

УДК 621.391

ОБНАРУЖЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ РАЗРЕЖЕННЫХ СИГНАЛОВ С ЧАСТОТОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩЕЙ ЧАСТОТУ НАЙКВИСТА

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов

**Воронежский Государственный Университет,
394018, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1**

Статья поступила в редакцию 4 апреля 2017 г., после доработки – 31 мая 2017 г.

Аннотация. В работе предложены алгоритмы, позволяющие решить задачу обнаружения дискретного разреженного сигнала на фоне дискретного гауссовского белого шума с восстановлением и без восстановления ненулевых компонент сигнала по наблюдаемому сжатому вектору данных. Рассматривались различные условия, при которых положения и значения ненулевых компонент в дискретном сигнале могли быть известными и неизвестными. Было проведено компьютерное моделирование предложенных алгоритмов и выполнен анализ их эффективности на основе исследования поведения полной вероятности ошибки в зависимости от отношения сигнал/шум, степени сжатия и разреженности исходного сигнала. Было установлено, что полная вероятность ошибки для всех синтезированных алгоритмов убывает с увеличением отношения сигнал/шум и ростом отношения числа элементов в наблюдаемом векторе данных к числу элементов в исходном дискретном сигнале и для большинства алгоритмов убывает с уменьшением числа ненулевых компонент в сигнале. В работе представлены приближенные теоретические формулы для полной вероятности ошибки, применимые в случае, когда положения ненулевых компонент сигнала известны. Эти формулы относительно неплохо описывают поведение полной вероятности ошибки от указанных параметров. Сравнительный анализ полученных данных позволяет осуществить обоснованный выбор параметров случайного демодулятора в зависимости от условий наблюдения.

Ключевые слова: алгоритм обнаружения, дискретный сигнал, частота Найквиста, разреженный сигнал, Compressive Sensing, Orthogonal Matching Pursuit (OMP), отношение правдоподобия, критерий идеального наблюдателя, полная вероятность ошибки, отношение сигнал/шум.

Abstract. In this article detection algorithms of discrete sparse signal with discrete Gaussian white noise with reconstruction and without reconstruction of nonzero signal components from the observed compressed data vector were proposed. Various conditions under which the positions and values of nonzero components in a discrete signal could be known and unknown were considered. Computer modeling of the proposed algorithms was performed and analysis of effectiveness of these algorithms based on investigation of behavior of total error probability depending on signal to noise ratio, compression level and sparsity of original signal was implemented. It was found, that the total probability of error for all synthesized algorithms decreases with increasing signal to noise ratio and decreases with increasing ratio of the number of elements in the observed data vector to the number of elements in the original discrete signal. Besides, for most algorithms, total probability of error decreases with decreasing the number of nonzero components in the signal. In this article approximate theoretical formulas for the total probability of error were represented. These formulas are applicable, when the positions of the nonzero signal components are known and relatively well describe the behavior of the total probability of error from the indicated parameters. Obtained data can be used for a reasonable choice of the parameters of the random demodulator depending on the observation conditions.

Key words: detection algorithm, discrete signal, Nyquist frequency, sparse signal, Compressive Sensing, Orthogonal Matching Pursuit (OMP), likelihood ratio, ideal observer criterion, total probability of error, signal to noise ratio.

1. Введение

Современные системы сбора и хранения информации о физических объектах и процессах основываются, преимущественно, на принципах цифровой обработки сигналов, в основе которой лежит теорема отсчетов [1]. В

соответствие с этой теоремой, временные сигналы, изображения и другие данные могут быть восстановлены из последовательности равноотстоящих отсчетов, взятых с так называемой частотой Найквиста, которая в 2 раза превышает максимальную частоту обрабатываемых данных. К сожалению, во многих важных приложениях частота Найквиста может стать настолько большой, что потребует обработки такого количества отсчетов, при котором временные или финансовые затраты становятся неприемлемыми. Выходом из подобного тупика обычно является применение для обрабатываемых, сжимаемых в каком-то базисе сигналов [2], так называемого трансформирующего кодирования [3]. Однако при его использовании все равно вначале необходимо выполнять дискретизацию с большой скоростью и лишь затем отбрасывать излишнюю информацию. В то же время, разработанная недавно концепция сжатых измерений (Compressive Sensing (CS)) [4–7] непосредственно оперирует с данными, представленными в сжатой форме, то есть с уменьшенной частотой дискретизации.

Для пояснения основных принципов данной концепции рассмотрим обработку сигналов с использованием так называемого случайного демодулятора [8]. Вначале отметим, что для подобной обработки требуется особый класс так называемых разреженных (или, в крайнем случае, сжимаемых) сигналов. Дискретный сигнал $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $i = \overline{1, N}$, называется разреженным, если большинство его элементов равны нулю, то есть $\|\mathbf{x}\|_0 = K \ll N$, где $\|\mathbf{x}\|_0$ – норма l_0 , которая представляет собой число ненулевых компонент в векторе \mathbf{x} . Сигнал \mathbf{x} называется сжимаемым, если большинство его элементов принимают значения, близкие к нулю. Отметим также, что сигнал должен быть разреженным (сжимаемым) не обязательно во временной области; достаточно чтобы он был разреженным (сжимаемым) в каком-либо базисе (Фурье, вейвлет и прочее), то есть вышеперечисленные условия могут выполняться не непосредственно для сигнала \mathbf{x} , а для соответствующих коэффициентов выбранного базиса. Такие сигналы

достаточно широко встречаются на практике. К ним можно отнести многие телекоммуникационные, акустические, геофизические и прочие сигналы. Это могут быть либо достаточно медленно меняющиеся во времени сигналы (разреженные в частотной области), либо, наоборот, сверхкороткие импульсы (разреженные во временной области). В дальнейшем для простоты предполагалось, что исследуемые сигналы разрежены непосредственно во временной области, при этом не требуется дополнительная обработка для создания разреженных сигналов.

Перейдем теперь к описанию принципа действия случайного демодулятора, описав процессы, происходящие в этом устройстве. Генератор псевдослучайных чисел вырабатывает последовательность чисел a_0, a_1, a_2, \dots , которые принимают значения ± 1 с равной вероятностью. Эта последовательность используется для формирования сигнала $p(t)$, представляющего собой псевдослучайную последовательность прямоугольных импульсов, принимающих значения ± 1 , в которой переходы от одного уровня к другому происходят с частотой Найквиста f_{ch} [Гц]. Другими словами

$$p(t) = a_n, \quad n = 0, 1, \dots, f_{ch} - 1 \quad \text{при} \quad t \in \left(\frac{n}{f_{ch}}, \frac{n+1}{f_{ch}} \right).$$

Сформированная таким образом последовательность и исходный аналоговый сигнал $x(t)$ затем подаются на множитель, на выходе которого получается сигнал $y(t) = x(t)p(t)$.

Дальнейшая обработка предполагает стандартное аналого-цифровое преобразование, заключающееся в том, что сигнал $y(t)$ для устранения проблемы наложения спектров подается на фильтр низких частот, который в данном случае представляет собой интегратор, интегрирующий сигнал $y(t)$ каждые $1/f_a$ секунд, причем $f_a \ll f_{ch}$. Отфильтрованный сигнал далее дискретизируется с шагом $1/f_a$ секунд, так что получается последовательность

$$\text{отсчетов} \quad y_j = f_a \int_{(j-1)/f_a}^{j/f_a} y(t) dt = \int_{(j-1)/f_a}^{j/f_a} p(t)x(t) dt, \quad j = \overline{1, f_a T}, \quad \text{которые затем}$$

квантуются по уровню. На практике, если время обработки сигнала T , то $N = f_{ch}T$ – число элементов в псевдослучайной последовательности, $M = f_aT$ – число измерений.

Таким образом, в соответствии с вышеописанным, в состав случайного демодулятора входят следующие блоки: генератор псевдослучайной последовательности прямоугольных импульсов, следующих с частотой Найквиста f_{ch} , перемножитель, интегратор и аналого-цифровой преобразователь (АЦП), причем в последнем из них (АЦП) дискретизация сигнала осуществляется с частотой f_a , которая может быть существенно меньше чем частота Найквиста f_{ch} , что значительно упрощает процесс построения и функционирования АЦП [9].

Таким образом, на выходе случайного демодулятора будут наблюдаться отсчеты y_j , число которых M может быть намного меньшим, чем число отсчетов N сигнала $x(t)$ с частотой Найквиста.

Итак, случайный демодулятор – это линейная система, работу которой можно описать в матричной форме следующим образом. Введем в рассмотрение две матрицы D и H . Диагональная матрица D имеет размер $(f_{ch}T = N) \times (f_{ch}T = N)$ и на ее диагонали располагаются элементы $a_0, a_1, \dots, a_{f_{ch}T-1}$, принимающие значения ± 1 , как описано выше. Матрица H имеет размер $(f_aT = M) \times (f_{ch}T = N)$ и строится следующим образом. Предположим для простоты, что отношение f_{ch} / f_a представляет собой целое число I (если это число не целое, то правило формирования элементов матрицы H несколько изменится – см., например, [8]). Каждая строка матрицы H должна содержать I единиц, а остальные ее элементы равны нулю, причем в первой строке ненулевые элементы занимают позиции с первой по I , во второй – с $(I + 1)$ по $2I$, в третьей – с $(2I + 1)$ по $3I$ и т.д. Обозначим через $A = HD$ матрицу размера $M \times N$, которая и будет описывать те преобразования, которые осуществляются в случайном демодуляторе над

входным сигналом. В результате в матричной форме процедура прореживания выглядит как

$$y = Ax, \quad (1)$$

где вектор-столбцы y и x имеют размеры $M \times 1$ и $N \times 1$ соответственно.

Отметим, что при компьютерном моделировании элементы матрицы A формируются для простоты несколько другим способом. Как показано в [8], в качестве элементов матрицы A можно использовать независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. При этом эффективность обработки сигналов с использованием матрицы $A = HD$ и матрицы со случайными гауссовскими элементами отличаются незначительно.

В теории CS обычно рассматривается задача восстановления сигнала x по наблюдениям y [4–7]. Однако в некоторых случаях подобная постановка задачи может показаться излишней. Например, в задаче обнаружения сигнала на фоне помех сигнал восстанавливать не требуется, требуется лишь указать факт его наличия или отсутствия. В связи с вышеизложенным, задачу обнаружения сигнала на фоне помех можно решать двумя способами. Первый из них заключается в том, чтобы используя известные алгоритмы CS, восстановить все данные (т.е. вектор x), а затем по ним вынести решение о наличии или отсутствии сигнала. Второй подход не требует восстановления исходного сигнала, а требует построения определенного решающего правила, работающего непосредственно со сжатыми данными (т.е. с вектором y). Таким образом, как и в классическом случае [10], можно ввести в рассмотрение две гипотезы: H_0 , в соответствии с которой $x = n$, где n – вектор размера $N \times 1$, отсчеты которого представляют собой независимые гауссовские величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсией D , и H_1 , при выполнении которой $x = s + n$, где s – $N \times 1$ вектор отсчетов полезного сигнала. Напомним, что сигнал является разреженным в том смысле, что количество отличных от нуля компонент в нем намного меньше общего числа

элементов. Однако наблюдаемыми данными является вектор y , причем при выполнении гипотезы $H_0: y = An$, а при выполнении гипотезы $H_1: y = A(s + n)$. Необходимо вынести решение в пользу одной из этих гипотез, имея $M < N$ отсчетов y . Решение подобной задачи сильно зависит от априорной информации о сигнале s . Если у сигнала s все известно, то такой сигнал назовем детерминированным. При наличии у сигнала s неизвестных параметров (временных положений ненулевых отсчетов), сигнал будем называть квазидетерминированным.

2. Обнаружение детерминированных сигналов на выходе случайного демодулятора

Итак, предположим вначале, что полезный сигнал s – детерминированный, то есть для него известно количество K , временные положения Λ_k ($k = \overline{1, K}$) всех его ненулевых отсчетов. Рассмотрим возможные способы обнаружения такого сигнала на фоне гауссовского шума n . Как уже отмечалось ранее, для решения поставленной задачи возможно применение двух подходов, первый из которых предполагает восстановление ненулевых отсчетов сигнала и только затем вынесение решения об обнаружении, и второй, при котором не требуется предварительного восстановления сигнала, а задача обнаружения решается сразу на основе разработанного решающего правила. Перейдем непосредственно к их рассмотрению.

При использовании первого способа по наблюдаемым данным $y = Ax$ необходимо восстановить все ненулевые отсчеты полезного сигнала. Учтем, что у сигнала все параметры известны, то есть известны $\Lambda_1, \dots, \Lambda_K$ – номера ненулевых компонент в векторе s ($K < M < N$). Поэтому требуется восстановить компоненты с точно такими же номерами, то есть значения \tilde{s}_{Λ_k} , $k = \overline{1, K}$. Это восстановление (оценка) может быть выполнено с помощью алгоритма, называемого «oracle» [11]:

$$\tilde{s}_{\Lambda} = By, \quad (2)$$

где $\mathbf{B} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$, Ψ – матрица размера $M \times K$, составленная из столбцов с номерами $\Lambda_1, \dots, \Lambda_K$ матрицы \mathbf{A} , « T » – операция транспонирования. Однако полученные оценки \tilde{s}_{Λ_k} ($k = \overline{1, K}$) еще не отвечают на вопрос о наличии полезного сигнала в наблюдаемых данных. Для решения задачи обнаружения требуется на основании полученных оценок синтезировать алгоритм вынесения решения о наличии сигнала. При этом возможно применение эмпирических алгоритмов, основанных на вычислении средних или среднеквадратических значений величин \tilde{s}_{Λ_k} ($k = \overline{1, K}$) и дальнейшем сравнении их с соответствующими порогами. Однако целесообразно сразу синтезировать оптимальный алгоритм обнаружения, основываясь на том, что оценки (2) являются гауссовскими величинами как при гипотезе H_0 , так и при гипотезе H_1 . Тогда, несложно показать, что решающая статистика будет иметь следующий вид:

$$L_1 = \tilde{s}^T \mathbf{K}_{\tilde{s}}^{-1} s^{(0)}, \quad (3)$$

где $\mathbf{K}_{\tilde{s}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ – матрица размера $K \times K$, $s^{(0)}$ – вектор размера $K \times 1$, содержащий лишь ненулевые истинные значения сигнала с позициями $\Lambda_1, \dots, \Lambda_K$ в векторе s , а решающее правило запишется в виде

$$L_1 = \tilde{s}^T \mathbf{K}_{\tilde{s}}^{-1} s^{(0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} h_1. \quad (4)$$

Порог h_1 может быть определен с учетом выбранного критерия оптимальности [10]. В дальнейшем, в качестве такого критерия всегда будет рассматриваться критерий идеального наблюдателя, в соответствие с которым порог выбирается из условия минимума полной вероятности ошибки обнаружения.

Далее учтем, что матрица A с элементами φ_{ij} ($i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$), представляющими собой некоррелированные гауссовские случайные величины, является ортонормированной, то есть $\sum_{n=1}^N \varphi_{kn} \varphi_{in} = \delta_{ki}$, где δ_{ki} – символ Кронекера и для нее справедливо следующее приближенное равенство $BB^T \approx \frac{N}{M} I_K$, где I_K – единичная матрица размера $K \times K$. Тогда решающая статистика (3) будет представлять собой корреляцию векторов \tilde{s} и $s^{(0)}$:

$$L'_1 = \tilde{s}^T s^{(0)} \quad (5)$$

и алгоритм обнаружения может быть записан в виде

$$L'_1 = \tilde{s}^T s^{(0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} h'_1. \quad (6)$$

В данном случае несложно показать, что полная вероятность ошибки достигает своего минимума при $h'_1 = \frac{(s^{(0)})^T s^{(0)}}{2}$ и приближенно равна

$$P = \Phi\left(-\frac{z}{2} \sqrt{\frac{M}{N}}\right), \quad (7)$$

где $z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{D}}$ – отношение сигнал/шум, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интеграл вероятности [10].

Как уже отмечалось ранее, рассмотренный подход может оказаться избыточным для решения задачи обнаружения сигнала на фоне шума. В связи с этим перейдем ко второму подходу, не требующему восстановления ненулевых отсчетов сигнала. С этой целью рассмотрим сразу задачу сравнения двух гипотез H_0 и H_1 и определим стандартным образом [10] отношение правдоподобия, основываясь на наблюдаемых данных y . Несложно показать, что при таком подходе достаточная статистика может быть представлена в виде

$$L_2 = y^T A s, \quad (8)$$

а алгоритм вынесения решения будет иметь вид

$$L_2 = y^T A s \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} h_2. \quad (9)$$

Далее учтем, что при использовании в качестве элементов матрицы A некоррелированных гауссовских случайных величин и дальнейшей ее ортонормализации, справедливо следующее приближенное равенство $A^T A \approx \frac{M}{N} I_N$, где I_N – единичная матрица размера $N \times N$. Тогда выражение

для решающей статистики не изменится и будет определяться формулой (8),

причем $h_2 = \frac{M}{2N} s^T s$. Можно также показать, что вероятность полной ошибки

будет приближенно описываться формулой (7). Следовательно, при обнаружении детерминированного сигнала эффективность его обнаружения в соответствии с алгоритмами (6) и (9) одинакова.

Отметим также, что формулу (7) можно также применять при оценке эффективности обнаружения сигналов в задаче неравномерной дискретизации, когда вместо обработки всех N отсчетов x берутся случайным образом $M < N$ отсчетов, а остальные отбрасываются. В этом случае матрица A размера $M \times N$ строится следующим образом: в каждой строке этой матрицы оставляется случайным образом всего один элемент, равный единице, все остальные элементы этой строки обнуляются. Таким образом, в каждой строке этой матрицы имеется один ненулевой элемент, причем расположены они все в разных столбцах. Можно показать, что в среднем, эффективность подобного алгоритма будет идентична рассмотренным ранее и будет описываться формулой вида (7).

Напомним, что синтезированные ранее алгоритмы (4), (6), (9) предполагали наличие априорных знаний не только относительно местоположения ненулевых отсчетов сигнала s , но также и их значений.

Рассмотрим теперь как изменятся эти алгоритмы, если значения амплитудных множителей ненулевых отсчетов сигнала s априори не известны (их местоположения, как и ранее, считаем известными). Вначале рассмотрим как следует модернизировать алгоритм (4), синтезированный после восстановления ненулевых отсчетов сигнала \tilde{s} в соответствии с формулой (2). Для этого, как и при выводе формулы (4), рассмотрим две гипотезы H_0 и H_1 и, учитывая, что наблюдаемые данные определяются формулой (2), запишем выражение для логарифма отношения правдоподобия в виде

$$L = -\frac{1}{2} \tilde{s}^T C^T K_{\tilde{s}}^{-1} C \tilde{s} + \tilde{s}^T K_{\tilde{s}}^{-1} C \tilde{s}, \quad (10)$$

где $C = BA$, $K_{\tilde{s}} = DCC^T = DBB^T$. Осуществляя максимизацию (10) по s , находя вектор s , при котором достигается этот максимум и подставляя его в (10), получаем, что при неизвестных амплитудных значениях сигнала требуется формировать решающую статистику

$$L_3 = \tilde{s}^T K_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{s} \quad (11)$$

и сравнивать ее с порогом. При превышении этого порога выносятся решение о наличии сигнала и наоборот. То есть решающее правило может быть представлено как

$$L_3 = \tilde{s}^T K_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{s} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} h_3. \quad (12)$$

Достаточная статистика (11) при выполнении гипотезы H_0 имеет центральное хи-квадрат распределение с K степенями свободы, а при выполнении гипотезы H_1 – нецентральное хи-квадрат распределение с K степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda^2 = (s^{(0)})^T K_{\tilde{s}}^{-1} s^{(0)}$. Учтем, что приближенно справедливо следующее равенство $BB^T \approx \frac{N}{M} I_K$, где I_K – единичная матрица размера $K \times K$. При этом алгоритм обнаружения сигнала (12) по наблюдениям

\tilde{s} , описываемых (2), при неизвестных амплитудных множителях ненулевых отсчетов сигнала упростится и примет вид

$$L'_3 = \tilde{s}^T \tilde{s} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} h'_3. \quad (13)$$

Достаточная статистика L'_3 при выполнении гипотезы H_0 имеет центральное хи-квадрат распределение с K степенями свободы, а при выполнении гипотезы H_1 – нецентральное хи-квадрат распределение с K степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda^2 = (s^{(0)})^T s^{(0)}$. Следовательно, полная вероятность ошибки будет описываться выражением

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{K}{2}, \frac{h'_3 M}{2DN}\right)}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} + 1 - Q_{\frac{K}{2}}\left(z\sqrt{\frac{M}{N}}, \sqrt{\frac{h'_3 M}{ND}}\right) \right]. \quad (14)$$

Здесь $Q()$ – функция Маркума [1]. Порог h'_3 находится из условия минимума полной вероятности ошибки (14). К сожалению, нахождение порогов h_3 и h'_3 теоретически достаточно затруднительно, поэтому в дальнейшем они находятся численными методами.

Далее рассмотрим задачу обнаружения сигнала с неизвестными амплитудными множителями, при которой не требуется предварительного восстановления ненулевых отсчетов этого сигнала. В этом случае наблюдаемыми данными является вектор y . Синтез алгоритма обнаружения при этом выполним аналогично предыдущему, вычисляя отношение правдоподобия, определяя оценки ненулевых отсчетов сигнала и подставляя их в это отношение правдоподобия. В результате решающая статистика будет представлять собой выражение вида

$$L_4 = y^T y,$$

а решающее правило запишется как

$$L_4 = \underset{H_0}{\underset{<}{y^T y}} \underset{H_1}{\underset{>}{h_4}}. \quad (15)$$

Достаточная статистика L_4 при выполнении гипотезы H_0 имеет центральное хи-квадрат распределение с M степенями свободы, а при выполнении гипотезы H_1 – нецентральное хи-квадрат распределение с M степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda^2 = s^T A^T A s$. Учитывая, что справедливо следующее приближенное равенство $A^T A \approx \frac{M}{N} I_N$, где I_N – единичная матрица размера $N \times N$, получим, что порог h_4 должен находиться из условия минимума полной вероятности ошибки, которая, в свою очередь, равна

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}, \frac{h_4}{2D}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)} + 1 - Q_{\frac{M}{2}}\left(z, \sqrt{\frac{M}{N}}, \sqrt{\frac{h_4}{D}}\right) \right].$$

Далее представим результаты статистического моделирования указанных выше алгоритмов для решения задачи обнаружения разреженного сигнала s размера $N \times 1$ на фоне шума n , где n – вектор размера $N \times 1$, отсчеты которого представляют собой независимые гауссовские величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсией D . Для дискретного разреженного сигнала s предполагалось, что только K из его элементов не равны нулю. Значения этих ненулевых элементов, их позиции в векторе s , величины K , M и N варьировались. Наблюдению доступны данные в форме (1), то есть в виде $M \times 1$ вектора y ($M < N$). Пусть, как и указывалось выше, $M \times N$ матрица A выбрана так, что каждый ее элемент представляет собой гауссовскую случайную величину с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией и от реализации к реализации вид этой матрицы изменяется и она формируется согласно указанному выше алгоритму, кроме того пусть каждый раз эта матрица подвергается операции ортонормализации. Пусть номера

позиций ненулевых составляющих в векторе s изменяются от реализации к реализации по случайному закону с равномерным распределением на интервале $[1, N]$. Положим для определенности $N = 128$ и установим количество реализаций для каждого набора параметров не меньше 1000. Для анализа эффективности алгоритмов рассмотрим полную вероятность ошибки и проанализируем ее поведение в зависимости от различных параметров, в

качестве которых можно взять отношение сигнал/шум $z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{D}}$, величину M/N , а также количество ненулевых компонент K в векторе s .

Проведенное статистическое моделирование и дальнейший анализ указанных зависимостей показали:

1) Наибольшие значения полной вероятности ошибки наблюдаются для алгоритма (15), то есть в ситуации, когда обнаружение проводится без восстановления при неизвестных амплитудных множителях.

2) Наименьшие значения вероятности ошибки наблюдаются для алгоритмов (4) (амплитудные множители известны, обнаружение после восстановления) и (9) (амплитудные множители известны, обнаружение без восстановления). Их значения полностью совпадают. Кроме того, отметим, что все алгоритмы, а именно (4), (6), (9), записанные для ситуации, в которой амплитудные множители известны, независимо от того как выносятся решение о наличии или отсутствии сигнала, то есть с восстановлением сигнала или без него (по наблюдаемому вектору y), дают незначительно отличающиеся результаты.

На рис. 1 приведены как результаты компьютерного моделирования рассматриваемых алгоритмов, так и результаты расчетов по приведенным ранее приближенным теоретическим формулам при $K = 6$. Теоретические кривые 1 построены при $z = 5$, а штриховые – при $z = 9$, причем сплошные линии построены по теоретической формуле (14), а штриховые – по формуле (7). Экспериментальные результаты на рис. 1 нанесены значками: «квадратиками»

и «ромбиками» – для алгоритма (12) при $z = 5$ и 9 соответственно, а также «кружками» и «крестиками» для алгоритма (4) также при $z = 5$ и 9 соответственно. Несложно заметить, что теоретические формулы (7) и (14) относительно неплохо описывают экспериментальные результаты. Следовательно, формулу (7) можно использовать для оценки эффективности обнаружения дискретных разреженных сигналов с априори известными значениями ненулевых компонент сигнала (т.е. для алгоритмов (4), (6) и (9)). В то же время формулу (14) целесообразно использовать для оценки эффективности, если амплитудные значения ненулевых компонент сигнала априори неизвестны (т.е. для алгоритмов (12), (13)).

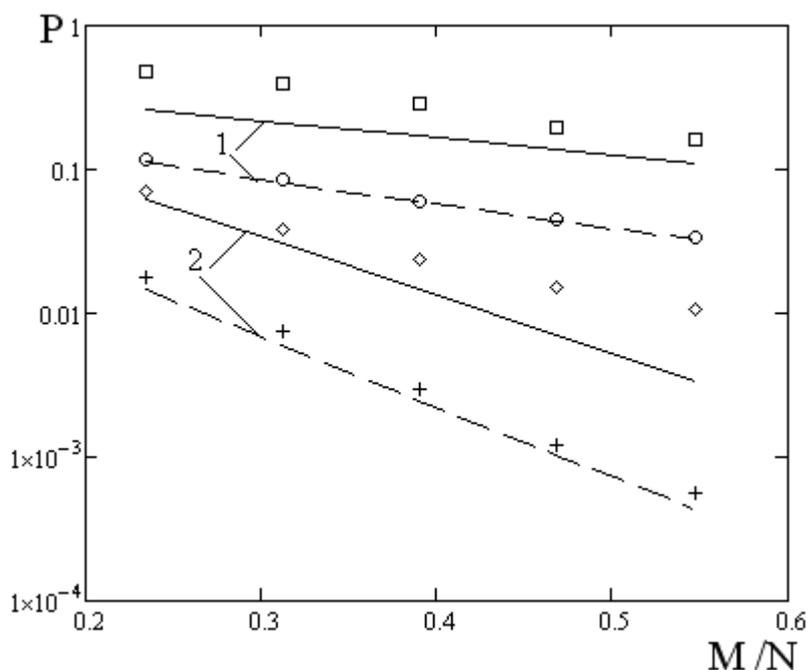


Рис. 1. Зависимость полной вероятности ошибки от отношения M/N .

Аналогично, на рис. 2 приведены теоретические и экспериментальные зависимости вероятности полной ошибки от отношения сигнал/шум z при $K = 6$. Принятые обозначения, в основном, совпадают с обозначениями на рис. 1, за исключением следующего. Кривые 1 на рис. 2 построены при $M/N = 0.23$, а кривые 2 при $M/N = 0.55$.

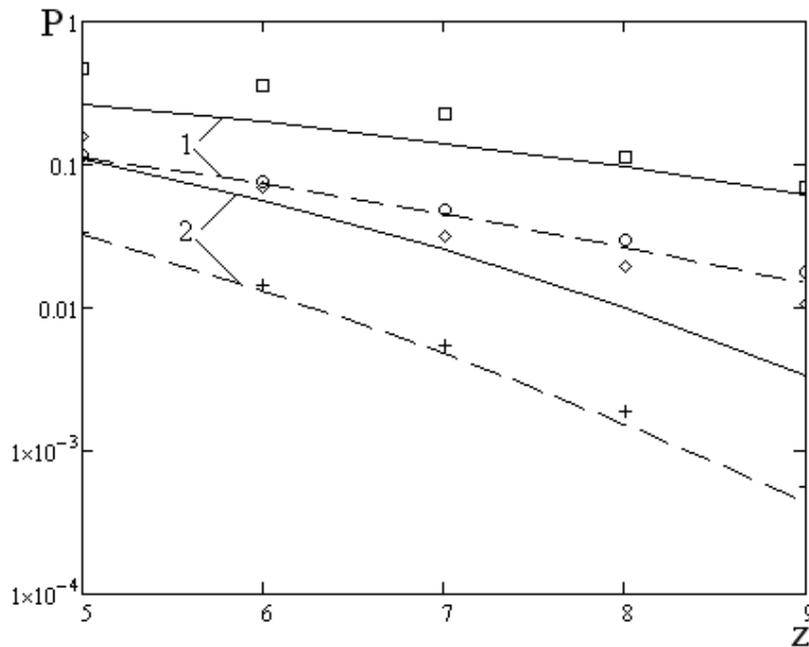


Рис. 2. Зависимость полной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум z .

На рис. 3 приведены зависимости полной вероятности ошибки от числа ненулевых компонент K в сигнале при $M/N = 0.4$. Принятые обозначения, в основном, совпадают с обозначениями на рис. 1, за исключением следующего. Кривые 1 на рис. 3 построены при $z = 6$, а кривые 2 при $z = 9$.

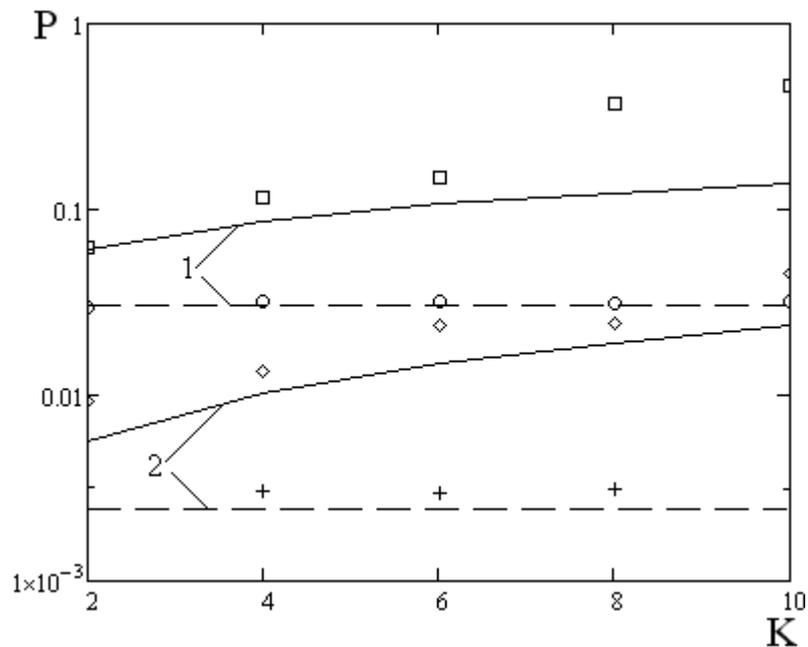


Рис. 3. Зависимость полной вероятности ошибки от числа K ненулевых составляющих в сигнале s .

Из анализа полученных зависимостей следует, что полная вероятность ошибки, как и ожидалось, убывает с увеличением отношения сигнал/шум и ростом отношения M/N . Как отмечалось ранее, анализируемые алгоритмы (4) и (12) синтезированы на основе восстановленного сигнала и отличаются лишь наличием или отсутствием априорной информации об его амплитудных множителях. Отсутствие этой информации, как следует из анализа представленных зависимостей, приводит к тому, что алгоритм (12) приводит к большему по сравнению с (4) значениям полной вероятности ошибки. Анализируя поведение полной вероятности ошибки от числа ненулевых компонент K , отметим, что вероятность ошибки для алгоритма (4) не зависит от K , а для алгоритма (12) растет с увеличением числа ненулевых составляющих. Кроме того отметим, что наблюдается удовлетворительное согласование эмпирических и теоретических зависимостей.

Напомним, что приведенные результаты характеризуют эффективность обнаружения разреженных дискретных сигналов при использовании рассмотренной ранее процедуры прореживания отсчетов на основе случайного демодулятора. Выполним сравнение подобного алгоритма с классическим оптимальным алгоритмом, основанным на правиле максимального правдоподобия, при котором используются все N отсчетов сигнала. Если полная вероятность ошибки при полностью известных параметрах сигнала для рассматриваемых в статье алгоритмах (6) и (9) описывается формулой (7), то

для оптимального алгоритма она будет равна $\Phi\left(-\frac{z}{2}\right)$ [10], где

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интеграл вероятности. Из сравнения этих формул

несложно определить проигрыш в эффективности рассмотренных алгоритмов

(6) и (9) по сравнению с оптимальным (он равен $\Phi\left(-\frac{z}{2}\sqrt{\frac{M}{N}}\right) / \Phi\left(-\frac{z}{2}\right)$).

Например, при $z=5$ и $M/N=0.5$ полная вероятность ошибки при использовании этих алгоритмов приблизительно в 7 раз больше, чем при

использовании оптимального. Причем, чем меньше M/N , тем больше этот проигрыш.

3. Обнаружение квазидетерминированных сигналов на выходе случайного демодулятора

Все приведенные выше результаты относились к случаю, когда временные положения ненулевых отсчетов дискретного сигнала Λ_k ($k = \overline{1, K}$) были априори известны. Рассмотрим теперь ситуацию, при которой это условие не выполняется, то есть эти временные положения случайны (меняются от реализации к реализации). Как и ранее, исследуем два подхода, в одном из которых требуется осуществлять оценку ненулевых компонент сигнала, а во втором этого не требуется. Итак, рассмотрим задачу обнаружения дискретного разреженного сигнала s на фоне дискретного гауссова шума n , предполагая что вначале выполняется процедура оценки ненулевых компонент этого сигнала. Для нахождения этих ненулевых компонент могут быть использованы разнообразные разработанные в теории CS алгоритмы. Остановимся на одном из этих алгоритмов, так называемом алгоритме Orthogonal Matching Pursuit (OMP) (алгоритм «ортогонального согласованного поиска») [12], являющимся итерационным. Для этого алгоритма входными данными являются: вектор данных y , матрица измерений A , а также критерий остановки алгоритма.

Результатом работы подобного алгоритма будут оцененные индексы $\tilde{\Lambda}_k$ и значения $\tilde{s}_{\tilde{\Lambda}_k}$ ($k = \overline{1, K}$) K ненулевых компонент сигнала. Основываясь на этих оценках, задачу обнаружения сигнала на фоне шума можно решать по-разному. Например, в работе [13] предлагается эмпирический алгоритм, согласно которому среди всех найденных оценок $\tilde{s}_{\tilde{\Lambda}_k}$ находится максимальное по модулю значение, которое в дальнейшем сравнивается с порогом, при превышении которого выносится решение о наличии сигнала и наоборот. То есть алгоритм обнаружения описывается следующим выражением:

$$L_5 = \max_{\tilde{\Lambda}_k} \left| \begin{array}{c} H_1 \\ \tilde{\Lambda}_k \\ H_0 \end{array} \right| \begin{array}{c} > \\ < \end{array} h_5. \quad (16)$$

Можно также предложить алгоритм, основываясь на вычислении отношения правдоподобия, в предположении, что временные положения $\tilde{\Lambda}_k$ к этому моменту уже известны. Тогда, алгоритм обнаружения примет вид

$$L_6 = \tilde{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\Lambda}}^T \tilde{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\Lambda}} \begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} h_6, \quad (17)$$

где $\tilde{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\Lambda}}$ – вектор восстановленных (оцененных) по методу ОМР ненулевых значений сигнала. К сожалению, теоретический поиск порогов h_5 и h_6 по минимуму вероятности полной ошибки затруднителен. В связи с чем, в дальнейшем этот поиск осуществляется посредством компьютерного моделирования алгоритмов (16) и (17). Как уже неоднократно отмечалось ранее, для решения задачи обнаружения предварительный поиск ненулевых компонент сигнала не обязателен. В связи с этим также рассмотрим задачу обнаружения разреженного сигнала на фоне шума по наблюдаемым данным y (1). При этом, оказывается, независимо от того, известны или неизвестны временные положения этих компонент, алгоритм обнаружения совпадает с (15).

Далее представим результаты статистического моделирования алгоритмов (16) и (17). Будем использовать те же условия, что и при моделировании рассмотренных выше алгоритмов, когда временные положения ненулевых отсчетов дискретного сигнала были априори известны. Поскольку количество ненулевых элементов K в восстанавливаемом сигнале является известным, то для итерационного алгоритма ОМР в качестве критерия остановки зададим достижение им в цикле числа итераций, равного K . Для анализа эффективности алгоритмов, как и ранее, рассмотрим полную вероятность ошибки и проанализируем ее поведение в зависимости от отношения

сигнал/шум $z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{D}}$, величины M/N , а также количества ненулевых компонент K в векторе s .

Результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о следующем. Алгоритм (17) выигрывает, хотя и незначительно, в эффективности по сравнению с алгоритмом (16). Так, на рис. 4 приведены результаты компьютерного моделирования алгоритма (17), т.е. зависимость вероятности полной ошибки от отношения сигнал/шум. Причем «кружочками» показаны экспериментальные значения этой вероятности, полученные при $K = 2$ и $M/N = 0.55$, а «крестиками» – при аналогичном значении K и $M/N = 0.7$.

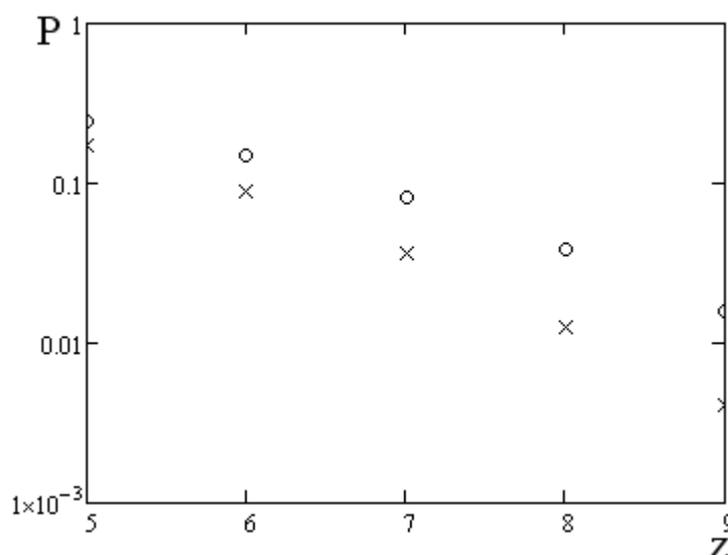


Рис.4. Зависимость полной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум z .

Из анализа указанных зависимостей следует, что полная вероятность ошибки убывает с увеличением отношения сигнал/шум z , а также с ростом величины M/N . Кроме того, наблюдается увеличение вероятности ошибки с ростом числа K ненулевых компонент в сигнале s . Сравнительный анализ рис. 1–3 и 4 свидетельствует о существенном ухудшении эффективности обнаружения дискретного сигнала по сжатым измерениям при отсутствии информации о временных положениях его ненулевых компонент. Однако,

предложенный алгоритм (17) несмотря на его существенный проигрыш в эффективности обнаружения по сравнению с оптимальным (основанным на правиле максимального правдоподобия), может быть достаточно легко реализован на практике. В тоже время практическая реализация оптимального алгоритма при неизвестных временных положениях ненулевых отсчетов сигнала сталкивается с существенными трудностями. Действительно, при реализации оптимального алгоритма требуется C_N^K параллельных каналов (где C_N^K – число сочетаний из N элементов по K), в каждом из которых требуется вычислять корреляцию между принятым и опорным сигналами. Например, при $N=128$ и $K=5$ таких каналов должно быть порядка $2.6 \cdot 10^8$. Естественно, практическая реализация подобного алгоритма в настоящее время, мягко говоря, затруднительна, если вообще возможна.

4. Заключение

В статье предложены алгоритмы, позволяющие решить задачу обнаружения дискретного разреженного сигнала на фоне дискретного гауссовского белого шума. Сами синтезированные алгоритмы отличаются условиями их применимости. Рассматривались следующие условия: положения ненулевых компонент в дискретном сигнале могли быть известными и неизвестными; сами ненулевые значения этих компонент могли быть известными и неизвестными.

В этих условиях синтезированы алгоритмы, требующие и не требующие восстановления ненулевых компонент сигнала по наблюдаемому сжатому вектору y с уменьшенным по сравнению с критерием Найквиста количеством отсчетов.

Кроме того, в работе был также выполнен анализ эффективности предложенных алгоритмов обнаружения на основе исследования поведения полной вероятности ошибки в зависимости от таких параметров как отношение сигнал/шум, степень сжатия и разреженность исходного сигнала (число ненулевых компонент вектора s). Сравнительный анализ полученных данных

позволяет осуществить обоснованный выбор параметров случайного демодулятора в зависимости от условий наблюдения.

Литература

1. Прокис Дж. Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 1978. – 296 с.
2. Hayashi K., Nagahara M., Tanaka T. A User's guide to compressed sensing for communications systems // *IEICE Transaction on communications*. Vol. E96-B, №3, 2013. – P. 685 – 712.
3. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
4. Eldar S., Kutyniok G. *Compressed sensing: theory and applications*. Cambridge University Press, 2012. – 555 p.
5. Foucart S., Rauhut H. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Springer, 2013. – 625 p.
6. Парфенов В.И., Голованов Д.Ю. Определение незанятых частотных поддиапазонов по сжатым измерениям // *Инфокоммуникационные технологии*. Т.13, №3, 2015. – С. 305 – 312.
7. Парфенов В.И., Голованов Д.Ю. Принципы построения и анализ эффективности функционирования беспроводных сенсорных сетей на основе теории Compressive Sensing // *Цифровая обработка сигналов*. №2, 2016. – С. 14 – 19.
8. Tropp J., Laska J., Duarte M., Romberg J., Baraniuk R. Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse bandlimited signals // *IEEE Transaction on Information Theory*. Vol. 56, №1, 2010. – P. 520 – 544.
9. Baraniuk R., Davenport M., Duarte M., Hegde S. *An introduction to compressive sensing*. Rice University, Houston, Texas, 2011. – 112 p.
10. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. Теория обнаружения сигналов. Под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
11. Coluccia G., Roumy A., Magli E. Exact performance analysis of the oracle receiver for compressed sensing reconstruction // *IEEE International Conference on*

Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2014, 4 – 9 May 2014. – P. 1005 – 1009.

12. Tropp J., Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit // IEEE Transaction on Information Theory. Vol. 53, №12, 2007. – P. 4655 – 4666.

13. Wang Y., Yin W. Sparse signal reconstruction via iterative support detection // SIAM Journal on Imaging Sciences. Vol. 3, №3, 2010. – P. 462 – 491.

Ссылка на статью:

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов. Обнаружение дискретных разреженных сигналов с частотой дискретизации, не превышающей частоту Найквиста. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/1/text.pdf>