УДК 517.9

ВЫРОЖДЕНИЕ КНОИДАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

А. П. Черняев [1], С. А. Черняева [2]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д. 9

[2] Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, 105082, Москва, ул. Рубцовская Набережная, 2/18

Статья поступила в редакцию 26 мая 2018 г.

Аннотация. Уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка, играющее весьма важную роль в теории нелинейных волн. Оно было получено Буссинеском в 1877 году, но подробный анализ был проведен уже Кортевегом и де Фризом в 1895 году. Первоначально КдФ возникло из потребностей гидродинамики, однако, со временем оно проникло не только в различные разделы математической физики, но и в многочисленные области научного знания. Для уравнения КдФ найдено большое количество точных решений, представляющих собой стационарные нелинейные волны. Однако существуют и неограниченные решения этого уравнения, физический смысл которых пока не ясен. В настоящей работе мы рассматриваем процесс перерождения кноидальных волн в неограниченные периодические решения уравнения КдФ. Математически кноидальные волны описываются эллиптическими интегралами с параметрами, определяющими амплитуды и периоды. Они получаются благодаря процедуре поиска решений уравнения КдФ типа бегущей волны. Благодаря этому, уравнение КдФ приводится сначала к обыкновенному уравнению третьего порядка, а затем порядок обыкновенного дифференциального уравнения понижается до первого. Это обыкновенное уравнение интегрируется в эллиптических функциях и, поэтому кноидальные волны через эти эллиптические функции и выражаются. Интересно, что в случае перерождения кноидальных волн в неограниченные периодические решения, последние уже выражаются в элементарных функциях.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Фриза, кноидальная волна, неограниченные периодические решения, эллиптические функции.

Abstract. The Korteweg – de Vries equation (KdV equation) is a third-order nonlinear partial differential equation that plays a very important role in the theory of nonlinear waves. It was obtained by Boussinesq in 1877, but a detailed analysis was done by Korteweg and de Vries in 1895. Firstly, the KdV equation was initiated by the needs of hydrodynamics, however, over time, it has penetrated not only into various branches of mathematical physics, but also in numerous fields of scientific knowledge. For the KdV equation, a large number of exact solutions, representing stationary nonlinear waves, are found. However, there are unbounded solutions of this equation, the physical content of that is not yet clear. In the present paper, we consider the process of transformation of cnoidal waves in unbounded periodic solution of the KdV equation. Cnoidal waves are mathematically described by elliptic integrals with parameters defining the amplitudes and periods. They are obtained by the procedure for search KdV equation solutions of traveling wave type. Through this, the KdV equation is reduced firstly to the third order ordinary equation, and then the order of the ordinary differential equation is reduced up to the first order. This ordinary equation is integrated in elliptic functions and, therefore, the cnoidal waves through these elliptic functions are expressed. It is worth to note that in the case of transformation of cnoidal waves into unbounded periodic solutions, the last are expressed through elementary functions.

Key words: Korteweg – de Vries, cnoidal wave, unbounded periodic solutions, elliptic functions.

1. Введение

Уравнение в частных производных Кортевега – де Фриза (КдФ) было получено для описания волн [1,2]. В данной работе рассмотрены периодические решения КдФ – кноидальные волны вместе с неограниченными решениями в которые кноидальные волны вырождаются. Для кноидальных волн характерны острые гребни и плоские впадины и неограниченные компоненты графиков решений вырастают именно из острых гребней.

Поскольку уравнение КдФ имеет третий порядок, постановки задач для него необычны и могут быть индуцированы задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым оно может быть сведено.

2. Основные обыкновенные дифференциальные уравнения, к которым может быть сведено уравнение Кортевега – де Фриза

Рассматривается нелинейное уравнение КдФ в частных производных в виде [3, с. 282 –284]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 . \tag{1}$$

Будем искать решения уравнения (1) в виде стационарных бегущих волн

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct . \tag{2}$$

Стационарными называются волны распространяющиеся с постоянной скоростью и не меняющие своей формы. Итак, в (1) и (2) $u(x,t)$ – общее решение типа бегущей волны, а константа c в (2) – скорость волны. Т. о., уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$u'''(\xi) = 6u(\xi)u'(\xi) + cu'(\xi), \tag{3}$$

Далее, умножаем обе части (3) на $d\xi$, интегрируем и упрощаем полученное

$$u''(\xi) = 3u^2(\xi) + cu(\xi) + A, \quad A \in \Re , \tag{4}$$

где $\Re$ – действительная прямая, а A – постоянная интегрирования. Умножив обе части (4) на $u'(\xi)d\xi$, интегрируя и упрощая имеем уравнение первого порядка

$$u'(\xi) = \pm\sqrt{2P(u(\xi))} . \tag{5}$$

В уравнении (5)

$$P(u) = u^3 + \frac{c}{2}u^2 + Au + B, \quad A \in \Re, B \in \Re. \qquad (6)$$

Пусть u_1, u_2, u_3 – корни многочлена $P(u)$. Т. о.

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \qquad (7)$$

Тогда обыкновенное уравнение (4) в силу (6) будет выглядеть следующим образом

$$u'' = 3u^2 + cu + A = P'(u) = (u - u_2)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_2) =$$

$$= 3u^2 - 2(u_1 + u_2 + u_3)u + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1. \qquad (8)$$

Сравнивая (4) и (8), будем иметь

$$c = -2(u_1 + u_2 + u_3), \quad A = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1. \qquad (9)$$

Сравнивая (6) и (7) при $u = 0$, заключаем, что

$$B = -u_1u_2u_3. \qquad (10)$$

3. Точные решения уравнения КдФ типа кноидальной волны, сравнение с ними численных решений ОДУ первого, второго и третьего порядков

Заметив, что, поскольку

$$u = u_1, u = u_2, u = u_3 \qquad (11)$$

стационарные решения уравнения (5), то из (7) следует, что при $u \neq u_1, u \neq u_2, u \neq u_3$ справедливо равенство

$$\frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)}} = \pm\sqrt{2}d\xi. \qquad (12)$$

После замена переменной

$$u - u_1 = \eta^2, u = u_1 + \eta^2, \qquad (13)$$

в (12) мы получаем справедливость равенств

$$du = 2\eta d\eta, u - u_2 = u_1 - u_2 + \eta^2, u - u_3 = u_1 - u_3 + \eta^2.$$

В результате (12) будет иметь вид

$$\pm d\xi = \frac{\sqrt{2}d\eta}{\sqrt{(u_2 - u_1 - \eta^2)(u_3 - u_1 - \eta^2)}} . \tag{14}$$

Еще одна замена переменной

$$\eta = \sqrt{u_2 - u_1}s, s = \frac{\eta}{\sqrt{u_2 - u_1}} = \sqrt{\frac{u - u_1}{u_2 - u_1}} , \tag{15}$$

приводит к равенствам

$$u_2 - u_1 - \eta^2 = (u_2 - u_1)(1 - s^2), u_3 - u_1 - \eta^2 = u_3 - u_1 - (u_2 - u_1)s^2 =$$

$$= (u_3 - u_1)(1 - k^2 s^2), \quad k = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}} . \tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) мы приходим к уравнению

$$\pm\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} d\xi = \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} . \tag{17}$$

Обращаясь к (15) замечаем, что если $u = u_1$, то $s = 0$, а если $u = u_2$, то $s = 1$.

Если u_1, u_2, u_3 действительны, рис. 1, различны и справедливы неравенства $u_1 < u_2 < u_3$, то взяв интеграл от обеих частей (17), выбирая при этом c_1 так, чтобы $\xi + c_1 = 0$ при $s = 0$, имеем

$$\pm\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}}(\xi + c_1) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2\tau^2)}} . \tag{18}$$

Введем стандартное обозначение

$$F(s,k) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2\tau^2)}} \tag{19}$$

неполного эллиптического интеграла правой части (18) с модулем k. Т. о., $F(s,k)$ – обратная функция к $sn(F,k)$ - эллиптической функции Якоби [2, с. 44]. Уравнение (18) тогда будет иметь вид

$$sn\left(\pm\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}(\xi+c_1),k\right)=s=\sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}\,.$$

Возводя обе части последнего в квадрат и разрешая относительно u, получим

$$u=u_1+(u_2-u_1)sn^2\left(\pm\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}(\xi+c_1),k\right)$$

или, что то же самое

$$u(\xi)=u_1+(u_2-u_1)\left(1-cn^2\left(\pm\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}(\xi+c_1),k\right)\right)=$$

$$=u_2-(u_2-u_1)cn^2\left(\pm\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}(\xi+c_1),k\right). \qquad (20)$$

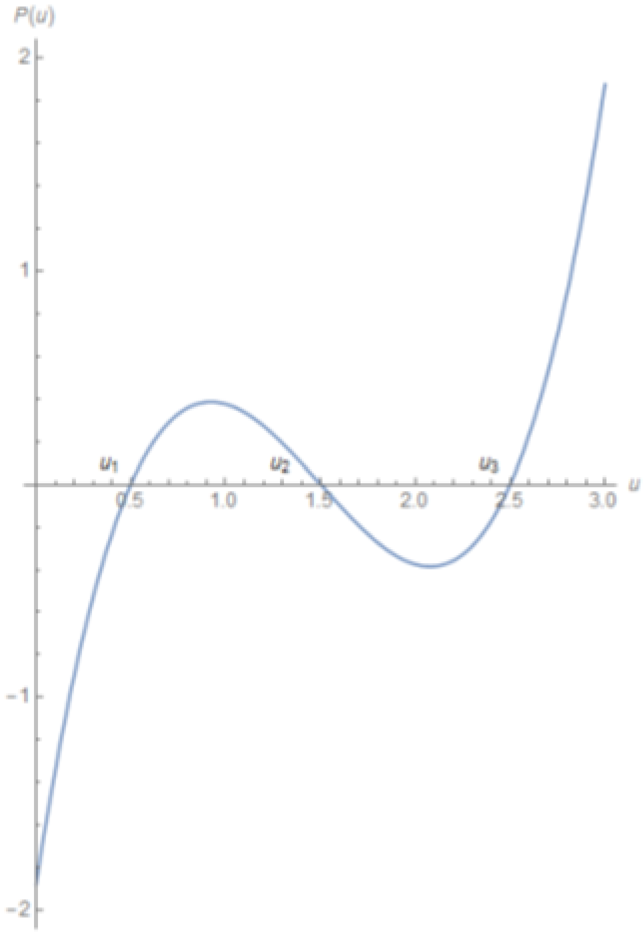

Рис.1. График многочлена $P(u)$ при $u_1=0.5$, $u_2=1.5$, $u_3=2.5$

Мы использовали равенство $sn^2(F,k)+cn^2(F,k)=1$, где $cn(F,k)$ – эллиптическая функция Якоби, а k определяется правой формулой (16). Из (18) определим период T функции $u(\xi)$ по координате ξ [2, с. 44]:

$$T=\frac{1}{\sqrt{(u_3-u_1)/2}}\int_0^1\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}=\frac{K(k)}{\sqrt{(u_3-u_1)/2}}. \qquad (21)$$

В (21) $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Итак, в рассматриваемом случае ограниченное решение уравнения (1) описывает периодическую волну, ее период (21) и амплитуда u_3-u_1. Из-за того, что в выражение (20) входит эллиптическая функция Якоби $cn(F,k)$, соответствующая волна называется кноидальной.

Если мы положим $u_1=1, u_2=2, u_3=3$, тогда $k=1/\sqrt{2}$, и мы получим уравнение (5) с учетом (7)

$$u'=\pm\sqrt{2(u-1)(u-2)(u-3)}. \qquad (22)$$

Его решение согласно выражению (20) будет иметь вид

$$u=2-cn^2\left(\pm(\xi+c_1),1/\sqrt{2}\right). \qquad (23)$$

Константу $c_1\approx 0{,}826018$ найдем приближенно из трансцендентного уравнения $cn^2\left(\pm c_1,1/\sqrt{2}\right)=0{,}5$. Далее, строим график в системе «Wolfram Mathematica» функции $u(\xi)=2-cn^2\left(\pm(\xi+0{,}826018),1/\sqrt{2}\right)$, рис.2.

Рассмотрим случай, когда вещественные корни удовлетворяют условиям $u_1=u_2<u_3$. Выражение $P(u)$ через корни будет иметь вид

$$P(u)=(u-u_1)^2(u-u_3). \qquad (24)$$

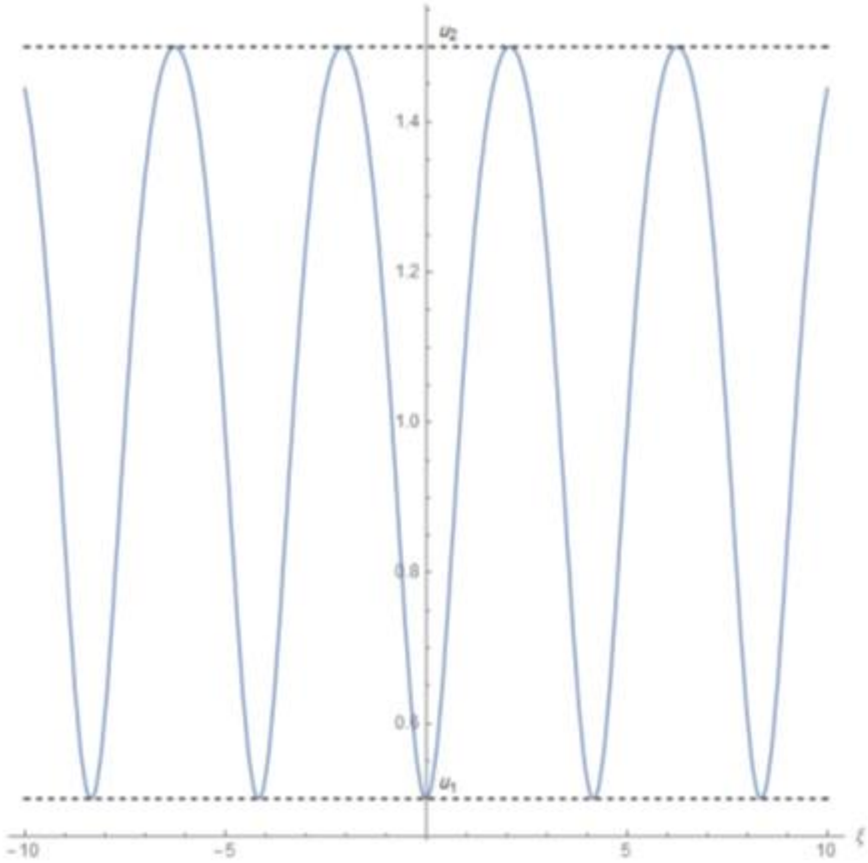

Рис. 2. График функции $u(\xi)$ при $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u = 1/\sqrt{2}$.

График $P(u)$ приведен на рис.3. При $u \le u_3$ существуют два стационарных решения уравнения (5) $u = u_1$ и $u = u_3$. Чтобы получить нестационарные решения рассмотрим $u > u_3$. Из (5) и (24) следует, что

$$\frac{du}{(u-u_1)\sqrt{(u-u_3)}} = \pm\sqrt{2}d\xi\,. \tag{25}$$

Замена

$$\varsigma^2 = u - u_3, du = 2\varsigma d\varsigma, u = \varsigma^2 + u_3 \tag{26}$$

приводит уравнение (25) к виду

$$\pm\sqrt{2}d\xi = \frac{2d\varsigma}{\varsigma^2 + (u_3 - u_1)}\,. \tag{27}$$

После интегрирования (27), получим

$$\pm\frac{\xi+c_1}{\sqrt{2}}\sqrt{u_3-u_1}=arctg\frac{\varsigma}{\sqrt{u_3-u_1}}, \qquad (28)$$

где c_1 – постоянная интегрирования.

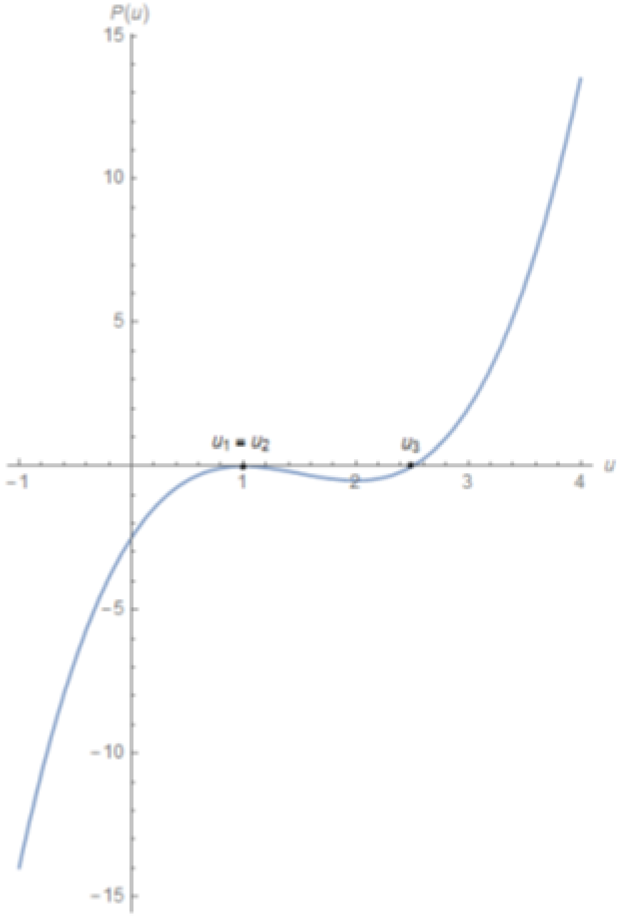

Рис.3. График многочлена $P(u)$ при $u_1=u_2=1$, $u_3=2.5$.

Возьмем тангенс от обеих частей (28), возведем их в квадрат, и, обращаясь к (26), получим неограниченное решение при $u>u_3$

$$u(\xi)=u_3+(u_3-u_1)tg\left((\xi+c_1)\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}\right), u>u_3. \qquad (29)$$

На рис. 4. постоен график (29) при $u_1=u_2=1$, $u_3=2.5$, $c_2=0$. Найденные точные решения полезны как тестовые варианты для проверки точности численных методов [4].

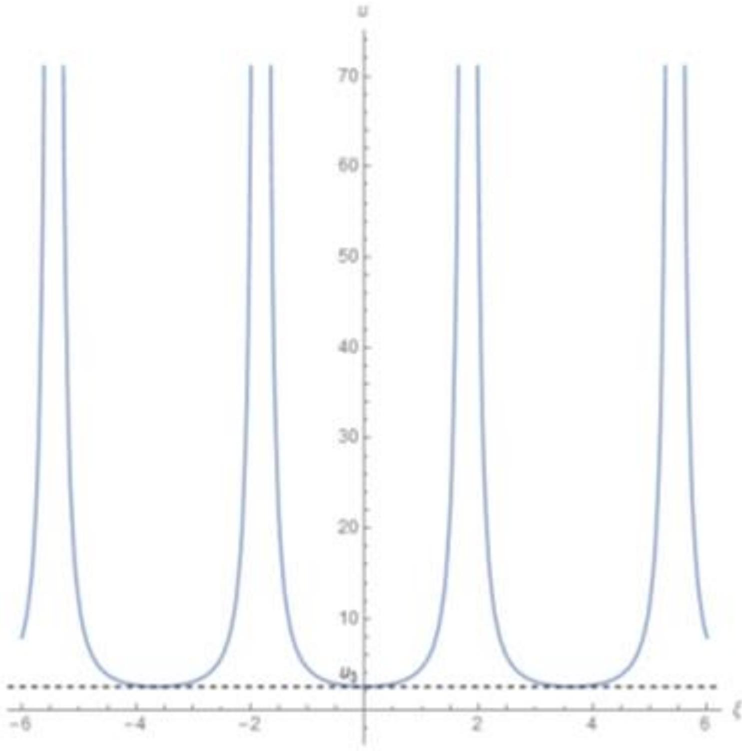

Рис.4. График многочлена $P(u)$ при $u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = 2.5$.

4. Заключение

В работе с помощью стандартного метода поиска решений уравнения КдФ в виде бегущей волны получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Это уравнение проинтегрировано в эллиптических функциях и в них же получено искомое решение уравнения КдФ. Далее, подобно исследован процес перерождения кноидальных волн в неограниченные периодические решения. Как известно, кноидальные волны характеризуются острыми гребнями и плоскими впадинами. В работе показано, что именно острые гребни кноидальных волн перерождаются в неограниченные компоненты графиков указанных неограниченных периодических решений.

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.–624 с.
2. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983.–136 с.

3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
4. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей/М.П. Галанин, Е.Б. Савенков. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 591 с. (Математическое моделирование в технике и технологии).

Для цитирования:

А. П. Черняев, С. А. Черняева. Вырождение кноидальных волн в неограниченные решения для уравнения Кортевега - Де Фриза. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 6. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jun18/5/text.pdf

DOI 10.30898/1684-1719.2018.6.5