

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.13>
УДК 621.391.8

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ НА ФОНЕ АДДИТИВНОГО ШУМА

В. М. Артюшенко¹, В. И. Воловач²

¹Технологический университет,
141070, Московская область, г. Королев, ул. Гагарина, 42
²Поволжский государственный университет сервиса,
445017, Самарская область, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4

Статья поступила в редакцию 15 июля 2020 г.

Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с оценкой влияния мультипликативных помех на обнаружение сигналов приемным устройством, рассчитанным на обработку сигналов как с известной, так и с неизвестной начальной фазой на фоне аддитивного шума. Показано, что следует различать два случая обнаружения – обнаружение сигнала в истинном канале и обнаружение наличия сигнала, для которых определены соответствующие вероятности. Определены характеристики выходного сигнала оптимального приемника для входного сигнала с известной начальной фазой, в частности, среднее значение и дисперсия выходного сигнала, а также результирующий выходной сигнал «неистинного» канала при наличии мультипликативных помех. Распределение выходного сигнала названного канала приемника может быть приближенно описано нормальным законом. Определены характеристики выходного сигнала оптимального приемника для входного сигнала с неизвестной начальной фазой. Показано, что для описанного случая – приема сигналов с неизвестными начальными фазами на фоне белого гауссовского шума – в качестве выходного сигнала может использоваться огибающая корреляционного интеграла; приведены выражения для ее определения. Также показано, что плотность распределения вероятностей (ПРВ) результирующего выходного сигнала истинного канала при отсутствии мультипликативных помех определяется обобщенным законом Релея (законом Райса), а в

«неистинных» каналах – ПРВ Релея. Получены выражения выходного сигнала оптимального приемника и его квадратурных составляющих при наличии мультипликативных помех, а также выражения дисперсий и ковариации выходного сигнала для «неистинного» канала. Определено влияние мультипликативных помех на обнаружение в приемном устройстве сигналов с известной начальной фазой. Показано, что при отсутствии мультипликативных помех вероятности обнаружения в истинном и «неистинных» каналах могут совпадать. Получены выражения для определения вероятности обнаружения в истинном канале при воздействии флуктуационных мультипликативных помех. При этом названная вероятность связана как с вероятностными параметрами при отсутствии помех, так и с параметрами сигнала и воздействующей помехи. Показано, что более уязвимыми по отношению к мультипликативным помехам являются системы, в которых используются сигналы большой длительностью или когерентные пачки импульсов независимо от наличия частотной или фазовой модуляции сигнала. Получены графики вероятности обнаружения сигнала в истинном и «неистинном» каналах приемного устройства в условиях воздействия флуктуационных мультипликативных помех в зависимости от параметров помех при различных значениях вероятности обнаружения и ложных тревог в отсутствие помех. Определено влияние мультипликативных помех на обнаружение в приемном устройстве сигналов с неизвестной начальной фазой, включая получение выражений вероятностей обнаружения, в том числе с использованием Q -функции в истинном канале, и дисперсий выходного сигнала. Также получены графики вероятности обнаружения сигнала в истинном канале приемного устройства в условиях воздействия флуктуационных мультипликативных помех в зависимости от параметров помех при различных значениях вероятности обнаружения и ложных тревог, а также для одинаковой для всех каналов плотности помеховой составляющей сигнала. Показано, что степень влияния мультипликативных помех на обнаружение сигналов зависит как от параметров помех, так и от параметров самих сигналов.

Ключевые слова: мультипликативная помеха, вероятность достоверного обнаружения, вероятность ложного обнаружения, оптимальное приемное устройство, уровень порога, опорный сигнал.

Abstract. Issues related to estimating the effect of multiplicative noise on signal detected by a receiving device designed to process signals with both known and unknown initial phase exposed to additive noise are in the focus of this paper. It is shown that two cases of detection should be distinguished – detection of a signal in the true channel and detection of the presence of a signal for which the corresponding probabilities are determined. The characteristics of the output signal for the optimal receiver for the input signal with a known initial phase are determined, such as the average value and variance of the output signal, as well as the resulting output signal of the «untrue» channel in the presence of multiplicative noise. The distribution of the output signal of the above-mentioned channel of the receiver can be approximately described as normal. The characteristics of the output signal of the optimal receiver for the input signal with an unknown initial phase are determined. It is shown that for the described case (receiving signals with unknown initial phases against a background of white Gaussian noise), the envelope of the correlation integral can be used as the output signal; expressions for its definition are given. It is also shown that the probability distribution density (PDF) of the resulting output signal in the true channel in the absence of multiplicative noise is determined by the generalized Rayleigh law (Rice law), whereas in the «untrue» channels it is determined by the Rayleigh PDF. Expressions of the output signal of the optimal receiver and its quadrature components in the presence of multiplicative noise are obtained, as well as expressions of variance and covariance of the output signal for the «untrue» channel. The effect of multiplicative noise on the detection of signals with a known initial phase in the receiving device is determined. It is shown that in the absence of multiplicative noise, the probabilities of detection in the true and «untrue» channels can coincide. Expressions are obtained for determining the probability of detection in the true channel under the influence of fluctuation multiplicative noise. Moreover, the named probability is associated both with

probabilistic parameters in the absence of noise and with the parameters of the signal and the affecting noise. It is shown that systems that use long duration signals or coherent bursts of pulses, regardless of the presence of frequency or phase modulation of the signal, are more vulnerable to multiplicative noise. We obtained the graphs of the probability of signal detection in the true and «untrue» channels of the receiving device exposed to fluctuation multiplicative noise, depending on the noise parameters for various values of the detection probability and false alarms in the absence of noise. The influence of multiplicative noise on the detection of signals with an unknown initial phase in the receiving device including obtaining the expressions for different detection probabilities, such as using the Q -function in the true channel, and the variance of the output signal is determined. Also we obtained the graphs of the probability signal detecting in the true channel of the receiving device exposed to fluctuation multiplicative noise depending on the noise parameters at different values of the probability of detection and false alarms, as well as for the density of the noise component of the signal that is the same for all channels. It is shown that the degree of influence of multiplicative noise on signal detection depends both on noise parameters and on signal parameters.

Key words: multiplicative noise, probability of reliable detection, probability of false detection, optimal receiving device, threshold level, reference signal.

Введение

Проблемам обнаружения сигналов на фоне аддитивных шумов посвящено довольно много трудов [1-4 и др.]. Гораздо меньше исследовались вопросы, связанные с обнаружением сигналов на фоне аддитивных шумов при воздействии мультипликативных (модулирующих) помех, например [5, 6].

Для анализа влияния мультипликативных помех на обнаружение сигналов при наличии аддитивных шумов примем модель приемного устройства, содержащего N каналов по времени прихода сигнала или по частоте сигнала. В соответствии с этим будем полагать, что параметр, по которому производится разделение сигналов, время прихода сигнала или его частота, может принимать

N известных дискретных значений, причем интервал дискретизации выбран так, что в отсутствие мультипликативных помех сигналы ортогональны. Каждому значению параметра соответствует один из N неперекрывающихся каналов приемного устройства, причем все значения параметра равновероятны. Из ортогональности сигналов следует, что при отсутствии мультипликативных помех сигнал создает выходной эффект лишь в одном канале приемного устройства, который будем обозначать индексом k . Все другие каналы будем обозначать индексом m .

Решение о наличии полезного сигнала принимается при превышении выходным сигналом приемника некоторого порога, устанавливаемого, исходя из допустимой вероятности превышения его в отсутствие полезного сигнала – вероятности ложных тревог, причем при наличии модулирующих помех значение порога остается таким же, как и при их отсутствии.

При наличии мультипликативных помех нарушается ортогональность сигналов и сигнал, искаженный помехой, может создавать выходной сигнал не только в том канале, где имеется сигнал при отсутствии помехи, но и в других каналах. При этом обнаружение сигнала, искаженного мультипликативной помехой, возможно, как за счет превышения порога неискаженной частью сигнала и помеховой составляющей в том канале приемного устройства, который соответствует истинным параметрам неискаженного сигнала (истинный канал), так и за счет превышения порога помеховой составляющей искаженного сигнала в других каналах, соответствующих иным значениям параметров.

Таким образом, можно различать два случая обнаружения.

1. Обнаружение сигнала в истинном канале. Вероятность такого обнаружения D_m равна вероятности D_{mk} превышения выходным сигналом приемника порогового уровня в k -м канале при условии наличия полезного сигнала.

2. Обнаружение наличия сигнала. Вероятность такого обнаружения D_m^* равна вероятности превышения выходным сигналом приемника порогового

уровня хотя бы в одном канале приемника при условии наличия полезного сигнала на входе приемника.

Данные вероятности определяются следующими соотношениями

$$D_M = D_{Mk}, \quad (1)$$

$$D_M^* = 1 - (1 - D_{Mk}) \prod_{m=1}^N (1 - D_{Mm}), \quad m \neq k, \quad (2)$$

где D_{Mm} – вероятность превышения порога в m -м канале при условии, что в отсутствие помех полезный сигнал создает выходной сигнал s_B в k -м канале.

Заметим, что (2) справедливо в том случае, когда выходные сигналы отдельных каналов статистически независимы.

Проанализируем влияние мультипликативных помех на обнаружение сигналов в приемном устройстве, рассчитанном на сигналы как с известной, так и неизвестной начальной фазой.

1. Характеристики выходного сигнала оптимального приемника для входного сигнала с известной начальной фазой

Пусть при отсутствии мультипликативных помех входной сигнал определяется соотношением

$$u_{\text{вх}}(t) = u_k(t) + n(t),$$

где $n(t)$ – аддитивная помеха (белый гауссовский шум);

$$u_k(t) = u_k(t, \eta_u) = \eta_u u_{ok}(t), \quad (3)$$

– сигнал, параметры которого соответствуют k -му каналу приемного устройства.

Здесь

$$u_{ok}(t) = U_{ok}(t) \cos[\omega_k t + \Phi(t)] = \text{Re}\{\dot{U}_{ok}(t) \exp\{j\omega_k t\}\}. \quad (4)$$

– опорный сигнал k -го канала; $\eta_u = \sqrt{E}$ – множитель, пропорциональный амплитуде сигнала; E – энергия неискаженного сигнала $u_k(t)$; $U_{ok}(t)$, ω_k и $\Phi(t)$ – соответственно, огибающая, несущая частота и закон фазовой модуляции опорного сигнала k -го канала.

Приняв, что энергия опорного сигнала u_{ok} равна единице, запишем $u_k(t)$ в виде

$$u_k(t) = \sqrt{E} u_{ok}(t) = \sqrt{E} \operatorname{Re} \{ \dot{U}_{ok}(t) \exp \{ j\omega_{nk}t \} \}. \quad (5)$$

Выходной сигнал одного из каналов приемного устройства можно описать как [7]:

$$s_B = \int_{-\infty}^{\infty} u_{Bx}(t) u_{on}(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{Bx}(t) \dot{U}_{on}(t) dt \right\}, \quad (6)$$

где $u_{on}(t) = \operatorname{Re} \{ \dot{U}_{on}(t) \exp \{ j\omega_{on}t \} \}$ – опорный сигнал n -го канала ($n = k, m$); ω_{on} – несущая частота опорного сигнала n -го канала; $\dot{U}_{Bx}(t)$ и $\dot{U}_{on}(t)$ – комплексная огибающая, соответственно, входного сигнала и опорного сигнала n -го канала.

Считаем, что результирующий выходной сигнал n -го канала s_{Bn} , описываемый выражением (6), имеет нормальное распределение со средним значением

$$s_{Bn} = \sqrt{E} \int_{-\infty}^{\infty} u_{ok}(t) u_{on}(t) dt = \begin{cases} \sqrt{E}, & n = k; \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

и дисперсией

$$\mu_2 \{ s_{Bn} \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_1 \{ n(t_1) n(t_2) \} u_{on}(t_1) u_{on}(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2},$$

где $m_1 \{ \cdot \}$ – математическое ожидание; $N_0/2$ – спектральная плотность шумов $n(t)$.

При наличии мультипликативных помех входной сигнал будет равен

$$u_{Bx}(t) = u_{mk}(t) + n(t),$$

где

$$u_{mk}(t) = \sqrt{E} \operatorname{Re} \{ \dot{M}(t) \dot{U}_{ok}(t) \exp \{ j\omega_k t \} \} \quad (7)$$

– сигнал, образовавшийся в результате искажения сигнала $u_k(t)$ мультипликативной (модулирующей) помехой; $\dot{M}(t) = \bar{M} - \dot{V}_o(t)$ – функции

помеховой модуляции; $\dot{V}_o(t)$ – флуктуации функции помеховой модуляции.

С учетом (6) и (7), результирующий выходной сигнал n -го канала при наличии мультипликативных помех s_{mn} , будет

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} [u_{mk}(t) + n(t)]u_{on}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_{mk}(t)u_{on}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(t)u_{on}(t)dt = s_{1n} + s_{2n}.$$

Результирующий сигнал s_{mn} является суммой двух сигналов. Один из сигналов $s_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)u_{on}(t)dt$ представляет собой выходной сигнал, создаваемый аддитивным шумом, и как при отсутствии мультипликативной помехи во всех каналах имеет нормальное распределение с дисперсией $N_0/2$ и нулевым средним значением.

Другой сигнал

$$s_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{mk}(t)u_{on}(t)dt \quad (8)$$

представляет собой выходной сигнал, создаваемый сигналом $u_{mk}(t)$.

При наличии мультипликативной помехи сигнал $u_{mk}(t)$ создает выходной сигнал s_{1n} как в k -м канале приемного устройства ($n = k$), где имелся полезный выходной сигнал при отсутствии мультипликативной помехи, так и в других каналах ($n = m \neq k$), где в отсутствие мультипликативной помехи полезный сигнал не создавался. Следовательно, необходимо определить s_{1n} как при $n = k$, так и при $n = m \neq k$.

Рассмотрим выражение (8). В соответствии с (4) опорное напряжение n -го канала равно

$$u_{on} = \text{Re}\{\dot{U}_{on}(t)\exp\{j\omega_n t\}\}.$$

Пусть n -й и k -й каналы приемного устройства отличаются по времени прихода сигнала на τ_{nk} и по частоте на Ω_{nk} . Тогда опорное напряжение n -го канала может быть выражено через опорное напряжение k -го канала:

$$u_{on}(t) = u_{ok}(t - \tau_{nk}, \Omega_{nk}) = \text{Re}\{\dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk})\exp\{j(\omega_k - \Omega_{nk})(t - \tau_{nk})\}\}. \quad (9)$$

С учетом (7) и (9) выражение (8) может быть представлено в виде

$$s_{1n}(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Re} \left\{ \exp \{ j\omega_n \tau_{nk} \} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{M}(t) \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp \{ j\Omega_{nk} t \} dt \right\}. \quad (10)$$

При флуктуационных мультипликативных помехах выражение (10), согласно [8], примет вид

$$s_{1n}(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = \frac{\alpha_0 \sqrt{E}}{2} \operatorname{Re} \left\{ \exp \{ j\omega_n \tau_{nk} + \beta_0 \} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp \{ j\Omega_{nk} t \} dt \right\} + \\ + \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Re} \left\{ \exp \{ j\omega_n \tau_{nk} \} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}_o(t) \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp \{ j\Omega_{nk} t \} dt \right\},$$

где

$$\alpha_0 = |\bar{M}|; \beta_0 = \arg \bar{M}; \bar{M} = m_1 \{ \dot{M}(t) \} - \text{математическое ожидание функции}$$

помеховой модуляции, не зависящей от времени.

С учетом свойства ортогональности сигналов $u_{on}(t)$, среднее значение выходного сигнала $s_{1n}(\tau_{nk}, \Omega_{nk})$ равно

$$\bar{s}_{1n} = \begin{cases} \alpha_0 \sqrt{E} \cos \beta_0, & n = k; \\ 0, & n = m \neq k. \end{cases} \quad (11)$$

Дисперсия $s_{1n}(\tau_{nk}, \Omega_{nk})$ может быть найдена, исходя из выражения [8]:

$$\mu_2 \{ s_{1n}(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) \} = E \delta_{n1}^2 + E \operatorname{Re} \left\{ \exp \{ j2\omega_n \tau_{nk} \} \delta_{n2}^2 \right\},$$

где

$$\delta_{n1}^2 = \delta_{n1}^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\omega) |\dot{\rho}(\tau_{nk}, \Omega_{nk} + \omega)|^2 d\omega; \quad (12)$$

$$\delta_{n2}^2 = \delta_{n2}^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_D(\omega) |\dot{\rho}(\tau_{nk}, \Omega_{nk} + \omega)|^2 d\omega; \quad (13)$$

$\dot{G}_D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}_V(x) \exp \{ j\omega x \} dx$ – преобразование Фурье функции $\dot{D}_V(x)$;

$G_V(\omega)$ – энергетический спектр флуктуационной функции помеховой

модуляции; $\dot{\rho}(\tau_{nk}, \Omega_{nk})$ – автокорреляционная функция сигнала на выходе n -го

и k -го каналов приемного устройства, отличающихся по времени прихода τ_{nk} и

частоте Ω_{nk} ; ω – несущая частота сигнала.

Функции δ_{n1}^2 и δ_{n2}^2 полностью определяются формой сигнала и функцией помеховой модуляции $\dot{M}(t)$.

Поскольку помеховая составляющая сигнала и аддитивный шум $n(t)$ статистически независимы, составляющие s_{1n} и s_{2n} также являются независимыми и дисперсия результирующего выходного сигнала s_{mn} в n -м канале приемника равна

$$\sigma_n^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = \mu_2\{s_{1n}(\tau_{nk}, \Omega_{nk})\} + \frac{N_0}{2} = E\delta_{n1}^2 + E \operatorname{Re}\{\delta_{n2}^2 \exp\{j2\omega_n \tau_{nk}\}\} + \frac{N_0}{2}. \quad (14)$$

Заметим, что распределение выходного сигнала n -го канала приемника может быть приближенно описано нормальным законом со средним значением и дисперсией, определяемыми соответственно формулами (11) и (14).

2. Характеристики выходного сигнала оптимального приемника для входного сигнала с неизвестной начальной фазой

В случае сигналов с неизвестной начальной фазой сигнал k -го канала, по аналогии с (3) и (5), может быть записан в виде [7]

$$u_k(t) = u_k(t, A_u, \varphi_0) = A_u u_{ok}(t, \varphi_0) = \sqrt{E} \operatorname{Re}\{\dot{U}_{ok}(t) \exp\{j\omega_{nk}t + \varphi_0\}\},$$

где φ_0 – неизвестная начальная фаза сигнала.

Как следует из [7, 8], при приеме сигналов с неизвестными начальными фазами на фоне белого гауссовского шума в качестве выходного сигнала оптимального приемного устройства может быть принята огибающая корреляционного интеграла (6)

$$S_B = |\dot{S}_B| = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{Bx}(t) \dot{U}_{On}(t) dt \right|. \quad (15)$$

Огибающая S_B может быть выражена через квадратурные составляющие x и y , соответственно, через действительную и мнимую часть комплексной огибающей:

$$S_B = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{вх}}(t) \dot{U}_{\text{он}}(t) dt; \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{вх}}(t) \dot{U}_{\text{он}}(t) dt. \quad (17)$$

Полагаем, что используется критерий Неймана-Пирсона. При обнаружении решение об отсутствии или наличии сигнала принимается на основе сравнения выходного сигнала приемного устройства $s_{\text{в}}$ или $S_{\text{в}}$ с пороговым уровнем z_0 или Z_0 . Значение порога в каждом канале устанавливается, исходя из уровня аддитивного шума и допустимой вероятности ложной тревоги в канале F_k , связанной с общей вероятностью ложных тревог N -канального обнаружителя F соотношением $F_k \approx F/N$, где N – общее число каналов.

Заметим, что данное соотношение будет справедливо лишь при малых значениях F .

При отсутствии мультипликативных помех составляющие x и y в формулах (16) и (17) распределены нормально и некоррелированы. Средние значения этих составляющих в k -м канале равны, соответственно, $\sqrt{E} \cos \varphi_0$ и $\sqrt{E} \sin \varphi_0$, а в остальных каналах равны нулю. Дисперсии составляющих x и y во всех каналах равны $N_0/2$.

При этом плотность вероятности распределения (ПРВ) результирующего выходного сигнала k -го канала оптимального приемника определяется обобщенным законом Релея (законом Райса):

$$W_k(S_{\text{в}}) = \frac{2S_{\text{в}}}{N_0} \exp\left\{-\frac{S_{\text{в}}^2 + E}{N_0}\right\} I_0\left(\frac{2\sqrt{E}}{N_0} S_{\text{в}}\right), \quad (18)$$

а в остальных каналах – ПРВ Релея

$$W_m(S_{\text{в}}) = \frac{2S_{\text{в}}}{N_0} \exp\left\{-\frac{S_{\text{в}}^2}{N_0}\right\},$$

где $I_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

При наличии мультипликативных помех сигнал на входе оптимального приемника будет:

$$u_{\text{вх.м}}(t) = u_{\text{mk}}(t) + n(t) = \text{Re}\{\dot{U}_{\text{вх.м}}(t)\exp\{j\omega_k t\}\},$$

где

$$\dot{U}_{\text{вх.м}}(t) = \sqrt{E}\dot{M}(t)\dot{U}_{\text{ок}}(t)\exp\{j\varphi_0\} + \dot{N}(t) \quad (19)$$

– комплексная огибающая входного сигнала, искаженного мультипликативной помехой; $\dot{N}(t)$ – комплексная огибающая аддитивного шума $n(t)$ [7].

При наличии мультипликативных помех результирующий сигнал на выходе оптимального приемника и его квадратурные составляющие на основании выражений (15), (9) и (19) могут быть описаны соотношениями

$$S_{\text{м.в}} = |\dot{S}_{\text{м.в}}|; x_{\text{м}} = \text{Re}\{\dot{S}_{\text{м.в}}\}; y_{\text{м}} = \text{Im}\{\dot{S}_{\text{м.в}}\}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{м.в}} = & \frac{\sqrt{E}}{2}\exp\{j\varphi_0\}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{M}(t)\dot{U}_{\text{ок}}(t)\dot{U}_{\text{ок}}(t-\tau_{nk})\exp\{j\Omega_{nk}\}dt + \\ & + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{N}(t)\dot{U}_{\text{ок}}(t-\tau_{nk})\exp\{j\Omega_{nk}\}dt. \end{aligned} \quad (21)$$

При флуктуационных мультипликативных помехах запишем комплексную огибающую входного сигнала с учетом (19) в виде

$$\dot{U}_{\text{вх.м}}(t) = \alpha_0\sqrt{E}\dot{U}_{\text{ок}}(t)\exp\{j\varphi_0 + \beta_0\} + \sqrt{E}\dot{V}_o(t)\dot{U}_{\text{ок}}(t)\exp\{j\varphi_0\} + \dot{N}(t). \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), получим с учетом (21) математическое ожидание составляющих выходного сигнала n -го канала:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{м}} &= \alpha_0\sqrt{E}\text{Re}\{\dot{\rho}(\tau_{nk}, \Omega_{nk})\}\exp\{j\varphi_0 + \beta_0\}; \\ \bar{y}_{\text{м}} &= \alpha_0\sqrt{E}\text{Im}\{\dot{\rho}(\tau_{nk}, \Omega_{nk})\}\exp\{j\varphi_0 + \beta_0\}, \end{aligned} \quad (23)$$

что для k -го канала ($\tau_{nk} = \Omega_{nk} = 0$) дает

$$\bar{x}_{\text{м}} = \alpha_0\sqrt{E}\cos(\varphi_0 + \beta_0), \quad \bar{y}_{\text{м}} = \alpha_0\sqrt{E}\sin(\varphi_0 + \beta_0),$$

а для остальных каналов $\bar{x}_{\text{м}} = \bar{y}_{\text{м}} = 0$.

С учетом (20), (21), (22) и (23) вторые центральные моменты составляющих $x_{\text{м}}$ и $y_{\text{м}}$ – дисперсии $\sigma_{x_{\text{м}}}^2$ и $\sigma_{y_{\text{м}}}^2$ – и смешанный второй момент

(ковариация) B_{xy} для выходного сигнала n -го канала приемника будут описываться соответствующими выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xn}^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) &= \mu_2 \{x_M(\tau_{nk}, \Omega_{nk})\} = \\ &= m_2 \left\{ \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Re} \left[\exp\{j\varphi_0\} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}_o(t) \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp\{j\Omega_{nk}t\} dt \right] \right\} + \frac{N_0}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yn}^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) &= \mu_2 \{y_M(\tau_{nk}, \Omega_{nk})\} = \\ &= m_2 \left\{ \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Im} \left[\exp\{j\varphi_0\} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}_o(t) \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp\{j\Omega_{nk}t\} dt \right] \right\} + \frac{N_0}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{xy} = \mu_2 \{x_M, y_M\} &= \frac{E}{4} m_1 \left\{ \operatorname{Re} \left[\exp\{j\varphi_0\} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}_o(t) \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp\{j\Omega_{nk}t\} dt \right] \times \right. \\ &\times \left. \operatorname{Im} \left[\exp\{j\varphi_0\} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}_o(t) \dot{U}_{ok}(t) \dot{U}_{ok}(t - \tau_{nk}) \exp\{j\Omega_{nk}t\} dt \right] \right\}. \end{aligned}$$

3. Влияние мультипликативных помех на обнаружение в приемном устройстве сигналов с известной начальной фазой

В таком приемном устройстве пороговый уровень z_0 связан с допустимой вероятностью ложных тревог в одном канале F_k соотношением [8]

$$F_k = 1 - \Phi\left(z_0(N_0/2)^{-0,5}\right) = 1 - \Phi(g_0),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\{-t^2/2\} dt; \quad g_0 = z_0(N_0/2)^{-0,5}.$$

При отсутствии мультипликативных помех, если вероятность ложных тревог мала, а вероятность правильного обнаружения велика, то вероятность обнаружения в истинном канале D и вероятность обнаружения D^* практически одинаковы $D^* \cong D$ [9]. При этом

$$D = D_k = 1 - \Phi\left((z_0 - \sqrt{E})(N_0/2)^{-0,5}\right) = 1 - \Phi(g_0 - g),$$

где $g = \sqrt{2E/N_0}$ – энергетический параметр (параметр обнаружения).

При флуктуационной мультипликативной помехе, если выполняются условия нормировки $s_{m,b}$, вероятность обнаружения сигнала в истинном канале (1) равна

$$D_M = D_{mk} = \int_{z_0}^{\infty} p_k(s_{m,b}) ds_{m,b} = 1 - \Phi\left(\frac{z_0 - \alpha_0 \sqrt{E}}{\sigma_k^2}\right), \quad (24)$$

где $p_k(s_{m,b})$ – функция распределения сигнала $s_{m,b}$ на выходе k -го канала приемного устройства, подверженного воздействию мультипликативной помехи; σ_k^2 – в общем случае определяется выражением (14) при $n = k$, $\tau_{nk} = 0$, $\Omega_{nk} = 0$.

Часто, во многих случаях выполняются условия, при которых $\delta_{k1}^2 \gg |\delta_{k2}^2|$.

При этом $\sigma_k^2 = E\delta_{k1}^2 + N_0/2$, и (24) может быть представлено в виде

$$D_M = D_{mk} = 1 - \Phi\left(g_0 \frac{1}{\sqrt{1 + g^2 \delta_{k1}^2}} - g \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 + g^2 \delta_{k1}^2}}\right). \quad (25)$$

Соотношение (25) связывает вероятность обнаружения сигнала в истинном канале при флуктуационных мультипликативных помехах с вероятностью ложных тревог и вероятностью правильного обнаружения в отсутствие мультипликативных помех (которые однозначно определяются параметрами g_0 и g). А также с параметрами помех и сигнала – уровнем неискаженной части сигнала α_0 и уровнем помеховой составляющей в истинном канале, определяемым параметром δ_{k1}^2 .

Если время корреляции τ_k функции помеховой модуляции $\dot{M}(t)$ значительно меньше длительности сигнала T ($\tau_k \ll T$), то можно воспользоваться приближенной формулой [5]

$$\delta_{k1}^2 \cong G_V(0)/2T, \quad (26)$$

где $G_V(0) = \frac{\bar{\eta}^2 - \alpha_0^2}{\Delta F_M}$; ΔF_M – ширина энергетического спектра.

Тогда

$$\delta_{k1}^2 = \frac{\bar{\eta}^2 - \alpha_0^2}{2T\Delta F_M} \cong (\bar{\eta}^2 - \alpha_0^2) \frac{\Delta F_{ог}}{2\Delta F_M},$$

где $\Delta F_{ог} \cong 1/T$ – ширина спектра огибающей сигнала.

Таким образом, при заданных значениях $\bar{\eta}^2$ и α_0^2 параметр δ_{k1}^2 характеризует отношение ширины спектра функции помеховой модуляции к ширине спектра огибающей сигнала.

Заметим, что выражение (26) показывает, что при определенном значении параметра помехи $G_V(0)$ величина δ_{k1}^2 тем меньше, чем больше длительность T когерентно обрабатываемого сигнала. Поэтому более уязвимыми по отношению к мультипликативным помехам являются те системы, в которых используются сигналы большой длительностью или когерентные пачки импульсов. Наличие у сигнала частотной или фазовой модуляции в данном случае значения не имеет.

Вероятность превышения порога в m -м канале при условии, что при отсутствии мультипликативных помех сигнал имеется в k -м канале, равна

$$D_{mm} = \int_{z_0}^{\infty} p_m(s_m) ds_m = 1 - \Phi\left(\frac{z_0}{\sigma_m^2}\right), \quad (27)$$

где σ_m^2 определяется выражением (14) при $n = m$.

Если выполняются условия, при которых $\delta_{m1}^2 \gg |\delta_{m2}^2|$, выражение (27) может быть записано в виде

$$D_{mk} = 1 - \Phi\left(g_0 \left(1 + g^2 \delta_{m1}^2\right)^{-0,5}\right),$$

где δ_{m1}^2 определяется (12) при $n = m$. Подставив (24) и (27) в (2), определим вероятность D_M^* .

На рис. 1 представлены графики значений вероятности обнаружения сигнала в истинном канале в условиях воздействия флуктуационных мультипликативных помех, рассчитанных по (25), в зависимости от параметров

помех при различных значениях вероятности обнаружения D и ложных тревог F_k в отсутствие помех.

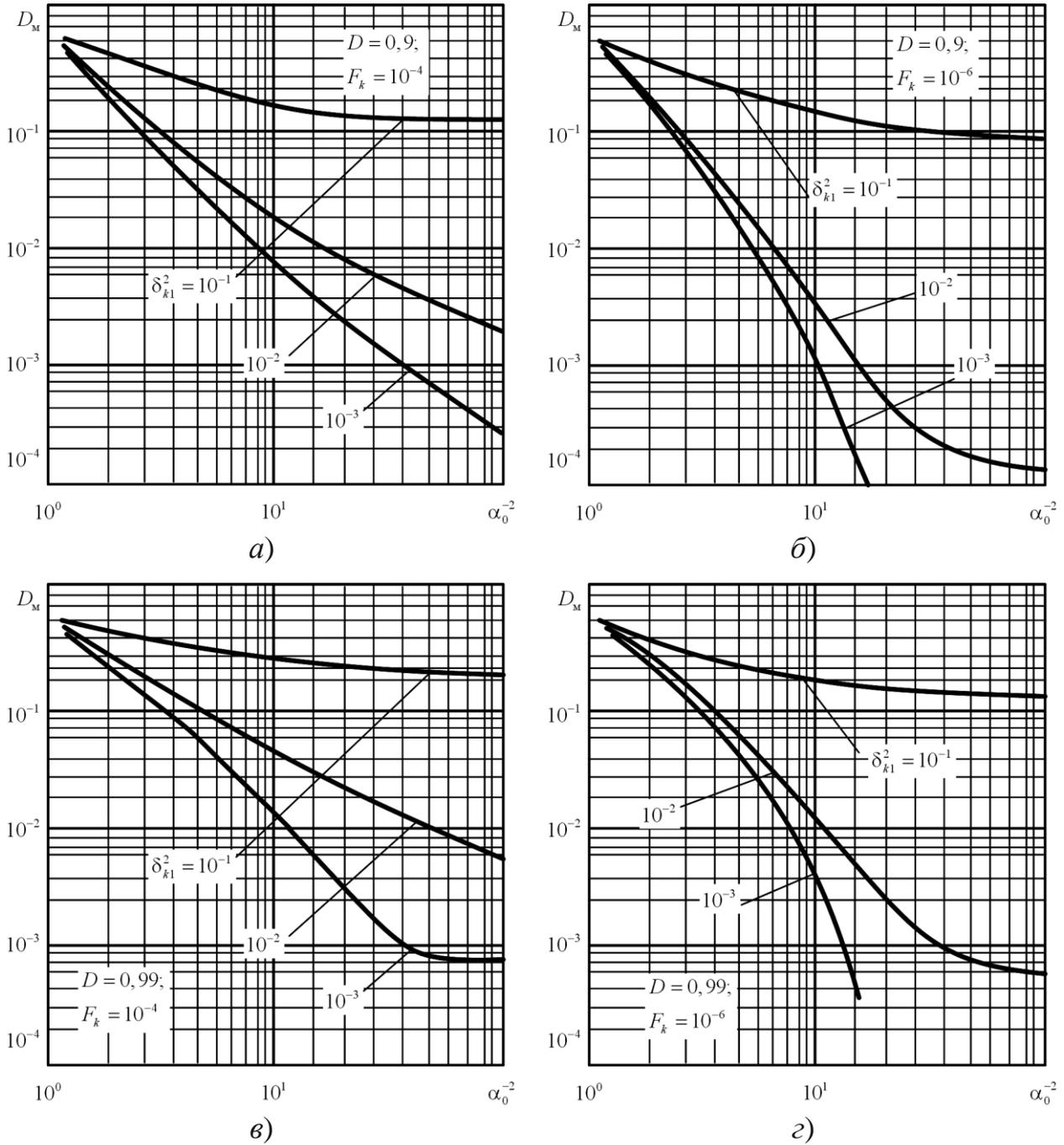


Рис. 1. Зависимости вероятности обнаружения сигнала от параметров флуктуационных мультипликативных помех при: $a - D = 0,9, F_k = 10^{-4}$; $б - D = 0,9, F_k = 10^{-6}$; $в - D = 0,99, F_k = 10^{-4}$; $з - D = 0,99, F_k = 10^{-6}$.

На рис. 2 приведены кривые, аналогичные кривым, представленным на рис. 1, значений вероятности обнаружения значения сигнала D_M^* для случая,

когда спектральная плотность помеховой составляющей сигнала одинакова во всех каналах приемного устройства.

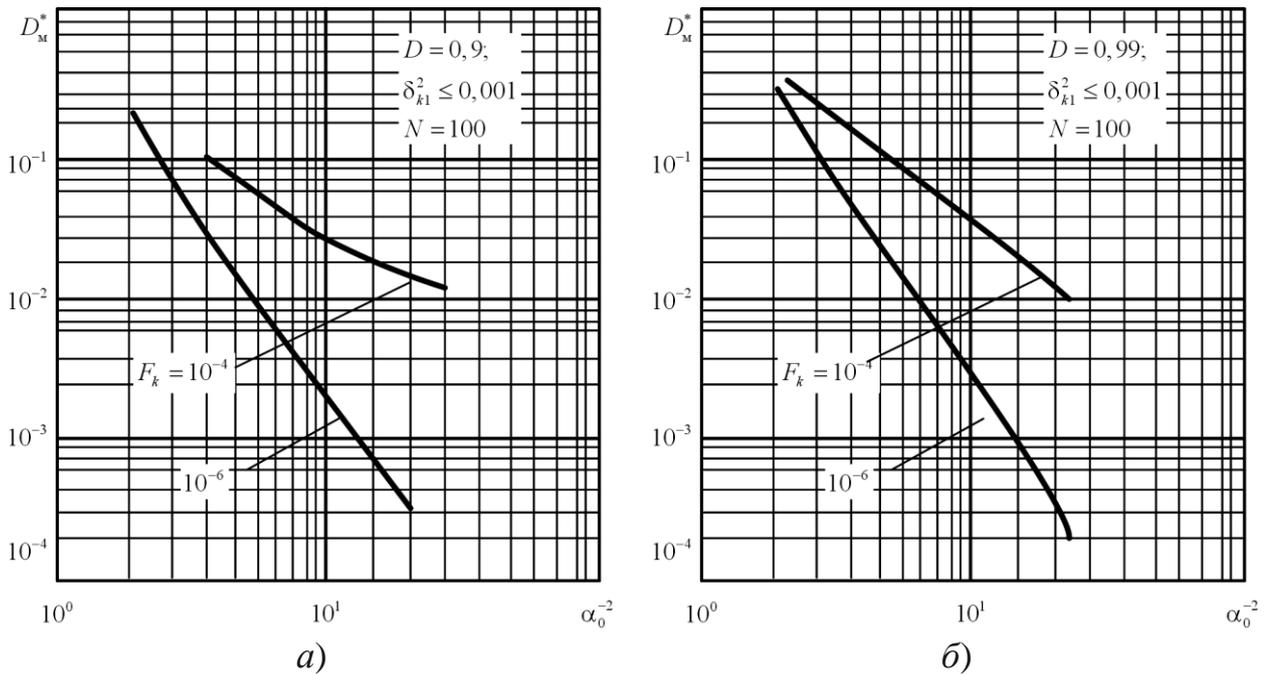


Рис. 2. Зависимости вероятности обнаружения наличия сигнала от параметров флуктуационных мультипликативных помех для случая, когда $\delta_{n1}^2 \leq 10^{-3}$, $N = 100$ при: а – $D = 0,9$; б – $D = 0,99$.

4. Влияние мультипликативных помех на обнаружение в приемном устройстве сигналов с неизвестной начальной фазой

В таком приемном устройстве пороговый уровень Z_0 связан с вероятностью ложных тревог F_k соотношением [8]

$$F_k = \exp\left\{-g_0^2/2\right\}; \quad g_0 = Z_0(N_0/2)^{-0,5}.$$

В соответствие с (18) вероятность правильного обнаружения в отсутствие мультипликативных помех равна

$$D = \int_{g_0}^{\infty} s \exp\left\{-\frac{g^2 + s^2}{2}\right\} I_0(gs) ds,$$

где $s = \arcsin(S_M/\mu)$; S_M – огибающая сигнала, искаженного мультипликативной помехой; $\eta \geq 0$ – безразмерный множитель,

характеризующий изменения огибающей сигнала, вызванные мультипликативной (модулирующей) помехой.

При воздействии флуктуационных мультипликативных помех, если выполняются условия нормализации составляющих x и y выходного эффекта S_M , вероятности D_{mk} и D_{mm} определяются как

$$D_{mk} = \int_{\xi_0}^{\infty} p_k(\xi) d\xi; \quad D_{mm} = \int_{\xi_0}^{\infty} p_m(\xi) d\xi,$$

где $\xi_0 = Z_0 / \sqrt{\sigma_X \sigma_Y}$ – нормированное значение порога; σ_X, σ_Y – соответственно, среднеквадратические отклонения независимых квадратурных составляющих X и Y выходного сигнала S_M ; $\xi = S_M / \sqrt{\sigma_X \sigma_Y}$; $p_k(\xi), p_m(\xi)$ – функции распределения ξ k -го канала (канал, где имеется полезный сигнал при отсутствии мультипликативной помехи) и m -го канала приемного устройства (одного из остальных каналов), определяемые, соответственно, из выражений

$$p_k(\xi) = \frac{\xi}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{v+v^{-1}}{4} \xi^2 - \frac{v \sin^2 \Phi_0 + v^{-1} \cos^2 \Phi_0}{2} (\bar{\xi})^2 \right\} \times \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{v+v^{-1}}{4} \xi^2 \cos 2\Phi - \xi \bar{\xi} (v \sin \Phi_0 \sin \Phi + v^{-1} \cos \Phi_0 \cos \Phi) \right\} d\Phi; \quad (28)$$

$$p_m(\xi) = \xi \exp \left\{ -\frac{v+v^{-1}}{4} \xi^2 \right\} I_0 \left(\frac{v+v^{-1}}{4} \xi^2 \right). \quad (29)$$

В функциях распределения (28) и (29) параметры распределения имеют следующие значения:

$$v = \sigma_X / \sigma_Y; \quad \bar{\xi} = \frac{\sqrt{(\bar{x}_M)^2 + (\bar{y}_M)^2}}{\sqrt{\sigma_X \sigma_Y}}; \quad \Phi_0 = \arctg \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \arctg \frac{\bar{y}_M}{\bar{x}_M} - \varphi, \quad (30)$$

где φ – угол, определяемый из соотношения $\operatorname{tg} 2\varphi = 2B_{xy} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^{-1}$.

При этом дисперсии составляющих X и Y , выраженные через вторые центральные моменты составляющих x_M и y_M , могут быть найдены, исходя из выражений

$$\sigma_X^2 = \frac{2(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - B_{xy}^2)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 4B_{xy}^2}}; \sigma_Y^2 = \frac{2(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - B_{xy}^2)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 4B_{xy}^2}}. \quad (31)$$

Подставляя в (30) и (31) значения

$$\sigma_x^2 = \sigma_{xn}^2 = \sigma_{xn}^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = E\delta_{n1}^2 + E \operatorname{Re}\{\delta_{n2}^2 \exp\{j2\varphi_0\}\} + \frac{N_0}{2};$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{yn}^2 = \sigma_{yn}^2(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = E\delta_{n1}^2 - E \operatorname{Re}\{\delta_{n2}^2 \exp\{j2\varphi_0\}\} + \frac{N_0}{2};$$

$$B_{xy}(\tau_{nk}, \Omega_{nk}) = E \operatorname{Im}\{\delta_{n2}^2 \exp\{j2\varphi_0\}\},$$

где δ_{n1}^2 и δ_{n2}^2 определяются выражениями (12) и (13), а также среднее значения \bar{x}_M и \bar{y}_M из (23), получим выражения для определения нормирующего коэффициента $\sqrt{\sigma_X \sigma_Y}$ и параметров функции распределения нормированного выходного сигнала:

$$v^2 = \frac{g^{-2} + \delta_{n1}^2 - |\delta_{n2}^2|}{g^{-2} + \delta_{n1}^2 + |\delta_{n2}^2|}; \quad (\bar{\xi})^2 = \frac{\alpha_0^2}{\sqrt{(\delta_{n1}^2 + g^{-2})^2 - |\delta_{n2}^2|^2}}; \quad \Phi_0 = \beta_0 - \arg \delta_{n2}^2;$$

$$\sigma_X \sigma_Y = E \sqrt{(\delta_{n1}^2 + g^{-2})^2 - |\delta_{n2}^2|^2}.$$

Часто на практике вместо функций (28) и (29) удобнее использовать приближенное описание закона распределения S_M функциями

$$p_k(S_M) = \frac{S_M}{\sigma_k^2} \exp\left\{-\frac{S_M^2 + \alpha_0^2 E}{2\sigma_k^2}\right\} I_0\left(\frac{\alpha_0 \sqrt{E}}{\sigma_k^2} S_M\right),$$

где $\sigma_k^2 = E\delta_{k1}^2 + N_0/2$, а δ_{k1}^2 определяется выражением (12) при $n = k$, $\tau_{nk} = \Omega_{nk} = 0$;

$$p_m(S_M) = \frac{S_M}{\sigma_m^2} \exp\left\{-\frac{S_M^2}{2\sigma_m^2}\right\}, \quad (32)$$

где $\sigma_m^2 = E\delta_{m1}^2 + N_0/2$, а δ_{m1}^2 определяется выражением (12) при $n = m$. При этом выражение для определения вероятности обнаружения сигнала в истинном канале может быть получено через Q -функцию [10]:

$$D_M = D_{Mk} = \int_{Z_0}^{\infty} p_k(S_M) dS_M = \int_{g_{0M}}^{\infty} s \exp\left\{-\frac{g_M^2 + s^2}{2}\right\} I_0(g_M s) ds = Q(g_M, g_{0M}), \quad (33)$$

где

$$g_{0M} = \frac{g_0}{\sqrt{1 + g^2 \delta_{k1}^2}}; \quad g_M = \frac{g\alpha_0}{\sqrt{1 + g^2 \delta_{k1}^2}}. \quad (34)$$

Соотношения (33) и (34) выражают вероятность обнаружения сигнала при наличии мультипликативных помех D_M через вероятность ложных тревог и вероятность правильного обнаружения в отсутствии мультипликативных помех (определяемые параметрами g_0 и g) и через параметры мультипликативной помехи и сигнала $-\alpha_0$ и δ_{k1}^2 .

Кроме того, данные соотношения показывают, что в рассматриваемом случае вероятность D_M может быть определена по кривым обнаружения сигнала со случайной фазой при эквивалентном значении вероятности ложной тревоги, определяемом как

$$F_{\text{ЭКВ}} = F_k \left(1 + g^2 \delta_{k1}^2\right)^{-1},$$

и значении параметра обнаружения g_M , определяемом выражением (34).

Формула для определения вероятности превышения порога в m -м канале приемного устройства при условии, что при отсутствии мультипликативной помехи сигнал имеется в k -м канале в рассматриваемом случае с учетом (32) приобретает вид

$$D_{mm} = \int_{Z_0}^{\infty} p_m(S_M) dS_M = \exp\left\{-\frac{g_0^2}{2(1 + g^2 \delta_{m1}^2)}\right\} = F_k \left(1 + g^2 \delta_{m1}^2\right)^{-1}. \quad (35)$$

На рис. 3 представлены графики значений вероятности обнаружения сигнала в истинном канале в условиях воздействия флуктуационных мультипликативных помех в зависимости от параметров помех, построенные по выражению (33).

На рис. 4 представлены графики значений вероятности обнаружения наличия сигнала, построенные по формулам (2), (33) и (35), для случая, когда спектральная плотность помеховой составляющей сигнала во всех каналах одинакова.

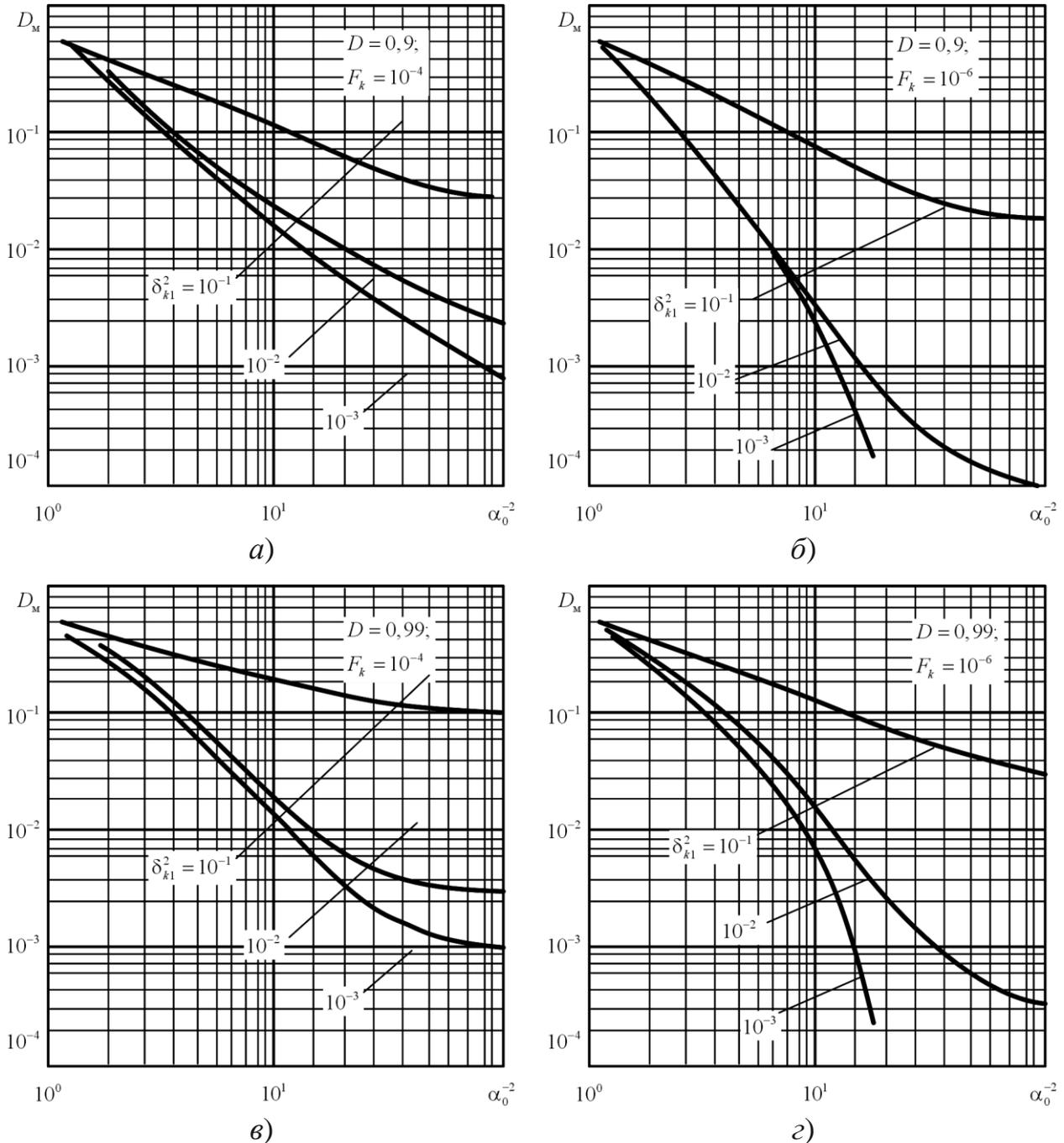


Рис. 3. Зависимости вероятности обнаружения сигнала от параметров флуктуационных мультипликативных помех при: а – $D = 0,9$, $F_k = 10^{-4}$; б – $D = 0,9$, $F_k = 10^{-6}$; в – $D = 0,99$, $F_k = 10^{-4}$; з – $D = 0,99$, $F_k = 10^{-6}$

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 1-4 свидетельствуют о том, что уменьшение вероятности правильного обнаружения, вызываемое мультипликативными помехами, тем значительнее, чем меньше параметры α_0 и δ_{k1}^2 . Параметр α_0 определяется только характеристиками мультипликативной помехи (в основном глубиной фазовых искажений сигнала), а параметр δ_{k1}^2 зависит как от параметров помехи, так и от параметров сигнала.

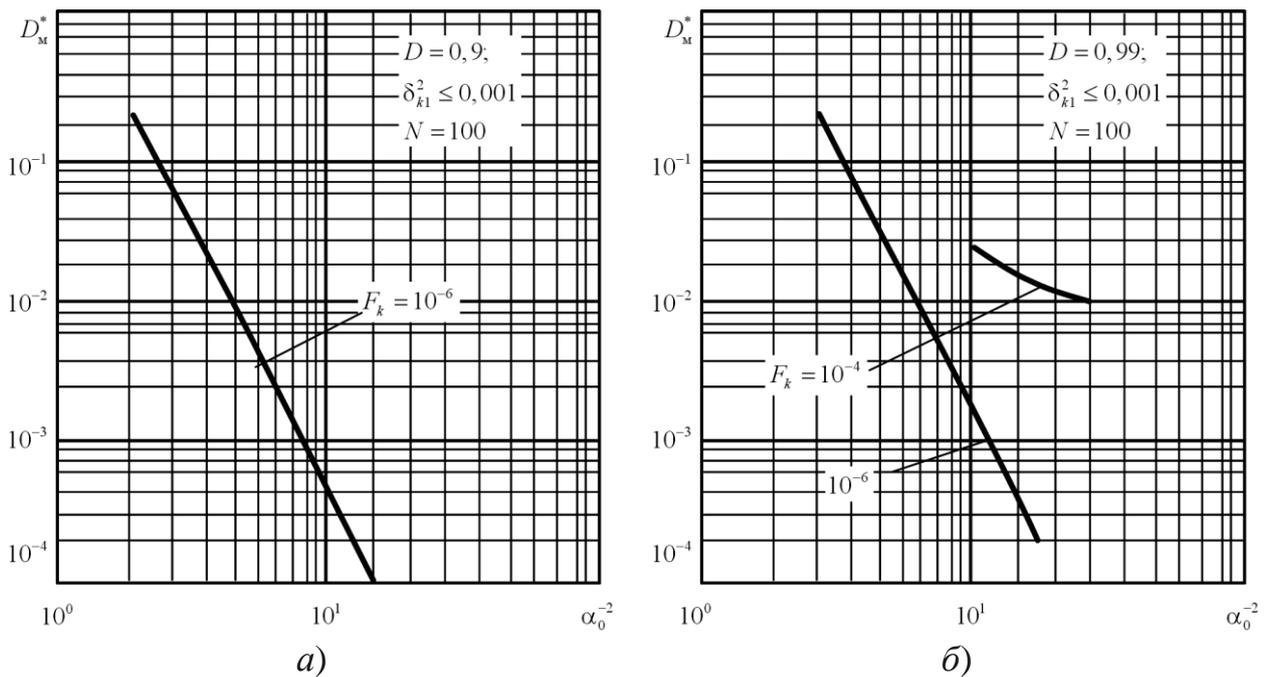


Рис. 4. Зависимости вероятности обнаружения наличия сигнала от параметров флуктуационных мультипликативных помех для случая, когда $\delta_{n1}^2 \leq 10^{-3}$, $N = 100$ при: *a* – $D = 0,9$; *б* – $D = 0,99$.

Выводы

Рассмотрено и проанализировано влияние мультипликативных помех на обнаружение сигналов приемным устройством, оптимальным при обнаружении на фоне аддитивных шумов. Показано, что степень влияния мультипликативных помех на обнаружение сигналов зависит как от параметров помех, так и от параметров сигналов. Более уязвимыми к мультипликативным помехам являются системы, в которых используются сигналы большой

длительностью или когерентные пачки импульсов, при этом наличие у сигналов частотной или фазовой модуляции значения не имеет.

Рассмотрены и проанализированы характеристики выходного сигнала оптимального приемника для случая приема сигналов с неизвестной начальной фазой. Показано, что параметры функции распределения огибающей сигнала на выходе приемника полностью определяются функцией помеховой модуляции, автокорреляционной функцией сигнала и энергетическим параметром $g^2 = 2E/N_0$ (параметром обнаружения). Получены графики значений вероятности обнаружения сигнала при флуктуационных мультипликативных помехах в зависимости от параметров помех.

Литература

1. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др.; Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
2. Современная радиолокация (анализ, расчет и проектирование систем) / Пер. с англ.; Под ред. Ю.Б. Кобзарева. М.: Сов. радио, 1969. 699 с.
3. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Оценка точности измерения скалярного информационного параметра сигнала на фоне аддитивных негауссовских помех // Журнал радиоэлектроники. 2017. №. 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar17/9/text.pdf>
4. Артюшенко В.М., Воловач В. И. Оценка погрешности измерения векторного информационного параметра сигнала на фоне аддитивных некоррелированных негауссовских помех // Журнал радиоэлектроники. 2016. №. 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan16/6/text.pdf>
5. Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И. Модулирующие (мультипликативные) помехи и прием радиосигналов; Под ред. И.Я.Кремера. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.
6. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ влияния мультипликативных помех на обнаружение сигналов на фоне аддитивного шума // XIII Всероссийская

конференция «Радиолокация и радиосвязь». Сборник трудов. – Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. – 25-27 ноября 2019 г. С. 149-154.

7. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М.: Иностранная литература, 1963. 432 с.
8. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
9. Фалькович С.Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. М.: Сов. радио, 1961. 311 с.
10. Marcum J.I. A statistical theory of target detection by pulsed radar // IRE Transactions of Information Theory. April 1960ю, Vol. 6, Issue 2. P.59-267.
<https://doi.org/10.1109/TIT.1960.1057560>.

Для цитирования:

Артюшенко В.М., Воловач В.И. Обнаружение сигналов при воздействии мультипликативных помех на фоне аддитивного шума. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.13>