

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.12>

УДК 621.396.8

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФЛУКТУАЦИОННЫХ МОДУЛИРУЮЩИХ ПОМЕХ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА

В. М. Артюшенко¹, В. И. Воловач²

¹ Технологический университет,
141070, Московская область, г. Королев, ул. Гагарина, 42

² Поволжский государственный университет сервиса,
445017, Самарская область, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4

Статья поступила в редакцию 15 июля 2020 г.

Аннотация. Рассмотрены и проанализированы статистические характеристики распределения сигнала при наличии модулирующих помех на выходе линейного фильтра. Рассмотрены линейные цепи, осуществляющие преобразование интегрального типа. Показано, что сигнал, искаженный стационарной модулирующей помехой, является нестационарным. Для случая идеального интегратора определены среднее значение и дисперсия выходного сигнала. Определена сходимость распределения выходного сигнала к двум типам нормальных распределений – с неосциллирующим и осциллирующим вторым моментом – при наличии моделирующих помех. Получено аналитическое выражение для ПРВ выходного сигнала, усредненной за период несущей частоты; определены условия ее сходимости. Осуществлена количественная оценка точности аппроксимации закона распределения выходного сигнала с неосциллирующим и осциллирующим вторым моментом при воздействии модулирующих помех. Рассмотрен случай, когда модулирующие помехи представляют собой чисто фазовые искажения с нормальным законом распределения и заданной дисперсией. Показано, что для того чтобы распределение сигнала, искаженного случайной стационарной модулирующей помехой, можно было аппроксимировать неосциллирующим (по второму моменту) нормальным распределением, должны быть наложены

специальные условия на статистические характеристики функции помеховой модуляции. Прежде всего, модуль отношения нестационарного второго момента к стационарному должен быть намного меньше единицы. Получены графики ошибки аппроксимации интегрального закона распределения сигнала, искаженного стационарной модулирующей помехой, с нормальным распределением и осциллирующим вторым моментом.

Ключевые слова: линейный фильтр, флуктуационная модулирующая помеха, амплитудные и фазовые искажения, центральные и начальные моменты распределения, случайный стационарный процесс.

Abstract. The statistical characteristics of the signal distribution in the presence of modulating noise at the output of the linear filter are considered and analyzed. Linear circuits carrying out an integral type conversion are considered. It is shown that a signal distorted by stationary modulating noise is non-stationary. The average value and variance of the output signal are determined for the case of the ideal integrator, The convergence of the distribution of the output signal to two types of normal distributions is determined – the type with a non-oscillating second moment and oscillating second moment – in the presence of modulating noise. An analytical expression is obtained for the probability density of the output signal averaged over the period of the carrier frequency; conditions for its convergence are determined. A quantitative estimate was made of the accuracy of distribution approximation of the output signal with a non-oscillating and oscillating second moment under the influence of modulating noise. The case when the modulating noise is purely phase distortion with a normal distribution and a given variance is considered. It is shown that in order for the distribution of a signal distorted by a stationary random modulating noise to be approximated by a non-oscillating (at the second moment) normal distribution, special conditions must be imposed on the statistical characteristics of the noise modulation function. First of all, the relation module of the non-stationary second moment to the stationary one should be much less than unity. The graphs of the error of the cumulative distribution approximation for the signal distorted by a stationary modulating noise with a normal distribution and an

oscillating second moment are obtained.

Key words: linear filter, fluctuation modulating noise, amplitude and phase distortions, central and initial moments of distribution, random stationary process.

Введение

Как известно [1, 2 и др.], наиболее полной статистической характеристикой сигналов на выходе линейной цепи при флуктуационных модулирующих помехах является многомерный закон распределения. В некоторых случаях, например, при анализе влияния модулирующих помех на обнаружение радиосигналов, вероятности правильного измерения их параметров и вероятности разрешения двух сигналов можно ограничиться знанием одномерного закона распределения выходных сигналов [3-6 и др.]. К сожалению, в настоящее время нет общих методов анализа трансформации законов распределения случайных процессов, отличающихся от нормального распределения, при прохождении через линейные цепи [7]. Рассмотрим и проанализируем статистические характеристики распределения сигнала на выходе линейного фильтра при наличии флуктуационных модулирующих помех.

1. Статистические характеристики распределения сигнала при наличии модулирующих помех на выходе линейного фильтра

Пусть на вход линейного фильтра поступает узкополосный сигнал, подверженный воздействию флуктуационной модулирующей помехи. В этом случае он может быть записан в виде

$$s_M(t) = \eta(t)U(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi(t)],$$

где $\eta(t) \geq 0$ и $\varphi(t)$ – случайные функции, определяющие, соответственно, искажения амплитуды и фазы, в общем случае случайные и функционально связанные; $\Phi(t)$ и $U(t)$ – известные законы изменения фазы и амплитуды, определяющие передаваемую информацию; ω_0 – несущая частота сигнала.

Полагаем, что ширина спектра функций $\varphi(t)$ и $\eta(t)$ много меньше

несущей частоты сигнала, то есть искажения имеют характер паразитной модуляции сигнала. Огибающая сигнала $s_M(t)$ равна $U_M(t) = \eta(t)U(t)$.

В этом случае сигнал $s_M(t)$ может быть записан в виде

$$s_M(t) = \text{Re}\{\dot{U}_M(t)\exp(j\omega_0 t)\},$$

где $\dot{U}_M(t) = \dot{U}(t)\eta(t)\exp\{j\varphi(t)\} = \dot{U}(t)\dot{M}(t)$ – комплексная огибающая сигнала, искаженного модулирующей помехой, а $\dot{M}(t) = \eta(t)\exp\{j\varphi(t)\}$ – функция помеховой модуляции, полностью характеризующая паразитную модуляцию сигнала, вызываемую помехой.

Ограничимся рассмотрением линейных цепей, осуществляющих преобразование интегрального типа. Тогда, на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей можно считать, что в тех случаях, когда интервал корреляции входного процесса τ_k много меньше ($\tau_k \ll \tau_c$) постоянной времени линейной системы τ_c , закон распределения выходного сигнала по мере увеличения отношения τ_c/τ_k приближается к нормальному. Для линейных систем интегрального типа входной сигнал, искаженный флуктуационной модулирующей помехой,

$$s_{M.ВХ}(t) = \text{Re}\{\dot{M}(t)\dot{U}(t)\exp(j\omega_0 t)\}$$

и выходной сигнал

$$s_{M.ВЫХ}(t) = \text{Re}\{\dot{W}_M(t)\exp(j\omega_0 t)\}$$

связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} s_{M.ВЫХ}(t) &= \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\exp(j\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}(t-\tau)\dot{U}_M(\tau)d\tau\right\} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\exp(j\omega_0 t) \int_0^t \dot{H}(t-\tau)\dot{U}_M(\tau)d\tau\right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\dot{H}(t)$ – комплексная огибающая импульсной переходной функции линейной цепи; $\dot{W}_M(t)$ – комплексная огибающая сигнала на выходе фильтра при наличии модулирующих помех.

При условии $\tau_c \gg \tau_k$ интеграл (1) можно представить в виде суммы

$$s_{\text{М.ВЫХ}}(t) \cong \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \dot{H}(t - \Delta t) \dot{U}_M(k\Delta t) \exp(j\omega_0 t) \Delta t \right\}, \quad (2)$$

где элементарный интервал Δt должен быть таким, что $\tau_c \gg \Delta t$, $\Delta t \leq \tau_k$, а число суммируемых элементов равно $N = t/\Delta t$.

При выполнении условия $\Delta t \cong \tau_k$ отдельные слагаемые в (2) можно считать некоррелированными и распределение их суммы $P(s_{\text{М.ВЫХ}})$ в соответствии с центральной предельной теоремой при $\tau_c/\tau_k \rightarrow \infty$ стремится к нормальному.

Плотность распределения вероятностей (ПРВ) случайных функций, мало отличающихся от нормальной ПРВ, удобно представить в виде ряда Эджворта [1, 8, 9]:

$$W(s_{\text{М.ВЫХ}}) \cong W_H(s_{\text{М.ВЫХ}}) \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{b_k}{\mu_{20}^{k/2}} H_k \left(\frac{s_{\text{М.ВЫХ}} - m_{10}}{\mu_{20}^{1/2}} \right), \quad (3)$$

где

$$W_H(s_{\text{М.ВЫХ}}) = (2\pi\mu_{20})^{-0,5} \exp \left\{ -\frac{(s_{\text{М.ВЫХ}} - m_{10})^2}{2\mu_{20}} \right\}$$

– нормальная ПРВ;

$$H_k(z) = (-1)^k \exp \left\{ \frac{z^2}{2} \right\} \frac{d^k}{dz^k} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} \quad (4)$$

– одномерные полиномы Эрмита; m_{10} и μ_{20} – нормирующие постоянные, например, среднее значение и дисперсия ПРВ $W(s_{\text{М.ВЫХ}})$; b_k – квазимоменты [9], определяемые из выражения:

$$b_k = \mu_{20}^{k/2} \int_{-\infty}^{\infty} W(s_{\text{М.ВЫХ}}) H_k \left(\frac{s_{\text{М.ВЫХ}} - m_{10}}{\mu_{20}^{1/2}} \right) ds_{\text{М.ВЫХ}}. \quad (5)$$

Учитывая (4), запишем ряд (3) в виде

$$W(s_{\text{М.ВЫХ}}) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{b_k}{\mu_{20}^{k/2}} W_H^{(k)}(s_{\text{М.ВЫХ}}) = W_H(s_{\text{М.ВЫХ}}) + \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{b_k}{\mu_{20}^{k/2}} W_H^{(k)}(s_{\text{М.ВЫХ}}). \quad (6)$$

Соответственно, ряд для интегрального закона распределения

$$P(s_{M.VIX}) = \int_{-\infty}^{s_{M.VIX}} W(x) dx$$

ИМЕЕТ ВИД

$$P(s_{M.VIX}) = P_H(s_{M.VIX}) + \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \frac{b_k}{\mu_{20}^{\frac{k}{2}}} W_H^{(k-1)}(s_{M.VIX}), \quad (7)$$

где

$$P_H(s_{M.VIX}) = (2\pi\mu_{20})^{-0,5} \int_{-\infty}^{s_{M.VIX}} \exp\left\{-\frac{(s_{M.VIX} - m_{10})^2}{2\mu_{20}}\right\} ds_{M.VIX}.$$

Число слагаемых N в ряде Эджворта зависит от требуемой точности аппроксимации закона распределения рядом и выбора нормирующих величин m_{10} и μ_{20} . Как правило, значения m_{10} и μ_{20} принимают равными, соответственно, среднему значению и дисперсии случайной функции $s_{M.VIX}$. При этом обеспечивается наилучшая сходимость рядов (3) и (7) [1].

Ограничим дальнейшее рассмотрение простейшим случаем, когда все слагаемые в (2) имеют одинаковые моменты. Это предположение эквивалентно тому, что линейная система представляет собой идеальный интегратор за время $T = N\Delta t$, настроенный на среднюю частоту сигнала ω_0 . Входной неискаженный сигнал – гармоническое колебание постоянной на интервале T амплитуды. Функция помеховой модуляции $\dot{M}(t)$ – случайный стационарный процесс.

К такой же модели можно прийти и при рассмотрении линейных фильтров, согласованных с сигналами постоянной на интервале T амплитуды с произвольной фазовой структурой при $\tau = 0$.

При сформулированных условиях на интервале $[0, N\Delta t]$ огибающая импульсного отклика линейного фильтра постоянна. Для простоты будем считать $|\dot{H}(t)| = 1$ на интервале $0 \leq t \leq N\Delta t$. Считаем также, что для рассматриваемого случая интервал корреляции τ_k равен интервалу корреляции функции помеховой модуляции, а число независимых отсчетов N равно

параметру ξ , характеризующего отношение ширины энергетического спектра функции помеховой модуляции $\Delta\Omega_M$ к ширине спектра огибающей сигнала [8]

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \Delta\Omega_M T.$$

В рассматриваемом случае среднее значение и дисперсия выходного сигнала $W(s_{M.ВЫХ}) - m_{1W}$ и μ_{2W} – связаны простыми соотношениями с соответствующими моментами m_1 и μ_2 гармонического сигнала

$$s_M(t) = \text{Re}\{\exp(j\omega_0 t)\eta(t)\exp\{j\varphi(t)\}\} = \text{Re}\{\exp(j\omega_0 t)\dot{M}(t)\},$$

искаженного той же модулирующей помехой, что и входной сигнал:

$$m_{1W} = Nm_1, \mu_{2W} = N\mu_2.$$

Даже при стационарной модулирующей помехе сигнал, искаженный этой помехой, является нестационарным. Причем нестационарность связана как со сравнительно медленными относительно периода несущей частоты ω_0 изменениями амплитуды и фазы неискаженного сигнала, так и с быстрыми осцилляциями (колебаниями) с частотой ω_0 .

При принятой выше модели линейной цепи и входного сигнала для дальнейшего анализа медленная нестационарность входного сигнала не представляет интереса, поскольку амплитуда неискаженного сигнала за время накопления T принята постоянной. Тогда, среднее значение и дисперсию выходного сигнала $s_{M.ВЫХ}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_{1W} &= a_1 \cos \omega_0 t; \\ \mu_{2W} &= a_2 + c_2 \cos 2\omega_0 t = \mu_{2Wc} + \mu_{2Wh} = N\mu_{2c} + N\mu_{2h}, \end{aligned} \tag{8}$$

где коэффициенты a_1 , a_2 , c_2 не зависят от времени, а индексами «с» и «h» обозначены стационарная и нестационарная части μ_2 и μ_{2W} .

Последнее выражение показывает, что среднее значение выходного сигнала осциллирует с частотой ω_0 , а дисперсия имеет как неосциллирующую часть $N\mu_{2c}$, так и составляющую с частотой $2\omega_0$.

2. Сходимость распределения сигнала при наличии модулирующих помех на выходе линейного фильтра

Учитывая, что в выражениях (6) и (7) не накладывается специальных требований на выбор нормирующих констант m_{10} и μ_{20} , оценим в дальнейшем сходимость распределения выходного сигнала $s_{\text{М.ВЫХ}}(t)$ к двум типам нормальных распределений:

- нормальному распределению с неосциллирующим вторым моментом ($\mu_{20} = \mu_{2Wc}; m_{10} = m_{1W}$);
- нормальному распределению с осциллирующим вторым моментом ($\mu_{20} = \mu_{2W}; m_{10} = m_{1W}$).

Учитывая выражения для входящих в (5) полиномов Эрмита (4), а также связь между центральными и начальными моментами сигналов $s_{\text{М.ВЫХ}}(t)$ и $s_{\text{М.ВХ}}(t)$ [1, 8, 9]:

$$\begin{aligned} m_{1W} &= Nm_1; \quad \mu_{2W} = N\mu_2; \quad \mu_{3W} = N\mu_3; \quad \mu_{4W} = N\mu_4 + 3N(N-1)\mu_2^2; \\ \mu_{5W} &= N\mu_5 + 10N(N-1)\mu_2\mu_3; \\ \mu_{6W} &= N\mu_6 + 15N(N-1)\mu_2\mu_4 + 10N(N-1)\mu_3^2 + 15N(N^2 - 3N + 2)\mu_2^2\mu_3, \end{aligned}$$

для первых шести квазимоментов в (5) имеем

$$\begin{aligned} b_1 &= 0; \quad \frac{b_2}{N\mu_{2c}} = \frac{\mu_{2H}}{\mu_{2c}}; \quad \frac{b_3}{(N\mu_{2c})^{3/2}} = \frac{\mu_3}{N^{1/2}\mu_{2c}^{3/2}}; \\ \frac{b_4}{(N\mu_{2c})^2} &= \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{N\mu_{2c}^2} + \frac{\mu_{2H}^2}{\mu_{2c}^2}; \quad \frac{b_5}{(N\mu_{2c})^{5/2}} = \frac{\mu_5 - 10\mu_2\mu_3}{N^{3/2}\mu_{2c}^{5/2}} + \frac{10\mu_{2H}\mu_3}{N^{1/2}\mu_{2c}^{5/2}}; \\ \frac{b_6}{(N\mu_{2c})^3} &= \frac{\mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3}{N^2\mu_{2c}^3} + \\ &+ \frac{10}{N} \left(\frac{\mu_3^2}{\mu_{2c}^3} + \frac{3\mu_{2H}\mu_4}{2\mu_{2c}^3} - \frac{9\mu_{2H}^3}{2\mu_{2c}^3} - \frac{9\mu_{2H}}{2\mu_{2c}^3} \right) + 15 \frac{\mu_{2H}^3}{\mu_{2c}^3}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражения (9) получены для случая, когда нормировка в (6) и (7) выполнялась применительно к задаче оценки сходимости ПРВ $s_{\text{М.ВЫХ}}(t)$ к нормальному с неосциллирующим вторым моментом, равным $N\mu_{2c}$.

Если в (9) положить $\mu_{2H} = 0$, а вместо μ_{2c} записать μ_2 , то придем к выражениям квазимоментов для случая, когда нормирующие константы в (6) и (7) выбраны в соответствии с соотношениями $\mu_{20} = N\mu_2$, $m_{10} = Nm_1$.

Подставляя (9) в (6), располагая члены ряда по степеням $N^{-1/2}$, ограничившись членами порядка N^{-1} и вводя обозначение $\mu_{2H}/\mu_{2c} = \delta$, получим

$$\begin{aligned}
 W(s_{M.VYX}) &= \\
 &= W_H(s_{M.VYX}) - \frac{1}{2}\delta \left[W_H^{(1)}(s_{M.VYX}) - \frac{\delta}{12}W_H^{(4)}(s_{M.VYX}) - \frac{\delta^3}{24}W_H^{(6)}(s_{M.VYX}) \right] - \\
 &- \frac{\mu_3}{3!N^2\mu_{2c}^2} \left[W_H^{(3)}(s_{M.VYX}) - \frac{\delta}{2}W_H^{(5)}(s_{M.VYX}) \right] + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{4!N\mu_{2c}^2} W_H^{(4)}(s_{M.VYX}) + \\
 &+ \frac{10}{6!N} \frac{\mu_3^2}{\mu_{2c}^3} W_H^{(6)}(s_{M.VYX}) + \frac{15\delta}{6!N} \left(\frac{\mu_4 - 3\mu_{2c}^2}{\mu_{2c}^2} - 6\delta - 3\delta^2 \right) W_H^{(6)}(s_{M.VYX}), \tag{10}
 \end{aligned}$$

где

$$W_H^{(k)}(s_{M.VYX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{20}^{1/2}}} \frac{\partial^k}{\partial s_{M.VYX}^k} \exp \left\{ -\frac{(s_{M.VYX} - m_{10})^2}{2\mu_{20}} \right\}.$$

Если положить $\mu_{2c} = \mu_2$ и, следовательно, $\delta = 0$, то ряд (9) приобретет известную форму

$$\begin{aligned}
 W(s_{M.VYX}) &= W_H(s_{M.VYX}) - \frac{k_a}{6N^2} W_H^{(3)}(s_{M.VYX}) + \\
 &+ \frac{k_3}{24N} W_H^{(4)}(s_{M.VYX}) + \frac{k_a^2}{72N} W_H^{(6)}(s_{M.VYX}), \tag{11}
 \end{aligned}$$

где k_a и k_3 – соответственно, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Ряд (11) дает оценку сходимости ПРВ сигнала $s_{M.VYX}$ к нормальному с осциллирующим вторым моментом. Сходимость ряда (11) исследована Кремером [1]. Показано, что остаточный член этого ряда имеет порядок первого отброшенного члена, который для ряда (11) равен

$$-\frac{1}{5!N^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\mu_5}{5}-k_a\right)W_H^{(5)}(s_{M.VYX})-\frac{35}{7!N^2}k_a k_3 W_H^{(7)}(s_{M.VYX})-\frac{280}{9!N^2}k_a^3 W_H^{(9)}(s_{M.VYX}).$$

При увеличении числа независимых суммируемых слагаемых N в выражении (11) сходится к нормальной ПРВ практически при любых конечных значениях коэффициентов этого ряда.

Для того чтобы ряд (10) сходился к нормальной ПРВ, кроме выполнения условия $N \rightarrow \infty$ необходимо также выполнить условие $\delta = \mu_{2H}/\mu_{2c} \rightarrow 0$.

Таким образом, для того чтобы распределение сигнала, искаженного случайной стационарной модулирующей помехой на выходе линейной цепи при $N = \tau_c/\tau_k \gg 1$, можно было аппроксимировать неосциллирующим (по второму моменту) нормальным распределением, должны быть наложены специальные условия на статистические характеристики функции помеховой модуляции с тем, чтобы удовлетворялось соотношение

$$|\delta| = \left| \frac{\mu_{2H}}{\mu_{2c}} \right| \ll 1.$$

Для дальнейших расчетов будем использовать начальные моменты m_k сигнала, искаженного случайной модулирующей помехой, которые определяют коэффициенты ряда (10) посредством соотношений

$$k_{ac} = \frac{\mu_3}{\mu_{2c}^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3}{\left[(m_2 - m_1^2)_c \right]^{3/2}}; \quad (12)$$

$$k_{3c} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_{2c}^2} = \frac{m_4 + 3m_2^2 - 4m_1 m_3}{\left[(m_2 - m_1^2)_c \right]^2} - 6 + 12\delta - 6\delta^2; \quad (13)$$

$$k'_{3c} = \frac{\mu_4 - 3\mu_{2c}^2}{\mu_{2c}^2} = \frac{m_4 + 3m_2^2 - 4m_1 m_3}{\left[(m_2 - m_1^2)_c \right]^2} - 6 + 6\delta - 3\delta^2.$$

Выражения для k_a и k_3 получаются из (12) и (13) путем замены

$$\left(m_2 - m_1^2\right)_c = \mu_{2c} \text{ на } \mu_2 = m_2 - m_1^2.$$

В дальнейшем будем полагать, что функции, определяющие флюктуации амплитуды и фазы сигнала за счет действия модулирующей помехи, являются независимыми стационарными случайными процессами. Тогда

$$m_k = m_k^\eta m_k^\varphi,$$

где m_k^η – начальные моменты ПРВ амплитудных искажений $\eta(t)$; m_k^φ – начальные моменты ПРВ сигнала $s_M(t) = \text{Re}\{\eta(t) \exp j[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]\}$, в котором φ_0 – начальная фаза при условии, что амплитудные искажения отсутствуют, то есть $\eta(t) = 1$.

Исходя из того, что среднее значение фазовых искажений $m_1^\varphi \{\varphi(t)\}$ может быть учтено начальной фазой сигнала φ_0 , и, полагая ПРВ центральных фазовых искажений симметричной функцией, для первых начальных моментов сигнала $s_M(t)$ в соответствии с результатами, полученными в [1], имеем

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1^\eta |\theta_1^\varphi(1)| \cos \alpha(t); \\ m_2 &= \frac{1}{2} m_2^\eta \left[1 + |\theta_1^\varphi(2)| \cos 2\alpha(t) \right]; \\ m_3 &= \frac{1}{4} m_3^\eta \left[3 |\theta_1^\varphi(1)| \cos \alpha(t) + |\theta_1^\varphi(3)| \cos 3\alpha(t) \right]; \\ m_4 &= \frac{3}{8} m_4^\eta \left[1 + \frac{4}{3} |\theta_1^\varphi(2)| \cos 2\alpha(t) + \frac{1}{3} |\theta_1^\varphi(4)| \cos 4\alpha(t) \right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\theta_1^\varphi(l)$ – одномерная характеристическая функция фазовых искажений сигнала $s_M(t)$; $\alpha(t) = \omega_0 t + \varphi_0$.

С учетом (14) получаем

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} \left[m_2^\eta - (m_1^\eta)^2 |\theta_1^\varphi(1)|^2 \right] + \frac{1}{2} \left[m_2^\eta |\theta_1^\varphi(2)| - (m_1^\eta)^2 |\theta_1^\varphi(1)|^2 \right] \times \\ &\times \cos 2\alpha(t) = a_2 + c_2 \cos 2\alpha(t) = \mu_{2c} + \mu_{2H}; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\delta = \frac{c_2}{c_2} \cos 2\alpha(t); k_{ac} = a_2^{-3/2} \left[a_2 \cos \alpha(t) + c_2 \cos 3\alpha(t) \right];$$

$$k_a = \frac{a_2 \cos \alpha(t) + c_2 \cos 3\alpha(t)}{[a_2 + c_2 \cos 2\alpha(t)]^{3/2}};$$

$$k_{\text{эс}} = a_2^{-2} [a_4 - 3c_2 a_2 + (c_4 + 12c_2 a_2) \cos 2\alpha(t) + (d_4 - 3c_2 a_2) \cos 4\alpha(t)] - 6;$$

$$k_3 = \frac{a_2 + c_4 \cos 2\alpha(t) + d_4 \cos 4\alpha(t)}{[a_2 + c_2 \cos 2\alpha(t)]^2} - 6; \quad (16)$$

$$k'_{\text{эс}} = a_2^{-2} \left[a_4 - \frac{3}{2} c_2 a_2 + (c_4 + 6c_2 a_2) \cos 2\alpha(t) + \left(d_4 - \frac{3}{2} c_2 a_2 \right) \cos 4\alpha(t) \right] - 6,$$

где

$$a_2 = \frac{1}{2} \left[m_2^n - (m_1^n)^2 |\theta_1^\varphi(1)|^2 \right]; \quad c_2 = \frac{1}{2} \left[m_2^n |\theta_1^\varphi(2)| - (m_1^n)^2 |\theta_1^\varphi(1)|^2 \right];$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \left[m_3^n |\theta_1^\varphi(1)| - 2m_1^n m_2^n |\theta_1^\varphi(1)| - m_1^n m_2^n |\theta_1^\varphi(1) \theta_1^\varphi(2)| + 2(m_1^n)^3 |\theta_1^\varphi(1)|^3 \right];$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \left[m_3^n |\theta_1^\varphi(3)| - 3m_1^n m_2^n |\theta_1^\varphi(1) \theta_1^\varphi(2)| + 2(m_1^n)^3 |\theta_1^\varphi(1)|^3 \right];$$

$$a_4 = \frac{3}{8} \left[m_4^n + 2(m_2^n)^2 + (m_2^n)^2 |\theta_1^\varphi(2)| - 4m_1^n m_3^n |\theta_1^\varphi(1)|^2 \right];$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \left[m_4^n |\theta_1^\varphi(2)| + 3(m_2^n)^2 |\theta_1^\varphi(2)| - 3m_1^n m_3^n |\theta_1^\varphi(1)|^2 - m_1^n m_3^n |\theta_1^\varphi(1) \theta_1^\varphi(3)| \right];$$

$$d_4 = \frac{1}{8} \left[m_4^n |\theta_1^\varphi(4)| + 3(m_2^n)^2 |\theta_1^\varphi(2)|^2 - 4m_1^n m_3^n |\theta_1^\varphi(1) \theta_1^\varphi(3)| \right].$$

Выражения (15) и (16) в явном виде указывают на зависимость коэффициентов рядов (10) и (11) от времени.

Как правило, при анализе нормальных случайных процессов в задачах статистической радиотехники рассматривают нормальные случайные процессы с постоянным или медленно меняющимся вторым моментом [10]. Такое рассмотрение возможно распространить формально и на процессы с нормальным распределением и осциллирующим вторым моментом (8). Однако, получающиеся при этом характеристики приемника, например вероятности обнаружения, также будут содержать часть, осциллирующую с частотой $2\omega_0$ и выше. Для получения средних значений вычисленных таким образом

характеристик приемника их, очевидно, необходимо усреднять по времени за период несущей частоты ω_0

Проведя усреднения ряда (10) на интервале времени $\pm\pi/\omega_0$, можно получить аналитическое выражение для ПРВ выходного сигнала, усредненной за период несущей частоты:

$$\begin{aligned}
 W(s_{\text{М.ВЫХ}}) = & W_{\text{Н}}(s_{\text{М.ВЫХ}}) + \frac{1}{48} \frac{c_2^2}{a_2^2} W_{\text{Н}}^{(4)}(s_{\text{М.ВЫХ}}) + \frac{1}{128} \frac{c_2^4}{a_2^4} W_{\text{Н}}^{(6)}(s_{\text{М.ВЫХ}}) + \\
 & + \frac{1}{4!N} \left[a_2^{-2} (a_4 - 3c_2 a_2) - 6 \right] W_{\text{Н}}^{(4)}(s_{\text{М.ВЫХ}}) + \frac{1}{6!N} \frac{a_3^2 + c_3^2}{a_2^3} W_{\text{Н}}^{(6)}(s_{\text{М.ВЫХ}}) + \quad (17) \\
 & + \frac{15}{6!2N} a_2^{-3} c_2 (c_4 + 6a_2 c_2) W_{\text{Н}}^{(6)}(s_{\text{М.ВЫХ}}).
 \end{aligned}$$

Из выражения (17) видно, что усредненная за период несущей частоты ПРВ $\langle W(s_{\text{М.ВЫХ}}) \rangle$ при $N \rightarrow \infty$ быстрее сходится к нормальной ПРВ с неосциллирующим вторым моментом, поскольку члены ряда (17) не зависят от N и включают отношение c_2/a_2 , которое при условии сходимости всегда меньше единицы в более высокой степени, чем соответствующие члены ряда [11].

3. Количественная оценка точности аппроксимации закона распределения сигнала при наличии модулирующих помех на выходе линейного фильтра

Проведем количественную оценку точности аппроксимации закона распределения сигнала, искаженного случайной модулирующей помехой, на выходе линейной системы $P(s_{\text{М.ВЫХ}})$ нормальным распределением $P_{\text{Н}}(s_{\text{М.ВЫХ}})$ с неосциллирующим и осциллирующим вторым моментом [12].

Оценим вначале зависимость условий сходимости распределения с ПРВ (10) к нормальному с неосциллирующим вторым моментом от статистических характеристик функции помеховой модуляции в предельном случае, когда ширина спектра функции помеховой модуляции значительно превосходит полосу пропускания линейной системы ($N \rightarrow \infty$).

При $N \rightarrow \infty$ из (10) имеем

$$P(s_{M.VЫX}) - P_H(s_{M.VЫX}) = -\frac{\delta}{2} \left[W_H(s_{M.VЫX}) - \frac{\delta}{12} W_H^{(3)}(s_{M.VЫX}) - \frac{\delta^3}{24} W_H^{(5)}(s_{M.VЫX}) \right], \quad (18)$$

где

$$\delta \cong \frac{|\theta_1^\varphi(2)| - |\theta_1^\varphi(1)|^2}{1 - |\theta_1^\varphi(1)|^2} \cos 2\alpha(t) = \Delta \cos 2\alpha(t).$$

Если задаться относительной точностью аппроксимации

$$\frac{|P(s_{M.VЫX}) - P_H(s_{M.VЫX})|}{P_H(s_{M.VЫX})} \leq 10^{-k},$$

то более высокие требования к величине Δ будут при малых значениях $P_H(s_{M.VЫX})$.

При $P_H(s_{M.VЫX}) \leq 0,1 \dots 0,3$ можно ограничиться первым членом в выражении (18). Тогда условие, ограничивающее величину Δ , будет

$$|\Delta| \leq 2 \times 10^{-k} \frac{P_H(s_{M.VЫX})}{W_H(s_{M.VЫX})}, \quad P_H(s_{M.VЫX}) \leq 0,3. \quad (19)$$

При нормальном распределении фазовых ошибок с дисперсией фазы σ_φ^2 (19) переходит в следующее условие для среднеквадратического значения фазовых ошибок:

$$\sigma_\varphi \geq 1,58k \frac{P_H(s_{M.VЫX})}{W_H(s_{M.VЫX})}.$$

При $k = 1$ и

$$P_H(s_{M.VЫX}) = 0,1, \quad \sigma_\varphi \geq 1,28;$$

$$P_H(s_{M.VЫX}) = 0,2, \quad \sigma_\varphi \geq 1,18.$$

Для других ПРВ случайных фазовых ошибок равномерного на интервале $\pm\varphi_m$ распределения, соответствующего синусоиде со случайной начальной фазой и девиацией фазовых искажений φ_m , на рис. 1 приведены зависимости величины $|\Delta|$ от максимального отклонения фазы φ_m , где пунктиром нанесена

зависимость $|\Delta(\varphi_m)|$ для случая нормального распределения фазовых искажений, когда $\varphi_m = 3\sigma_\varphi$.

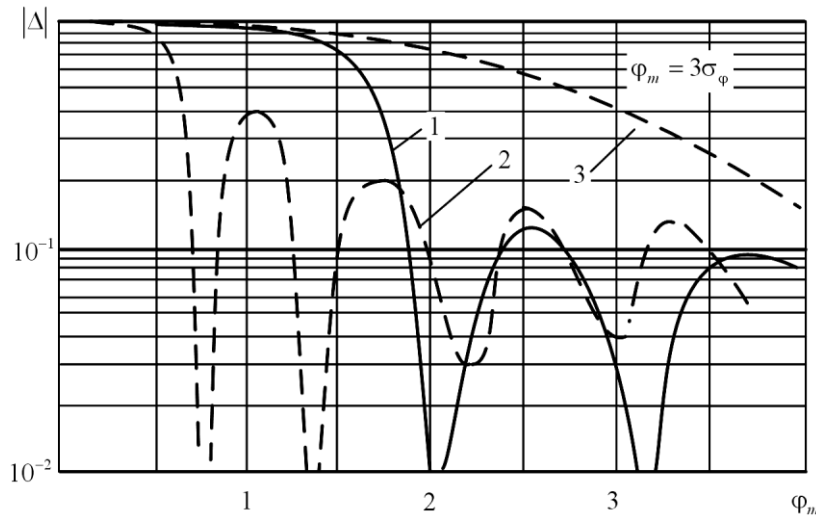


Рис. 1. Зависимости $|\Delta|$ от максимального отклонения фазы φ_m , где: 1 – $\theta_1^\varphi(1) = \sin \varphi_m / \varphi_m$; 2 – $\theta_1^\varphi(1) = J_0(2\varphi_m)$; 3 – $\theta_1^\varphi(1) = \exp\{\sigma_\varphi^2/2\}$.

Представленные на рис. 1 зависимости $|\Delta(\varphi_m)|$ показывают, что при достаточно общих предположениях о распределении амплитудных и фазовых искажений закон распределения сигнала, искаженного стационарной модулирующей помехой, на выходе узкополосной линейной системы может быть с достаточной точностью принят нормальным с неосциллирующим вторым моментом лишь при выполнении следующих условий:

- фазовые искажения сигнала достаточно велики (максимальная фазовая ошибка достигает $\pm(2...3)$ рад);
- интервал корреляции, искаженного модулирующей помехой сигнала, значительно меньше постоянной времени линейной системы.

Первое условие связано со спецификой рассматриваемых сигналов и требованием отсутствия осцилляций второго момента ПРВ сигнала на выходе линейной системы. Второе условие широко известно и является общим условием, необходимым для нормализации случайных процессов в линейных цепях.

В тех случаях, когда можно ограничиться рассмотрением усредненного за период несущей частоты распределения сигнала, искаженного модулирующей помехой на выходе линейной системы, первое из сформулированных выше условий оказывается менее жестким и определяется соотношением

$$|\Delta| \leq \left(24 \times 10^{-k} \frac{P_H(s_{M.ВЫХ})}{W_H^{(3)}(s_{M.ВЫХ})} \right)^{0,5},$$

которое получается так же, как и (19), при использовании вместо ряда (10) ряда (17) и обеспечивает выполнение неравенства

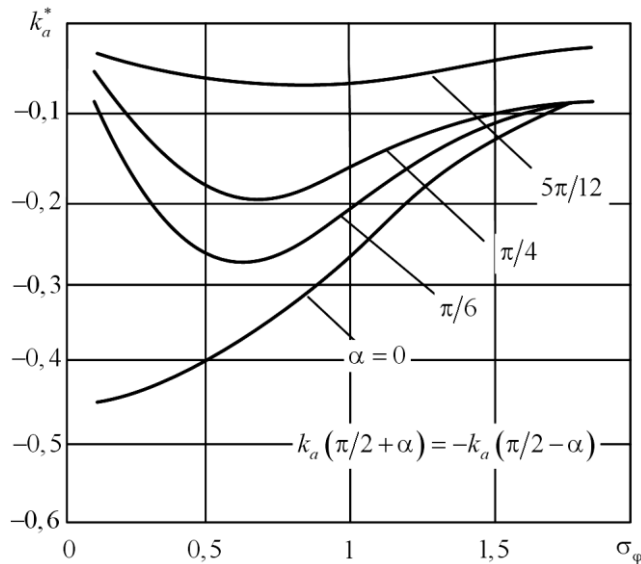
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\langle P(s_{M.ВЫХ}) \rangle - P_H(s_{M.ВЫХ})|}{P_H(s_{M.ВЫХ})} \leq 10^{-k},$$

где $\langle P(s_{M.ВЫХ}) \rangle$ – закон распределения, соответствующий ПРВ $\langle W(s_{M.ВЫХ}) \rangle$ (17).

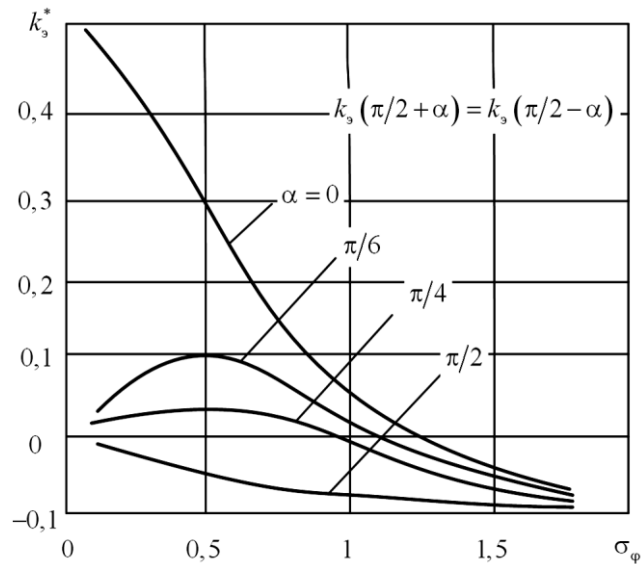
Произведем оценку на примере условия сходимости закона распределения сигнала, искаженного модулирующей помехой, на выходе линейной цепи к нормальному распределению с осциллирующим вторым моментом. Ряд, определяющий ошибки аппроксимации для соответствующей ПРВ, описывается (11). В качестве примера рассмотрим случай, когда модулирующие помехи представляют собой чисто фазовые искажения с нормальным законом распределения и дисперсией σ_φ^2 .

На рис. 2 приведены зависимости коэффициентов асимметрии $k_a^* = k_a/6$ и эксцесса $k_3^* = k_3/24$ для данного случая при нескольких фиксированных значениях угла $\alpha(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ (для нескольких моментов времени).

Анализ показывает, что при $\sigma_\varphi \leq 1$ максимальные абсолютные значения коэффициентов k_a и k_3 получаются при $\alpha = k\pi$ ($k = 1, 2$). При $\sigma_\varphi \geq 1,5$ коэффициенты k_a и k_3 слабо зависят от времени (угла α) и близки к соответствующим коэффициентам при равномерном распределении фазовых ошибок (при $\sigma_\varphi \rightarrow \infty$ и $k_a \rightarrow 0$, $k_3 \rightarrow -3/2$).



а)



б)

Рис. 2. Зависимости, при различных значениях угла α : а – $k_a^* = f(\sigma_\varphi)$;

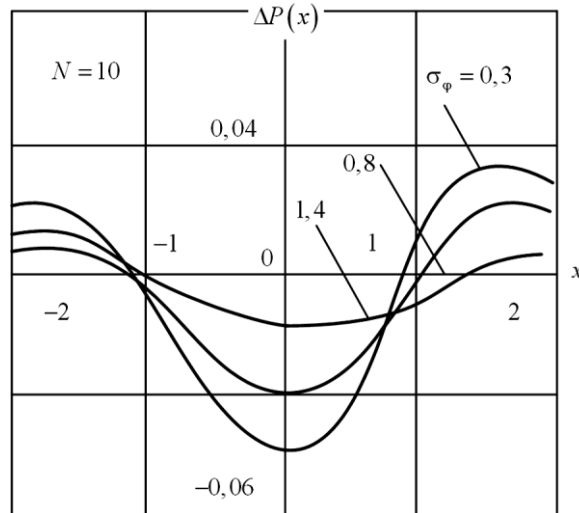
$$б – k_3^* = f(\sigma_\varphi).$$

Ошибки аппроксимации интегрального закона распределения сигнала, искаженного стационарной модулирующей помехой, с нормальным распределением и осциллирующим вторым моментом (14) приведены на рис. 3.

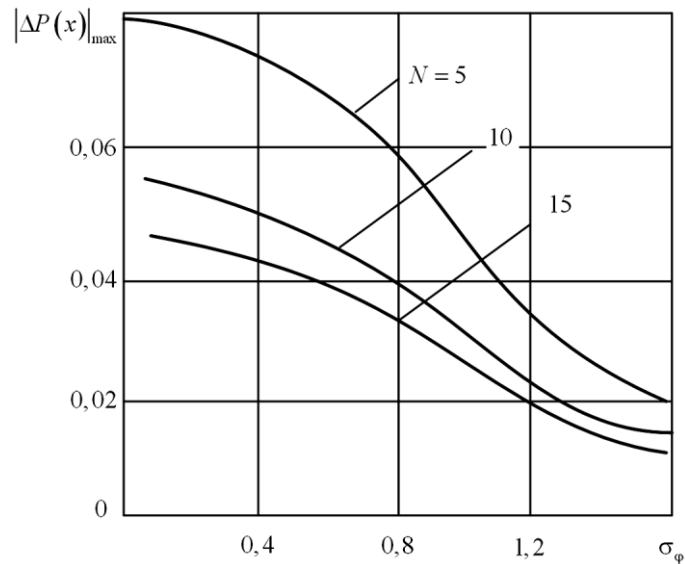
При расчетах были приняты значения коэффициентов k_a и k_3 , соответствующие максимальным ошибкам аппроксимации, то есть для $\alpha = k\pi$.

На рис. 3, а даны зависимости ошибок аппроксимации $\Delta P(x) = \langle P(s_{\text{М.ВЫХ}}) \rangle - P_{\text{Н}}(s_{\text{М.ВЫХ}})$ от аргумента закона распределения

$x = (s_{\text{м.в.ых}} - m_{1w}) / (2\mu_{2w})^{1/2}$ при $N = 10$ и нескольких значениях величины дисперсии фазовых искажений σ_{φ}^2 . Аналогичную форму имеют приведенные зависимости и при других значениях N , то есть при других отношениях интервала корреляции функции помеховой модуляции к постоянной времени линейной цепи.



а)



б)

Рис. 3. Зависимости: а – $\Delta P(x) = f(x)$ при $N = 10$ и различных значениях величины σ_{φ} ; б – $|\Delta P(x)|_{\text{max}} = f(\sigma_{\varphi})$ при различных N .

На рис. 3, б представлена зависимость максимальных ошибок аппроксимации $|\Delta P(x)|_{\max} = \left| \langle P(s_{\text{м.в.ых}}) \rangle - P_{\text{н}}(s_{\text{м.в.ых}}) \right|_{\max}$ от

среднеквадратической величины фазовых искажений σ_{φ} . Из представленных зависимостей видно, что даже при малых фазовых искажениях закон распределения сигнала, искаженного модулирующей помехой, при прохождении через линейную цепь достаточно быстро приближается с увеличением N или параметра $\xi = \frac{1}{2\pi} \Delta\Omega_{\text{м}} T$ к нормальному с осциллирующим вторым моментом.

Выводы

Рассмотрены и проанализированы статистические характеристики распределения сигнала при наличии модулирующих помех на выходе линейного фильтра. Осуществлена оценка сходимости распределения выходного сигнала при наличии модулирующих помех на выходе линейного фильтра к двум типам нормальных распределений: нормальному распределению с неосциллирующим и осциллирующим вторым моментом. Показано, что для того чтобы распределение сигнала, искаженного случайной стационарной модулирующей помехой, на выходе линейной цепи можно было аппроксимировать неосциллирующим (по второму моменту) нормальным распределением, должны быть наложены специальные условия на статистические характеристики функции помеховой модуляции с тем, чтобы модуль отношения нестационарного второго момента к стационарному был намного меньше единицы.

Проведена количественная оценка точности аппроксимации закона распределения сигнала, искаженного случайной модулирующей помехой, на выходе линейной системы с нормальным распределением с неосциллирующим и осциллирующим вторым моментом.

Литература

1. Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И. Модулирующие (мультипликативные) помехи и прием радиосигналов. Под ред. И.Я.Кремера. М.: Сов. Радио. 1972. 480 с.
2. Васильев К.К. Прием сигналов при мультипликативных помехах. Саратов. Изд-во Саратовского Университета. 1983. 128 с.
3. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др.; Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь. 1984. 440 с.
4. Валеев В.Г., Данилов В.А. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских коррелированных радиопомех // Изв. выш. учебн. заведений. Радиоэлектроника. 1991. №7. С 30-34.
5. Артюшенко В.М., Воловач В. И. Оценка погрешности измерения скалярного информационного параметра сигнала на фоне мультипликативных помех // Журнал радиоэлектроники. 2016. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/8/text.pdf>
6. Артюшенко В. М., Воловач В. И. Идентификация параметров распределения аддитивных и мультипликативных негауссовских помех // Автометрия. 2017. Т. 53. №3. С. 36-43.
7. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. В 2-х т. Пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина. М.: Сов. Радио. Т.1. 1961. 782 с.; Т.2. 1962. 832 с.
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / 3-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь. 1989. 656 с.
9. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь. 1982. 624 с.
10. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазиоптимальный прием сигналов. М.: Сов. Радио. 1975. 704 с.
11. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Статистические характеристики распределения сигнала на выходе линейного фильтра при наличии флюктуационных модулирующих помех // XIII Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь». Сборник трудов. – Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. – 25-27 ноября 2019 г. С. 143-148.

12. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ влияния мультипликативных помех на обнаружение сигналов на фоне аддитивного шума // XIII Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь». Сборник трудов. – Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. – 25-27 ноября 2019 г. С. 149-154.

Для цитирования:

Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ влияния флуктуационных модулирующих помех на статистические характеристики распределения выходного сигнала линейного фильтра. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.12>