

DOI 10.30898/1684-1719.2020.7.6

УДК 621.396.67

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ ОТКРЫТОГО КОНЦА НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА ГИБРИДНЫМ МЕТОДОМ

В. А. Калошин¹, Д. Т. Луу²

¹ Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125007, Москва, Моховая, 11-1

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский
университет), 141700, Долгопрудный Моск. обл., Институтский пер. 9

Статья поступила в редакцию 26 июня 2020 г.

Аннотация. Рассмотрена задача излучения из открытого конца нерегулярного металлического волновода, образующие криволинейных стенок которого являются дугами окружностей. Получены решения для диаграмм направленности излучения моды H_{10} прямоугольного волновода с криволинейными стенками в E и H плоскостях и мод H_{11} , E_{01} , H_{01} нерегулярного круглого волновода. Для решения задачи использован гибридный метод, сочетающий метод собственных функций, последовательных дифракций и принцип эквивалентности. Проведено сравнение результатов расчета диаграммы излучения гибридным методом, методом моментов, конечных элементов и Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа.

Ключевые слова: прямоугольный волновод, круглый волновод, нерегулярный волновод, открытый конец, гибридный метод, диаграмма направленности.

Abstract. The problem of radiation from the open end of a non-uniform metal waveguide with curved walls generatrices of which are arcs of circles is considered. Solutions are obtained for patterns of the H_{10} mode in rectangular waveguide with curved walls in the E and H planes and H_{11} , E_{01} , H_{01} modes in a non-uniform circular waveguide. A hybrid method, combining the method of eigen functions, successive diffractions, and the principle of equivalence was used to solve the problem. The results of the radiation pattern calculating by the hybrid method, moment method, the finite

element method, and the Huygens-Fresnel-Kirchhoff method are compared.

Key words: rectangular waveguide, circular waveguide, non-uniform waveguide, open end, hybrid method, radiation pattern.

Введение

Идеально-проводящие тела с кусочно-аналитической формой границы часто используются в качестве моделей в задачах излучения антенн и рассеяния электромагнитных волн на металлических телах. Для решения задач излучения антенн и рассеяния акустических и электромагнитных волн применяются прямые численные методы: моментов, конечных элементов и конечных разностей во временной области [1,2], численно-аналитические методы: разделения переменных [3,4], Т-матриц [5] и асимптотические методы: Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа (ГФК) [3], геометрическая теория дифракции [6], физическая теория дифракции [7] и метод параболического уравнения [8].

В случае, когда характерные размеры задачи большие по сравнению с длиной волны, прямые численные методы требуют большого объема оперативной памяти компьютера. Численно-аналитические методы позволяют уменьшить этот объем, однако имеют ограниченные применения из-за ряда условий их использования. Для решения задачи в этом случае можно эффективно использовать асимптотические методы, в частности, метод ГФК. Если поверхность тела можно разбить на участки, каждый из которых является координатной поверхностью в одной из систем координат, в которых волновое уравнение можно решить методом разделения переменных, для вычисления интеграла Кирхгофа целесообразно применять метод функций Грина [2]. При этом поля на каждом таком участке, как и в приближении ГФК, полагаются равными падающему полю, а затем эти поля и функция Грина представляются в виде рядов по собственным функциям, что облегчает процесс вычисления интеграла Кирхгофа. Однако, если хотя бы один из характерных размеров задачи менее

половины длины волны, применение асимптотических методов приводит к серьезным погрешностям. Такая ситуация, в частности, может возникать при излучении открытого конца волновода. Приближение ГФК, использующее при вычислении эквивалентных токов в апертуре поле моды регулярного волновода, дает удовлетворительное описание излучения открытого конца волновода только в узкой угловой области переднего пространства [9]. В случае плавно-нерегулярного волновода для нахождения поля волноводной моды в апертуре можно использовать метод поперечных сечений [10]. Однако при быстром изменении параметров сечения (малом радиусе кривизны стенок) такой подход неприменим.

В работах [11-13] развит гибридный метод решения задач рассеяния электромагнитных волн на гладких идеально-проводящих телах с кусочно-аналитической формой границы, который расширяет область применения метода разделения переменных. .

В данной работе гибридный метод, предложенный в этих работах, использован для решения задач излучения антенн в виде открытого конца нерегулярного прямоугольного и круглого волноводов.

Целью работы является исследование возможностей гибридного метода моделирования излучения открытого конца нерегулярного волновода (нерегулярного рупора) в случае, когда изменение размера его сечения не является медленным.

1. Излучение открытого конца нерегулярного прямоугольного волновода

Рассмотрим излучение моды H_{10} из открытого конца нерегулярного прямоугольного волновода. Начнем с волновода нерегулярного в H -плоскости, продольное сечение которого показано на рис.1, где a – радиус кривизны узких стенок волновода в H плоскости, $2b$ – размер регулярной части волновода в H плоскости, $2d$ – размер волновода в E плоскости, h – длина регулярной части волновода, $L = h + a$ – длина широких стенок. Будем искать решение задачи в виде

диаграммы направленности (ДН) в Н– плоскости. Исследование ДН в ортогональной плоскости проводиться не будет, поскольку эта ДН близка к ДН открытого конца регулярного волновода.

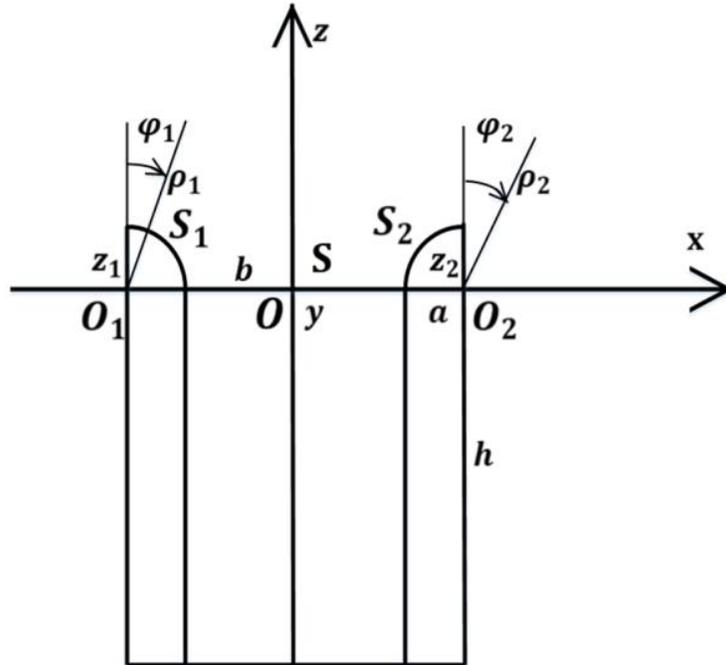


Рис. 1. Геометрия задачи

Тангенциальные компоненты поля моды H_{10} полого прямоугольного волновода в поперечном сечении S (рис.1) имеют вид [14]:

$$E_y = -2 \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right), H_x = \frac{2}{\omega \mu_a} k_v \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right), \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi \frac{3 \times 10^8}{\lambda}$, $\varepsilon_a = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_a = 4\pi \times 10^{-7}$, λ – длина волны в свободном

пространстве, $k_v = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2}$ –волновое число в волноводе, $k = 2\pi/\lambda$ –волновое число.

Используя принцип эквивалентности [3], находим вклад в ДН в Н– плоскости от эквивалентных токов $J_y^{\partial} = -2H_x$ и $J_x^M = -2E_y$ на поверхности S :

$$E_{\varphi}^v = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^{\vartheta} - ikA_{\theta}^M, \quad A_{\varphi}^{\vartheta} = \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} G_0 dx dy, \quad A_{\theta}^M = \cos\theta \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_x^M G_0 dx dy, \quad (2)$$

где компоненты поля E_y и H_x определены в (1),

$G_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \exp[-ikr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'))]$ – функция Грина в свободном пространстве, зависящая от сферических координат точки наблюдения ($r \rightarrow \infty, \theta = 0 \dots \pi, \varphi = 0$) и точки интегрирования ($r' = |x|, \theta' = \pi/2, \varphi' = 0, \pi$).

Интегрируя, получаем выражение для ДН в H -плоскости ($\varphi = 0$):

$$E_{\varphi}^v = \frac{i}{b} \frac{\cos(kb \sin\theta)}{k \cos\theta - k_y}. \quad (3)$$

Выражение (3) совпадает с известным выражением ДН открытого конца регулярного прямоугольного волновода в H -плоскости в приближении ГФК [9].

Далее, интегрируя эквивалентные токи на поверхности S , находим токи на участках поверхности круговых цилиндров S_1, S_2 :

$$j_y = \frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\varphi_{1,2}}^M + \frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{1,2}} \left[\frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial}{\partial \rho_{1,2}} (\rho_{1,2} A_{\rho_{1,2}}^M) + \frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{1,2}} A_{\varphi_{1,2}}^M \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \rho_{1,2}} A_y^{\vartheta}, \quad (4)$$

$$A_y^{\vartheta} = \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} G_E dx dy, \quad A_{\rho_{1,2}}^M = \sin\varphi_{1,2} \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_x^M G_E dx dy, \quad A_{\varphi_{1,2}}^M = \cos\varphi_{1,2} \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_x^M G_E dx dy,$$

где $G_E = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi_{1,2} - \varphi'_{1,2})] \left[J_m(k\rho_{1,2}) - J_m(ka) H_m^{(1)}(k\rho_{1,2}) / H_m^{(1)}(ka) \right] H_m^{(1)}(k\rho'_{1,2})$ –

функция Грина круглого цилиндра [4] для электрической поляризации, зависящая от полярных координат точек наблюдения ($\rho_{1,2}, \varphi_{1,2}$) на S_1 и S_2 , а также точек интегрирования на поверхности S : $\rho'_1 = |x - (a+b)|$, $\varphi'_1 = \pi/2$ и $\rho'_2 = |x + (a+b)|$, $\varphi'_2 = 3\pi/2$,

$$\varphi_{1,2} = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{a^2 - [x - (a+b)]^2}}{a} \right), \rho_{1,2} = a. \quad (5)$$

Таким образом, мы нашли токи на S_1, S_2 . Далее находим вклад этих токов в ДН в H -плоскости:

$$E_{\varphi}^1 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} \int_{-d}^d \int_{-(b+a)}^{-b} j_y G_0 dx dy, E_{\varphi}^2 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} \int_{-d}^d \int_b^{b+a} j_y G_0 dx dy. \quad (6)$$

Суммируя все вклады, получаем:

$$E_{\varphi} = E_{\varphi}^1 + E_{\varphi}^v + E_{\varphi}^2. \quad (7)$$

На рис. 2 – 5 приведены результаты расчета ДН в H -плоскости в переднем полупространстве для разных значений ka, kb и kd . Здесь и далее электрическая длина регулярной части волновода $kh = 10$. Кривая 1 показывает результаты расчета методом конечных элементов (МКЭ), 2 – гибридным методом по формуле (7), 3 – методом ГФК по формуле (3).

На рисунках видно, что результаты расчета ДН гибридным методом и с использованием МКЭ близки (разница менее 1 дБ) за исключением небольшой области вблизи краев переднего полупространства, где она достигает 2дБ. Ошибка результата расчета ДН методом ГФК на краю переднего полупространства достигает 13 дБ.

Перейдем к анализу излучения открытого конца прямоугольного волновода, нерегулярного в E -плоскости. Ограничимся исследованием ДН в E -плоскости ($\varphi = 90^0$).

Используя принцип эквивалентности, находим вклад в ДН эквивалентных токов $J_y^{\vartheta} = -2H_x, J_x^M = -2E_y$ на поверхности S :

$$E_{\theta}^v = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\vartheta} + ikA_{\varphi}^M, A_{\theta}^{\vartheta} = \cos\theta \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} G_0 dx dy, A_{\varphi}^M = - \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_x^M G_0 dx dy, \quad (8)$$

где G_0 - функция Грина в свободном пространстве (2).

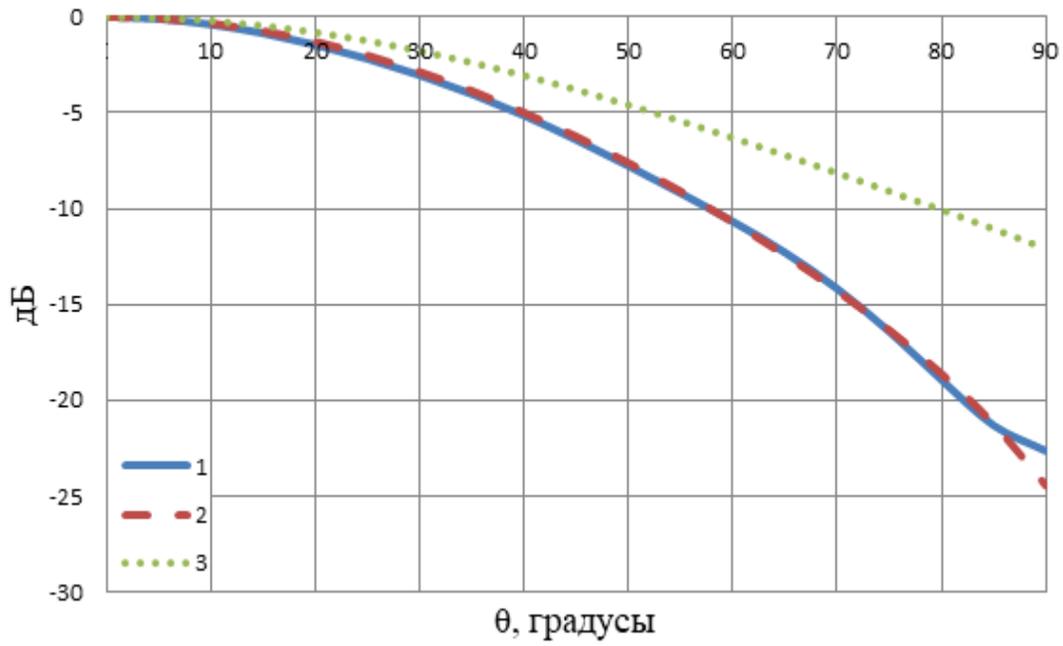


Рис. 2. Диаграммы направленности в H плоскости при $ka=1, kb=0.72\pi, kd=0.36\pi$.

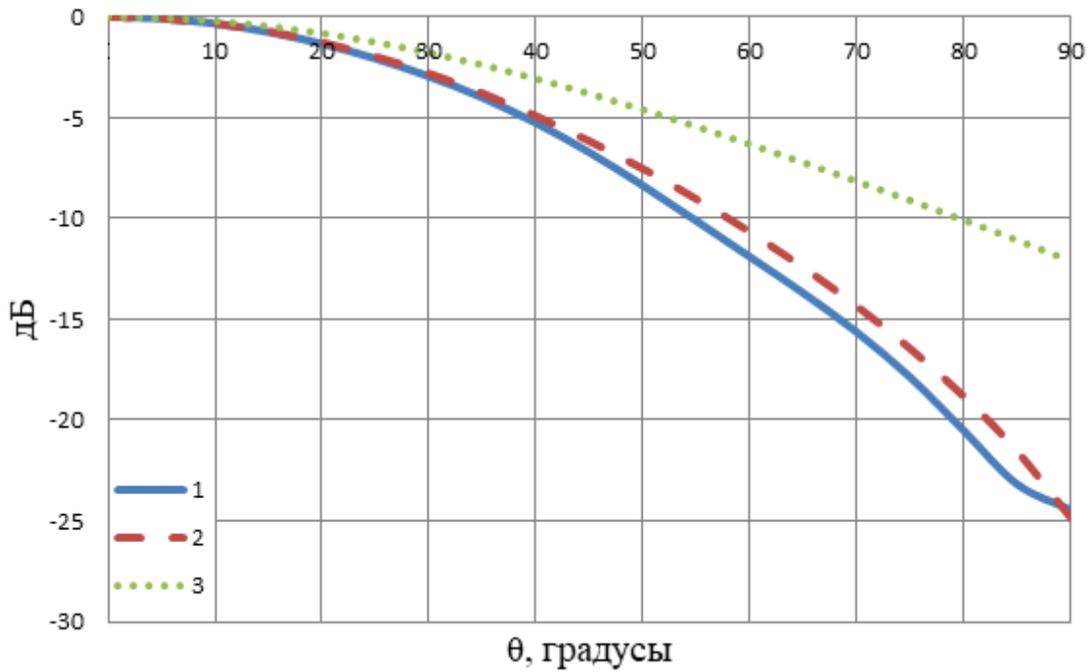


Рис. 3. Диаграммы направленности в H плоскости при $ka=0.5, kb=0.72\pi, kd=0.36\pi$.

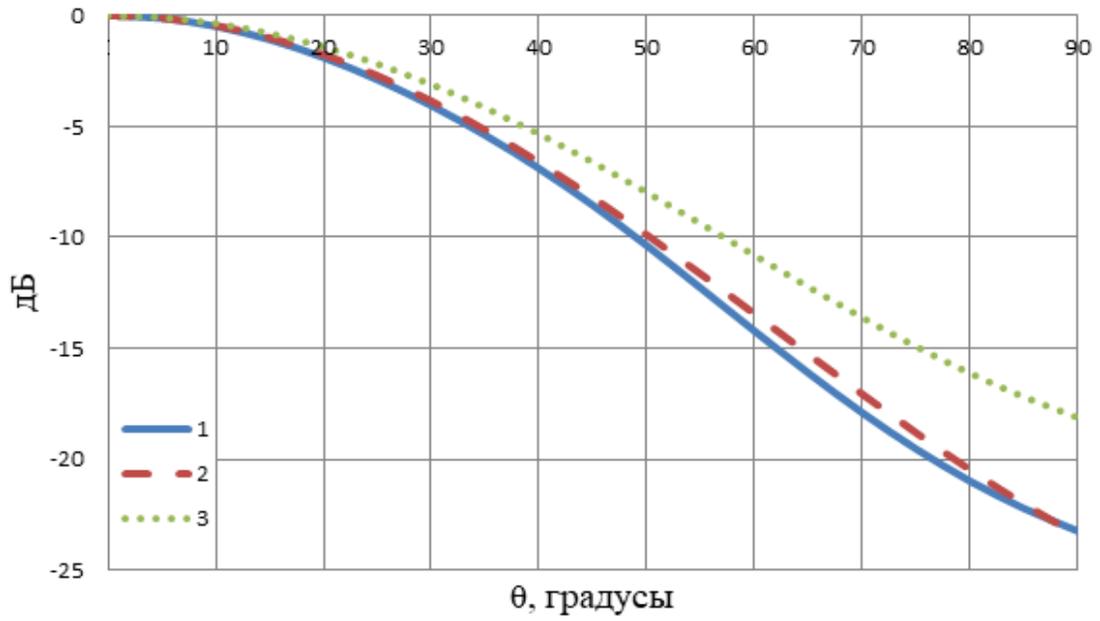


Рис.4. Диаграммы направленности в Н плоскости при $ka=1, kb=1.08\pi, kd=0.54\pi$.

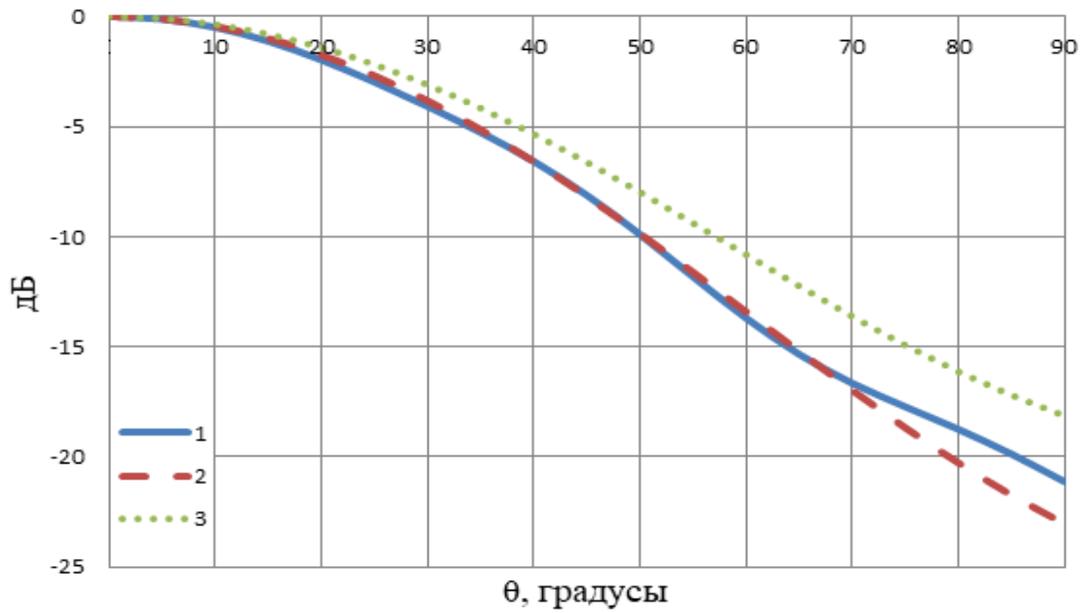


Рис.5. Диаграммы направленности в Н плоскости при $ka=0.5, kb=1.08\pi, kd=0.54\pi$.

Интегрируя, получаем выражение для ДН в Е-плоскости ($\varphi = 90^0$):

$$E_{\theta}^v = \frac{-i\omega\mu_a}{\pi k} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(kd \sin \theta). \quad (9)$$

Выражение (9) совпадает с известным выражением ДН открытого конца прямоугольного волновода в Е-плоскости в приближении ГФК [9].

Далее, интегрируя эквивалентные токи на поверхности S , находим токи на участках поверхности круговых цилиндров S_1, S_2 :

$$j_z = -\sin \varphi_{1,2} \left[\frac{-k_v^2}{i\omega\mu_a} A_x^M + \frac{1}{\rho_{1,2}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_{1,2}} (\rho_{1,2} A_{\varphi_{1,2}}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \varphi_{1,2}} A_{\rho_{1,2}}^{\vartheta} \right] \right],$$

$$j_x = \cos \varphi_{1,2} \left[\frac{-k_v^2}{i\omega\mu_a} A_x^M + \frac{1}{\rho_{1,2}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_{1,2}} (\rho_{1,2} A_{\varphi_{1,2}}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \varphi_{1,2}} A_{\rho_{1,2}}^{\vartheta} \right] \right], \quad (10)$$

$$A_x^M = \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_x^M G_H dx dy, \quad A_{\rho_{1,2}}^{\vartheta} = \sin \varphi_{1,2} \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} G_H dx dy, \quad A_{\varphi_{1,2}}^{\vartheta} = \cos \varphi_{1,2} \int_{-d}^d \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} G_H dx dy, \text{ где}$$

$$G_H = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[i m(\varphi_{1,2} - \varphi'_{1,2})] \left[J_m(k_v \rho_{1,2}) - J'_m(k_v a) H_m^{(1)}(k_v \rho_{1,2}) / H_m^{(1)}(k_v a) \right] H_m^{(1)}(k_v \rho'_{1,2}) -$$

функция Грина круглого цилиндра [4] для магнитной поляризации, зависящая полярных координат точек наблюдения $(\rho_{1,2}, \varphi_{1,2})$ на S_1 и S_2 , соответственно, а

также точек интегрирования на поверхности S , $\rho'_1 = |y - (a + b)|$, $\varphi'_1 = \pi/2$ и

$$\rho'_2 = |y + (a + b)|, \quad \varphi'_2 = 3\pi/2,$$

$$\varphi_{1,2} = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{a^2 - [y - (a + b)]^2}}{a} \right), \quad \rho_{1,2} = a. \quad (11)$$

Таким образом, мы нашли токи на S_1, S_2 . Вклад этих токов в ДН в Е-плоскости:

$$E_{\theta}^1 = \frac{-k^2}{i\omega\epsilon_a} \left[\cos\theta \int_{-(d+a)-b}^{-d} \int_{-b}^b j_x G_0 dx dy - \sin\theta \int_{-(d+a)-b}^{-d} \int_{-b}^b j_z G_0 dx dy \right], \quad (12)$$

$$E_{\theta}^2 = \frac{-k^2}{i\omega\epsilon_a} \left[\cos\theta \int_d^{d+a} \int_{-b}^b j_x G_0 dx dy - \sin\theta \int_d^{d+a} \int_{-b}^b j_z G_0 dx dy \right].$$

Суммируя все вклады, получаем:

$$E_{\theta} = E_{\theta}^1 + E_{\theta}^v + E_{\theta}^2. \quad (13)$$

На рис. 6 – 9 приведены результаты расчета ДН в Е плоскости в переднем полупространстве для разных значений ka , kb и kd . Кривая 1 показывает результаты расчета с использованием МКЭ, 2 – гибридным методом по формуле (13), 3 – методом ГФК по формуле (9).

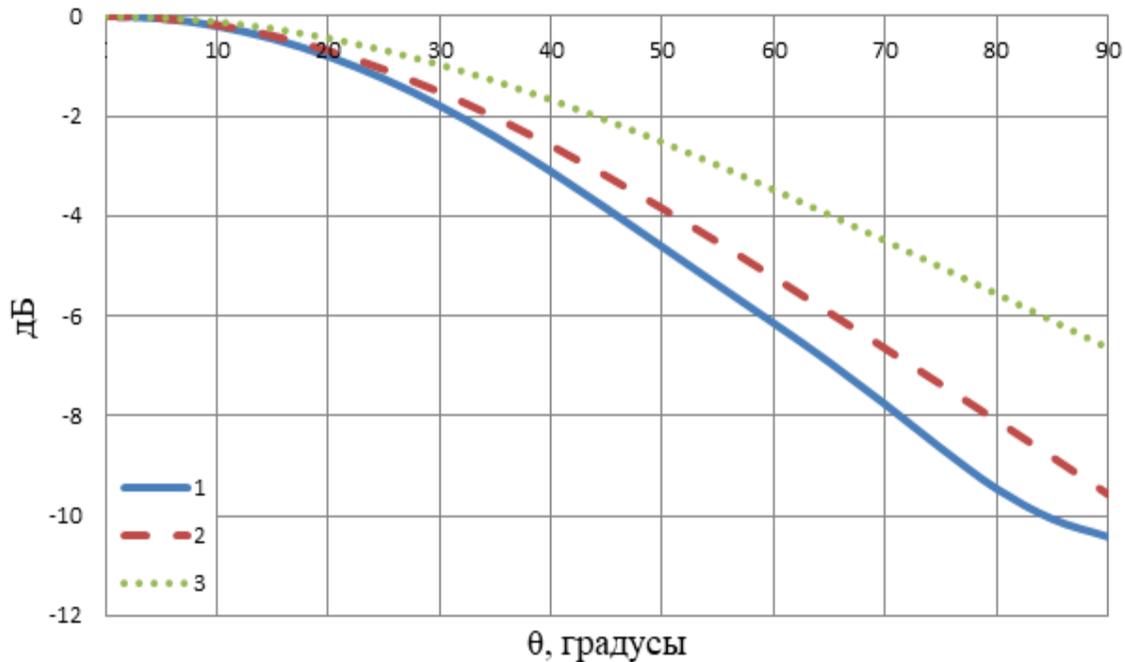


Рис 6. Диаграмма направленности в Е плоскости при $ka=1, kb=0.72\pi, kd=0.36\pi$.

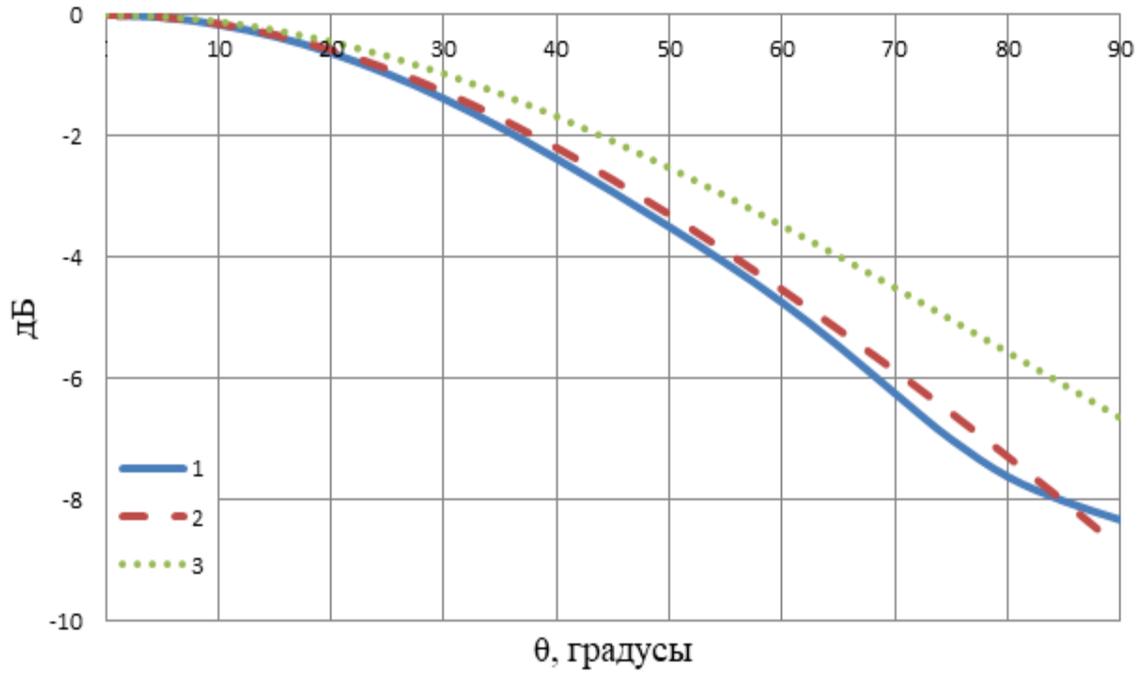


Рис 7. Диаграммы направленности в E плоскости при $ka=0.5, kb=0.72\pi, kd=0.36\pi$.

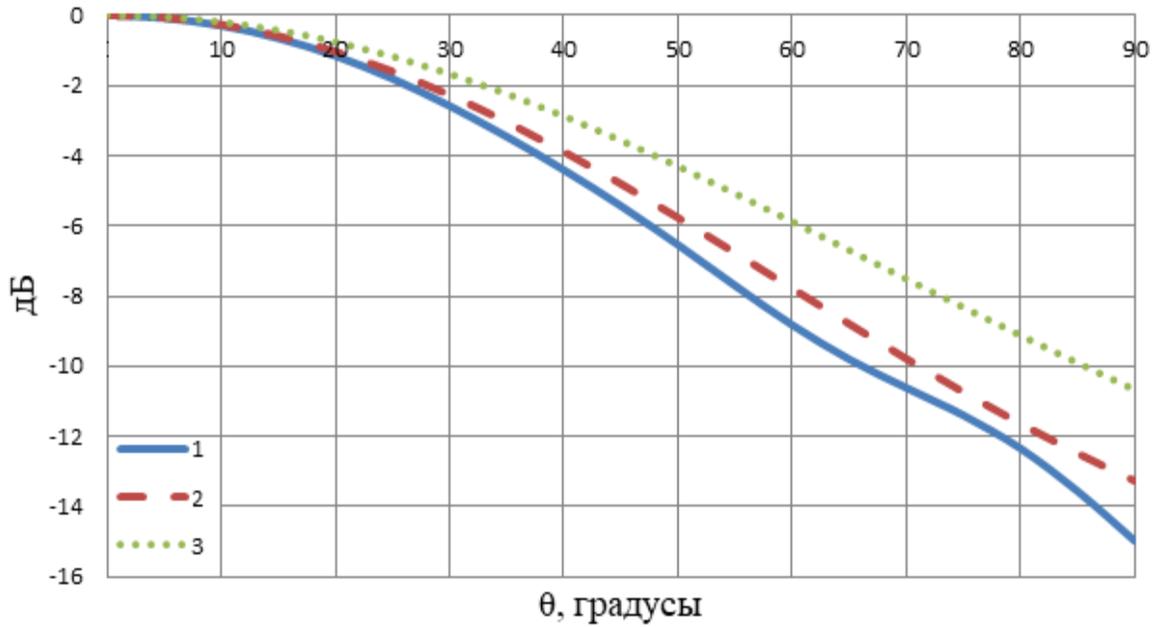


Рис 8. Диаграмма направленности в E плоскости при $ka=1, kb=1.08\pi, kd=0.54\pi$.

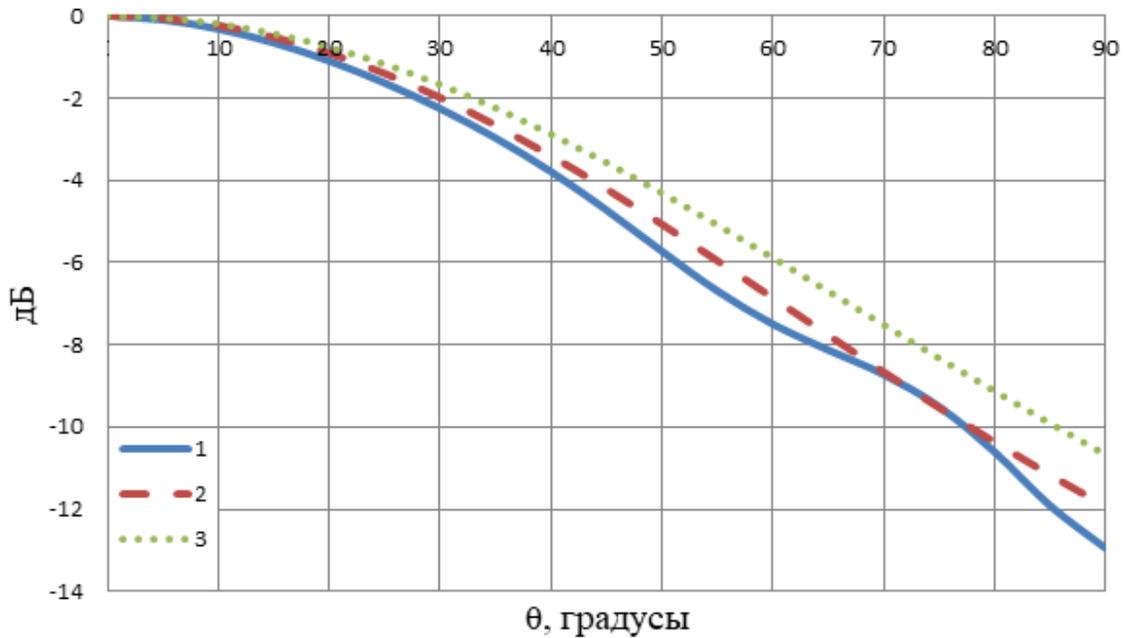


Рис 9. Диаграммы направленности в Е плоскости при $ka=0.5, kb=1.08\pi, kd=0.54\pi$.

На рисунках видно, что результаты, полученные гибридным методом и МКЭ, близки между собой и, как в предыдущем случае, разница между ними почти везде менее 1 дБ. Отличие результата расчета ДН методом ГФК на краях переднего полупространства достигает 4 дБ.

2. Излучение открытого конца нерегулярного круглого волновода

Рассмотрим излучение из открытого конца круглого волновода основной моды H_{11} и первых симметричных мод E_{01} , H_{01} . Продольное сечение круглого волновода имеет такой же вид, как и прямоугольного волновода (рис.1), где a – радиус образующей нерегулярной части круглого волновода (торроидальной поверхности), b – радиус круглого волновода.

Начнем рассмотрение с излучения моды H_{01} . Введем цилиндрическую систему координат (ρ', φ', z') , связанную с декартовой системой (x, y, z) по формулам: $\rho' = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi' = \arctan(y/x)$, $z' = z$.

Компоненты поля моды H_{01} круглого волновода на плоскости S в цилиндрической системе координат (ρ', φ', z') можно представить в виде [14]:

$$H_{z'} = J_0 \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \rho' \right), \quad H_{\rho'} = -iv_1 \left(\frac{b}{\varepsilon_{01}} \right)^2 J_0' \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \rho' \right),$$

$$E_{\varphi'} = i\omega\mu_a \left(\frac{b}{\varepsilon_{01}} \right)^2 J_0' \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \rho' \right), \quad v_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \right)^2}, \quad (14)$$

где $\varepsilon_{01} = 3.832$.

Используя принцип эквивалентности, находим вклад в ДН от эквивалентных токов $J_{\varphi'}^{\vartheta} = -2H_{\rho'}$, $J_{\rho'}^M = -2E_{\varphi'}$ на плоскости S :

$$E_{\varphi}^1 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^{\vartheta} - ikA_{\theta}^M, \quad A_{\varphi}^{\vartheta} = \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \cos(\varphi - \varphi') J_{\varphi'}^{\vartheta} G_0 d\varphi' d\rho', \quad (15)$$

$$A_{\theta}^M = \cos\theta \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \cos(\varphi - \varphi') J_{\rho'}^M G_0 d\varphi' d\rho',$$

где G_0 - функция Грина в свободном пространстве (2).

Интегрируя, получаем выражение для ДН в сферической системе координат:

$$E_{\varphi}^1 = -i\omega\mu_a b J_0(\varepsilon_{01}) \frac{J_1(kb \sin\theta)}{k \cos\theta - v_1}. \quad (16)$$

Выражение (16) совпадает с известным выражением ДН открытого конца круглого волновода для H_{01} в приближении ГФК [9].

Далее найдем токи на участке торродиальной поверхности S_1 .

Компоненты поля (14) в декартовой системе координат (x, y, z) имеют вид:

$$H_x = -\cos \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] iv_1 \left(\frac{b}{\varepsilon_{01}} \right)^2 J_0' \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

$$H_y = -\sin \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] iv_1 \left(\frac{b}{\varepsilon_{01}} \right)^2 J_0' \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2} \right), \quad (17)$$

$$E_x = -\sin \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] i\omega\mu_a \left(\frac{b}{\varepsilon_{01}} \right)^2 J_0' \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

$$E_y = \cos \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] i\omega\mu_a \left(\frac{b}{\varepsilon_{01}} \right)^2 J_0' \left(\frac{\varepsilon_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Ток на S_1 в цилиндрической системе координат (ρ', φ', z') имеет вид:

$$j_{\varphi'} = \frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\varphi_1}^M + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^M) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\varphi_1}^M + \frac{\partial}{\partial y} A_y^M \right] \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} A_{\rho_1}^{\vartheta} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} A_y^{\vartheta} \right], \quad (18)$$

$$A_{\rho_1}^{\vartheta} = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy, \quad A_{\varphi_1}^{\vartheta} = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy, \quad A_{\rho_1}^M = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_E dx dy,$$

$$A_{\varphi_1}^M = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_E dx dy, \quad A_y^{\vartheta} = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} P_E dx dy, \quad A_y^M = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^M P_E dx dy,$$

где $J_y^{\vartheta} = -2H_x$, $J_x^M = -2E_y$, $J_x^{\vartheta} = 2H_y$, $J_y^M = 2E_x$ – эквивалентные токи на поверхности S , а компоненты поля E_x , E_y , H_x и H_y определены в (17), функция Грина на цилиндре [4] для электрической поляризации:

$$P_E = \frac{-1}{8\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi_1 - \varphi_1')] \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \left[J_m(\eta\rho_1) - \frac{J_m(\eta a)}{H_m^{(1)}(\eta a)} H_m^{(1)}(\eta\rho_1) \right] H_m^{(1)}(\eta\rho_1') \frac{\exp \left[i\sqrt{k^2 - \eta^2} |z_1 - z_1'| \right]}{\sqrt{k^2 - \eta^2}} \eta d\eta, \quad (19)$$

(ρ_1, φ_1, z_1) – полярные координаты точек на S_1 , а $\varphi_1' = \frac{\pi}{2}$, $\rho_1' = |x - (a+b)|$, $z_1' = y$ – полярные координаты точек интегрирования на поверхности S , при этом полярные координаты связаны с системой координат (ρ', φ', z') формулой:

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{a^2 - [\rho' - (a+b)]^2}}{a}\right), \rho_1 = a. \quad (20)$$

Вклад токов на S_1 в диаграмму направленности:

$$E_\varphi^2 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} \left(\int_0^{2\pi} \int_b^a \rho' \sqrt{1 + \left(\frac{b - \rho'}{\sqrt{a^2 - [\rho' - (a+b)]^2}} \right)^2} j_{\varphi'} \cos(\varphi - \varphi') G_0 d\rho' d\varphi' \right). \quad (21)$$

Суммируя все вклады, получаем:

$$E_\varphi = E_\varphi^1 + E_\varphi^2. \quad (22)$$

На рис. 10 – 13 приведены результаты расчета ДН моды H_{01} в переднем полупространстве для разных значений ka и kb . Кривая 1 показывает результаты расчета методом моментов, 2 – МКЭ, 3 – гибридным методом по формуле (22), 4 – методом ГФК по формуле (16).

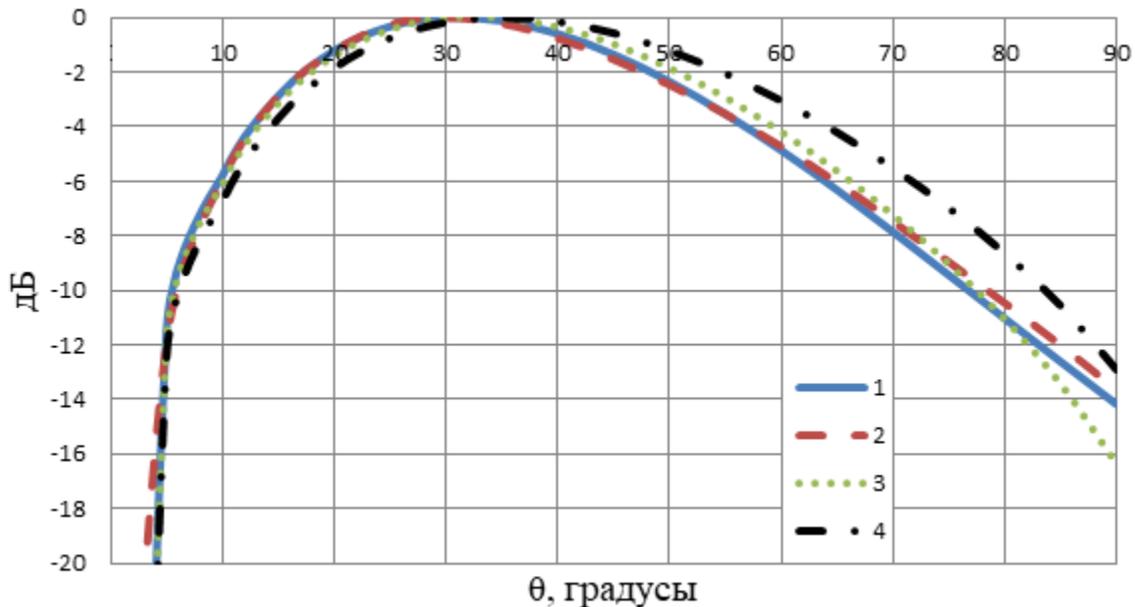


Рис 10. Диаграммы направленности моды H_{01} при $ka=1, kb=4$.

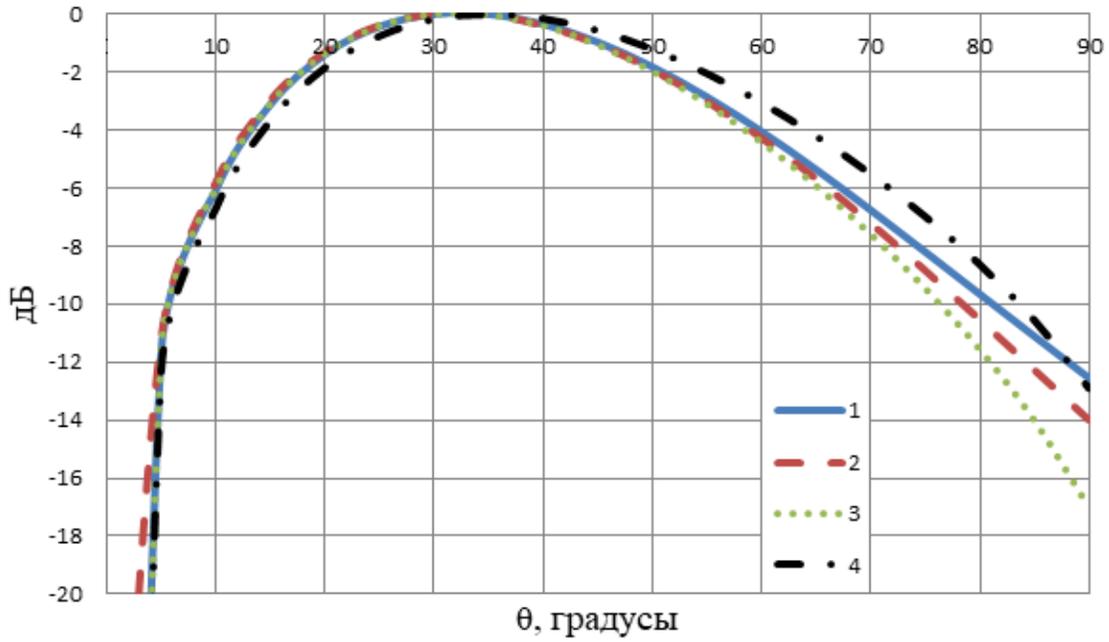


Рис 11. Диаграммы направленности моды H_{01} при $ka=0.5, kb=4$.

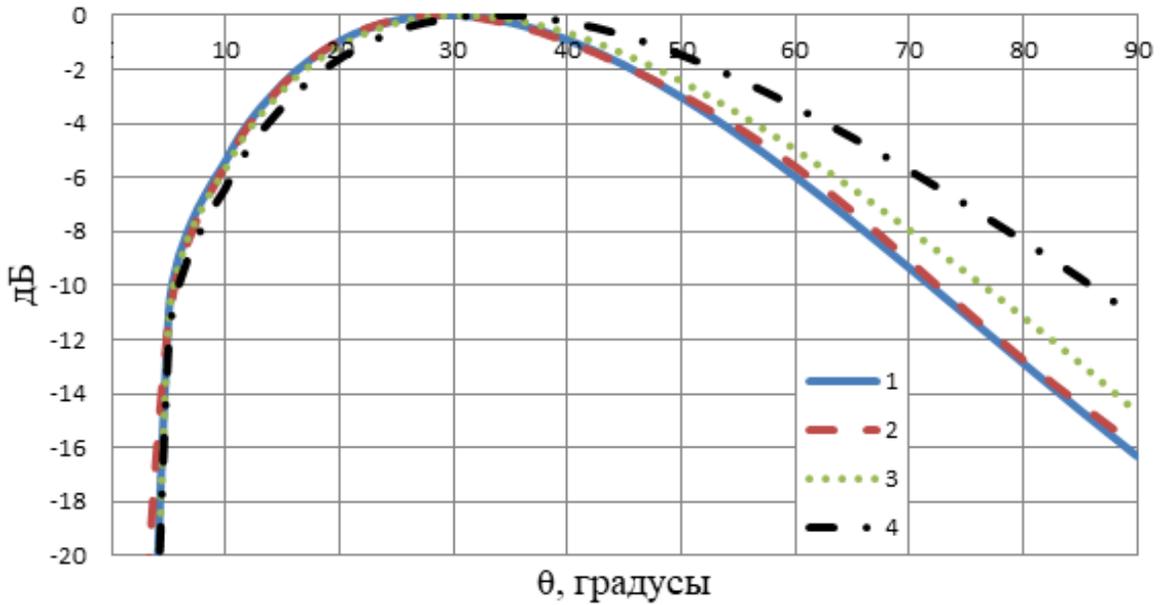


Рис 12. Диаграммы направленности моды H_{01} при $ka=1, kb=4.4$.

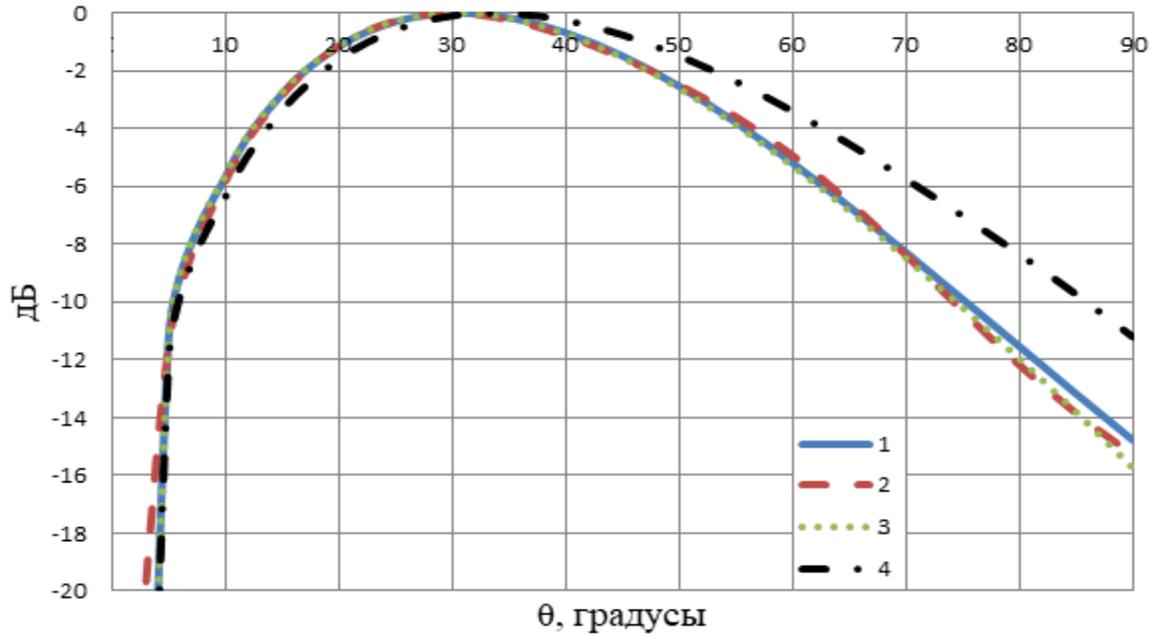


Рис 13. Диаграммы направленности моды H_{01} при $ka=0.5, kb=4.4$.

На рисунках видно, что разница между результатами расчета гибридным методом и МКЭ не превышает 2 дБ и уменьшается с уменьшением ka . Отличие результата расчета ДН методом ГФК на краю переднего полупространства достигает 5 дБ.

Перейдем к анализу излучения моды E_{01} .

Компоненты поля моды E_{01} круглого волновода на плоскости S в цилиндрической системе координат (ρ', φ', z') можно представить в виде [14]:

$$E_{z'} = J_0\left(\frac{\beta_{01}}{b} \rho'\right), E_{\rho'} = -iv_2 \left(\frac{b}{\beta_{01}}\right)^2 J_0'\left(\frac{\beta_{01}}{b} \rho'\right),$$

$$H_{\varphi'} = -i\omega\epsilon_a \left(\frac{b}{\beta_{01}}\right)^2 J_0'\left(\frac{\beta_{01}}{b} \rho'\right), v_2 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta_{01}}{b}\right)^2}, \quad (23)$$

где $\beta_{01} = 2.405$.

Используя принцип эквивалентности, находим вклад в ДН от эквивалентных токов $J_{\rho'}^{\vartheta} = 2H_{\varphi'}$, $J_{\varphi'}^M = 2E_{\rho'}$ на плоскости S :

$$E_{\theta}^1 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\vartheta} + ikA_{\varphi}^M, A_{\varphi}^M = \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \cos(\varphi - \varphi') J_{\varphi'}^M G_0 d\varphi' d\rho', \quad (24)$$

$$A_{\theta}^{\vartheta} = \cos\theta \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \cos(\varphi - \varphi') J_{\rho'}^{\vartheta} G_0 d\varphi' d\rho',$$

где G_0 - функция Грина в свободном пространстве (2).

Интегрируя, получаем выражение для ДН в сферической системе координат:

$$E_{\theta}^1 = ik^2 \frac{b^2}{\beta_{01}} J_1(\beta_{01}) \frac{\sin\theta J_0(kb \sin\theta)}{k \cos\theta - v_2}. \quad (25)$$

Выражение (25) совпадает с известным выражением ДН открытого конца круглого волновода для E_{01} в приближении ГФК [9].

Компоненты поля (23) в декартовой системе координат (x, y, z) имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x &= -\cos\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right] iv_2 \left(\frac{b}{\beta_{01}}\right)^2 J_0'\left(\frac{\beta_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ E_y &= -\sin\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right] iv_2 \left(\frac{b}{\beta_{01}}\right)^2 J_0'\left(\frac{\beta_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ H_x &= \sin\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right] i\omega\varepsilon_a \left(\frac{b}{\beta_{01}}\right)^2 J_0'\left(\frac{\beta_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ H_y &= -\cos\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right] i\omega\varepsilon_a \left(\frac{b}{\beta_{01}}\right)^2 J_0'\left(\frac{\beta_{01}}{b} \sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Ток на S_1 в цилиндрической системе координат (ρ', φ', z') имеет вид:

$$j_{z'} = \sin \varphi_1 \left[\frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_y^M + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^M) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\varphi_1}^M + \frac{\partial}{\partial y} A_y^M \right] \right] + \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\rho_1}^{\vartheta} \right] \right], \quad (27)$$

$$j_{\rho'} = \cos \varphi_1 \left[\frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_y^M + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^M) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\varphi_1}^M + \frac{\partial}{\partial y} A_y^M \right] \right] + \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\rho_1}^{\vartheta} \right] \right],$$

$$A_{\rho_1}^{\vartheta} = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy, \quad A_{\varphi_1}^{\vartheta} = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy, \quad A_{\rho_1}^M = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_H dx dy,$$

$$A_{\varphi_1}^M = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_H dx dy, \quad A_y^{\vartheta} = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} P_E dx dy, \quad A_y^M = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^M P_H dx dy,$$

где $J_y^{\vartheta} = -2H_x$, $J_x^M = -2E_y$, $J_x^{\vartheta} = 2H_y$, $J_y^M = 2E_x$ – эквивалентные токи на поверхности S, а компоненты поля E_x , E_y , H_x и H_y определены в (26), функция Грина цилиндра [4] для магнитной поляризации:

$$P_H = \frac{-1}{8\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi_1 - \varphi_1')] \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \left[J_m(\eta\rho_1) - \frac{J'_m(\eta a)}{H'_m(1)(\eta a)} H_m^{(1)}(\eta\rho_1) \right] H_m^{(1)}(\eta\rho_1') \frac{\exp\left[i\sqrt{k^2 - \eta^2} |z_1 - z_1'| \right]}{\sqrt{k^2 - \eta^2}} \eta d\eta. \quad (28)$$

Вклад токов на S_1 в ДН:

$$E_{\theta}^2 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} (\cos\theta A_{\rho} - \sin\theta A_z), \quad (29)$$

где

$$A_{\rho} = \int_0^{2\pi} \int_b^{b+a} \rho' \sqrt{1 + \left(\frac{b - \rho'}{\sqrt{a^2 - [\rho' - (a+b)]^2}} \right)^2} j_{\rho'} \cos(\varphi - \varphi') G_0 d\rho' d\varphi'$$

$$A_z = \int_0^{2\pi} \int_b^{b+a} \rho' \sqrt{1 + \left(\frac{b - \rho'}{\sqrt{a^2 - [\rho' - (a+b)]^2}} \right)^2} j_z' G_0 d\rho' d\varphi'.$$

Суммируя все вклады , получаем:

$$E_{\theta} = E_{\theta}^1 + E_{\theta}^2. \tag{30}$$

На рис. 14 – 17 приведены результаты расчета ДН моды E_{01} в переднем полупространстве для разных значений ka, kb . Кривая 1 показывает результаты расчета методом моментов, 2–МКЭ, 3 – гибридным методом по формуле (30), 4 – методом ГФК по формуле (25).

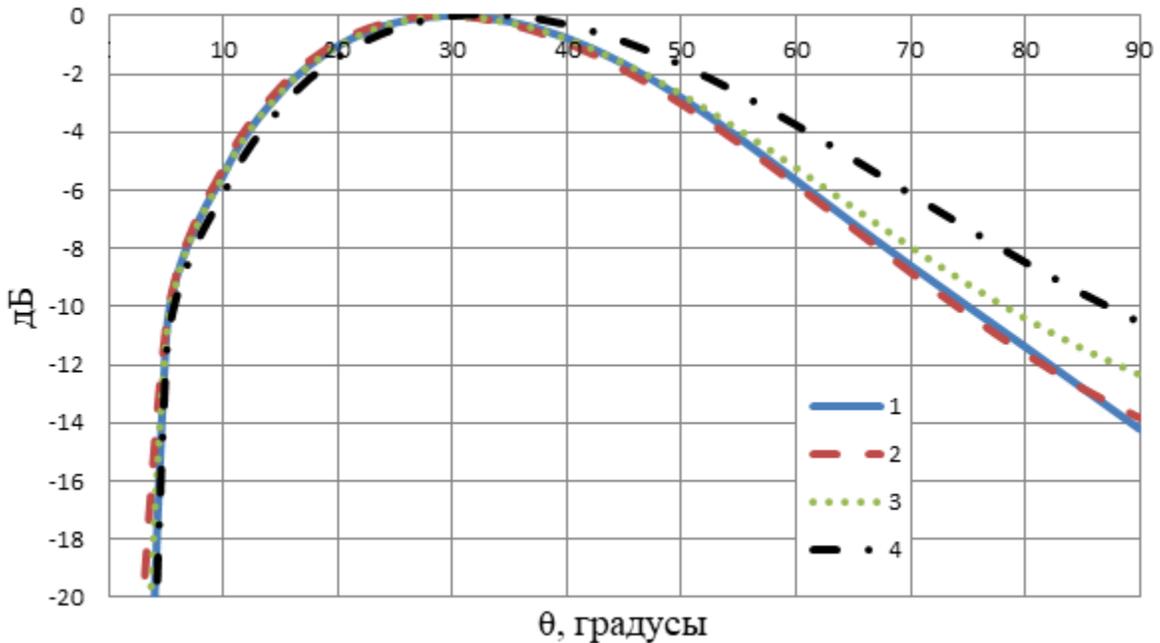


Рис 14. Диаграммы направленности моды E_{01} при $ka=1, kb=4$.

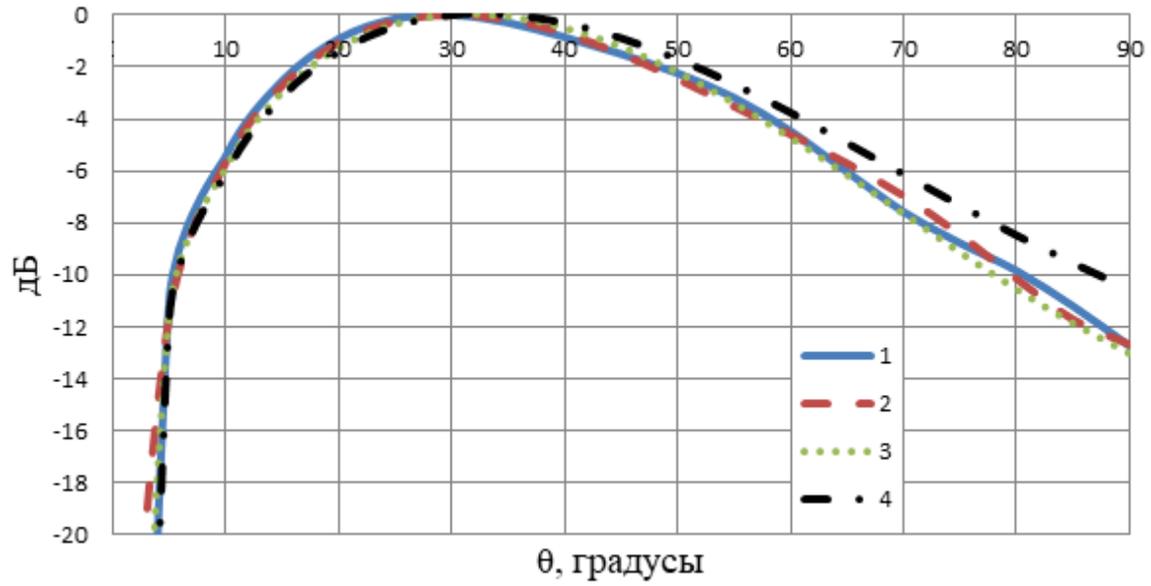


Рис 15. Диаграммы направленности моды E_{01} при $ka=0.5$, $kb=4$.

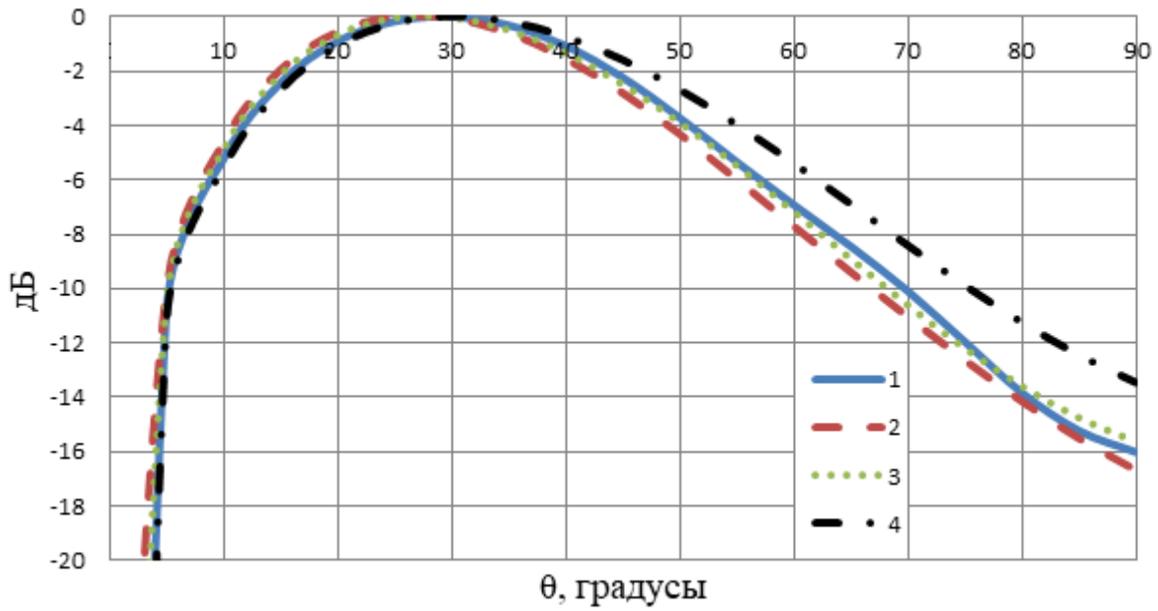


Рис 16. Диаграммы направленности моды E_{01} при $ka=1$, $kb=4.4$.

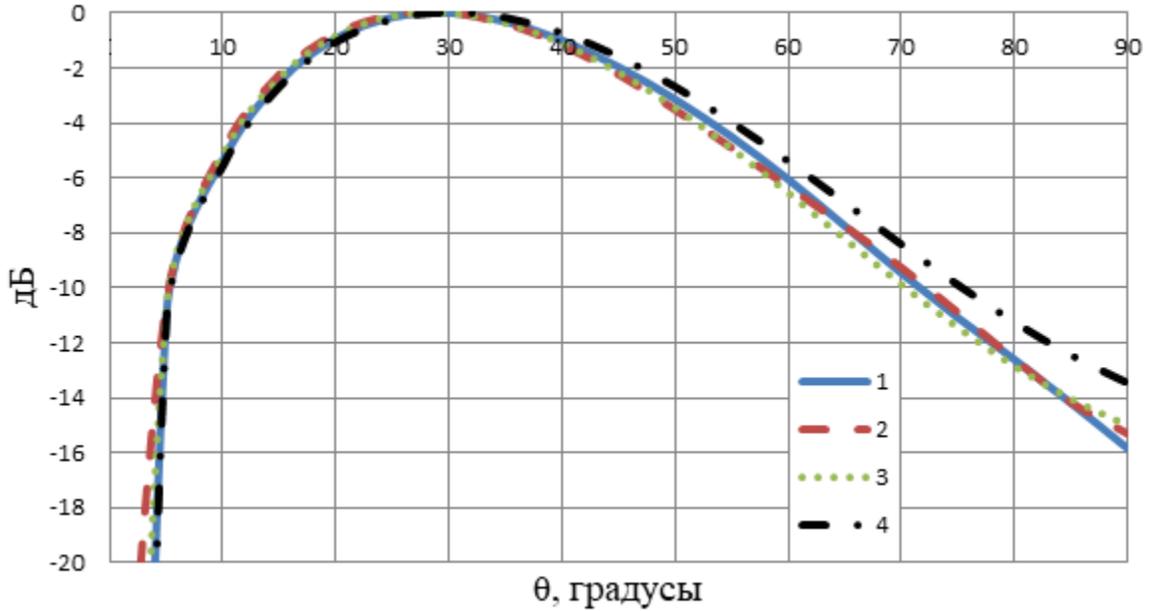


Рис 17. Диаграммы направленности моды E_{01} при $ka=0.5$, $kb=4.4$.

На рисунках видно, что различие результатов расчета ДН гибридным методом и с использованием метода МКЭ менее 2 дБ, а между методом моментов и ГФК – достигает 4 дБ.

Перейдем к анализу излучения моды H_{11} .

Компоненты поля моды H_{11} круглого волновода на плоскости S в цилиндрической системе координат (ρ', φ', z') можно представить в виде [14]:

$$H_{z'} = J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b}\rho'\right)\cos\varphi', E_{\rho'} = i\omega\mu_a \frac{1}{\rho'}\left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b}\rho'\right)\sin\varphi',$$

$$E_{\varphi'} = i\omega\mu_a \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 J_1'\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b}\rho'\right)\cos\varphi', H_{\varphi'} = iv_3 \frac{1}{\rho'}\left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b}\rho'\right)\sin\varphi', \quad (31)$$

$$H_{\rho'} = -iv_3 \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 J_1'\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b}\rho'\right)\cos\varphi', v_3 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\varepsilon_{11}}{b}\right)^2},$$

где $\varepsilon_{11} = 1.841$.

Интегрируя эквивалентные токи $J_{\rho'}^{\vartheta} = 2H_{\varphi'}$, $J_{\varphi'}^M = 2E_{\rho'}$, $J_{\rho'}^{\vartheta} = -2H_{\varphi'}$,

$J_{\varphi'}^M = -2E_{\rho'}$ на плоскости S , находим ДН в приближении ГФК:

$$E_{\theta}^1 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\vartheta} + ikA_{\varphi}^M, \quad E_{\varphi}^1 = \frac{-k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^{\vartheta} - ikA_{\theta}^M, \quad (32)$$

$$A_{\rho}^{\vartheta} = \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \left[J_{\rho'}^{\vartheta} \cos(\varphi - \varphi') + J_{\varphi'}^{\vartheta} \sin(\varphi - \varphi') \right] G_0 d\varphi' d\rho',$$

$$A_{\varphi}^{\vartheta} = \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \left[J_{\varphi'}^{\vartheta} \cos(\varphi - \varphi') - J_{\rho'}^{\vartheta} \sin(\varphi - \varphi') \right] G_0 d\varphi' d\rho',$$

$$A_{\rho}^M = \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \left[J_{\rho'}^M \cos(\varphi - \varphi') + J_{\varphi'}^M \sin(\varphi - \varphi') \right] G_0 d\varphi' d\rho',$$

$$A_{\varphi}^M = \int_0^b \int_0^{2\pi} \rho' \left[J_{\varphi'}^M \cos(\varphi - \varphi') - J_{\rho'}^M \sin(\varphi - \varphi') \right] G_0 d\varphi' d\rho',$$

$$A_{\theta}^{\vartheta} = \cos\theta A_{\rho}^{\vartheta}, \quad A_{\theta}^M = \cos\theta A_{\rho}^M,$$

где G_0 - функция Грина в свободном пространстве (2).

Интегрируя, получаем выражения для ДН в сферической системе E и H плоскостях:

$$E_{\theta}^1 = \frac{-\omega\mu_a}{107.4} \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}} \right)^2 \sin\varphi (v_3 \cos\theta + k) \frac{J_1(kb \sin\theta)}{\sin\theta}. \quad (33)$$

$$E_{\varphi}^1 = \omega\mu_a \frac{1.972b}{\varepsilon_{11}^2} \cos\varphi \frac{J_1'(kb \sin\theta)}{v_3 - k \cos\theta}. \quad (34)$$

Выражения (33) и (34) совпадают с известным выражением ДН открытого конца круглого волновода для H_{11} в приближении ГФК [9].

Декартовы компоненты поля на поверхности S имеют вид:

$$\begin{aligned}
 E_x &= i\omega\mu_a \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 \left[\frac{1}{\rho'} J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) - J_1'\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) \right] \sin \varphi' \cos \varphi' , \\
 E_y &= i\omega\mu_a \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 \left[\frac{1}{\rho'} J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) \sin \varphi'^2 + J_1'\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) \cos \varphi'^2 \right] , \\
 H_x &= -iv_3 \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 \left[J_1'\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) \cos \varphi'^2 + \frac{1}{\rho'} J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) \sin \varphi'^2 \right] , \\
 H_y &= -iv_3 \left(\frac{b}{\varepsilon_{11}}\right)^2 \left[J_1'\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) - \frac{1}{\rho'} J_1\left(\frac{\varepsilon_{11}}{b} \rho'\right) \right] \sin \varphi' \cos \varphi' .
 \end{aligned} \tag{35}$$

Компоненты тока на поверхности S_1 имеют вид:

$$j_{\varphi'} = \cos \varphi' \left[\frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\varphi_1}^M + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^M) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\varphi_1}^M + \frac{\partial}{\partial y} A_y^M \right] \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} A_{\rho_1}^{\vartheta} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} A_y^{\vartheta} \right] \right], \tag{36}$$

где $A_y^{\vartheta} = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} P_E dx dy$, $A_y^M = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^M P_E dx dy$, $A_{\rho_1}^{\vartheta} = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy$,

$$A_{\varphi_1}^{\vartheta} = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy, A_{\rho_1}^M = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_E dx dy, A_{\varphi_1}^M = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_E dx dy.$$

$$j_{\rho'} = \cos \varphi_1 \sin \varphi' \left[\frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_x^M + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\rho_1}^M) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\varphi_1}^M + \frac{\partial}{\partial x} A_x^M \right] \right] + \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 A_{\varphi_1}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{\rho_1}^{\vartheta} \right] \right], \tag{37}$$

где $A_x^{\vartheta} = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^{\vartheta} P_E dx dy$, $A_x^M = \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_x^M P_H dx dy$, $A_{\rho_1}^{\vartheta} = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} P_E dx dy$,

$$A_{\varphi_1}^{\vartheta} = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^{\vartheta} P_E dx dy, A_{\rho_1}^M = \sin \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^M P_H dx dy, A_{\varphi_1}^M = \cos \varphi_1 \int_{-b}^b \int_{-b}^b J_y^M P_H dx dy,$$

$J_x^{\text{э}} = 2H_y$, $J_x^{\text{э}} = -2H_x$, $J_x^{\text{М}} = -2E_y$, $J_x^{\text{М}} = 2E_x$ – эквивалентные токи на плоскости S, компоненты поля E_x , E_y , H_x и H_y определены в (35), а величины $P_{E,H}$ определены в (19) и (28).

Вклад токов на S_1 в диаграмму направленности:

$$E_{\varphi}^2 = \frac{k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}, \quad E_{\theta}^2 = \frac{k^2}{i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}, \quad (38)$$

где

$$A_{\varphi} = \int_0^{2\pi} \int_b^{b+a} \rho' \sqrt{1 + \left(\frac{b - \rho'}{\sqrt{a^2 - [\rho' - (a+b)]^2}} \right)^2} \left[j_{\rho'} \cos(\varphi - \varphi') - j_{\rho'} \sin(\varphi - \varphi') \right] G_0 d\rho' d\varphi',$$

$$A_{\theta} = \cos\theta \int_0^{2\pi} \int_b^{b+a} \rho' \sqrt{1 + \left(\frac{b - \rho'}{\sqrt{a^2 - [\rho' - (a+b)]^2}} \right)^2} \left[j_{\rho'} \cos(\varphi - \varphi') + j_{\rho'} \sin(\varphi - \varphi') \right] G_0 d\rho' d\varphi'.$$

Суммируя все вклады, получаем:

$$E_{\varphi} = E_{\varphi}^1 + E_{\varphi}^2, \quad E_{\theta} = E_{\theta}^1 + E_{\theta}^2. \quad (39)$$

На рис. 18, 19 приведены результаты расчета ДН моды H_{11} в E плоскости для $kb=2$ и разных значений ka , а на рис. 20, 21 – в H плоскости. Кривая 1 показывает результаты расчета методом моментов, 2 – МКЭ, 3 – гибридным методом по формуле (39), 4 – методом ГФК по формулам (33) и (34).

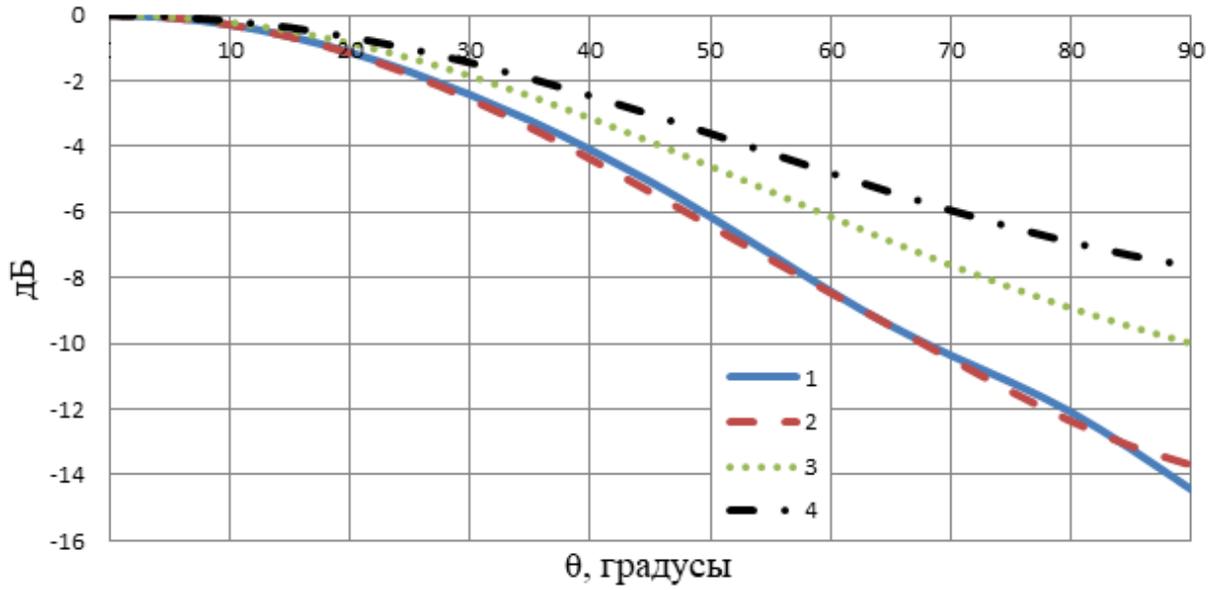


Рис 18. Диаграммы направленности в E- плоскости моды H_{11} при $ka=1$.

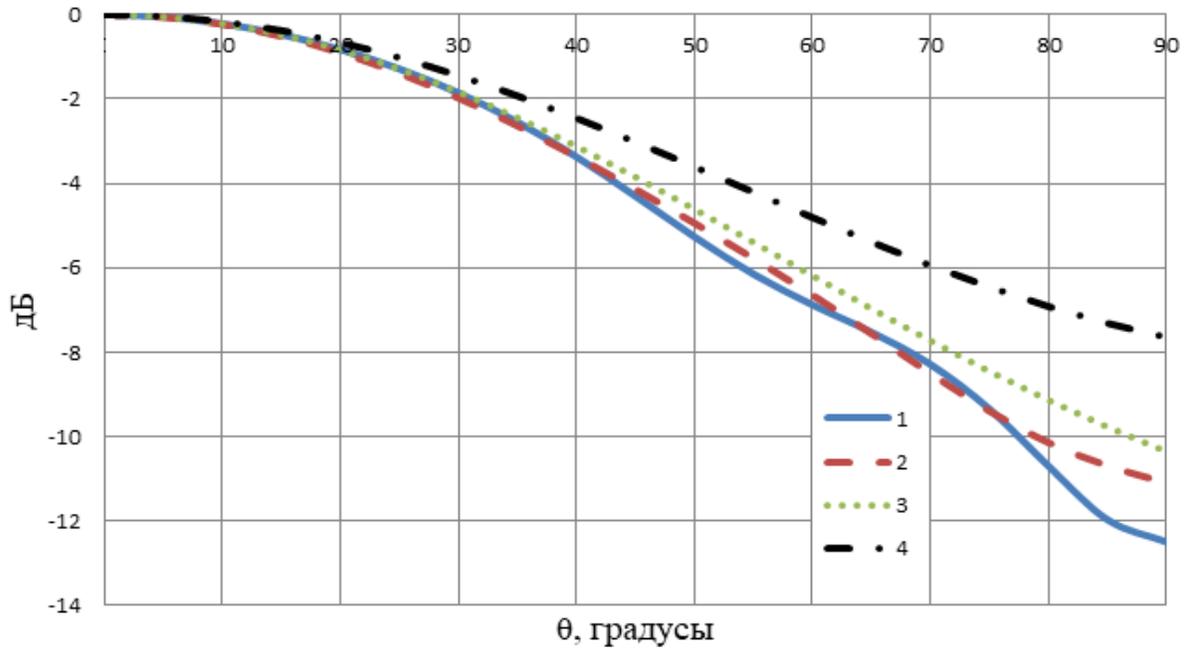


Рис 19. Диаграммы направленности в E- плоскостимоды H_{11} при $ka= 0.5$.

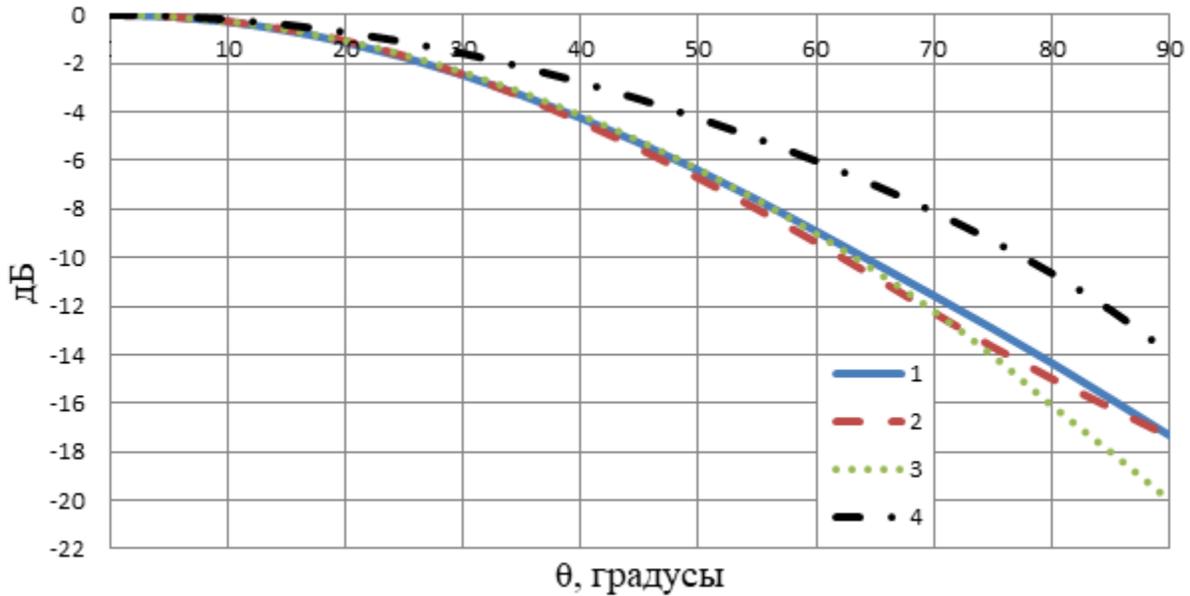


Рис 20. Диаграммы направленности в Н- плоскости моды H_{11} при $ka=1$.

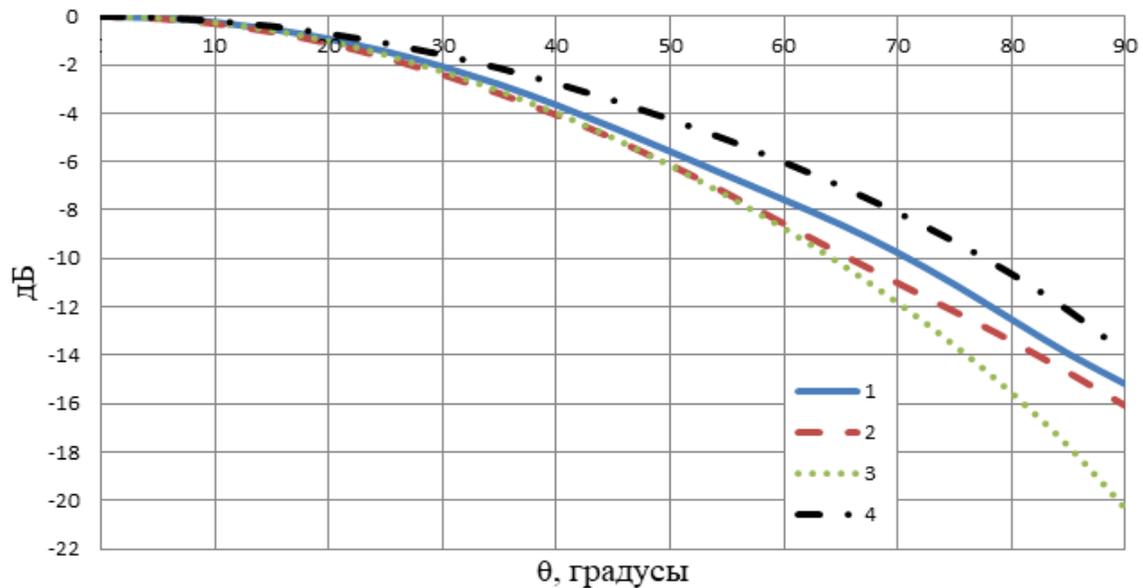


Рис 21. Диаграммы направленности в Н- плоскости моды H_{11} при $ka= 0.5$.

На рисунках видно, что в секторе углов 135^0 отличие результатов расчета ДН гибридным методом и МКЭ в обеих плоскостях менее 2 дБ, а между методом моментов и ГФК достигает 4 дБ. На краях переднего полупространства разница между гибридным методом и МКЭ достигает 4 дБ, а между методом моментов и ГФК - 6 дБ.

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. При излучении моды H_{10} из открытого конца нерегулярного в Е и Н плоскости прямоугольного волновода, погрешность вычисления диаграммы направленности в переднем полупространстве гибридным методом не превышает 2 дБ.
 2. При излучении моды H_{01} из открытого конца нерегулярного круглого волновода, погрешность вычисления диаграммы направленности в переднем полупространстве гибридным методом не превышает 2 дБ.
 3. При излучении моды E_{01} из открытого конца нерегулярного круглого волновода, погрешность вычисления диаграммы направленности в переднем полупространстве в Н плоскости гибридным методом не превышает 2 дБ.
 4. При излучении моды H_{11} из открытого конца нерегулярного круглого волновода, погрешность вычисления диаграммы направленности в секторе углов 135° переднего полупространства в обеих плоскостях менее 2 дБ, а на краю переднего полупространства достигает 4 дБ.
 5. Погрешность метода ГФК при вычислении излучения из открытого конца нерегулярного волновода в переднем полупространстве может превышать 10 дБ.
- Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

Литература

1. Гринев А.Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики. М.: Радиотехника.2012.
2. Kleshchev A.A. Some methods of solution of problems of sound diffraction on Bodies of Non-Analytical Form. // Open Journal of Acoustics. 2016. Vol.6. No .4. P. 45. Available at:
<https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid=72779>

DOI: [10.4236/oja.2016.64005](https://doi.org/10.4236/oja.2016.64005)

3. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.-Л.: Энергия.1967.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.:Мир.1978.
5. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Обобщение метода Т-матриц на задачи рассеяния волн телами с неаналитической границей // РЭ. 2017.Т.62. №5.С.476.
6. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М. Связь. 1978.
7. Уфимцев П.Я. Основы физической теории дифракции. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2013.
8. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Советское радио.1970.
9. Л.А.Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. Радио. 1966.
10. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР. 1961.
11. Kaloshin V.A., Luu D.T. Plane wave scattering on ideally conductive plate with rounded edges. // Intern. Sci. Conf. “Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves RSEMW-2019”. Divnomorskoe, Russia. 2019. P.232. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8792743> DOI: [10.1109/RSEMW.2019.8792743](https://doi.org/10.1109/RSEMW.2019.8792743)
12. Калошин В.А., Луу Д.Т. Рассеяние плоской волны на цилиндре с кусочно-аналитической формой сечения // РЭ. 2020. Т.65. №5.С. 457.
13. Калошин В.А., Луу Д.Т. Решение задачи рассеяния на теле вращения с кусочно-аналитической формой образующей гибридным методом. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.6.6>
14. Муромцев Д.Ю., Белоусов О.А. Техническая электродинамика. ТГТУ.2012.

Для цитирования:

Калошин В.А., Луу Д.Т. Решение задачи излучения открытого конца нерегулярного волновода гибридным методом. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.6>