

УДК 621.3.015.4

## АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ ОБЩЕГО ВИДА

Н. Д. Бирюк, А. Ю. Кривцов

Воронежский государственный университет,  
394018, Воронеж, Университетская площадь, 1

Статья поступила в редакцию 28 мая 2018 г.

**Аннотация.** Во многих публикациях утверждается важность анализа нелинейных радицепей. При этом не используется принцип линейного включения [1], утверждающий, что произвольное решение любого нелинейного уравнения может быть точно реализовано в специально подобранном линейном уравнении. Этот сформулированный для абстрактных математических уравнений принцип может быть перенесен в теорию радицепей. В этом случае его определение, следующее: произвольный процесс в любой нелинейной радицепи может быть точно реализован в специально подобранной линейной радицепи. Принцип линейного включения повышает значение анализа линейных радицепей *общего вида* для теории нелинейных радицепей. Для радиоэлектроники интересны линейные радицепи с периодически изменяющимися во времени параметрами (емкостями, индуктивностями и резисторами). В общем виде это сложная задача. В настоящей публикации предложен первый шаг в этом направлении: разработан анализ параметрического контура общего вида. Предполагается, что все элементы контура положительны и изменяются во времени по любым непрерывным периодическим функциям времени с одинаковыми периодами. Для этого приспособлен известный в теории радицепей с постоянными параметрами метод комплексных амплитуд. Этот математический метод разработан внутри электротехники и не входит в классическую математику. Особое внимание уделено проблеме устойчивости параметрического контура. При решении этой задачи оказалось, что теории устойчивости Ляпунова в радиоэлектронике не уделяется должного внимания. Здесь разработано применение теории

устойчивости Ляпунова к задаче об устойчивости параметрического контура, а именно, показано, как применить первый и второй методы Ляпунова в данном конкретном случае. Кроме того, рассмотрен неляпуновский метод анализа устойчивости, разработанный на основе метода комплексных амплитуд. Хотя предложенный здесь анализ ограничен линейным объектом, параметрическим контуром, он имеет отношение через принцип линейного включения также и к нелинейному контуру.

**Ключевые слова:** принцип линейного включения, параметрический контур, вынужденные колебания, свободный процесс, теория устойчивости, аналогия между параметрическим и обычным контуром.

**Abstract.** In many publications, it is maintained importance of analysis of nonlinear radio circuits. In spite of all this it does not make the principle of linear introduction [1], maintaining that solution of every nonlinear equation may be exactly achieved in specially sorting out linear equation. This principle, formulating for abstract mathematical equations, may be transfer to theory of radio circuits. In this case determination is following: arbitrary process in every nonlinear radio circuit may be exactly achieved in specially sorting out linear radio circuit. The principle of linear introduction raises importance of analysis of linear radio circuits *of general aspect* for theory of nonlinear circuits. For radio electronics it are interesting linear circuits with periodical varying parameters (capacitances, inductances, resistances). This is complicated problem in general case. In this publication it has been proposed the first step in this direction exactly it is worked out analysis of time varying circuit. It is supposed that all elements of circuit are positive and change in time according arbitrary continuous periodical functions of time with the same periods. For this purpose it is adapted well-known in theory of circuits with constant parameter method of complex amplitudes. This mathematical method has been worked out inside electrotechnics, it does not inscribe in classical mathematics. It is given particular attention to problem of stability of time varying circuit. In the time of solution this problem it is found that it is not given due attention Lyapunov's theory of stability in radio electronics. This it is worked out an application Lyapunov's

theory of stability for problem of stability of time varying circuit, just that vary case of use of the first and the second Lyapunov's methods. Besides that it is considered unlyapunov's method of analysis of stability, working out on the basis of method of complex amplitude. Although proposing this analysis is limited with linear object (time varying circuit), it bears a relation to nonlinear circuit through principle of linear introduction.

**Key words:** the principle of linear introduction, time varying circuit, forcing oscillations, free process, theory of stability, analogy with time varying and usual circuit.

## 1. Введение

Имеющий большое методологическое значение принцип линейного включения был сформулирован в математической монографии [1], но в радиоэлектронике не нашел применения, что, на наш взгляд, является большим упущением. Он утверждает, что любое решение произвольного нелинейного уравнения (или системы нелинейных уравнений) может быть точно реализовано в специально подобранном линейном уравнении (или в системе линейных уравнений). Отсюда вытекает важность анализа линейных радицепей общего вида для теории нелинейных радицепей. Этот анализ – сложный, но проще анализа нелинейных радицепей. Целесообразно сосредоточить внимание на анализе параметрического контура общего вида с последующим обобщением на сложные параметрические цепи.

## 2. Математическая модель параметрического контура

Схема выбранного для анализа параметрического контура представлена на рис.1.

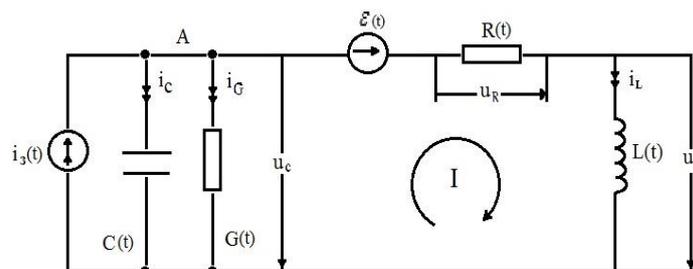


Рис.1. Схема параметрического контура общего вида.

Предполагается, что все параметры контура являются положительными непрерывными функциями времени (в остальном, произвольными), электродвижущая сила (ЭДС)  $\varepsilon(t)$  и задающий ток  $i_3(t)$  – также непрерывные, но знакопеременные функции. Элементы изменяются во времени независимо от протекающих токов (условие линейности). Для радиоэлектроники интересен случай периодического изменения параметров. Будем считать, что элементы контура изменяются во времени с одной и той же круговой частотой  $\Omega$ , а ЭДС – с круговой частотой  $\omega$ . На рис. показаны условные направления токов и напряжений в некоторой конкретный момент времени. Первый и второй закон Кирхгофа для узла  $A$  и контура  $I$  приводят к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} i_C + i_G + i_L = i_3 \\ -u_C + u_R + u_L = \varepsilon \end{cases} \quad (1)$$

Математических моделей контура может быть сколько угодно, это зависит от того, какие две функции выбраны в качестве определяющих. Практика показывает, что модель получается наиболее простая, если в качестве определяющих функций выбрать заряд конденсатора  $q(t)$  и потокосцепление индуктивности  $\Phi(t)$ . Все слагаемые слева в (1) выразим через эти функции:

$$i_C = \frac{dq}{dt}, \quad i_G = Gu_C = \frac{G}{C}q, \quad i_L = \frac{1}{L}\Phi, \quad u_C = \frac{1}{C}q, \quad u_R = Ri_L = \frac{R}{L}\Phi, \quad u_L = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Подставляем эти значения в (1) и после приведения к нормальному виду получим дифференциальную систему

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{G}{C}q - \frac{1}{L}\Phi + i_3(t) \\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\Phi + \varepsilon(t) \end{cases} \quad (2)$$

При сложных математических преобразованиях система (2) часто бывает неудобной из-за того, что ее коэффициенты имеют разные размерности и сильно различаются по величине. Например, в системе СИ емкость имеет порядок  $10^{-10}$ Ф, индуктивность  $10^{-3}$ Гн, сопротивление  $10^2$ Ом, проводимость  $10^{-6}$ Сим. Поэтому в конкретных задачах систему (2) целесообразно нормировать. Для этого выберем масштабные делители времени  $t_M$ , заряда  $q_M$

и магнитного потока  $\Phi_M$ , затем перейдем к безразмерным переменным времени

$\tau = \frac{t}{t_M}$ , заряда  $x_1 = \frac{q}{q_M}$  и магнитного потокосцепления  $x_2 = \frac{\Phi}{\Phi_M}$ . В новых

переменных дифференциальная система (2) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -t_M \frac{G(\tau)}{C(\tau)} x_1 - \frac{t_M r}{L(\tau)} x_2 + \frac{t_M}{q_M} i_3(\tau) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{t_M}{rC(\tau)} x_1 - \frac{t_M R(\tau)}{L(\tau)} x_2 + \frac{t_M}{\Phi_M} \varepsilon(\tau) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $r = \frac{\Phi_M}{q_M}$  – нормировочное сопротивление.

Здесь переменные и коэффициенты при них – безразмерные функции времени. Кроме того, подбирая масштабные делители, можно привести систему (3) к максимально удобному для конкретного анализа виду. Обратный переход от системы (3) к системе (2) очень прост, нужно заменить единицей масштабные делители, а также положить  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \Phi$ .

Дифференциальная система (3) является математической моделью контура по рис.1. Она содержит две свободные функции  $\varepsilon(t) = \frac{t_M}{q_M} i_3(\tau)$  и

$i_3(t) = \frac{t_M}{\Phi_M} \varepsilon(\tau)$ . Они введены для того, чтобы контур объединил свойства

последовательного и параллельного контуров: при  $i_3(\tau) \equiv 0$ ,  $G(\tau) \equiv 0$  наш контур вырождается в последовательный контур, а при  $\varepsilon(\tau) \equiv 0$ ,  $R(\tau) \equiv 0$  – в параллельный.

Систему (3) во многих случаях целесообразно представлять в компактном векторном виде –

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \mathbf{A}(\tau) \mathbf{x} + \mathbf{f}(\tau), \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}(\tau) = \{a_{ij}(\tau)\}$ ,  $i, j = 1, 2$  – матрица системы:

$a_{11} = -t_M \frac{G}{C}$ ,  $a_{12} = -t_M \frac{r}{L}$ ,  $a_{21} = t_M \frac{1}{rC}$ ,  $a_{22} = -t_M \frac{R}{L}$ ;  $\mathbf{x} = \text{colon}(x_1, x_2)$  – вектор-столбец

искомых переменных;  $\mathbf{f} = \text{colon}(f_1, f_2)$  – свободный вектор-столбец:

$$f_1 = \frac{t_M}{q_M} i_3(\tau), \quad f_2 = \frac{t_M}{\Phi_M} \varepsilon(\tau).$$

Представленную в виде (4) дифференциальную систему обычно для краткости называют векторным дифференциальным уравнением.

### 3. Вынужденные колебания в параметрическом контуре

Эта задача является достаточно сложной и громоздкой. Поэтому в методическом плане желательно рассматривать ее по аналогии с обычным контуром. Сначала считаем контур со схемой рис.1 контуром с постоянными параметрами. Перейдем к ненормированной системе (2), т. к. она соответствует типичным задачам радиотехники. Источники энергии считаем гармоническими:

$$i_s(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \quad \varepsilon(t) = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon) \quad (5)$$

При анализе вынужденных колебаний в цепях с постоянными параметрами наилучшим методом оказался метод комплексных амплитуд. Его автор американский инженер-электротехник Чарлз Протеус Штеймец, впервые доложил о нем на Чикагском электротехническом конгрессе в 1871 году. Его своеобразие заключается в том, что этот математический метод разработан внутри электротехники, по строгости доказательств и логической стройности он уступает абстрактно-математическим методам, однако, безотказно применяется при решении электро- и радиотехнических задач. Тем не менее, он разработан для стационарных цепей, при его применении для параметрических цепей нужно соблюдать осторожность. Здесь выбран вариант метода комплексных амплитуд, разработанный профессором Ю. Т. Величко [2]. Соответствующий источник – труднодоступен, поэтому дадим краткое изложение этого варианта для абстрактных математических функций.

Пусть даны две гармонические функции времени

$$a_{1t} = A_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad a_{2t} = A_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Эти функции названы оригиналами. Каждой из них соответствует изображение, полученные по правилу

$$a_{1t} = A_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \leftarrow \hat{a}_1 = A_{m1} e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} = A_{m1} e^{j\varphi_1} e^{j\omega_1 t} = \dot{A}_{m1} e^{j\omega_1 t}.$$

Аналогично  $a_{2t} \leftarrow \hat{a}_2 = \dot{A}_{m2} e^{j\omega_2 t}$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ,

где  $\dot{A}_{m1} = A_{m1}e^{j\varphi_1}$ ,  $\dot{A}_{m2} = A_{m2}e^{j\varphi_2}$  – комплексные амплитуды. Стрелки острием к оригиналам означают соответствие. Кроме изображений  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  вводятся также комплексно сопряженные изображения

$$\check{a}_1 = A_1^* e^{-j\omega_1 t}, \quad \check{a}_2 = A_2^* e^{-j\omega_2 t}$$

Очевидно, что сумме оригиналов соответствует сумма их изображений,

$$a_{1t} + a_{2t} \leftarrow \hat{a}_1 + \hat{a}_2,$$

произведению оригинала на постоянный множитель, соответствует произведение его изображения на тот же множитель,  $ka_{1t} \leftarrow k\hat{a}_1$ , но произведению оригиналов не соответствует произведение их изображений,

$$a_{1t} \cdot a_{2t} \not\leftarrow \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2.$$

Изображение таких произведений находится по правилу  $a_{1t} \cdot a_{2t} \leftarrow \frac{\hat{a}_1 + \check{a}_1}{2} \hat{a}_2$ .

При анализе параметрических цепей такие произведения часто встречаются.

Дифференцирование и интегрирование оригиналов радикально упрощаются для соответствующих изображений,

$$\frac{da_{1t}}{dt} \leftarrow \frac{d\hat{a}_1}{dt} = j\omega_1 \hat{a}_1, \quad \int a_{1t} dt \leftarrow \int \hat{a}_1 dt = \frac{\hat{a}_1}{j\omega_1}.$$

Переход от оригиналов к изображениям упрощает промежуточные преобразования. Для получения результата нужен обратный переход от изображения к оригиналу, он очень простой –

$$a_{1t} = \operatorname{Re} \hat{a}_1,$$

здесь оператор «Re» означает взятие действительной части комплексного числа.

Сначала предположим, что на рис.1 представлен обычный контур с постоянными параметрами. Изображения задающего тока и ЭДС –

$$\hat{i}_s = \dot{I}_{sm} e^{j\omega t}, \quad \hat{\varepsilon} = \dot{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{I}_{sm} = I_{sm} e^{j\varphi_i}, \quad \dot{\mathcal{E}}_m = \mathcal{E}_m e^{j\varphi_e}.$$

Для цепей с постоянными параметрами родственными функциями являются гармонические функции времени, поскольку в вынужденных колебаниях гармоническое воздействие вызывает гармонический отклик с той

же частотой. Поэтому можно утверждать, что

$$q(t) = Q_m \cos(\omega t + \varphi_q) \leftarrow \hat{q} = \dot{Q}_m e^{j\omega t}, \quad \Phi(t) = \Phi_m \cos(\omega t + \varphi_\Phi) \leftarrow \hat{\Phi} = \dot{\Phi}_m e^{j\omega t},$$

$$\dot{Q}_m = Q_m e^{j\varphi_q}, \quad \dot{\Phi}_m = \Phi_m e^{j\varphi_\Phi}.$$

Это дает возможность по системе (2) составить аналогичную систему для изображений –

$$\begin{cases} \left( j\omega + \frac{G}{C} \right) \dot{Q}_m + \frac{1}{L} \dot{\Phi}_m = \dot{I}_{m3} \\ -\frac{1}{C} \dot{Q}_m + \left( j\omega + \frac{R}{L} \right) \dot{\Phi}_m = \dot{\mathcal{E}}_m \end{cases} \quad (6)$$

Это алгебраическая система двух уравнений с постоянными коэффициентами.

Ее решение –  $\dot{Q}_m = \frac{D_1}{D}$ ,  $\dot{\Phi}_m = \frac{D_2}{D}$ , где

$$D = \det \begin{vmatrix} j\omega + \frac{G}{C} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & j\omega + \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \left( j\omega + \frac{G}{C} \right) \left( j\omega + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC},$$

$$D_1 = \det \begin{vmatrix} \dot{I}_{m3} & \frac{1}{L} \\ \dot{\mathcal{E}}_m & j\omega + \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \left( j\omega + \frac{R}{L} \right) \dot{I}_{m3} - \frac{1}{L} \dot{\mathcal{E}}_m,$$

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} j\omega + \frac{G}{C} & \dot{I}_{m3} \\ -\frac{1}{C} & \dot{\mathcal{E}}_m \end{vmatrix} = \left( j\omega + \frac{G}{C} \right) \dot{\mathcal{E}}_m + \frac{1}{C} \dot{I}_{m3}.$$

Если комплексные амплитуды  $\dot{Q}_m$  и  $\dot{\Phi}_m$  известны, то по ним нетрудно найти изображения заряда и потокосцепления:

$$\hat{q} = \dot{Q}_m e^{j\omega t}, \quad \hat{\Phi} = \dot{\Phi}_m e^{j\omega t}.$$

затем находятся заряд и потокосцепление как функции времени –

$$q(t) = \text{Re } \hat{q} = Q_m \cos(\omega t + \varphi_q), \quad \Phi(t) = \text{Re } \hat{\Phi} = \Phi_m \cos(\omega t + \varphi_\Phi).$$

Если  $q(t)$  и  $\Phi(t)$  известны, то все напряжения и токи контура находятся без решения дифференциальных уравнений –

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{1}{C} q(t), \quad i_C(t) = \frac{d}{dt} q(t), \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \Phi(t), \\
 u_L(t) &= \frac{d}{dt} \Phi(t), \quad i_G(t) = G u_C(t) = \frac{G}{C} q(t), \\
 u_R(t) &= R i_L(t) = \frac{R}{L} \Phi(t).
 \end{aligned}$$

Все эти функции характеризуют вынужденный процесс в контуре с постоянными параметрами.

Теперь предположим, что это – контур с периодическими параметрами, изменяющимися с одной и той же круговой частотой  $\Omega$ . Для него родственными функциями являются функции Хилла –

$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k \cos[(\omega + k\Omega)t + \varphi_k] \leftarrow \hat{q} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{Q}_k e^{j(\omega + k\Omega)t}. \quad (7)$$

Формула для изображений проще, поскольку в ней начальные фазы  $\varphi_k$  «спрятаны» в комплексных амплитудах  $\dot{Q}_k$ . Формула типа (7) характерна и для потокосцепления индуктивности. Отсюда проясняется сложность анализа параметрического контура по сравнению с обычным из-за того, что функция Хилла намного сложнее гармонической функции, которая получается из функции Хилла при условии  $\Omega = 0$ .

Решение системы (2) находится следующим образом: все коэффициенты разлагаются в ряд Фурье по гармоникам круговой частоты  $\Omega$ , переменные  $q$  и  $\Phi$  подставляются в виде разложений типа (7), затем делается выборка по отдельным частотам, в результате получается бесконечная алгебраическая система линейных уравнений. Процесс отыскания решений весьма громоздкий. Если привлечь физические соображения, то оказывается, что особенно важным является изменение во времени энергоемких элементов – индуктивности и емкости, поскольку они представляют собой скрытые источники энергии. Диссипативные элементы  $G(t)$  и  $R(t)$ , как правило, можно заменить усредненными постоянными элементами, для реактивных элементов  $L(t)$  и  $C(t)$  подобная замена недопустима.

Нетрудно убедиться, что все упомянутые преобразования значительно

проще для изображений, чем для оригиналов. По уравнению (4) нужно получить аналогичное уравнение для изображений. Это уравнение в общем виде при наших обозначениях следующее

$$\frac{d}{d\tau} \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}} \right) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}. \quad (8)$$

По Величко это называется перемещением уравнения (4) в комплексную плоскость. Для этого, чтобы представить это уравнение в развернутом виде, нужно более конкретно задать матрицу  $\mathbf{A}(\tau)$ . Будем считать, что в контуре изменяются во времени только реактивности. В практических случаях они могут изменяться во времени по разным периодическим функциям. При рассмотрении принципиальных вопросов их принято аппроксимировать либо функцией

$$P(t) = P_0 \left[ 1 + m_p \cos(\Omega t + \varphi_p) \right], \quad (9)$$

либо функцией

$$P(t) = \frac{P_0}{1 + m_p \cos(\Omega t + \varphi_p)}. \quad (10)$$

Вместо  $P$  нужно подставлять  $C$  или  $L$ . В нашем случае более удобной является аппроксимация (10). За основу возьмем ненормированную дифференциальную систему (2). Это даст возможность сопоставить процессы в параметрическом и обычном контуре.

При наших исходных допущениях уравнение (2) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{G}{C_0} [1 + m_c \cos(\Omega t + \varphi_c)] q - \frac{1}{L_0} [1 + m_L \cos(\Omega t + \varphi_L)] \Phi + I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{C_0} [1 + m_c \cos(\Omega t + \varphi_c)] q - \frac{R}{L_0} [1 + m_L \cos(\Omega t + \varphi_L)] \Phi + \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon) \end{cases}. \quad (11)$$

Перемещаем это уравнение в комплексную плоскость по приведенным выше правилам –

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}}{dt} = -\frac{G}{C} \left[ \frac{m_C}{2} e^{-j\Omega t} + 1 + \frac{\dot{m}_C}{2} e^{j\Omega t} \right] \hat{q} - \frac{1}{L} \left[ \frac{m_L}{2} e^{-j\Omega t} + 1 + \frac{\dot{m}_L}{2} e^{j\Omega t} \right] \hat{\Phi} + \dot{I}_m e^{j\Omega t} \\ \frac{d\hat{\Phi}}{dt} = \frac{1}{C_0} \left[ \frac{m_C}{2} e^{-j\Omega t} + 1 + \frac{\dot{m}_C}{2} e^{j\Omega t} \right] \hat{q} - \frac{R}{L_0} \left[ \frac{m_L}{2} e^{-j\Omega t} + 1 + \frac{\dot{m}_L}{2} e^{j\Omega t} \right] \hat{\Phi} + \dot{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t} \end{cases} \quad (12)$$

В это уравнение нужно подставить

$$\hat{q} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{Q}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad \hat{\Phi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{\Phi}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}$$

затем сделать выборку членов с одним и тем же  $k$ . Получится бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Эти уравнения несколько отличаются в случаях  $k = 0$  и  $k \neq 0$ . Именно,

$$\begin{cases} k=0: \begin{cases} \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{G}{C_0} \dot{Q}_{-1} + \frac{\dot{m}_L}{2} \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_{-1} + \left( j\omega + \frac{G}{C_0} \right) \dot{Q}_0 + \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_0 + \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_1 + \frac{m_L}{2} \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_1 = \dot{I}_m \\ -\frac{\dot{m}_C}{2} \frac{G}{C_0} \dot{Q}_{-1} + \frac{\dot{m}_L}{2} \frac{R}{L_0} \dot{\Phi}_{-1} - \frac{1}{C_0} \dot{Q}_0 + \left( j\omega + \frac{R}{L_0} \right) \dot{\Phi}_0 - \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_1 + \frac{m_L}{2} \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_1 = \dot{\mathcal{E}}_m \end{cases} \\ k \neq 0: \begin{cases} \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{G}{C_0} \dot{Q}_{k-1} + \frac{\dot{m}_L}{2} \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_{k-1} + \left( j(\omega+k\Omega) + \frac{G}{C_0} \right) \dot{Q}_k + \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_k + \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{k+1} + \frac{m_L}{2} \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_{k+1} = 0 \\ -\frac{\dot{m}_C}{2} \frac{G}{C_0} \dot{Q}_{k-1} + \frac{\dot{m}_L}{2} \frac{R}{L_0} \dot{\Phi}_{k-1} - \frac{1}{C_0} \dot{Q}_k + \left( j(\omega+k\Omega) + \frac{R}{L_0} \right) \dot{\Phi}_k - \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{k+1} + \frac{m_L}{2} \frac{1}{L_0} \dot{\Phi}_{k+1} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

Если эти системы двух уравнений расположить сверху вниз в порядке возрастания  $k$ , то получим бесконечную систему таких систем двух уравнений. Ее можно представить в компактном векторном виде, если ввести соответствующие обозначения.

Для матриц второго порядка –

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k,k-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{G}{C_0} & \frac{\dot{m}_L}{2} \frac{1}{L_0} \\ -\frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{C_0} & \frac{\dot{m}_L}{2} \frac{R}{L_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{k,k} = \begin{bmatrix} j(\omega+k\Omega) + \frac{G}{C_0} & \frac{1}{L_0} \\ -\frac{1}{C_0} & j(\omega+k\Omega) + \frac{R}{L_0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{k,k+1} &= \begin{bmatrix} \frac{m_C}{2} \frac{G}{C_0} & \frac{m_L}{2} \frac{1}{L_0} \\ -\frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} & \frac{m_L}{2} \frac{R}{L_0} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (14)$$

для вектор-столбцов –

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \dot{Q}_k \\ \dot{\Phi}_k \end{bmatrix}, \quad k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty; \quad \mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \neq 0; \quad \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} \dot{I}_m \\ \dot{\mathcal{E}}_m \end{bmatrix}.$$

Тогда полученную бесконечную систему уравнений можно представить компактно –

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \tag{15}$$

или в развернутом виде

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{A}_{-2,-2} & \mathbf{A}_{-2,-1} & & & \\ \hline \mathbf{A}_{-1,-2} & \mathbf{A}_{-1,-1} & \mathbf{A}_{-1,0} & & \\ \hline & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \\ \hline & & \mathbf{A}_{1,0} & \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline & & & \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{x}_{-2} \\ \mathbf{x}_{-1} \\ \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{array} = \mathbf{f}_0. \tag{16}$$

Как видно, матрица  $\mathbf{A}$  является бесконечной блочной матрицей, она простирается до бесконечности вверх-вниз и влево-вправо. Ее элементы – матрицы второго порядка. Первый индекс в элементах означает номер строки, второй – номер столбца. Индексы отсчитываются от элемента с нулевыми строкой и столбцом, клетка которого выделена. Для наглядности клетки с нулевыми элементами оставлены пустыми. Здесь ключевым понятием матрицы является диагональ, матрица  $\mathbf{A}$  состоит из трех ненулевых диагоналей: главной и примыкающих к ней слева и справа. Некоторые свойства бесконечных матриц (неблочных) описаны в монографиях [3,4]. Кроме того, данная матрица относится к категории разреженных матриц.

Через  $\mathbf{x}$  обозначен искомый бесконечный вектор-столбец, элементы его – вектор-столбцы второго порядка. Свободный вектор  $\mathbf{f}$  состоит из единственного ненулевого элемента  $\mathbf{f}_0$  – вектор-столбца второго порядка.

Адекватный математический аппарат теории параметрических радицепей с периодическими параметрами представляет собой теорию бесконечных блочных матриц типа (16), поскольку законы Кирхгофа непосредственно приводят к дифференциальным системам типа (2), порядок которых равен порядку элементов бесконечных матриц в (16). Можно привести

дифференциальную систему (2) к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Однако такое приведение неперспективно, так как с увеличением порядка дифференциальной системы типа (2) громоздкость приведения к одному уравнению быстро возрастает. Обратное преобразование – простое. Приведем два дифференциальных уравнения, равнозначных дифференциальной системе (2), относительно заряда и магнитного потокосцепления:

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{dt^2} + \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} + \frac{d}{dt} \ln L \right) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \left( 1 + RG + LG \frac{d}{dt} \ln \frac{LG}{C} \right) q &= \frac{R + \dot{L}}{L} i_3 + \frac{di_3}{dt} - \frac{\mathcal{E}}{L}, \\ \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \left( \frac{G}{C} + \frac{R}{C} + \frac{d}{dt} \ln C \right) \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{CL} \left( 1 + GR + CR \frac{d}{dt} \ln \frac{CR}{L} \right) \Phi &= \frac{G + \dot{C}}{C} \mathcal{E} + \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{i_3}{L}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим последовательный параметрический контур, для чего положим  $G(t) \equiv 0$ ,  $i_3 \equiv 0$ , тогда первое уравнения (17) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left( \frac{R}{L} + \frac{d}{dt} \ln L \right) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (18)$$

Здесь справа знак минус заменен на плюс по рассмотренной ниже причине. На схеме рис. 1 изображены два источника энергии  $i_3(t)$  и  $\mathcal{E}(t)$ , они вызывают токи в емкости разных направлений. При выбранных условных направлениях токов получается, что источник  $i_3$  превагирует над источником  $\mathcal{E}(t)$ . Если положить  $i_3(t) \equiv 0$ , то реализуется обратное явление и ток в емкости изменит направление, что равнозначно изменению знака при  $\mathcal{E}(t)$ .

Будем считать, что  $R = const$ ,  $L = const$ , а  $C(t)$  изменяется во времени по функции (10). Если положить, что и  $L(t)$  изменяется во времени по той же функции, то принципиальных изменений в анализе не последует, возрастет лишь громоздкость преобразований. При этих допущениях уравнение (18) можно представить в виде

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0} [1 + m_c \cos(\Omega t + \varphi_c)] q = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon). \quad (19)$$

Перемещаем это уравнение в комплексную плоскость –

$$L \frac{d^2 \hat{q}}{dt^2} + R \frac{d \hat{q}}{dt} + \frac{1}{C_0} \left( \frac{m_C}{2} e^{-j\Omega t} + 1 + \frac{\dot{m}_C}{2} e^{j\Omega t} \right) \hat{q} = \dot{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t}, \quad (20)$$

где  $\dot{\mathcal{E}}_m = \mathcal{E}_m e^{j\varphi_\varepsilon}$ .

Решение задаем в виде функции Хилла –

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{Q}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \\ \frac{d \hat{q}}{dt} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} j(\omega+k\Omega) \dot{Q}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \\ \frac{d^2 \hat{q}}{dt^2} &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\omega+k\Omega)^2 \dot{Q}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если подставить в (21) в (20), то после преобразований получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{k-1} + \left[ -(\omega+k\Omega)^2 L + j(\omega+k\Omega)R + \frac{1}{C_0} \right] \dot{Q}_k + \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{k+1} \right\} e^{j(\omega+k\Omega)t} = \dot{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}. \quad (22)$$

Это – определяющее уравнение, здесь для каждого  $k$  получается свое уравнение. В итоге получается бесконечная система уравнений. Делаем соответствующую выборку.

При  $k = 0$

$$\frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{-1} + \left[ -\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C_0} \right] \dot{Q}_0 + \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_1 = \dot{\mathcal{E}}_m,$$

При  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{k-1} + \left[ -(\omega+k\Omega)^2 L + j(\omega+k\Omega)R + \frac{1}{C_0} \right] \dot{Q}_k + \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0} \dot{Q}_{k+1} &= 0, \\ k &= -\infty, \dots, -1, 1, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Для уменьшения громоздкости введем обозначения:

$$a_{k,k} = -(\omega+k\Omega)^2 L + j(\omega+k\Omega)R + \frac{1}{C_0}, \quad a_{k,k-1} = \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{C_0}, \quad a_{k,k+1} = \frac{m_C}{2} \frac{1}{C_0}.$$

Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$\begin{cases} a_{0,1} \dot{Q}_{-1} + a_{0,0} \dot{Q}_0 + a_{0,1} \dot{Q}_1 = \dot{\mathcal{E}}_m \\ a_{k,k-1} \dot{Q}_{k-1} + a_{k,k} \dot{Q}_k + a_{k,k+1} \dot{Q}_{k+1} = 0 \end{cases}$$

Это – бесконечная система уравнений, которую можно представить в компактном векторном виде

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (23)$$

$\mathbf{A}$  – бесконечная матрица со структурой

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_{-2,-2} & a_{-2,-1} & & & \\ \hline a_{-1,-2} & a_{-1,-1} & a_{-2,-0} & & \\ \hline & a_{0,-1} & a_{0,0} & a_{0,1} & \\ \hline & & a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ \hline & & & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{x}$  – бесконечный искомый вектор-столбец,  $\mathbf{f}$  – свободный вектор-столбец:

$$\mathbf{x} = \begin{array}{|c|} \hline x_{-2} \\ \hline x_{-1} \\ \hline x_0 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{f} = \begin{array}{|c|} \hline f_0 \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

Здесь  $x_k = \dot{Q}_k$ ,  $f_0 = \dot{\mathcal{E}}_m$ , клетки с нулевыми элементами оставлены пустыми.

Матрица  $\mathbf{A}$  состоит из трех ненулевых диагоналей: главной и двух побочных, примыкающих к главной слева и справа, причем элементы каждой побочной диагонали одинаковые. Свободный вектор состоит из единственного ненулевого элемента  $f_0 = \dot{\mathcal{E}}_m$ . Известно [5], что решение бесконечного векторного уравнения (23) с матрицей, состоящей из трех диагоналей выражается через непрерывные дроби. В отличие от (16) матрица в (23) обычная, не блочная. Удобным для практики решением бесконечных систем типа (23) является метод редукции (усечения). Теория бесконечных алгебраических систем уравнений приведена в монографии [3].

При решении бесконечных систем уравнений методом редукции желательно предварительно убедиться в сходимости этих систем. Общий метод проверки бесконечных систем на сходимость не разработан, известно несколько достаточных условий сходимости, но они не охватывают общего случая. С другой стороны, не зарегистрировано таких расходящихся бесконечных систем, которые описывают реальные физические объекты.

Поэтому в некоторых случаях при анализе параметрического контура приходится постулировать сходимость полученных бесконечных систем уравнений, а полученное решение при необходимости проверять экспериментально. Заметим, что проверить экспериментально полученное решение намного проще, чем экспериментально получить решение.

Приближенное решение векторного уравнения (23) дает возможность получить конечное число комплексных амплитуд заряда

$$\dot{Q}_{-n}, \dot{Q}_{-n+1}, \dots, \dot{Q}_{-1}, \dot{Q}_0, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_n.$$

По ним строится изображение решения –

$$\hat{q} = \sum_{k=-n}^n \dot{Q}_{-k} e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad \dot{Q}_k = Q_k e^{j\varphi_k},$$

(24)

а по изображению находится решение

$$q(t) = \text{Re } \hat{q} = \sum_{k=-n}^n Q_k \cos[(\omega + k\Omega)t + \varphi_k].$$

Аналогичная методика применяется и при решении блочных бесконечных систем типа (16). Из теории матриц известно, что блочная система переводится в обычную систему ликвидированием перегородок между блоками.

В общем случае изменения элементов контура по периодическому закону с общим периодом можно применить эту же методику. Тогда все коэффициенты уравнения (19) разлагаются в ряд Фурье, находится изображение этого уравнения типа (20). В результате получится бесконечная система (23), но в матрице  $A$  все диагонали будут заполненными. Пусть разложение емкости в ряд Фурье имеет вид

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{e^{jk\Omega t} + e^{-jk\Omega t}}{2}.$$

В матрице  $A$  главная диагональ связана с постоянной составляющей ( $k = 0$ ) этого разложения,  $k$ -ая правая диагональ – с гармоникой  $\frac{C_k}{2} e^{jk\Omega t}$ ,  $k$ -ая левая – с гармоникой  $\frac{C_k}{2} e^{-jk\Omega t}$ . При приближенном анализе ряд Фурье ограничивается,

тогда матрица  $\mathbf{A}$  имеет конечное число диагоналей, симметрично расположенных относительно главной диагонали.

То же справедливо и для бесконечной блочной системы (16) при гармоническом возмущении. При возмущении в виде функции Хилла вектор  $\mathbf{f}$  будет заполненным.

#### 4. Свободные колебания в параметрическом контуре

Анализ свободных колебаний более сложный, чем вынужденных. Система уравнений для свободных колебаний в ненормированном виде можно получить из (2) при условии  $i_s(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon(t) \equiv 0$  –

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{G}{C}q - \frac{1}{L}\Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\Phi \end{cases}, \quad (25)$$

а в нормированном – из (4) при  $\mathbf{f}(t) \equiv 0$ , именно,

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}. \quad (26)$$

Сначала рассмотрим обычный контур, когда коэффициенты в системе (25) постоянны. С родственными функциями для него являются функции типа затухающих синусоид:

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi_q) \leftarrow \hat{q} = Q_m e^{-\alpha t} e^{j(\omega_c t + \varphi_q)} = \dot{Q}_m e^{(-\alpha + j\omega_c)t} = \\ &= \dot{Q}_m e^{j(\omega_c + j\alpha)t} = \dot{Q}_m e^{j\dot{\omega}t}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\dot{Q}_m = Q_m e^{j\varphi_q}$ ,  $\dot{\omega} = \omega_c + j\alpha$  – комплексная частота. Появился новый параметр – комплексная частота, действительная часть которой – частота свободных колебаний, а мнимая – коэффициент затухания.

Аналогично,

$$\Phi(t) = \Phi_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi_\Phi) = \dot{\Phi}_m e^{j\dot{\omega}t}. \quad (28)$$

Находим

$$\frac{dq}{dt} \leftarrow \frac{d\hat{q}}{dt} = j\dot{\omega}\dot{Q}_m e^{j\dot{\omega}t}, \quad \frac{d\Phi}{dt} \leftarrow \frac{d\hat{\Phi}}{dt} = j\dot{\omega}\dot{\Phi}_m e^{j\dot{\omega}t}.$$

Подставляя нужные изображения, переходим от системы (25) к соответствующей системе для изображений

$$\begin{cases} \left(j\dot{\omega} + \frac{G}{C}\right)\dot{Q}_m + \frac{1}{L}\dot{\Phi}_m = 0 \\ -\frac{1}{C}\dot{Q}_m + \left(j\dot{\omega} + \frac{R}{L}\right)\dot{\Phi}_m = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Имеем однородную алгебраическую систему двух уравнений. Известно, что такая система имеет ненулевые решения тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} j\dot{\omega} + \frac{G}{C} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & j\dot{\omega} + \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \left(j\dot{\omega}_c + \frac{G}{C}\right)\left(j\dot{\omega}_c + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно частоты  $j\omega_c$  –

$$(j\dot{\omega}_c)^2 + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)(j\dot{\omega}_c) + \frac{1+RG}{LC} = 0.$$

Его решение –

$$\dot{\omega}_c = \pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(G\rho - \frac{R}{\rho}\right)^2} + j\frac{1}{2}\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right).$$

Таким образом, частота свободных колебаний –

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(G\rho - \frac{R}{\rho}\right)^2}, \quad (30)$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – собственная частота контура,  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – характеристическое

сопротивление контура,  $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)$  – коэффициент затухания.

Формулы для заряда и потокосцепления контура:

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi_q), \\ \Phi(t) &= \Phi_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi_\Phi), \end{aligned}$$

где  $Q_m$ ,  $\varphi_q$ ,  $\Phi_m$ ,  $\varphi_\Phi$  определяются из начальных условий.

Перейдем к случаю, когда контур по рис.1 является параметрическим. В таком случае он удовлетворяет бесконечной системе (15) при условии, что  $\mathbf{f} = 0$ , т. е.

$$\mathbf{Ax} = 0, \quad (31)$$

или в развернутом виде (16) при  $f_0 = 0$ . Как известно из алгебры, векторное уравнение (31) имеет ненулевые решения при условии

$$\det \mathbf{A} = 0. \quad (32)$$

Этот определитель зависит от частоты, поскольку главная диагональ матрицы  $\mathbf{A}$ , как видно из (14) зависит от частоты. Известно, что бесконечная матрица  $\mathbf{A}$  как функция частоты является периодической с периодом  $\Omega$ . В частном случае это видно из формул (14), но это утверждение справедливо и в общем случае, поэтому

$$\mathbf{A}(\dot{\omega} + \Omega) = \mathbf{A}(\dot{\omega}), \quad (33)$$

где  $\dot{\omega}$  - один из корней уравнения (32), в общем случае комплексный. Всего корней уравнения (32) бесконечное множество, они представляют собой спектр комплексных частот решения уравнения (31) –

$$\dots, \dot{\omega} - k\Omega, \dot{\omega} - (k-1)\Omega, \dots, \dot{\omega} - \Omega, \dot{\omega}, \dot{\omega} + \Omega, \dots, \dot{\omega} + (k-1)\Omega, \dot{\omega} + k\Omega, \dots \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (34)$$

Этот спектр совместно с начальными условиями определяет свободный процесс параметрического контура. Как видно, мнимые части всех комплексных частот спектра одинаковые. По аналогии с обычным контуром получается, что если эта мнимая часть положительна, то спектр состоит из затухающих синусоид, но в отличие от обычного контура здесь мнимая часть может быть и отрицательной и равной нулю. Если она положительна, то контур асимптотически устойчив, если отрицательно, то – неустойчив, если равна нулю, то – устойчив не асимптотически. В этом заключается неляпуновский метод анализа устойчивости, поскольку в его основу положен метод комплексных амплитуд, не входящий в классическую математику.

Здесь предложена методика анализа свободных процессов для частного случая параметрического контура, у которого емкость и индуктивность изменяются во времени по функциям (10). Принципиальных изменений в этой методике не возникает и в общем случае, когда все элементы контура изменяются во времени по любым периодическим функциям с одной и той же круговой частотой  $\Omega$ . Возрастает только громоздкость преобразований.

## 5. Анализ устойчивости параметрического контура методами Ляпунова

Теория устойчивости Ляпунова [6] является фундаментом, на котором строятся конкретные методики анализа устойчивости систем с сосредоточенными параметрами, независимо от их физической природы. В основу теории положены два метода: первый и второй метод Ляпунова.

Универсальным является первый метод Ляпунова, поскольку принципиально он всегда приводит к результату. Однако он сложен в применении, так как предполагается, что фундаментальная система решений анализируемого уравнения известна, а построить ее – очень непростая задача. По этой причине этот метод не получил широкого распространения в естествознании и технике. В некоторых публикациях [7] из-за сложности применения этот метод считается неэффективным.

Второй метод Ляпунова является фрагментарным. Он требует построения специальной функции, функции Ляпунова. Принцип построения функции приводится, но конкретных способов построения не дается. Если функция Ляпунова известна, то получается удобный для применения метод, позволяющий получать достаточные условия устойчивости или неустойчивости. Поскольку накоплен некоторый опыт построения функции Ляпунова, то второй метод получил распространение в естествознании и технике. Однако, достаточными условиями нельзя полностью исчерпать решение задачи. Можно найти лишь «опорные точки», что тоже важно для практических задач.

Менее известен метод Ляпунова, специально предназначенный для анализа устойчивости линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Этот метод примыкает к первому методу Ляпунова. Он может быть положен в основу анализа устойчивости параметрического контура. Тем более, что с применением компьютерных расчетов эффективность метода может быть многократно увеличена. Рассмотрим этот метод применительно к решаемой здесь задаче.

Уравнение свободных колебаний параметрического контура представим в обобщенном виде

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0, \quad a(t+T) = a(t), \quad b(t+T) = b(t). \quad (35)$$

Заменой переменной [8]  $x = y \exp\left(-\frac{1}{2} \int a(t) dt\right)$  уравнение (35) приводится к виду

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \quad p(t+T) = p(t), \quad (36)$$

где  $p = b - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2} \frac{da}{dt}$ .

Ляпуновым доказано, что если  $p(t) \leq 0$ , то уравнение (36) неустойчиво. Если  $p(t) \geq 0$ , то оно может быть, как устойчивым, так и неустойчивым. Анализ Ляпунова разработан для этого случая. Ниже представлены его особенности, важные для применения.

Находится фундаментальная система решений уравнения (36), состоящая из двух решений  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Начальные условия при  $t = 0$ , задаются вполне определенным образом:

$$y_1(0) = 1, \quad \frac{dy_1(0)}{dt} = 0; \quad y_2(0) = 0, \quad \frac{dy_2(0)}{dt} = 1. \quad (37)$$

Если эти решения известны, то вычисляется константа Ляпунова

$$A = \frac{1}{2} \left[ y_1(T) + \frac{dy_2(T)}{dt} \right]. \quad (38)$$

Если  $|A| < 1$ , то уравнение (38) устойчиво, при  $|A| > 1$  – неустойчиво. Основная трудность – найти фундаментальную систему решений  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ . Компьютерными вычислениями эта задача решается достаточно просто. Рассмотрим решение  $y_1(t)$ , решение  $y_2(t)$  находится по аналогии.

Выбираем промежуток времени  $[0, T]$ . Разбиваем его на любое число  $n$  равных или неравных подынтервалов  $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-2}, t_{n-1}], [t_{n-1}, t_n = T]$ .

В пределах каждого подынтервала положим функцию  $p(t)$  постоянной, равной любому ее значению в этом подынтервале. Используя начальные условия

$y_1(0) = 1, \frac{dy_1(0)}{dt} = 0$ , находим решение уравнения и его производную в первом

подынтервале, их значения в конце первого подынтервала  $t = t_1$  являются начальными условиями для второго подынтервала, что позволяет найти решение и его производную для второго подынтервала и т.д., решение и его производная доводится до конца интервала  $t = T$ :  $y_1(T), \frac{dy_1(T)}{dt}$ .

Аналогично находится два других числа  $y_2(T), \frac{dy_2(T)}{dt}$ , после чего вычисляется константа Ляпунова (38), позволяющая решить задачу об устойчивости параметрического контура. В этом случае на каждом подынтервале находится решение дифференциального уравнения (36) с постоянным коэффициентом, что принципиальных трудностей не составляет. Доказано [9], что процесс такого отыскания решения сходится. Чем на большее число подынтервалов разбит интервал  $[0, T]$ , тем точнее решение. Применение компьютера позволяет разбить интервал  $[0, T]$  на очень большое число подынтервалов (тысячу и более) и получить практически точные решения  $y_1(t), y_2(t)$  и практически точно вычислить константу Ляпунова.

Попытаемся применить второй метод Ляпунова для анализа устойчивости параметрического контура. Этот метод разработан для нелинейной системы  $n$  дифференциальных уравнений. Исследуемое на устойчивость решение этой системы названо невозмущенным решением, тогда любое другое решение считается возмущенным. Известна замена переменной такая, что невозмущенное решение вырождается в тривиальное. Тогда возмущенное решение  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  является отклонением от нуля этих функций времени.

Возмущенная система уравнений задается в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

где правые части  $X_s$  являются известными функциями  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ , обращающимися в нули при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Во втором методе Ляпунова вводится система понятий, которую вместе с обозначениями заимствуем из первоисточника [6]. Задача об устойчивости решается при малых отклонениях решений от нуля, т. е. предполагается, что

$$t \geq T, \quad X_S \leq H \quad (S = 1, 2, \dots, n),$$

где  $T$  может быть сколь угодно большим, а  $H$  – сколь угодно малым.

Вводится в рассмотрение функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  такая, что при достаточно большом  $T$  и достаточно малом  $H$  она может принимать значения одного знака и нуль. В таком случае она называется знакопостоянной. Она уточняется: а) если, кроме нуля, она принимает только положительные значения, то называется положительной, если, кроме нуля, принимает только отрицательные значения, то называется отрицательной.

Если знакопостоянная функция  $V$  не зависит от  $t$  и может принимать нулевое значение только в случае  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , то она называется знакоопределенной. Это понятие уточняется: если она принимает только положительные значения, то называется определенно-положительной, если только отрицательные значения, то определенно-отрицательной. Эти понятия распространяются также на функцию  $V$ , зависящую от  $t$ . Если для функции  $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  можно подобрать определенно-положительную функцию  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такую, что  $V - W$  является положительной, то функция  $V$  считается определенно положительной. Если для функции  $V$  возможно подобрать определенно-отрицательную функцию  $W$  такую, что функция  $V - W$  отрицательна, то такая функция  $V$  является определенно отрицательной.

Считается, что функция  $V$  допускает бесконечно малый высший предел, если при больших  $t \geq T$  и малых  $|X_S| \leq h$  ( $S = 1, 2, \dots, n$ ) выполняется неравенство

$$|V| \leq \varepsilon$$

для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$ .

Полная производная функции  $V$  для исходной дифференциальной системы вычисляется по формуле

$$\frac{dV}{dt} = V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Приводим дословно взятую из первоисточника [6] теорему об устойчивости, где на стр.59 она приведена как теорема 1.

*Теорема 1.* Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию  $V$ , производная которой  $V'$  в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ , или тождественно равной нулю, то возмущенное движение устойчиво.

Кроме этой теоремы весьма полезным для нашей задачи является утверждение, приведенное на стр.61 как примечание 2. Дословная его формулировка здесь приводится.

*Примечание 2.* Если функция  $V$ , удовлетворяющая условиям теоремы, в то же время допускает бесконечно малый высший предел, а производная ее допускает знакоопределенную функцию, то можно доказать, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нашему асимптотически.

Таким образом, теорема позволяет получить достаточные условия устойчивости контура, а примечание 2 – достаточные условия асимптотической устойчивости контура. Приведем один из примеров использования этих утверждений для нашей задачи.

Свободный процесс зададим в нормированном виде, соответствующую дифференциальную систему можно получить из (3), приравняв нулю свободные функции –

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -t_M \frac{G}{C} x_1 - \frac{t_M r}{L} x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = t_M \frac{1}{rC} x_1 - t_M \frac{r}{L} x_2 \end{cases} \quad (40)$$

Здесь нормировочное сопротивление  $r$  можно выбирать произвольно.

Выберем ряд калибровочных функций –

$$f_1(\tau) = e^{-\alpha\tau}, \quad f_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \quad \dots, \quad f_k(\tau) = e^{-\alpha\tau^k}, \quad \dots$$

чем больше  $k$  тем круче функция  $f_k$  вместе со своей производной стремится к нулю при больших  $\tau$ . Функцию Ляпунова  $V(x_1, x_2, \tau)$  и функцию  $W(x_1, x_2)$  задаем следующим образом

$$V(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(1 + f_k), \quad W(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Очевидно, что  $V(x_1, x_2, \tau) > W(x_1, x_2)$ , при всех  $\tau$ , поскольку функция  $W$  определенно-положительна, то и функция  $V$  определенно-положительна.

Находим полную производную функции Ляпунова с учетом дифференциальной системы (40) –

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial \tau} = \left( x_1 \frac{dx_1}{d\tau} + x_2 \frac{dx_2}{d\tau} \right) (1 + f_k) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \frac{df_k}{d\tau} = \\ &= -t_M \left( \frac{G}{C} x_1^2 + \frac{r}{L} x_1 x_2 - \frac{1}{rC} x_1 x_2 + \frac{R}{L} x_2^2 \right) (1 + f_k) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \frac{df_k}{d\tau}. \end{aligned}$$

Если функция  $V$  определенно-положительная, то для устойчивости системы (40) ее полная производная должна быть неположительной, начиная с любого момента времени  $\tau_0$ . Выберем этот момент настолько большим и подберём функцию  $f_k$  так, чтобы  $(x_1^2 + x_2^2) \frac{df_k}{d\tau}$  было пренебрежимо малым и  $f_k \ll 1$ . Тогда

выражения  $V$  и  $\frac{dV}{d\tau}$  упростятся –

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad \frac{dV}{d\tau} = -t_M \left[ \frac{G}{C} x_1^2 + \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{rC} \right) x_1 x_2 + \frac{R}{L} x_2^2 \right]. \quad (41)$$

Здесь в квадратных скобках находится квадратичная форма. Которую можно представить через симметричную матрицу  $(A_c \mathbf{x}, \mathbf{x})$ .

Это – скалярное произведение двух векторов  $A_c \mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,

$$A_c = \left\| \begin{array}{cc} \frac{G}{C} & \frac{1}{2} \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{rC} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{rC} \right) & \frac{R}{L} \end{array} \right\|.$$

Для того, чтобы функция  $\frac{dV}{d\tau}$  была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма была определенно-положительной, а

для этого, согласно условиям Сильвестра [10], главные миноры матрицы  $A_c$  должны быть положительны. Главных миноров для этой матрицы два:

$$\Delta_1 = \frac{G}{C}, \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{G}{C} & \frac{1}{2} \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{rC} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{rC} \right) & \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \frac{GR}{LC} - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{rC} \right)^2.$$

Первый минор  $\Delta_1$  положителен, требуется, чтобы и второй минор  $\Delta_2$  был положительным, т.е.

$$\frac{G(\tau)R(\tau)}{L(\tau)C(\tau)} - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{L(\tau)} - \frac{1}{rC(\tau)} \right)^2 > 0$$

или после преобразования

$$\left| \frac{r}{L(\tau)} - \frac{1}{rC(\tau)} \right| < 2 \sqrt{\frac{G(\tau)R(\tau)}{C(\tau)L(\tau)}}.$$

Это неравенство удобно представить через характеристическое сопротивление

$$\rho(\tau) = \sqrt{\frac{L(\tau)}{C(\tau)}} -$$

$$\left| \frac{r}{\rho(\tau)} - \frac{\rho(\tau)}{r} \right| < 2 \sqrt{G(\tau)R(\tau)}.$$

Очевидно, это же равенство справедливо не только в нормированном времени  $\tau$ , но и в обычном времени  $t$  –

$$\left| \frac{r}{r(t)} - \frac{r(t)}{r} \right| < 2 \sqrt{G(t)R(t)}. \quad (42)$$

Функции в (41) при  $t_M = 1$ ,  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \Phi$ , переводятся из нормированного в обычное время, при этом  $V$  – определенно-положительная функция, поскольку она явно не зависит от  $t$ , то она допускает бесконечно малый высший предел.

Её полная производная  $\frac{dV}{dt}$  является определенно отрицательной. Согласно теореме 1 и примечанию 2 это достаточные условия асимптотической устойчивости дифференциальной системы (40) или параметрического контура. Сформулируем его.

*Критерий асимптотической устойчивости параметрического контура по рис.1 со всеми изменяющимися по непрерывным периодическим функциям параметрами.* Контур асимптотически устойчив, если при всех  $t$ , начиная с любого  $t_0$ , выполняется неравенство (42).

Очевидно, что если  $\rho(t) = const$ , то при  $r = \rho$  неравенство (42) выполняется. Это реализуется при синхронном изменении реактивностей, т. е.

$$\frac{L(t)}{C(t)} = const.$$

Получается интересное, легко проверяемое следствие из критерия.

*Следствие.* Если в предыдущем случае  $\rho(t) = const$ , при всех  $t$ , начиная с любого момента  $t_0$ , то контур асимптотически устойчив.

Для радиотехники интересны контуры с малыми тепловыми потерями. В этом случае физический смысл критерия достаточно простой. Характеристическое сопротивление контура должно мало отличаться от постоянной величины. Количественно это можно выразить так:

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot \rho_{II}(t),$$

$\rho_0$  – среднее значение,  $\rho_{II}(t)$  – функция времени с нулевым средним значением, тогда согласно критерию при  $t > t_0$  должно выполняться неравенство

$$\rho_{II}(t) \ll \rho_0.$$

Оказались полезными понятия: изменение реактивностей в фазе (синхронное) и в противофаз (асинхронное). Первое при прочих равных условиях максимально приближено к устойчивости, а второе – к неустойчивости контура.

## 6. Заключение

1. Известно, что в качестве образца анализа нелинейных радиоцепей взят анализ радиоцепей с постоянными параметрами. Образец пока недостижим из-за несоизмеримой сложности этих анализов. Этот же образец можно взять для анализа параметрических радиоцепей. Он тоже пока недостижим, но в перспективе можно к нему приблизиться.

2. Основные трудности анализа параметрического контура – математического характера. В частности, оказалось, что требуется разработанная полностью теория бесконечных алгебраических систем уравнений, особенно блочных. Проблема сходимости таких систем в общем виде не решена.

3. Задача об устойчивости процессов в параметрическом контуре является ключевой. Популярные в радиоэлектронике методы анализа устойчивости неприменимы для параметрических радиочепей. Нуждаются в развитии применительно к радиочепям как ляпуновские, так и неляпуновские методы анализа устойчивости.

4. В статье акцентирована математическая сторона анализа параметрического контура, уточнены требования к адекватному математическому аппарату, в этом направлении получены новые результаты пока частного характера, но в перспективе могут быть развиты и обобщены.

5. Предложенный анализ открыт для обобщений, в частности, для параметрических радиочепей общего характера и через принцип линейного включения, для нелинейных радиочепей.

### **Литература**

1. Былов Б. Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий.- М.:Наука,1966.-575с.

2. Величко Ю. Т. Теоретичні основи радіотехнічних мереж / Ю. Т. Величко.-Львів: Видавництво ЛДУ, 1966.-340с.

3. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов.-М.-Л.:Госфизматиздат,1962.-708с.

4. Каган В. Ф. Основания теории определителей / В. Ф. Каган.- Одесса,1922.-521с.

5. Бирюк Н. Д. Основы теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас.- Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012.-345с.

6. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т.2 / А. М. Ляпунов.-М.: Изд. АН СССР,1956.-470с.

7. Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский.-М.:Наука,1972.-718с.

8. Зайцев В. Ф. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин.- М.:Факториал,1997.-304с.

9. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович.-М.:Наука,1967.-472с.

10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер.-М.:Наука,1988.-548с.

**Для цитирования:**

Н. Д. Бирюк, А. Ю. Кривцов. Анализ процессов в параметрическом контуре общего вида. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun18/9/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2018.6.9