ЖУРНАЛ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ, ISSN 1684-1719, N6, 2018 DOI 10.30898/1684-1719.2018.6.6

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ РЕЗОНАТОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУХСВЯЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ОСИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

А. П. Черняев [1], С. А. Черняева [2]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д. 9

[2] Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, 105082, Москва, ул. Рубцовская Набережная, 2/18

Статья поступила в редакцию 27 мая 2018 г.

Аннотация. При расчете основных параметров даже весьма простых полосковых элементов возникают довольно серьезные математические трудности. Поэтому построение упрощенных и приближенных математических моделей, позволяющих получать результаты для полосковых элементов сложной и громоздкой конфигурации или с неоднородностями диэлектрического заполнения, в ясной и удобной форме, является важной и актуальной проблемой. В настоящей статье описывается метод, разработанный и усовершенствованный авторами весьма удобный для оценки дисперсионных соотношений резонатора электромагнитных колебаний с двухсвязным поперечным сечением, перпендикулярным оси распространения, и, в частном случае, полоскового резонатора, представляющего собой полуволновой отрезок металлической полосковой линии, помещенной в цилиндрическую полость, заполненную однородным изотропным диэлектриком и окруженную металлическим экраном. После сведения трехмерной задачи к одномерной нахождение узлов тока на концах резонансной полоски сводится к задаче отыскания нулей решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка при специальных начальных условиях. Это, вполне естественно, используется для нахождения соотношений между геометрическими размерами и резонансными частотами резонансных устройств довольно широкого класса. Авторы настоящей статьи предлагают вместо отыскания нулей решений упрощенного дифференциального уравнения второго порядка с определенными начальными условиями решать задачу нахождения нулей дифференциального уравнения первого порядка с одним начальным условием, что более строго, более просто и более точно.

Ключевые слова: полосковый резонатор, сложная и громоздкая конфигурация, неоднородность диэлектрического заполнения, электромагнитные колебания, дифференциальное уравнение, нули, специальные граничные условия, специальные начальные условия.

Abstract. When calculating the basic parameters of even very simple strip elements, there are quite serious mathematical difficulties. Therefore, the construction of simplified and approximate mathematical models that allow obtaining results for strip elements of complex and bulky configuration, or with the irregularities of the dielectric filling in a clear and convenient form is an important and urgent problem. The resonator of electromagnetic oscillations with a two-connected cross-section perpendicular to the axis of wave propagation is considered. A special case of such a resonator is a strip resonator, which is a half-wave segment of a metal strip line placed in a cylindrical cavity filled with a homogeneous isotropic dielectric and surrounded by a metal screen. After the three-dimensional problem is reduced to the one-dimensional, the finding of current nodes at the ends of the resonance strip is reduced to the problem of finding a solution of zeros of the ordinary differential equation of the second order under special initial conditions. This is quite naturally used to find the relationship between the geometric dimensions and resonant frequencies of resonant devices of a fairly wide class. The authors of this paper propose to solve the problem of finding zeros of the differential equation of the first order with one initial condition, that more strictly, more simply and more precisely instead of finding solutions of the simplified differential equation of the second order with certain initial conditions.

Key words: strip resonator, complex and bulky configuration, heterogeneity of dielectric filling, electromagnetic oscillations, differential equation, zeros, special boundary conditions, special initial condition.

1. Введение

Для того чтобы оценить зависимость резонансной частоты полоскового резонатора, являющегося полуволновым отрезком металлической полосковой линии, помещенной в цилиндрическую полость, заполненную однородным изотропным диэлектриком и окруженную металлическим экраном [1 – 3], используем схему сведения рассматриваемой трехмерной задачи к одномерной. В результате возникает дифференциальное уравнение в частных производных для тока в центральном проводнике

$$\frac{\partial^2 I(Z,t)}{\partial Z^2} - \frac{1}{C(Z)}\frac{dC(Z)}{dZ}\frac{\partial I(Z,t)}{\partial Z} - \frac{1}{v^2(Z)}\frac{\partial^2 I(Z,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Условиям полуволнового резонанса будут соответствовать: пучность тока в середине полоски, т.е. при $Z = 0$, а также узлы тока на ее концах. Дисперсионные соотношения, которые нас интересуют, можно получить из уравнения (1), подставляя в него выражение

$$I(Z,t) = I(Z)e^{i\omega t} \quad . \tag{2}$$

Выражение (2) соответствует стоячей волне в резонаторе. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 I(Z)}{dZ^2} - \frac{1}{C(Z)}\frac{dC(Z)}{dZ}\frac{dI(Z)}{dZ} + \frac{\omega^2}{v^2(Z)} I(Z) = 0. \tag{3}$$

Исходя из геометрических особенностей конструкции рассматриваемого полоскового резонатора переменный коэффициент второго слагаемого уравнения (1) с достаточной степенью точности аппроксимируется выражением

$$\frac{1}{C(Z)}\frac{dC(Z)}{dZ} \cong \gamma\left(e^{kZ} - 1\right),$$

где γ и k – положительные постоянные, зависящие от конструктивных параметров резонатора.

Подставляя последнюю формулу в уравнение (3) мы получим уравнение

$$\frac{d^2 I(Z)}{dZ^2} - \gamma\left(e^{kZ} - 1\right)\frac{dI(Z)}{dZ} + \frac{\omega^2}{v^2(Z)} I(Z) = 0. \qquad (4)$$

В [1] найдено общее решение уравнения (4), которое выражается через ряд Похгаммера – вырожденную гипергеометрическую функцию.

Если мы знаем резонансную частоту ω, а также функции $C(Z)$ и $v(Z)$, то из уравнения (3) мы можем найти интересующую нас длину резонатора накладывая граничное условие

$$I(L/2) = 0.$$

Добавим к уравнению (3) условия

$$I(0) = I_0, \ \left.\frac{dI}{dZ}\right|_{Z=0} = 0. \qquad (5)$$

Подставляя в общий интеграл уравнения (4) начальные условия (5) мы получим трансцендентное уравнение очень сложного вида для определения искомых нулей [1 – 3].

2. Сведение задачи отыскания нулей дифференциального уравнения второго порядка со специальными граничными условиями к нахождению нулей дифференциального уравнения первого порядка с одним начальным условием

В работе [4] разработан метод отыскания общего интеграла обыкновенных дифференциальных уравнений более общих чем уравнение (3).

Приведем (3) к более удобному виду

$$(fI')' + gI = 0. \qquad (6)$$

В (5) штрих, как и во всей статье, означает дифференцирование по Z.

Для приведения (3) к виду (6) достаточно положить

$$f = \frac{1}{C}, \; g = \frac{\omega^2}{Cv^2}. \tag{7}$$

Действительно, для левой части (6) в силу (7) будем иметь

$$(fI')' + gI = fI'' + f'I' + gI = \frac{1}{C} I'' - \frac{C'}{C^2} I' + \frac{\omega^2}{Cv^2} I. \tag{8}$$

Далее, приравняем правую часть (8) к нулю, умножим на C и получим левую часть уравнения (3). Ввиду того, что $g > 0$, положим

$$Q = \sqrt{\frac{g}{f}}, \; P = S = -\frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right),$$

$$R = \sqrt{\frac{f}{g}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{g'}{g}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{f'g'}{fg} - \frac{g}{f}\right\}. \tag{9}$$

В силу (9) уравнение (6), как известно [5], сводится к системе

$$I = PI + QU, U' = RI + SU. \tag{10}$$

Обращаясь к (6) будем иметь справедливость равенств

$$f' = -C^{-2}C', \; g' = -\omega^2 (C^{-2}C'v^{-2} + 2C^{-1}v^{-3}v'),$$

$$f'' = 2C^{-3}(C')^2 - C^{-2}C'',$$

$$g'' = \omega^2 (2C^{-3}(C')^2 v^{-2} - C^{-2}C''v^{-2} + 4C^{-2}C'v^{-3}v' +$$

$$+ 6C^{-1}v^{-4}(v')^2 - 2C^{-1}v^{=3}v''.$$

Из последних равенств следует, что

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = -2\left(\frac{C'}{C} + \frac{v'}{v}\right), \frac{f''}{f} = 2\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{C''}{C},$$

$$\frac{g''}{g} = 2\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{C''}{C} + 4\frac{C'v'}{Cv} + 6\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - 2\frac{v''}{v},$$

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = 4\left(\frac{C}{C}\right)^2 - 2\frac{C''}{C} + 4\frac{C'v'}{Cv} + 6\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - 2\frac{v''}{v}.$$

Из равенств (9), на основании последних выражений, окончательно получим

$$Q = \frac{\omega}{v}, \; P = S = \frac{1}{2}\left(\frac{C'}{C} + \frac{v'}{v}\right), \tag{11}$$

$$R = \frac{v}{\omega}\left\{\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C''}{C} + \frac{C'v'}{Cv} + \frac{3}{2}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{v''}{v}\right) - \right.$$

$$\frac{1}{16}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{C'}{C} + 2\frac{v'}{v}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{C'}{C}\left(\frac{C'}{C} + 2\frac{v'}{v}\right) -$$

$$\left. - \frac{\omega^2}{v^2}\right\} = \frac{v}{\omega}\left\{\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C''}{C} + \frac{C'v'}{Cv} + \frac{3}{2}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\frac{v''}{v} - \frac{1}{16}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{5}{4}\frac{C'v'}{Cv} - \frac{5}{4}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 +$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{C'v'}{Cv} - \frac{\omega^2}{v^2}\right\} = \frac{v}{\omega}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C''}{C} + \frac{1}{4}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{v''}{v} - \frac{\omega^2}{v^2}\right\}. \tag{12}$$

Поскольку, решениями системы (10) при (11) и (12) будут функции [5]

$$I = \tilde{C}\rho(Z)\sin\vartheta(Z), \; U = \tilde{C}\rho(Z)\cos\vartheta(Z). \tag{13}$$

В (13) $\tilde{C}$ – произвольная постоянная, $\vartheta(Z)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\vartheta' = Q\cos^2\vartheta - R\sin^2\vartheta, \tag{14}$$

$$\vartheta(0) \in [0, \pi),$$

$$\rho = \exp\int_0^Z [\rho\sin^2\vartheta + (Q+R)\sin\vartheta\cos\vartheta + S\cos^2\vartheta]dZ. \tag{15}$$

Найдем начальное условие для уравнения (14). Обратимся к равенствам (5), (13) и (15), тогда $I_0 = \tilde{C}\sin\vartheta(0)$. Таким образом,

$$\sin\vartheta(0) = \frac{I_0}{\tilde{C}}. \tag{16}$$

Постоянную $\widetilde{C} > 0$ возьмем таким образом, чтобы было выполнено неравенство $I_0 / \widetilde{C} \leq 1$. Такое представление решений, получившее название представление решений с помощью полярных координат очень полезно при отыскании нулей решений [5]. Нули функции $I(Z)$ соответствуют значениям $\vartheta = k\pi$, где k – целое, а ϑ удовлетворяет уравнению первого порядка (14). Это уравнение (14) можно исследовать качественно, а можно решать численно известными методами.

Отыскание нулей решения дифференциального уравнения (14) решает задачу нахождения узлов тока на концах резонансной полоски и, поэтому, используется нахождения соотношений между геометрическими размерами и резонансными частотами резонансных устройств довольно широкого класса. Итак, вместо отыскания нулей решений упрощенного дифференциального уравнения второго порядка (3) [1 – 3], с определенными начальными условиями (5) авторы настоящей статьи предлагают решать задачу нахождения нулей дифференциального уравнения первого порядка (14) с начальным условием (16), что более строго, более просто и более точно.

3. Заключение

Предлагается некоторое усовершенствование математической модели полоскового резонатора [1]. Эти модели характеризуются тем, что поперечные размеры резонатора зависят от координаты, параллельной направлению распространения электромагнитных волн. С помощью этой математической модели выведены соотношения для определения дисперсионных характеристик двухсвязных резонаторов. Поскольку, полученная и разработанная математическая модель в [1 –3] активно используется [6 – 11], то результаты настоящей работы должны быть весьма полезны.

Литература

1. Карузский А.Л., Цховребов А.М., Черняев А.П. Построение математической модели полоскового резонатора специального вида // Современная математика в физико–технических задачах. М.: МФТИ, 1986. С. 37-43.
2. Волчков Н.А., Дравин В.А., Карузский А.Л., Мурзин В.Н., Черняев А.П. СВЧ – регистрация эффектов пространственной дисперсии в проводниках // *Известия РАН, сер. Физическая*. Т. 71, № 8. С. 1124-1128.
3. Chernyaev A.P., Karuzskii A.L., Lykov A.N., Murzin V.N., Perestoronin A.V., Vishnyakov Yu.V., Chiba M. Retardation Effect in Microwave of Spatial Dispersion in Superconductors // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2008. Vol. 69. No 12, pp. 3313-3316.
4. Черняев А.П. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами некоторого класса // *Дифференциальные уравнения*, 1984, Т. 20, № 8, с. 1457-1459.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1978. 576 с.
6. Chernyaev A.P., Dravin V.A., Golovanov A., Karuzskii A.L., Krapivka A.E., Lykov A.N., Murzin V.N., Perestoronin A.V., Tshovrebov A.M., Volchkov N.A. Principal Problems of Quality Improvement for High–Speed Planar Transmission Lines Issued from Studies High–Q Microship Resonators // *International Conference on Micro– and Nano–Electconics*. 2009. Vol. 7521, p. 7521191.
7. Chernyaev A., Dravin V.A., Golovanov A.Yu, Principal Problems of Quality Improvement for High–Speed Planar Transmission Lines Issued from Studies High–Q Microship Resonators // *Progress in Biomedical Optics and Imaging*. 2010. Vol. 7521, p. 752119.
8. Karuzskii A.L., Perestoronin A.V., Volchkov N.A., Zherikhina L.N., Chernyaev A.P. Anomalous skin effect in a drude-type model incorporating the spatial dispersion for systems with conductivity of metal // *Journal of Physics: Conference Series*. 2012. Vol. 400. No PART 2, p. 022048.

9. Dresvyannikov M.A., Karuzskii A.L., Mityagin Yu.A., Perestoronin A.V., Volchkov N.A., Chernyaev A.P. Conducting media with spatial dispersion in a microwave field: eigenvalue problem for permittivity operator // *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 2014, p. 944016.
10. Dresvyannikov M.A., Karuzskii A.L., Mityagin Y.A., Perestoronin A.V., Volchkov N.A., Chernyaev A.P. Spatial-dispersion eigenvalues for permittivity operator of conductors and superconductors in a microwave field // *Journal of Low Temperature Physics*. 2016. Vol. 185. No 5, pp. С. 495-501.
11. Dresvyannikov M.A., Chernyaev A.P., Karuzskii A.L., Mityagin Y.A., Perestoronin A.V., Volchkov N.A. The spatially dispersive eigenvalues of permittivity operator and frequency-dependent surface impedance for conductors without the dc dissipation // *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering Сер. "International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016*", 2016, p. 1022412.

Для цитирования:
А. П. Черняев, С. А. Черняева. Математический метод оценки дисперсионных соотношений резонатора электромагнитных колебаний с двухсвязным поперечным сечением, перпендикулярным оси распространения. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 6. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jun18/6/text.pdf
DOI 10.30898/1684-1719.2018.6.6