

УДК 517.9

## ОСНОВЫ ГИПОТЕЗЫ УСЛОВИЙ РИТМИЧНОЙ РАБОТЫ СЕРДЕЧНОЙ КАМЕРЫ В РАМКАХ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А. П. Черняев

Московский физико-технический институт (государственный университет),  
141700, г. Долгопрудный Моск. обл., Институтский пер., 9

Статья поступила в редакцию 18 мая 2019 г.

**Аннотация.** На основании сравнительной характеристики некоторого класса моделей работы сердечных камер выработаны механические положения гипотезы ритмичной работы сердечной камеры. Эта гипотеза должна добавляться к физическим условиям, на основании которых построены рассматриваемые модели работы сердца. Положения этой гипотезы вырабатываются постепенно по ходу последовательного рассмотрения указанных моделей. Для достижения наибольшей ясности большое внимание уделяется упрощенной модели однокамерного сердца, имеющегося у простейших организмов. Поскольку для настоящего исследования мы сравниваем между собой достоинства и недостатки самых широко популярных моделей работы сердца, то теоретическая и практическая ценность настоящего исследования заключается как в постановках задач для отыскания точных решений, так и для выработки приближенных алгоритмов и различных аспектов численного анализа.

**Ключевые слова:** гемодинамика, свободные и вынужденные колебания, колеблющиеся решения.

**Abstract.** On the basis of the comparative characteristics of a certain class of the cardiac chamber models, the mechanical provisions of the hypothesis for the rhythmic activity of the cardiac chamber are developed. This hypothesis should be added to the physical conditions on the basis of which the considered models of heart activity are constructed. The provisions of this hypothesis are developed gradually in the course of successive consideration of these models. To achieve the greatest

clarity, much attention is paid to the simplified single-chamber heart model, available in the simplest organisms. Since for the present study we compare the advantages and disadvantages of the most widely popular models of the heart activity, the theoretical and practical significance of the present study consists in both in the formulation of problems for finding exact solutions, and for developing approximate algorithms and different aspects of numerical analysis.

**Key words:** hemodynamics, free and forced oscillations, oscillating solutions.

## Введение

Для описания работы сердца и сосудистой части кровеносной системы существует множество моделей: модель четырехкамерного сердца Холодова-Симакова [1 – 6] модель Калябина [7], модель Лебеденко-Новоселовой-Ракитянской-Ефимцевой [8], Кошелева-Мухина-Соснина-Фаворского [9], Волобуева [10], Абдель Латифа [11]. Существует великое множество других моделей.

Однако, до сих пор отсутствует единая математическая теория, описывающая процессы трансформации ритма в проводящей системе сердца, позволяющая прогнозировать нарушения ритма сердца при стрессовых воздействиях различных видов, позволяющая рассчитывать количественные характеристики амплитудно–временной упорядоченности сердечного ритма при различных аритмиях [12], [13]. Несмотря на большое разнообразие математических моделей сердечной деятельности, при моделировании сердечно–сосудистой системы возникает целый ряд проблем: отсутствие преемственности в разработке моделей, многочисленность несвязанных подходов, несравнимость моделей между собой [12 – 17].

Несмотря на большое разнообразие математических моделей сердечно–сосудистой системы, у некоторых групп моделей есть общие элементы. Так, модели Холодова-Симакова, Калябина и Лебеденко-Новоселовой-Ракитянской-Ефимцевой объединяет, то, что в них имеются одинаковые линейные

обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с правыми частями, которые можно назвать уравнениями вынужденных колебаний.

## 1. Уравнения вынужденных колебаний

Эти уравнения описывают кровоток в камерах сердца, независимой переменной этих уравнений является время. Коэффициенты каждого из этих уравнений зависят от инерционности и растяжимости стенки соответствующей камеры сердца, а также гидродинамического сопротивления этой камеры [1 – 8]

$$I_j \frac{d^2 V_j}{dt^2} + r_j \frac{dV_j}{dt} + \frac{V_j}{C_j} = p_j(t) - p_j^{ext}(t), \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (1.1)$$

Здесь  $j$  – индекс камеры,  $I_j$  и  $C_j$  – инерционность и растяжимость стенок камеры,  $p_j$  – давление в камере,  $V_j = V_j(t)$  – объемы сердечных камер,  $p_j^{ext} = p_j^{ext}(t)$  – задаваемая извне функция, определяющая внешнее давление, обусловленное сокращением мышц сердца,  $r_j$  – гидродинамическое сопротивление в межкамерных каналах.

В (1.1) искомыми функциями являются  $V_j = V_j(t)$ , а правые части суть задаваемые извне функции, определяющие внешнее давление, обусловленное сокращением мышц сердца, которые описывают систолу и диастолу, а также давления перед входами и за выходами из сердца. Далее, к (1.1) добавляются законы сохранения массы для каждой из камер, а также общие граничные условия для задач о движении крови в сердце и в сосудистой сети и условия совместности.

Наша гипотеза состоит в том, что в условиях ритмичной работы рассматриваемой математической модели сердца правые части должны быть такими, чтобы решения этих уравнений были колеблющимися относительно некоторой горизонтали и ограниченными.

## 2. Упрощенная математическая модель для однокамерного сердца

Наиболее обстоятельно из этих трех моделей рассмотрена гемодинамическая модель Калябина [8], потому, что она включает в себя и

упрощенную модель однокамерного сердца, которая состоит из одной активной и одной пассивной камеры. Эта модель описывает гемодинамическую систему простейших.

$$I_1 \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + R_1 \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t)}{C_1} = P_1(t) - F(t), \quad (2.1)$$

$$I_2 \frac{d^2 V_2(t)}{dt^2} + R_2 \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{V_2(t)}{C_2} = P_2(t), \quad (2.2)$$

$$R_{1,2} \frac{dV_1(t)}{dt} = P_2(t) - P_1(t), \quad (2.3)$$

$$R_{2,1} \frac{dV_2(t)}{dt} = P_1(t) - P_2(t). \quad (2.4)$$

В (2.1)–(2.4)  $V_1(t), V_2(t)$  – подлежащие определению объемы первой и второй камер;  $P_1(t), P_2(t)$  – давления в них;  $F(t)$  – дополнительное внешнее давление, создаваемое активной стенкой первой камеры;  $I_1, I_2$  – коэффициенты инерции камер;  $C_1, C_2$  – растяжимости;  $R_1, R_2$  – сопротивления камер,  $R_{1,2}$  – коэффициент сопротивления межкамерного потока. Из (2.3) и (2.4) мы получаем

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -\frac{dV_2(t)}{dt} \Rightarrow V_1(t) + V_2(t) = V_0 = const. \quad (2.5)$$

### 3. Сведение модели однокамерного сердца к одному уравнению вынужденных колебаний

Для удобства из (2.5) получим три равенства

$$V_2(t) = V_0 - V_1(t), \quad \frac{dV_2(t)}{dt} = -\frac{dV_1(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 V_2(t)}{dt^2} = -\frac{d^2 V_1(t)}{dt^2},$$

которые мы подставим в (2.2)

$$-I_2 \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} - R_2 \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_0 - V_1(t)}{C_2} = P_2(t).$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$I_2 \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + R_2 \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t)}{C_2} = \frac{V_0}{C_2} - P_2(t).$$

Складывая последнее с (2.1), получим

$$(I_1 + I_2) \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{dV_1(t)}{dt} + (C_1^{-1} + C_2^{-1}) V_1(t) = \frac{V_0}{C_2} + P_1(t) - P_2(t) - F(t).$$

Подставляя разность давлений в последнее уравнение из уравнения (2.3), имеем

$$(I_1 + I_2) \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2 + R_{1,2}) \frac{dV_1(t)}{dt} + (C_1^{-1} + C_2^{-1}) V_1(t) = \frac{V_0}{C_2} - F(t). \quad (3.1)$$

Уравнение вынужденных колебаний (3.1) является линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью [18]. Оно имеет три различных режима решений в зависимости от того: являются ли корни характеристического уравнения

$$(I_1 + I_2) \lambda^2 + (R_1 + R_2 + R_{1,2}) \lambda + (C_1^{-1} + C_2^{-1}) = 0$$

различными действительными, совпадающими действительными, или комплексно сопряженными.

В качестве иллюстрации этого приведем три примера уравнений (3.1). В случае когда  $I_1 + I_2 = 1$ ,  $R_1 + R_2 + R_{1,2} = 3$ ,  $C_1^{-1} + C_2^{-1} = 2$  корни характеристического уравнения  $-2$  и  $-1$ , и в случае, когда правая часть (3.1) равна  $10 + \sin(0.25t)$  решение выражается формулой

$$V_1(t) = 5 + \frac{(2 - 0.25^2) \sin(0.25t) - 0.75 \cos(0.25t)}{0.25^4 + 5 \cdot 0.25^2 + 4} + \tilde{C}_1 e^{-2t} + \tilde{C}_2 e^{-t}, \quad (3.2)$$

где  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  произвольные постоянные. При  $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0.125$  график (3.2), построенный в Wolfram Mathematica, изображен на рис.1.

В случае, когда  $I_1 + I_2 = 1$ ,  $R_1 + R_2 + R_{1,2} = 4$ ,  $C_1^{-1} + C_2^{-1} = 4$ , корни характеристического уравнения совпадают и равны  $-2$ , и в случае, когда правая часть (3.1) равна  $20 + \sin(0.25t)$ , решение выражается формулой

$$V_1(t) = 5 + \frac{(2 - 0.25^2) \sin(0.25t) - \cos(0.25t)}{0.25^4 + 8 \cdot 0.25^2 + 16} + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) e^{-2t}, \quad (3.3)$$

где  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  произвольные постоянные. При  $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0.125$  график (3.3), построенный в Wolfram Mathematica, изображен на рис.2.

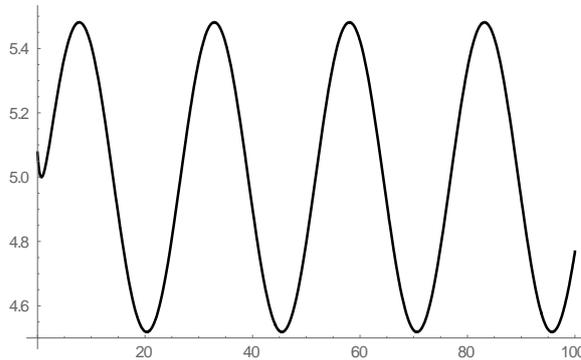


Рис.1. График функции (3.2) в Wolfram Mathematica.

`Plot[5 + ((2 - 0.25^2) * Sin[0.25t] - 0.75 * Cos[0.25t]) / (0.25^4 + 5 * (0.25)^2 + 4) + 0.125Exp[-2t] + 0.125Exp[-t], {t, 0, 100}, PlotStyle -> Black]`

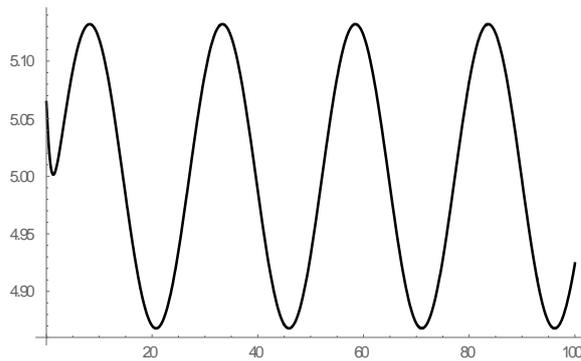


Рис.2. График функции (3.3) в Wolfram Mathematica.

`Plot[5 + ((2 - 0.25^2) * Sin[0.25t] - Cos[0.25t]) / (0.25^4 + 8 * (0.25^2) + 16) + (0.125 + 0.125t)Exp[-2t], {t, 0, 100}, PlotStyle -> Black]`

В случае, когда  $I_1 + I_2 = 1$ ,  $R_1 + R_2 + R_{1,2} = 2$ ,  $C_1^{-1} + C_2^{-1} = 2$ , корни характеристического уравнения комплексносопряженные и равны  $-1 \pm i$ , и в случае, когда правая часть (3.1) равна  $10 + \sin(0.25t)$ , решение выражается формулой

$$V_1(t) = 5 + \frac{(2 - 0.25^2)\sin(0.25t) - 0.5\cos(0.25t)}{0.25^4 + 4} + (\tilde{C}_1 \sin t + \tilde{C}_2 \cos t)e^{-t}, \quad (3.4)$$

где  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  произвольные постоянные. При  $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0.125$  график (3.4), построенный в Wolfram Mathematica, изображен на рис.3.

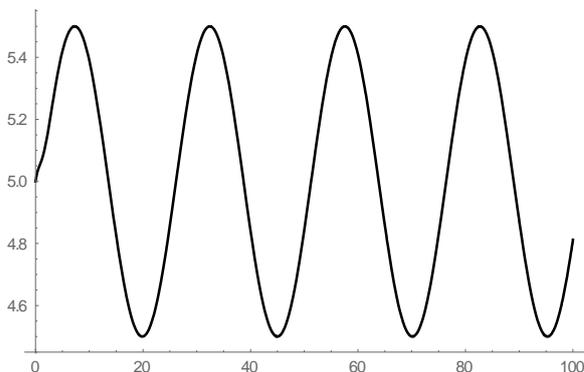


Рис.3. График функции (3.4) в Wolfram Mathematica.

```
Plot[5 + ((2 - 0.25^2) * Sin[0.25t] - 0.5 * Cos[0.25t]) / (0.25^4 + 4) + 0.125Exp[-t] * (Sin[t] + Cos[t]), {t, 0, 100}, PlotStyle -> Black]
```

#### 4. Вопросы гемодинамики, связанные с уравнением Кортевега–Де Фриза

В работе А.Н. Волобуева [10] основное внимание уделено двум вопросам: связи характера потока жидкости с изменяющимся под действием этого потока геометрией эластичной трубки; роли нелинейности уравнений гидродинамики при течении жидкости по эластичным трубкам. Изначально в [10] за неизвестные функции принимаются скорость кровотока и сечение сердечной камеры или сосуда. Затем задача сводится к решению двух уравнений Кортевега–Де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.1)$$

где

$$S_0 \dot{\phantom{S}} = \frac{3}{4\pi}(u + v), \quad v_0 \dot{\phantom{v}} = \frac{3}{4\pi}(u - v). \quad (4.2)$$

Здесь  $S_0 \dot{\phantom{S}}$ ,  $v_0 \dot{\phantom{v}}$  – безразмерные скорость жидкости на оси потока и площадь сечения вне манжетки сфигмоманометра по методу Короткова [10].

Мы остановимся лишь на решении первого уравнения (4.1) используя

метод работы [18], поскольку второе уравнение решается аналогично. Итак, ищем решения первого уравнения (4.1) в виде

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (4.3)$$

В (4.3)  $u(x, t)$  – общее решение типа бегущей волны. Т. о., первое уравнение (4.1) сводится сначала к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$u'''(\xi) = -6u(\xi)u'(\xi) + cu'(\xi),$$

затем при помощи домножения на  $d\xi$  и интегрирования порядок понижается до второго

$$u''(\xi) = -3u^2(\xi) + cu(\xi) + A, \quad \text{const} = A \in \mathfrak{R},$$

и наконец, после домножения на  $u'(\xi)d\xi$  и интегрирования порядок понижается до первого

$$\frac{[u'(\xi)]^2}{2} = P(u). \quad (4.4)$$

В (4.4)

$$P(u) = -u^3 + \frac{c}{2}u^2 + Au + B = (u - u_1)(u - u_2)(u_3 - u), \quad \text{const} = B \in \mathfrak{R}, \quad (4.5)$$

причем справедливы равенства

$$c = 2(u_1 + u_2 + u_3), \quad A = -(u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1), \quad B = u_1u_2u_3. \quad (4.6)$$

Поскольку, в (4.5) и (4.6)  $u_1, u_2, u_3$  – корни многочлена  $P(u)$ , то

$$u = u_1, \quad u = u_2, \quad u = u_3$$

являются стационарными решениями уравнения (4.5).

Покажем, что в случае действительных и различных корней  $u_1, u_2, u_3$  решениями уравнения (4.4) являются так называемые кноидальные волны.

Действительно, поскольку без ограничения общности можно положить  $u_1 < u_2 < u_3$ , то из (4.4) при  $u \neq u_1, u \neq u_2, u \neq u_3$  следует справедливость

уравнения

$$\frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u_3-u)}} = \pm\sqrt{2}d\xi. \quad (4.7)$$

В результате замены переменной в (4.7)

$$-u+u_3 = \eta^2, u = u_3 - \eta^2$$

мы получаем справедливость равенств

$$du = -2\eta d\eta, u - u_1 = u_3 - u_1 - \eta^2, u - u_2 = u_3 - u_2 + \eta^2.$$

Таким образом, (4.7) будет иметь вид

$$\pm d\xi = \frac{-\sqrt{2}d\eta}{\sqrt{(u_3-u_1-\eta^2)(u_3-u_2+\eta^2)}}. \quad (4.8)$$

Если в (4.8) сделать замену

$$\eta = \sqrt{u_3-u_2}s, s = \frac{\eta}{\sqrt{u_3-u_2}} = \sqrt{\frac{u_3-u}{u_3-u_2}}, \quad (4.9)$$

то

$$\begin{aligned} u_3 - u_1 - \eta^2 &= u_3 - u_1 - (u_3 - u_2)s^2 = (u_3 - u_1) \left( 1 - \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1} s^2 \right) \\ &= (u_3 - u_1)(1 - k^2 s^2), \quad k = \sqrt{\frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}}; \end{aligned}$$

$$u_3 - u_2 + \eta^2 = u_3 - u_2 + (u_3 - u_2)s^2 = (u_3 - u_2)(1 + s^2). \quad (4.10)$$

С учетом (4.9) и (4.10) уравнение (4.8) приводится к виду

$$\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} d\xi = \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}. \quad (4.11)$$

Из (4.9) следует, что если  $u = u_3$ , то  $s = 0$ , а если  $u = u_2$ , то  $s = 1$ . Поскольку

$u_1, u_2, u_3$  действительны, различны и  $u_1 < u_2 < u_3$ , то взяв интеграл от обеих частей

(4.11), и выбирая при этом  $c_1$  так, чтобы  $\xi + c_1 = 0$  при  $s = 0$ , получим

$$\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2 \tau^2)}}. \quad (4.12)$$

Пусть

$$F(s, k) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2 \tau^2)}} \quad (4.13)$$

неполный эллиптический интеграл правой части (4.12) с модулем  $k$ , тогда

$F(s, k)$  – функция обратная к  $sn(F, k)$  – эллиптической функции Якоби [19, с. 44].

Из (4.12) и (4.13) следует

$$sn\left(\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k\right) = s = \sqrt{\frac{u_3 - u}{u_3 - u_2}},$$

или

$$sn^2\left(\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k\right) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2},$$

и тогда

$$u = u_3 - (u_3 - u_2) sn^2\left(\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k\right)$$

или

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u_3 - (u_3 - u_2) \left(1 - cn^2\left(\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k\right)\right) = \\ &= u_2 + (u_3 - u_2) cn^2\left(\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь мы воспользовались равенством  $sn^2(F, k) + cn^2(F, k) = 1$ , где  $cn(F, k)$  – эллиптическая функция Якоби, а  $k$  определяется одной из формул (4.10). Из-за наличия в (4.14) эллиптической функции Якоби  $cn(F, k)$  соответствующая волна называется кноидальной.

Положим  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ . Тогда  $k = 1/\sqrt{2}$ . Уравнение (4.4) с учетом (4.5) будет иметь вид

$$u' = \pm \sqrt{2(u-1)(u-2)(3-u)},$$

Т.К.

$$P(u) = (u - 1)(u - 2)(3 - u), \quad (4.15)$$

а его решение согласно (4.14)

$$u = 2 + cn^2\left(\xi, 1/\sqrt{2}\right). \quad (4.16)$$

График функции (4.15) в Wolfram Mathematica изображен на рис.4

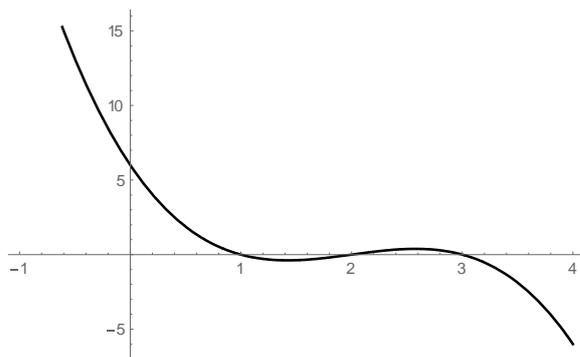


Рис.4. График функции (4.15) в Wolfram Mathematica.

`Plot[(u - 1)(u - 2)(3 - u), {u, -1, 4}, PlotStyle -> Black]`

График функции (4.16) в Wolfram Mathematica изображен на рис.5

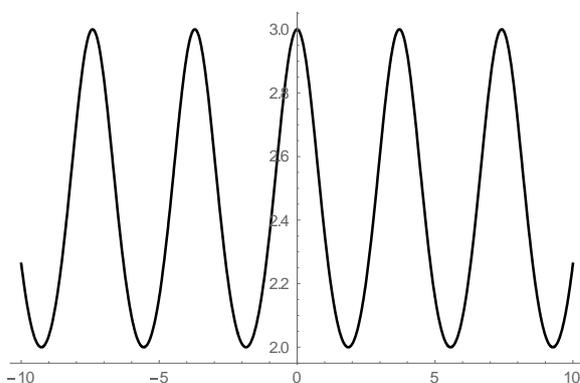


Рис.5. График функции (4.16) в Wolfram Mathematica.

`Plot[2 + (JacobiCN[u, 2^-1])^2, {u, -10, 10}, PlotStyle -> Black]`

Исходя из проведенного исследования, можно заключить, что в предполагаемой гипотезе нужно существование горизонтали, относительно которой решение было бы колеблющимся.

Покажем, что в случае действительных корней  $u_1, u_2, u_3$  и левого кратного

корня  $u_1 = u_2$  решениями уравнения (4.4) являются солитоны.

Действительно, поскольку без ограничения общности можно положить  $u_1 = u_2 < u_3$ , то из (4.4) при  $u \neq u_1 = u_2, u \neq u_3$  следует справедливость уравнения

$$\frac{du}{(u-u_1)\sqrt{u_3-u}} = \pm\sqrt{2}d\xi. \quad (4.17)$$

В результате замены переменной в (4.17)

$$\zeta = \sqrt{u_3-u} \quad (4.18)$$

мы получаем справедливость равенств

$$du = -2\zeta d\eta\zeta, (u-u_1)\sqrt{u_3-u} = \zeta(u_3-u_1-\zeta^2).$$

Таким образом, (4.17) будет иметь вид

$$\pm\sqrt{2}d\xi = \frac{2d\zeta}{\zeta^2-(u_3-u_1)}. \quad (4.19)$$

Интегрируя (4.19) получаем

$$\pm\sqrt{2}(\xi+a_2) = \frac{1}{\sqrt{u_3-u_1}} \ln \left| \frac{\zeta - \sqrt{u_3-u_1}}{\zeta + \sqrt{u_3-u_1}} \right|,$$

или

$$\pm\sqrt{2(u_3-u_1)}(\xi+a_2) = \ln \left| \frac{\zeta - \sqrt{u_3-u_1}}{\zeta + \sqrt{u_3-u_1}} \right|. \quad (4.20)$$

Поскольку, как это следует из (4.18), справедливы неравенства

$$u_1 < u < u_3, 0 < \zeta < \sqrt{u_3-u_1},$$

то избавляясь в (4.20) от логарифма, имеем

$$\exp\left\{\pm\sqrt{2(u_3-u_1)}(\xi+a_2)\right\} = \frac{|\zeta - \sqrt{u_3-u_1}|}{\zeta + \sqrt{u_3-u_1}} = \frac{\sqrt{u_3-u_1} - \zeta}{\zeta + \sqrt{u_3-u_1}},$$

или, что то же самое

$$(\zeta + \sqrt{u_3 - u_1}) \exp\{\pm \sqrt{2(u_3 - u_1)}(\xi + a_2)\} = \sqrt{u_3 - u_1} - \zeta.$$

Последнее мы преобразуем к виду

$$\zeta \left( \exp\{\pm \sqrt{2(u_3 - u_1)}(\xi + a_2)\} + 1 \right) = -\sqrt{u_3 - u_1} \left( \exp\{\pm \sqrt{2(u_3 - u_1)}(\xi + a_2)\} - 1 \right).$$

Выражая теперь из последнего равенства  $\zeta$  через  $\xi$  будем иметь

$$\zeta = \frac{-\sqrt{u_3 - u_1} \left( \exp\{\pm \sqrt{2(u_3 - u_1)}(\xi + a_2)\} - 1 \right)}{\exp\{\pm \sqrt{2(u_3 - u_1)}(\xi + a_2)\} + 1}.$$

Из последнего равенства получим

$$\zeta^2 = (u_3 - u) th^2 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{u_3 - u_1} (\xi + a_2) \right\}.$$

Отсюда и из (4.20) мы будем иметь

$$u = u_3 - \zeta^2 = u_3 - (u_3 - u) th^2 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{u_3 - u_1} (\xi + a_2) \right\}. \quad (4.21)$$

Положим  $u_1 = u_2 = 1, u_3 = 3$ . Уравнение (4.4) с учетом (4.5) будет иметь вид

$$u' = \pm(u-1)\sqrt{2(3-u)},$$

т.к.

$$P(u) = (u-1)^2(3-u), \quad (4.22)$$

а его решение согласно (4.21) при  $a_2 = 0$

$$u(\xi) = 3 - 2th^2 \xi. \quad (4.23)$$

Аналогично [20] нетрудно показать, что формулы (4.21) и (4.23) описывают солитоны.

Покажем, что в случае действительных корней  $u_1, u_2, u_3$ , и правого кратного корня  $u_2 = u_3$  решениями уравнения (4.4) являются неограниченные обратные бегущие волны.

Действительно, поскольку без ограничения общности можно положить  $u_1 < u_2 = u_3$ , то из (4.4) при  $u \neq u_1, u \neq u_2 = u_3$  следует справедливость уравнения

$$\frac{du}{(u_2 - u)\sqrt{u_1 - u}} = \pm\sqrt{2}d\xi. \quad (4.24)$$

В результате замены переменной в (4.24)

$$\sigma = \sqrt{u_1 - u} \quad (4.25)$$

мы получаем справедливость равенств

$$du = -2\sigma d\sigma, (u_2 - u)\sqrt{u_1 - u} = \sigma(u_2 - u_1 + \sigma^2).$$

Таким образом, (4.24) будет иметь вид

$$\pm\sqrt{2}d\xi = -\frac{2d\sigma}{\sigma^2 + (u_2 - u_1)}. \quad (4.26)$$

Интегрируя (4.26) получаем

$$\pm\sqrt{2}(\xi + a_3) = -\frac{2}{\sqrt{u_2 - u_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\sqrt{u_2 - u_1}},$$

или

$$\mp \frac{\xi + a_3}{\sqrt{2}} \sqrt{u_2 - u_1} = \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\sqrt{u_2 - u_1}}.$$

Взяв тангенс от обеих частей последнего равенства и возводя полученное в квадрат, будем иметь

$$\operatorname{tg}^2 \left\{ \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{2}} (\xi + a_3) \right\} = \frac{\sigma^2}{u_2 - u_1},$$

или

$$\sigma^2 = (u_2 - u_1) \operatorname{tg}^2 \left\{ \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{2}} (\xi + a_3) \right\} = u_1 - u.$$

Откуда

$$u = u_1 - (u_2 - u_1) \operatorname{tg}^2 \left\{ \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{2}} (\xi + a_3) \right\}. \quad (4.27)$$

Положим  $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 3$ . Уравнение (4.4) с учетом (4.5) будет иметь вид

$$u' = \pm(3-u)\sqrt{2(1-u)},$$

Т.К.

$$P(u) = (1-u)(3-u)^2, \tag{4.28}$$

а его решение согласно (4.27) при  $a_3 = 0$

$$u(\xi) = 1 - 2tg^2\xi. \tag{4.29}$$

График функции (4.28) в Wolfram Mathematica изображен на рис.8.

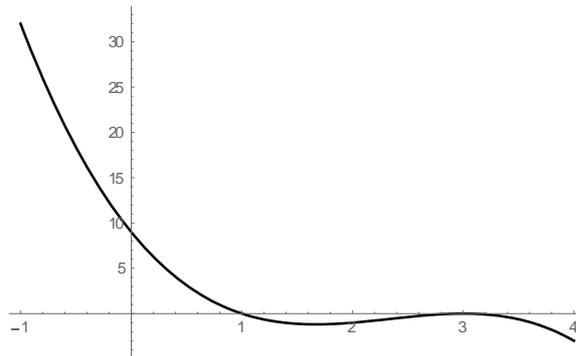


Рис.6. График функции (4.28) в Wolfram Mathematica.  
`Plot[(1 - u)(3 - u)^2, {u, -1,4}, PlotStyle -> Black]`

График функции (4.29) в Wolfram Mathematica изображен на рис.9. Это, согласно (4.2), можно трактовать, как график неограниченной обратной бегущей волны.

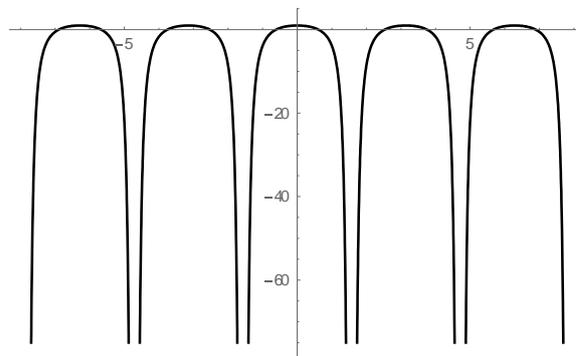


Рис.7. График функции (4.31) в Wolfram Mathematica.  
`Plot[(1 - 2((Tan[u])^2)), {u, -8,8}, PlotStyle -> Black]`

В результате последнего исследования можно заключить, что в гипотезе, которая добавляется к физическим условиям, нужно добавить ограниченность решений.

Во всех указанных выше моделях гидродинамика очень проста. В итоге заметим, что несмотря на разнообразие математических моделей гемодинамической направленности, если рассматривать модели, более близкие к реальности, то самая трудная часть моделирования процессов кровотока – гидродинамическая. Присутствие вогнутых поверхностей на пути кровотока способствует образованию вихрей [20], которые в простых гемодинамических моделях не рассматриваются.

### **Заключение**

Итак, в результате рассмотрения наиболее популярных математических моделей работы сердечных камер можно заключить, что гипотеза должна быть следующей: решение, описывающее работу сердечной камеры, должно быть ограниченным и таким, чтобы существовала горизонталь, относительно которой решение было бы колеблющимся.

### **Литература**

1. Холодов А.С. Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // Компьютерные модели и прогресс медицины. – М.: Наука, 2001, 392 с. С. 127–163.
2. Симаков С.С. Численное исследование динамики системного кровотока при кровопотере // Информационные технологии моделирования и управления. 2006. Том 8, № 33. С. 931–938.
3. Симаков С.С., Холодов А.С. Численное исследование содержания кислорода в крови человека при низкочастотных воздействиях // Математическое моделирование. 2008. Том 20, № 4. С. 87–102.
4. Василевский Ю.В., Саламатова В.Ю., Симаков С.С. Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Том 55, № 9. С.1599–1610.

5. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V.. Methods of Blood Flow Modelling // Math. Model. Nat. Phenom. 2016. Vol. 11., № 1 pp. 1–25.
6. Симаков С.С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Том 10, № 5. С. 581–604.
7. Калябин Г.А. Применение математического анализа к описанию процессов репарации инфаркта миокарда и прогнозированию кардиологических заболеваний: Учеб. Пособие. – М.: РУДН. 2008. – 144 с.
8. Лебеденко И.С., Новоселова Е.С., Ракитянская Л.С., Ефимцева Ю.А. Математическая модель сердца // Биотехносфера. 2009. № 3(3). С. 24–31.
9. Кошелев В.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П. Математические модели квази–одномерной гемодинамики: Методическое пособие. – М.: МАКС Пресс. 2010. – 114 с.
10. Волобуев А.Н. Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // Успехи физических наук. 1995. Том 165, № 2 С. 177–186.
11. Абдель Латиф М.С. Симметричный анализ и некоторые точные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, возникающими в артериальной механике // Известия СГУ. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2011. Том 11, вып. 2. С. 42–48.
12. Мезенцева Л.В. Теоретические основы нарушений сердечного ритма при экстремальных внешних воздействиях. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора биологических наук. 03.03.01 – физиология, 03.01.02 – биофизика. М. 2014. 36 с.
13. Мезенцева Л.В. Теоретические основы нарушений сердечного ритма при экстремальных внешних воздействиях. Диссертация на соискание ученой степени доктора биологических наук. 03.03.01 – физиология, 03.01.02 – биофизика. М. 2014. 229 с.

14. Мезенцева Л.В. Анализ устойчивости различных режимов кардиодинамики методом компьютерного моделирования // Биофизика. 2014. Том 59 (1). С. 151–155.
15. Мезенцева Л.В. Параметры атриовентрикулярного проведения и устойчивость различных режимов кардиодинамики // Биофизика. 2014. Том 59 (1). С. 156–161.
16. Мезенцева Л.В., Перцов С.С. Устойчивость физиологических функций и методы ее оценки // Вестник новых медицинских технологий. 2014. Том 21 (1). С. 12–17.
17. Мезенцева Л.В. Компьютерное моделирование параметрической устойчивости кардиодинамики при мерцательной аритмии // Биофизика. 2014. Том 59 (6). С. 1180–1185.
18. Черняев А.П., Черняева С.А. Вырождение кноидальных волн в неограниченные решения для уравнения Кортевега–Де Фриза. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 6. Режим доступа <http://jre.cplire.ru/jre/jun18/5text.pdf> DOI [10.30898/1684-1719.2018.6.5](https://doi.org/10.30898/1684-1719.2018.6.5)
19. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983.–136 с.
20. Черняев А.П., Черняева С.А. Постановка и численный анализ некоторых задач для кноидальной волны и солитона, как решений уравнения Кортевега–Де Фриза // ИТ – технологии: развитие и приложения: XV Ежегодная Международная научно–техническая конференция: Сборник докладов. – Владикавказ: Северо–Кавказский горно–металлургический институт (государственный технологический университет), 2018. – 340 с.
21. Боголепов В.В., Липатов И.И. Асимптотический анализ развития вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности. Препринт ЦАГИ, № 8. 1990. 54 с.

**Для цитирования:**

А. П. Черняев. Основы гипотезы условий ритмичной работы сердечной камеры в рамках некоторых математических моделей. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun19/11/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2019.6.11