ . Частоту вынуждающей силы положим совпадающей с резонансной частотой первого осциллятора, то есть  $\omega_0 = 5$ , амплитуду –  $A = 50$ .

Развитие колебаний во времени для первого и второго осцилляторов в случае, когда затухание первого осциллятора значительно превышает затухание второго, показано на рис.2.

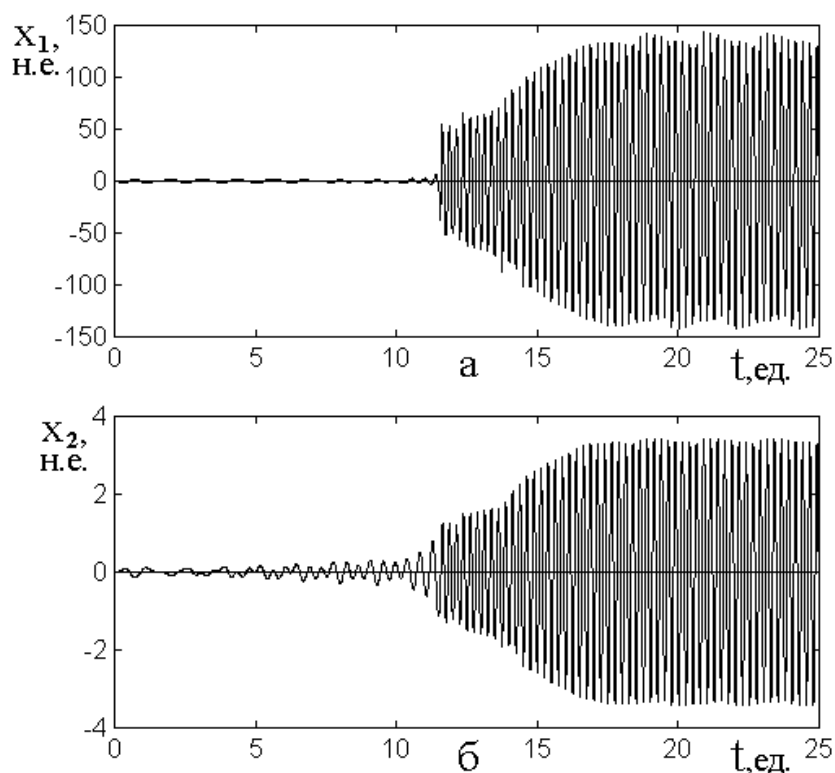


Рис.2. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при параметрах затухания  $\beta_1 = 1.0$ ,  $\beta_2 = 0.1$ .

Можно видеть, что при времени около 12 н.е. имеет место резкий скачок амплитуды колебаний обоих осцилляторов, после чего постепенно устанавли-

вается стационарный режим. Следует заметить, что установление стационарной амплитуды колебаний обоих осцилляторов после скачка происходит с некоторым временем релаксации. Контрольная проверка показывает, что время установления близко по величине ко времени релаксации первого осциллятора.

На рис.3 показано развитие колебаний во времени для тех же двух осцилляторов в обратном случае, то есть когда затухание первого осциллятора значительно меньше затухания второго.

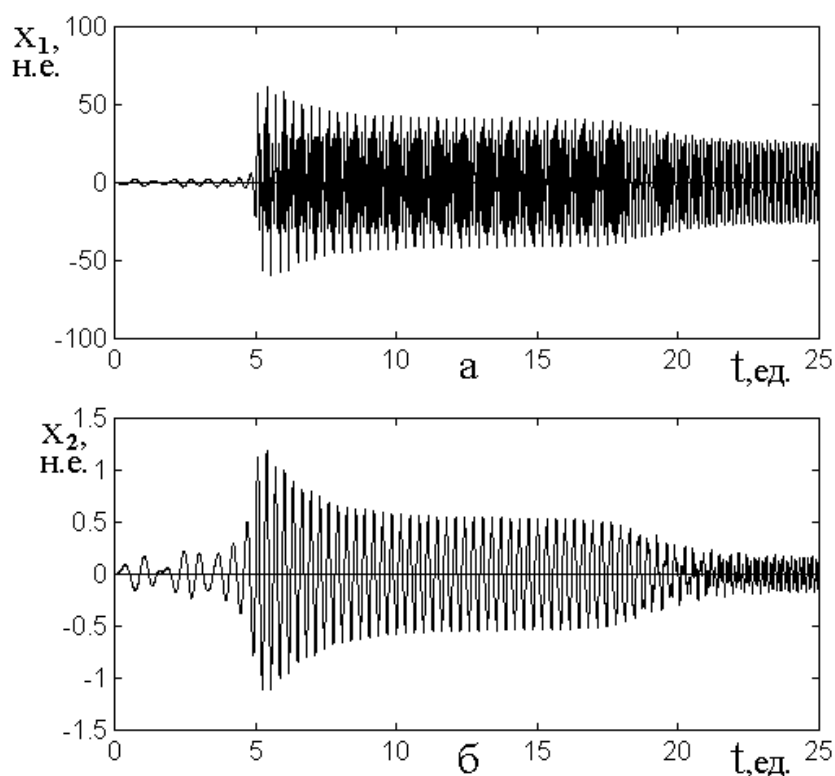


Рис.3. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при параметрах затухания  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 1.0$ .

Из обоих приведенных рисунков видна ярко выраженная характерная особенность: развитие колебания сначала идет крайне медленно, однако начиная с некоторого момента времени амплитуда колебаний обоих осцилляторов скачком увеличивается сразу на один-два порядка, после чего меняется сравнительно медленно, стремясь к постоянному значению. В обоих случаях имеет место нестационарное запаздывание развития колебаний, одинаковое для того и другого осцилляторов. В первом случае (рис.2) характерное время запаздыва-

ния составляет порядка 12 н.е., во втором случае (рис.3) несколько меньше – около 5 н.е.

Выбранное столь большое отличие параметров затухания друг от друга, как на порядок, является для реализации запаздывания принципиально необходимым. Так при равенстве обоих параметров затухания друг другу вынужденные колебания возникают сразу без какой-либо задержки во времени, причем их амплитуда нарастает, стремясь к постоянному значению, по обычному закону, как единица минус экспонента с отрицательным показателем.

Интересно сопоставить эти времени запаздывания со временами свободной релаксации обоих осцилляторов. Для этого в отсутствие связи между осцилляторами была выполнена контрольная проверка времени релаксации, определяемого по спаду начальной амплитуды свободных колебаний в  $e$  раз (где  $e = 2.71828$  – основание натуральных логарифмов). Эта проверка показала, что время релаксации от номера осциллятора не зависит и для осциллятора с параметром затухания  $\beta = 1.0$  составляет 2.2 н.е., а для осциллятора с параметром затухания  $\beta = 0.1$  увеличивается до 22 н.е, то есть меняется примерно на порядок пропорционально изменению величины параметра затухания.

Таким образом, можно сделать вывод, что время запаздывания приходится как раз между временами релаксации обоих осцилляторов, причем различие этих времен релаксации должно быть довольно большим (по крайней мере, в несколько раз).

## 5. Особенности нестационарного запаздывания

Отметим еще некоторых характерные особенности нестационарного запаздывания.

Прежде всего, нестационарное запаздывание имеет резкий порог по амплитуде возбуждения. Так при принятых выше параметрах задачи критическое значение амплитуды, выше которого запаздывание имеется, а ниже отсутствует, составляет около  $A = 30$  н.е. Важную роль играет параметр кубической не-

линейности  $\delta$ . Здесь тоже имеется критическая величина около  $\delta = 5$  н.е., выше которой колебания имеют регулярный характер, а ниже – система уходит на бесконечность. Параметр нелинейной связи  $\eta$  обязательно должен быть отрицательным, так как при положительном параметре запаздывание отсутствует при любом наборе других параметров.

Параметры линейной связи  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , по-видимому, должны быть равными друг другу, как это следует из единства потенциала для обоих осцилляторов [25]. Их величина довольно критична, но резкого порога не имеет и сильно зависит от соотношения других параметров. В общем случае можно полагать, что при слишком слабой связи для достижения запаздывания надо значительно повышать другие параметры, в первую очередь амплитуду возбуждения, а при слишком сильной связи время запаздывания падает и стремится к времени релаксации того осциллятора, для которого это время меньше.

Принципиально важным моментом для реализации запаздывания является различие частот осцилляторов. Так контрольная проверка показала, что запаздывание имеет место только при нечетном коэффициенте умножения, причем этот коэффициент должен быть не очень большим. Так запаздывание хорошо проявляется в случае, когда собственная частота второго осциллятора превышает частоту первого в три или пять раз, но отсутствует при коэффициенте умножения равным двум или четырем, а также более высоким целым числам.

Примечательным является тот факт, что вынужденные колебания в стационарном режиме всегда происходят с частотой, равной собственной частоте второго осциллятора, то есть по отношению к частоте возбуждения умноженной в кратное число раз. То есть умножение частоты имеет место не только для второго, но и для первого осциллятора.

Рассмотрим далее некоторые из перечисленных здесь особенностей запаздывания более подробно. В рамках настоящей работы ограничимся случаем превышения затухания первого осциллятора над затуханием второго, то есть

ситуацией, показанной на рис.2. Обратный случай (рис.3) предполагается рассмотреть в отдельной работе.

## 6. Возможный механизм запаздывания

В качестве возможной причины запаздывания можно предположить, что благодаря наличию нелинейной связи, определяемой параметром  $\eta$ , потенциальная поверхность, кроме одного локального минимума, определяемого линейными параметрами системы, приобретает еще один локальный минимум, расположенный на большем расстоянии от положения равновесия в покое. Эти минимумы должны быть разделены определенным потенциальным барьером, отстоящим от положения равновесия на заметное расстояние.

При малой амплитуде возбуждения колебания целиком происходят внутри главного минимума, так что их амплитуда достигает стационарного значения за время, равное времени релаксации одного из осцилляторов (того, для которого это время больше). При увеличении амплитуды возбуждения колебания перескакивают через потенциальный барьер, в результате чего их амплитуда резко возрастает. Запаздывание получается из-за того, что от начала возбуждения должно пройти определенное время, определяемое меньшим из двух времен релаксации системы в целом, за которое возбужденные колебания достигнут амплитуды, достаточной для преодоления барьера. В течение этого времени колебания не просто растут по амплитуде в соответствии с законом экспоненты, а претерпевают определенные биения, вызванные взаимодействием двух осцилляторов, собственные частоты которых различны (отличаются в несколько раз).

Из-за такой борьбы за амплитуду между осцилляторами (то есть биений), их результирующее время нарастания увеличивается, давая в результате значительное время запаздывания.

После преодоления барьера система стремится уйти на бесконечность, однако кубическая нелинейность препятствует этому, ограничивая амплитуду колебаний на более или менее стационарном уровне. Такой стационарный уро-

вень достигается за время, определяемое временем релаксации того осциллятора, для которого это время больше. Таким образом, в конце концов наступает стационарный режим, при котором оба осциллятора совершают только вынужденные колебания конечной амплитуды.

При этом частота таких колебаний определяется частотой собственных колебаний того осциллятора, для которого эта частота выше, то есть высокочастотного, в данном случае – второго. Это происходит по той причине, что его возбуждение, хотя и происходит не каждый период, но до начала следующего периода возбуждения заметно затухнуть не успевает, определяя тем самым непрерывный режим со стационарной амплитудой. При этом другой осциллятор, низкочастотный, то есть первый, пребывая в режиме вынуждения, просто повторяет колебания высокочастотного, второго, что и дает наблюдаемое равенство частот колебаний обоих осцилляторов.

## 7. Динамический потенциал

Механизм образования запаздывания можно интерпретировать на основе введения динамического потенциала. Так из уравнения (6) можно видеть, что потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (11)$$

Дифференцирование этого выражения по  $x_1$  дает потенциальную группу слагаемых уравнения (6). При этом переменную  $\tilde{\delta}_2$  следует рассматривать как постоянный параметр.

Рассмотрим рис.4, где показана зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора (индекс «0» при значении амплитуды далее опускаем). При построении левых ветвей рисунка знаки обеих переменных были изменены на противоположные.



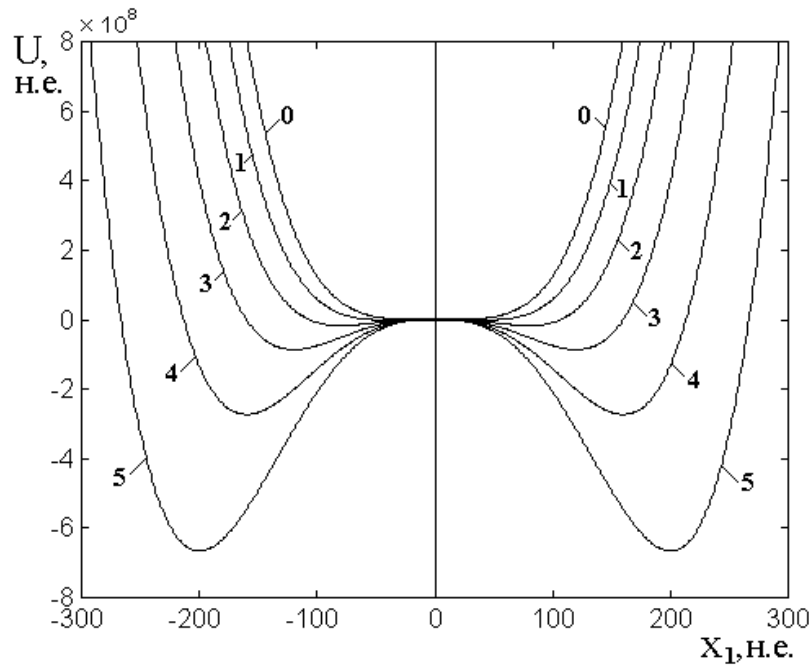


Рис.4. Зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора:  
 0 – 0 н.е.; 1 – 1 н.е.; 2 – 2 н.е.; 3 – 3 н.е.; 4 – 4 н.е.; 5 – 5 н.е.

Из рисунка можно видеть, что в отсутствие колебаний второго осциллятора (кривая 0), потенциал имеет минимум, приходящийся на  $x_1 = 0$ . При  $x_2 = 1$  н.е. (кривая 1) минимум еще остается на прежнем месте (в нуле), но потенциальная кривая несколько расширяется. При  $x_2 = 2$  н.е. (кривая 2) проявляется новый минимум, приходящийся на  $x_1 = 95$  н.е. При дальнейшем увеличении  $x_2$  минимум потенциала углубляется и смещается в сторону больших значений  $x_1$ . Так при  $x_2 = 5$  н.е. (кривая 5) минимум приходится уже на  $x_1 = 205$  н.е. При дальнейшем увеличении  $x_2$  минимум смещается еще дальше.

При критическом значении  $x_2$  около 1.2 н.е. минимум при  $x_1 = 0$  заменяется перегибом и резко смещается в сторону больших значений  $x_1$ , что проявляется как скачкообразный рост амплитуды колебаний.

Предварительная проверка показала, что время первичного развития колебаний первого осциллятора определяется его собственным временем релаксации, а время задержки резкого роста колебаний определяется временем релаксации второго осциллятора, То есть для проявления запаздывания времени релаксации осцилляторов между собой должны различаться. Заметим однако, что вопрос о роли различия времен релаксации осцилляторов требует более подробного исследования.

Следует учитывать, что построенный так потенциал является динамическим, то есть его величина не остается стационарной во времени, а меняется в такт с изменением смещения второго осциллятора  $x_2$ .

Можно полагать, что динамический характер потенциала требует синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов, однако дополнительная проверка показывает, что при равенстве частот запаздывание отсутствует при любых значениях параметров. Однако синхронизм может проявляться и при кратном соотношении частот осцилляторов между собой, Видимо, требование синхронизма и является причиной, почему запаздывание проявляется только в режиме умножения частоты.

Рассмотрим далее основные параметры, определяющие характер эффекта запаздывания, более подробно.

## 8. Амплитуда возбуждения

Как отмечено выше, нестационарное запаздывание имеет резкий порог по амплитуде возбуждения. Так критическое значение амплитуды, выше которого запаздывание имеется, а ниже отсутствует, составляет около  $A = 30$ .

На рис.5 показана зависимость времени запаздывания от амплитуды возбуждения для первого и второго осцилляторов. Остальные параметры – те же, что приняты при построении рис.2.

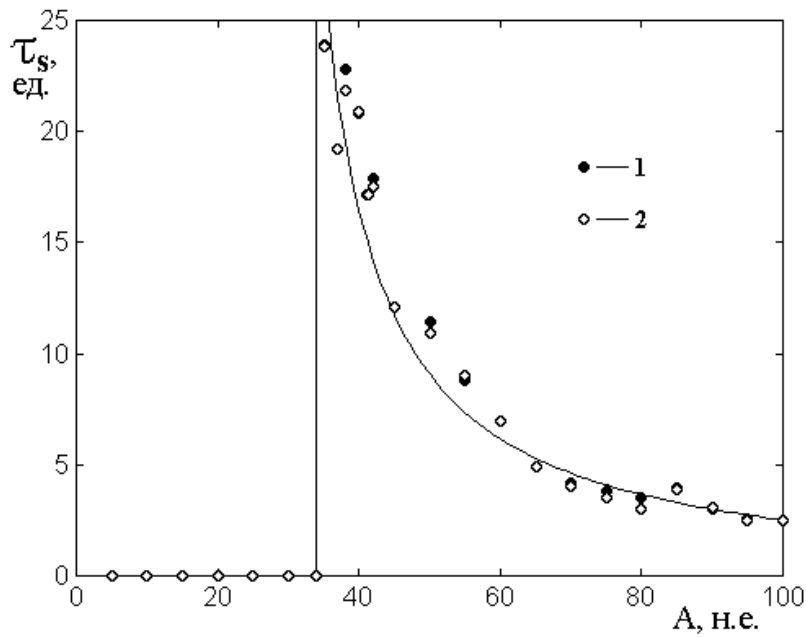


Рис.5. Зависимость времени запаздывания от амплитуды возбуждения.

1 – первый осциллятор (сплошные точки);

2 – второй осциллятор (открытые точки.

Кривая построена по формуле (12).

Можно видеть, что до критического значения амплитуды  $A_S$ , равного 30.880 н.е. запаздывание полностью отсутствует, а при достижении амплитудой этого значения, резким скачком возрастает, при  $A = 30.881$  составляет 153 н.е. (выходит за пределы рисунка). Максимум времени запаздывания  $\tau_S$  приходится на  $\dot{A} = 30.884$  н.е., когда оно равняется 155 н.е. По прохождении этой амплитуды время запаздывания спадает, при  $A = 31$  н.е. составляя 86 н.е., при  $A = 32$  н.е. – 48 н.е., при  $A = 33$  н.е. – 54 н.е., при  $A = 34$  н.е. – 37 н.е. и далее по рисунку.

Можно видеть, что времена запаздывания для обоих осцилляторов практически совпадают, а при амплитуде возбуждения, большей критической, довольно близко описываются эмпирической зависимостью вида:

$$\tau_S = \frac{220}{A - 27} - 0.5, \quad (12)$$

которая представляет собой обратную пропорциональность.

Следует заметить, что эта формула дает правдоподобные значения времени запаздывания только при амплитуде более 40 н.е. В интервале от 30 до 40 н.е. время запаздывания, вопреки формуле (12), к бесконечности не стремится, а ограничивается на уровне 155 н.е. (при  $A = 10.884$  н.е.). При этом, по мере изменения  $A$  в пределах этого интервала, ход зависимости  $\tau_S$  от  $A$  не является монотонным, а испытывает некоторые скачки (в пределах до 10%), что проявляется в наблюдаемом разбросе точек, особенно для второго осциллятора.

Как можно видеть из рис.2, после скачкообразного увеличения амплитуды, колебания обоих осцилляторов, по истечении небольшого периода релаксации, устанавливаются на стационарном постоянном уровне. Рассмотрим теперь, как зависит амплитуда таких установившихся колебаний от амплитуды возбуждения, для чего обратимся к рис.6. На рисунке приведены соответствующие зависимости для обоих осцилляторов, однако с целью удобства совмещения кривых на одном рисунке, ввиду малости амплитуды второго осциллятора ( $x_{20}$ , кривая 2) по сравнению с амплитудой первого ( $x_{10}$ , кривая 1), значения амплитуды второго осциллятора ( $x_{20}$ ) увеличены в 10 раз.

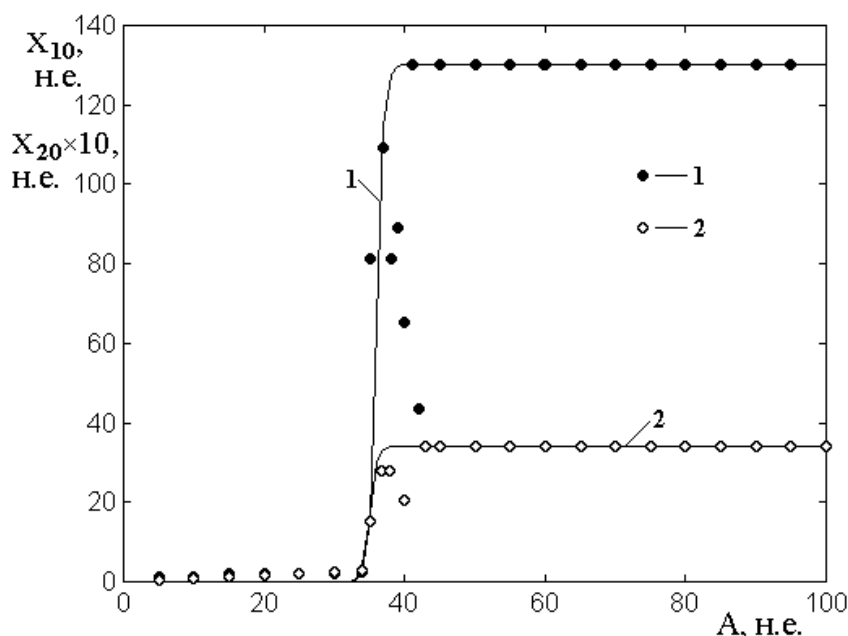


Рис.6. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от амплитуды возбуждения. 1 – первый осциллятор (сплошные точки);  
2 – второй осциллятор (открытые точки).

Характерным свойством обеих зависимостей является резкий скачок амплитуды колебаний осцилляторов при критическом значении амплитуды возбуждения. Заметим, что здесь, как и в предыдущем случае (рис.5), рост амплитуды колебаний осцилляторов происходит не единым скачком при амплитуде возбуждения равной  $A_S$ , а претерпевает несколько колебаний вверх-вниз в пределах изменения  $A$  от 32 до 40 н.е. В то же время, вне этого интервала амплитуда или растет крайне медленно (при  $A < 32$  н.е.), или совсем не меняется (при  $A > 40$  н.е.). Поэтому для сглаженного приближения обеих зависимостей, по-видимому, удобнее всего использовать гиперболический тангенс. Соответствующие зависимости, приведенные на рис.6 сплошными линиями, построены по формулам:

$$x_{10} = 65 \cdot th(A - 36) + 65; \quad (13)$$

$$x_{20} = 17 \cdot th(A - 36) + 17. \quad (14)$$

Как видим, здесь наиболее удобным значением, где кривые претерпевают перегиб, является  $A = 36$  н.е., что довольно близко соответствует введенному выше значению критической амплитуды  $A_S = 30.881$  н.е.

## 9. Особенности колебаний до скачка амплитуды

Отметим попутно некоторые особенности, касающиеся частоты колебаний обоих осцилляторов до скачка амплитуды, то есть при малой амплитуде возбуждения (меньшей критической), для чего вернемся к развитию во времени колебаний. Обратимся к рис.7, соответствующему случаю  $A = 20$  н.е. (заметим, что здесь, по сравнению с рис.2, интервал времени увеличен вдвое – до 50 н.е., что сделано для наглядности).

Можно видеть, что период колебаний первого осциллятора до скачка амплитуды не меняется и составляет 1.25 н.е, тогда как после скачка уменьшается до 0.05 н.е (рис.2). Эти периоды соответствуют частотам 5.03 и 12.7 н.е., что довольно близко к собственным частотам осцилляторов (5 н.е. и 25 н.е.). В обо-

их случаях колебания первого осциллятора остаются близкими к синусоидальным.

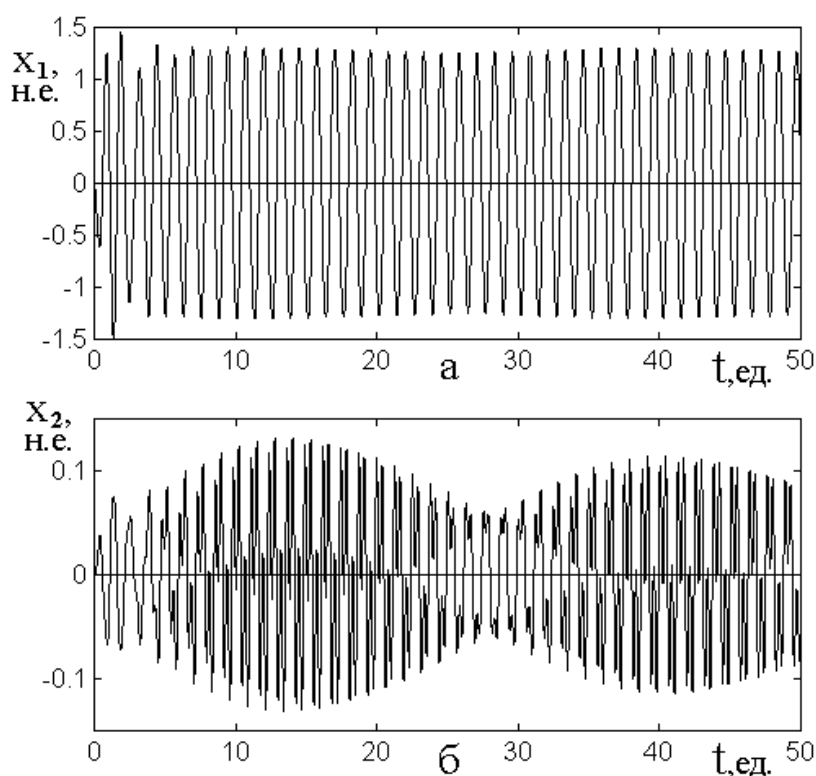


Рис.7. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при малой амплитуде возбуждения.

Период колебаний второго осциллятора до скачка также близок к 1.25 н.е., что соответствует чисто вынужденным колебаниям на частоте возбуждения 5 н.е. Однако при этом колебания второго осциллятора являются двухамплитудными или двухпериодическими, так что основной период остается равным 1.25 н.е., но к нему с небольшой амплитудой примешиваются колебания на частоте 12.7 н.е. с периодом около 0.05 н.е., который соответствует собственной частоте колебаний второго осциллятора.

По амплитуде имеют место биения (до 50%) между вынуждающей и собственной частотами, период которых составляет около 20-25 н.е., причем амплитуда биений во времени медленно затухает, падая до нуля при времени порядка 200 н.е. Период биений по мере увеличения амплитуды возбуждения уменьшается. Так при  $A = 5$  н.е. он составляет около 25 н.е., а при  $\dot{A} = 30$

уменьшается до 11 н.е. После затухания биений амплитуда колебаний второго осциллятора устанавливается на постоянном уровне, но колебания остаются двухамплитудными (примесь периода 0.05 остается до 50%).

Таким образом, можно полагать, что при амплитуде возбуждения меньшей критической колебания первого осциллятора всегда остаются синусоидальными с постоянной амплитудой, а частота их равна частоте возбуждения. При этом колебания второго осциллятора происходят с биениями между собственной частотой и частотой возбуждения, в результате чего являются двухамплитудными (двухпериодическими).

При амплитуде возбуждения выше критической колебания обоих осцилляторов после небольшого периода релаксации (порядка времени релаксации первого осциллятора) происходят с постоянной амплитудой на частоте, близкой к собственной частоте второго осциллятора.

## 10. Параметр кубической нелинейности

Другим важнейшим параметром является параметр кубической нелинейности первого осциллятора  $\delta$ . Это параметр, будучи наиболее высоким по показателю степени  $x_1$ , при достаточной величине может воспрепятствовать уходу системы на бесконечность при любом сочетании величин других параметров. Рассмотрим его влияние на формирование запаздывания более подробно.

На рис.8 показана зависимость времени запаздывания  $\tau_S$  от величины параметра кубической нелинейности  $\delta$ . Сплошные точки соответствуют моменту времени, при котором происходит резкое скачкообразное увеличение амплитуды колебаний. Открытые точки соответствуют моменту времени, начиная с которого система уходит на бесконечность.

Непрерывные бесконечно во времени продолжающиеся колебания большой амплитуды существуют только в области изменения параметра  $\delta$  между 5 и 53 н.е., ограниченной вертикальными пунктирными линиями.

При  $\delta < 5$  н.е. колебания большой амплитуды возникают, но продолжа-

ются сравнительно небольшой промежуток времени (соответствующий интервалу по вертикали между сплошными и открытыми точками), после чего система уходит на бесконечность. При  $\delta > 5$  н.е. система не уходит на бесконечность ни при каких значениях других параметров, то есть здесь достаточная величина этого параметра (в данном случае 5 н.е.) обеспечивает существование возвратно-поступательных (периодических или близких к таковым) колебаний системы с ограниченной величиной амплитуды.

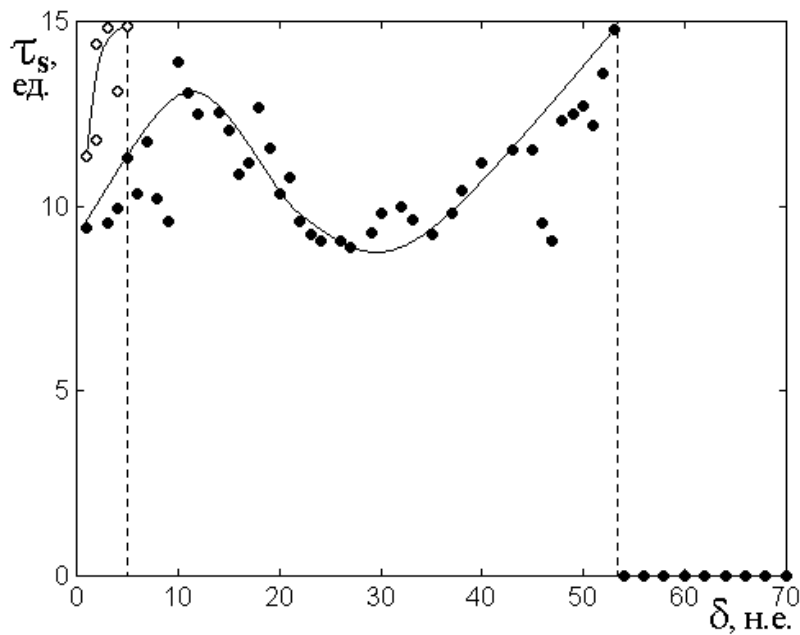


Рис.8. Зависимость времени запаздывания от параметра кубической нелинейности.

При  $\delta > 53$  н.е. колебания большой амплитуды отсутствуют, то есть происходит как бы «подавление» запаздывания, более подробно рассматриваемое далее. Порог подавления очень резкий.

Из рисунка видно, что сплошные точки испытывают по вертикали большой разброс. То есть уже при малом изменении параметра нелинейности (не более чем на 3-5 н.е.) время запаздывания меняется на величину, достигающую до 20-30%. Можно полагать, что функциональная зависимость здесь является довольно сложной и носит стохастический характер, поэтому сплошные линии



проведены эмпирическим образом через области, соответствующие максимальному сгущению точек.

## 11. К объяснению механизма запаздывания

В рамках интерпретации рассматриваемых явлений на основе механизма динамического потенциала можно полагать, что запаздывание обусловлено возникновением дополнительного минимума потенциала на расстоянии, достаточно большом от нуля.

Такое возникновение дополнительного минимума происходит путем преобразования потенциального барьера в перегиб, на котором производная от потенциала близка к нулю. То есть переход системы из нулевого положения в дополнительный минимум происходит через участок, где наклон потенциальной кривой весьма мал. Колебания на этом участке происходят с биениями между частотой возбуждения и частотами осцилляторов, так что амплитуда от одного периода колебаний к другому может меняться довольно сложным образом. При этом, если смещение рабочей точки успевает зайти достаточно далеко от точки перегиба в сторону дополнительного минимума, то происходит срыв системы в этот минимум и амплитуда колебаний резко возрастает. Если смещение рабочей точки не успевает зайти далеко от точки перегиба, то оно возвращается обратно, после чего колебания продолжают с небольшой амплитудой в течение еще одного периода. Вследствие переменного размаха колебаний при биениях, заход амплитуды за точку перегиба происходит нерегулярным образом, то есть в различные периоды, в результате чего зависимость времени запаздывания от величины параметра нелинейности приобретает характер, близкий к стохастическому.

Вообще говоря, такой весьма нерегулярный характер расположения точек, колеблющихся в окрестности величины  $\tau_S = (12 \pm 2)$  ед., дает повод приближенно полагать, что во всем интервале изменения параметра нелинейности  $\delta$  от нуля до его критического значения время запаздывания от этого параметра практически не зависит.

## 12. Подавление запаздывания

Как отмечено в предыдущем разделе, при достаточно большой величине параметра кубической нелинейности происходит подавление запаздывающих колебаний большой амплитуды, то есть они более не возбуждаются ни при каком значении амплитуды возбуждения.

На рис.9 показано развитие во времени колебаний первого осциллятора при различной величине параметра кубической нелинейности – меньшем (а) и большем (б) критического значения, обозначаемого далее как  $\delta_C$ .

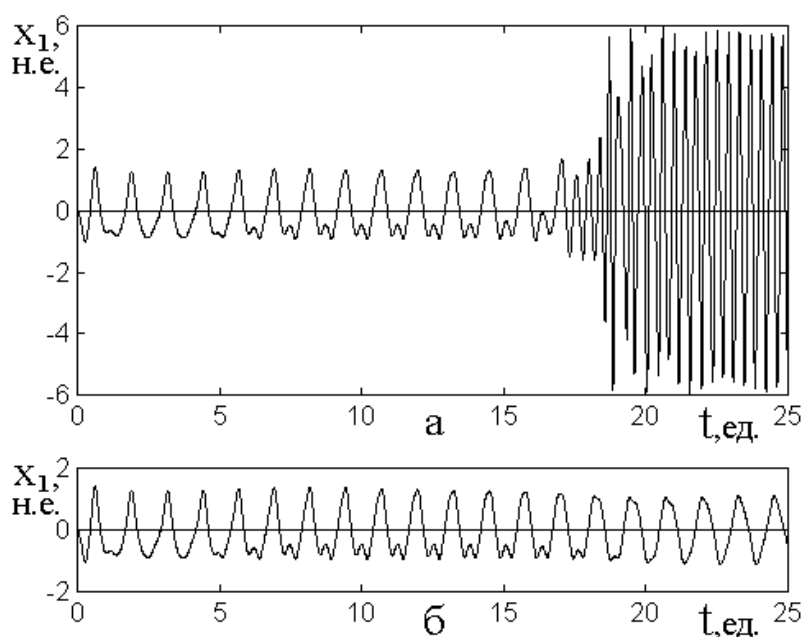


Рис.9. Развитие колебаний первого осциллятора во времени при различной величине параметра кубической нелинейности.

$$a - \delta = 53.04; \quad б - \delta = 53.05.$$

Критическое значение параметра нелинейности –  $\delta_C = (53.045 \pm 0.005)$  н.е.

Из рисунка можно видеть, что запаздывающее возбуждение колебаний большой амплитуды (рис.9а) имеет место только при параметре кубической нелинейности  $\delta$  меньшем критического значения  $\delta_C$ . Если же такое возбуждение имеет место, то до момента запаздывания частота равна 5 н.е., а после, когда уже возбуждены колебания большой амплитуды, частота равна 12.5 н.е., то

есть близка к собственной частоте второго осциллятора. При параметре нелинейности  $\delta$  большем критического значения  $\delta_C$  (рис.9б) частота всегда остается постоянной, равной 5 н.е.

### 13. Схема механизма подавления

Для интерпретации подавления запаздывания можно предложить следующий механизм, основанный на потенциальном характере кубической нелинейности.

Так, по мере увеличения параметра кубической нелинейности потенциальная яма сужается, поэтому амплитуда возможных колебаний уменьшается. Колебания большой амплитуды возбуждаются тогда, когда динамический потенциал имеет минимум где-то достаточно далеко от нуля. Кубическая нелинейность сужает это расстояние, вплоть до того, что этот дополнительный минимум скатывается к нулю. При этом амплитуда колебаний большой амплитуды спадает до малого значения. Скатывание происходит резко, так как потенциальный барьер заменяется перегибом, поэтому подавление тоже происходит резко как раз при критическом значении параметра нелинейности.

### 14. Амплитуда колебаний после запаздывания

В предыдущих разделах отмечен потенциальный характер кубической нелинейности первого осциллятора. Рассмотрим теперь обусловленные таким характером свойства возбуждаемых колебаний.

Прежде всего остановимся на наиболее наглядном свойстве колебаний – величине их амплитуды, устанавливающейся через некоторое время после окончания запаздывания. Временем установления пока интересоваться не будем, отметим лишь, что оно по порядку величины близко или превышает в небольшое число раз (два-три) время релаксации первого осциллятора, то есть составляет около 5-10 ед. времени.

На рис.10 показана зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины параметра кубической нелинейности. На врезке – приве-

дена та же зависимость при малых значениях параметра  $\delta$ .

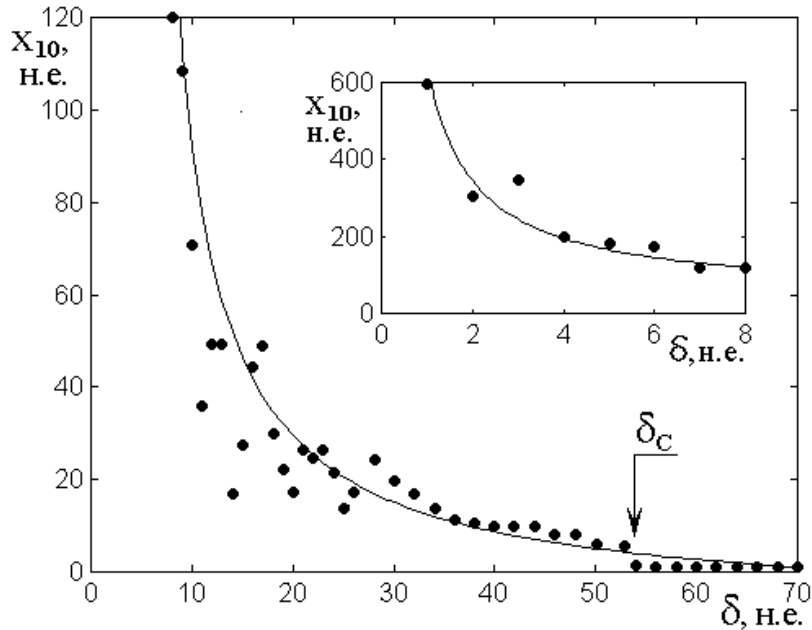


Рис.10. Зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины параметра кубической нелинейности.

На врезке – та же зависимость при малых значениях параметра  $\delta$ .

Кривая на основном рисунке построена по формуле:

$$x_{10} = \frac{600}{\delta - 4} - 8. \quad (15)$$

Кривая на врезке построена по формуле:

$$x_{10} = \frac{600}{\delta} + 45. \quad (16)$$

Из рисунка можно видеть, что установившаяся амплитуда при увеличении параметра кубической нелинейности более или менее монотонно спадает. Особенно резкий спад наблюдается при малых значениях параметра  $\delta$  (до 10-15 н.е., а также на врезке), после чего спад постепенно замедляется. Начиная со значения  $\delta$  порядка 53 н.е. амплитуда резко уменьшается и далее, хотя и спадает, но крайне медленно. Такое резкое уменьшение амплитуды соответствует достижению параметром  $\delta$  критического значения  $\delta_c$  (показано стрелкой),

что приводит к подавлению запаздывания, рассмотренному в предыдущем разделе.

В области значений  $\delta$  до 30 н.е. имеет место сильный разброс точек вверх и вниз до 50% и более, происходящий уже при малом изменении  $\delta$ , всего на 1-2 н.е. Можно полагать, что такой разброс свидетельствует в пользу крайне сложного характера потенциальной поверхности системы. То есть в формировании динамического потенциала участвует вся совокупность параметров системы в сочетании с меняющейся амплитудой колебаний второго осциллятора, собственная частота которого резко отличается от частоты возбуждения. По видимому, этот вопрос требует более подробного рассмотрения, в данный момент выходящего за рамки настоящей работы.

Следует заметить также, что разброс наиболее заметен только при  $\delta < 30$  н.е., а далее, вплоть до  $\delta_C$  – практически отсутствует.

Таким образом, достаточно уверенный характер спада зависимости  $x_{10}$  от  $\delta$  позволяет приблизить ее эмпирическими кривыми (15) и (16), показанными на рисунке сплошными линиями. Обе кривые соответствуют закону обратной пропорциональности, на что и можно ориентироваться в нулевом приближении.

## 15. Интерпретация спада амплитуды на основе модели потенциала

Рассмотрим теперь отмеченный спад амплитуды на основе механизма потенциала, соответствующего кубической нелинейности.

Так из выражения для динамического потенциала (11) можно видеть, что кубическая нелинейность соответствует слагаемому с четвертой степенью по амплитуде смещения первого осциллятора  $x_1$ , согласно (11), имеющему вид:

$$U_{\delta} = \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4. \quad (17)$$

Примерный вид кубического потенциала для этого случая показан на рис.11. Приведенные кривые построены по формуле

$$U_{\delta} = \delta \cdot (x_{10})^4. \quad (18)$$

При построении коэффициент  $1/4$  опущен, как не меняющий существа дела, а интервал изменения амплитуды первого осциллятора выбран сравнительно небольшим (до 5 н.е.) с целью повышения наглядности рисунка (чтобы избежать значений потенциала в десятки и сотни миллионов).

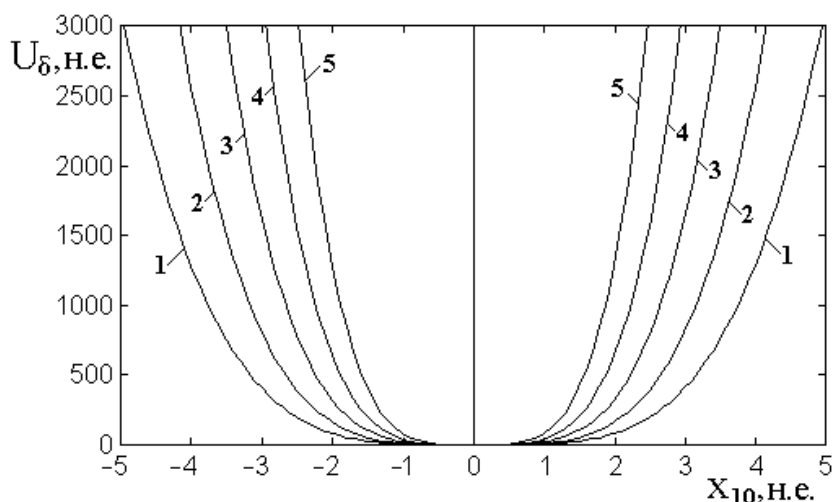


Рис.11. Зависимость потенциала кубической нелинейности от амплитуды колебаний первого осциллятора при различной величине параметра  $\delta$  :

1 – 5 н.е., 2 – 10 н.е., 3 – 20 н.е., 4 – 40 н.е., 4 – 80 н.е.

Из рисунка можно видеть, что потенциал  $U_{\delta}$  представляет собой симметричную яму, по мере увеличения параметра  $\delta$  сужающуюся. Следует отметить, что такое сужение линейным не является, а по мере увеличения  $\delta$  постепенно замедляется. Края ямы при заданном значении потенциала определяют интервал допустимых значений смещения первого осциллятора. То есть, чем выше потенциал, тем размах колебаний может быть больше.

Определенной иллюстрацией для рассматриваемой ситуации является рис.12, где показана зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности при различном уровне потенциала  $U_{\delta}$ . Точки построены в соответствии с кривыми на рис.11 при трех фиксированных уровнях потенциала (1000, 2000 и 3000 н.е.).

Кривая построена по эмпирической формуле:

$$x_{10} = \frac{30}{\delta - 8} + 2. \quad (19)$$

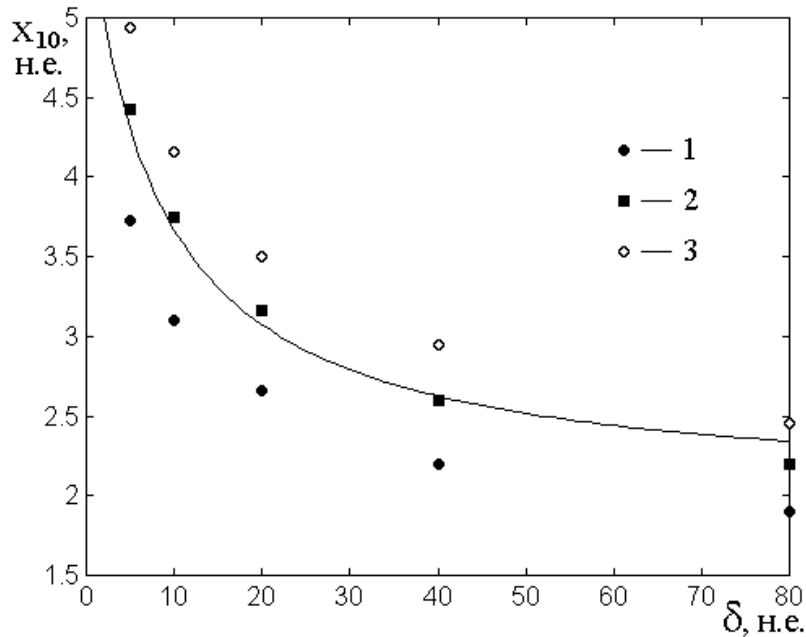


Рис.12. Зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности при различном уровне потенциала  $U_{\delta}$ : 1 – 1000 н.е., 2 – 2000 н.е., 3 – 3000 н.е.

Из рисунка можно видеть, что допустимая амплитуда колебаний при увеличении уровня потенциала уменьшается (по точкам – сверху вниз: от открытых точек, через квадраты, к сплошным точкам), что соответствует сужению потенциальной ямы на рис.11. В то же время, допустимая амплитуда по мере увеличения параметра  $\delta$  монотонно спадает, причем, как отмечено выше, такой спад является сильно нелинейным. Приведенная в формуле (19) обратно пропорциональная зависимость весьма приближенна, однако спад передает в достаточно характерной степени.

Возвращаясь к рис.11, можно видеть, что обе ветви потенциала, вследствие его четности, стремятся к плюс бесконечности, так что колебания по амплитуде всегда остаются ограниченными. Поскольку степень потенциала по первой переменной  $x_1$  равна четырем, а все остальные слагаемые динамиче-

ского потенциала (11) при постоянной величине  $x_2$  имеют по той же переменной  $x_1$  степень не выше третьей, то этот потенциал при достаточной величине своего параметра  $\delta$  перевешивает все остальные слагаемые и колебания всегда остаются конечными.

Наблюдаемый в некоторых случаях уход системы на бесконечность (открытые точки на рис.б), во-первых, имеет место только при довольно малых значениях параметра  $\delta$  (менее 5 н.е.) и во-вторых, по-видимому, обусловлен сложным характером потенциальной поверхности в этом случае. То есть может иметь место преобладающая роль слагаемого со смешанной нелинейностью с параметром  $\eta$ , где первая переменная, хотя и имеет всего третью степень, но в динамике к ней добавляется еще вторая переменная, то есть результирующая степень становится четвертой (пусть даже при некотором нарушении синхронизма). Возникающая при этом конкуренция двух четвертых степеней  $x_1^4$  и  $x_1^3 x_2$  при малом значении параметра  $\delta$ , но достаточно большой величине  $\eta$ , может привести к нейтрализации ограничения амплитуды, создаваемого кубической нелинейностью, что и даст уход системы на бесконечность.

## Заключение

Рассмотрен один из вариантов задачи о возбуждении нелинейных вынужденных колебания намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Рассмотрение проведено на основе упрощенной модели системы из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гирромагнитными свойствами. Получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связь между осцилляторами.

В характере связи отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора.



Для типичных параметров задачи о возбуждении гиперзвука СВЧ диапазона в пленке железиттриевого граната выполнена численная оценка коэффициента нелинейного слагаемого. Выявлено критическое значение постоянного поля, при котором знак коэффициента нелинейной связи изменяется на противоположный. Показано, что в реальных экспериментах величина критического поля имеет тот же порядок, что и поле линейного ферромагнитного резонанса.

На основе полученной системы уравнений для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более, после чего амплитуда развившихся колебаний стремится к стационарному значению.

Выявлены необходимые условия реализации такого нестационарного запаздывания. Показано, что важнейшим условием является значительное (не менее чем в несколько раз) различие времен релаксации осцилляторов, причем время запаздывания приходится на интервал между временами релаксации обоих осцилляторов.

Отмечен пороговый характер реализации запаздывания по отношению к амплитуде возбуждения и критический характер по параметру кубической нелинейности первого осциллятора.

Установлено, что принципиально важным моментом для реализации запаздывания является кратность частоты второго осциллятора относительно первого в небольшое нечетное число раз, в оптимальном случае – в три раза.

Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии наряду с основным дополнительного минимума потенциала системы, отделенного от основного потенциальным барьером. На основании предложенной гипотезы построена модель динамического потенциала, отражающая характер

колебаний первого осциллятора при условии использования амплитуды второго осциллятора в качестве параметра. В качестве главной причины появления минимума отмечено наличие нелинейной связи, пропорциональной произведению квадрата амплитуды колебаний первого осциллятора на первую степень амплитуды колебаний второго осциллятора.

Показано, что предложенная модель позволяет описать как пороговый по различным параметрам характер реализации запаздывания, так и необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого.

В рамках предложенной модели подробно исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено критическое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания. Показано, что после превышения амплитуды возбуждения критического значения по мере ее увеличения время запаздывания спадает по закону, близкому к обратной пропорциональности, одному и тому же для обоих осцилляторов. При этом амплитуда возбужденных колебаний далее не меняется, а в полном интервале изменения амплитуды возбуждения от нуля до весьма больших величин может быть описана зависимостью типа гиперболического тангенса, перегиб которого приходится на критический уровень возбуждения.

Подробно исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Выявлена решающая роль кубической нелинейности в ограничении амплитуды возбуждаемых колебаний на постоянном уровне. Отмечен нижний критический уровень параметра кубической нелинейности, необходимый для реализации такого ограничения. Показано, что при значении параметра ниже критического запаздывание имеет место, но через некоторое время возбуждаемые колебания теряют устойчивость и система уходит на бесконечность. Обнаружен верхний критический уровень параметра кубической нелинейности, выше которого запаздывание пропадает, то есть происходит как бы его подавление. Наблюдаемые нижний и верхний критические уровни параметра кубической нелинейно-

сти интерпретированы на основе модели динамического потенциала с учетом четной (четвертой) степени потенциала кубической нелинейности.

Работа выполнена при финансовой поддержке за счет гранта Российского Научного Фонда (проект № 14-22-00279).

### Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука. 1981. 568 с.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука. 1988. 368 с.
3. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971. 376 с.
4. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука. 1987.
5. Сивей М., Танненвальд П. Непосредственное наблюдение спин-волнового резонанса. // В сб. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах (ред. – Гуревич А.Г.). М.: ИЛ. 1961. 636 с. С.594-597.
6. Киттель Ч. Возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках однородным СВЧ полем. // В сб. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах (ред. – Гуревич А.Г.). М.: ИЛ. 1961. 636 с. С.585-593.
7. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. // В сб. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах (ред. – Гуревич А.Г.). М.: ИЛ. 1961. 636 с. С.281-285.
8. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Возбуждение связанных магнитоупругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. // Сборник трудов XVI Международной конференции "Радиолокация и радиосвязь". Москва-Фирсановка: Издание МЭИ. 2008. С.197-205.

9. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т.7. №9. С.315-317.

10. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Мандельштама-Бриллюэна. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т.13. №5. С.229-232.

11. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным. // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2012. С.248-259.

12. Котов Л.Н., Власов В.С., Иванов А.П., Щеглов В.И., Шавров В.Г. Исследование автоколебаний двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. // Вестник Челябинского государственного университета. 2013. №25 (316). Физика. №18. С.27-30.

13. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2013. С.188-198.

14. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2013. С.199-215.

15. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа автомодуляционного режима возбуждения гиперзвука магнитострикционным преобразователем. // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2014. С.161-175.

16. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика вынужденных колебаний намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода. // Сборник тру-

дов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2014. С.176-188.

17. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: ИНФРА-М. 2015. С.202-216.

18. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. // РЭ. 2015. Т.60. №1. С.79-91.

19. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. // РЭ. 2015. Т.60. №3. С.297-310.

20. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2013. №11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.

21. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2014. №1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.

22. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №5. <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.

23. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №6.

<http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.

24. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнестрикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 1. Деление частоты возбуждения. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep15/4/text.pdf>.

25. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнестрикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 2. Умножение частоты возбуждения. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №10. <http://jre.cplire.ru/jre/oct15/1/text.pdf>.

26. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994. 464 с.

27. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863-874.

28. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973. 832 с.

**Ссылка на статью:**

А.П.Иванов, В.Г.Шавров, В.И.Щеглов. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>