

# Яков Наумович Фельд

Краткая биография

Воспоминания

Полное собрание статей

(Электродинамика, дифракция, антенны)

Лекции

Библиография

2019



#### Аннотация

В сборнике представлены все статьи и лекции Якова Наумовича Фельда, опубликованные в открытой печати. Такой выбор обусловлен не только сохраняющейся актуальностью его работ, их трудностью и рассеянием по разным источникам, но и дает возможность проследить эволюцию Я.Н. Фельда как ученого. Составители полагают, что Я.Н. Фельд не нуждается в особом представлении – на его учебниках, статьях и монографиях учились и продолжают учиться не одно поколение отечественных студентов и аспирантов. В сборник также включены воспоминания ряда ученых, в той или иной мере соприкасавшихся с Яковом Наумовичем.

# Содержание

<b>Предисловие</b> .....	<b>4</b>
<b>Краткая биография</b> .....	<b>7</b>
С.Я. Фельд. Краткая биография Я.Н. Фельда .....	8
<b>Воспоминания</b> .....	<b>13</b>
А.Г. Кюркчан. Мой учитель Яков Наумович Фельд.....	14
Б.З.Каценеленбаум. Яков Наумович Фельд (1912 – 1995).....	17
П.Ш. Фридберг. Воспоминания о Якове Наумовиче Фельде.....	19
П.Я. Уфимцев .....	30
Ю.Н. Ерофеев .....	31
Я.С.Шифрин. Мой «старший брат» - Яков Наумович Фельд.....	35
Р.Л. Евельсон.....	42
<b>Полное собрание статей</b> .....	<b>44</b>
Декремент, энергия и мощность колебательного контура.....	45
Экспериментальная поверка расчетов направленных передающих антенн.....	49
Распространение электромагнитных волн вдоль эллиптического цилиндра.....	62
О некотором дифференциальном уравнении, встречающемся в теории диффракции электромагнитных волн.....	70
Распространение электромагнитных волн вдоль бесконечного вертикального провода, одним концом зарытого в землю.....	81
Телеграфные уравнения и вариационный принцип .....	89
Однотактные и двухтактные волны вдоль двухпроводной линии .....	92
Теория фидеров с прямоугольными экранами .....	108
О теореме единственности решений уравнений Максвелла для вынужденных гармонических колебаний .....	119
Конденсатор как система с распределенными параметрами.....	124
Распространение электромагнитных волн в линиях с прямоугольными экранами .....	133
Потери в фидерных устройствах.....	147
Излучение и возбуждение электромагнитных колебаний через отверстия .....	156
О расчете статической ёмкости антенн .....	162
Теорема взаимности в электродинамике для неустановившихся процессов.....	167
Граничная задача электродинамики и интегральные уравнения некоторых задач диффракции .....	171
Гранично-начальные задачи электродинамики .....	183
Общая теорема взаимности в теории приемно-передающих антенн.....	187
Дифракционные антенны с осевой симметрией.....	190
Поверхностные излучающие системы .....	194
Дифракционные антенны .....	198

Щелевые излучающие системы . . . . .	217
Законы распределения напряжения вдоль щелей . . . . .	221
Излучающие щели в настроенных эндовибраторах . . . . .	225
Мощность излучения и комплексное сопротивление излучения дифракционных антенн . . . . .	229
Излучающие щели в круглых волноводах . . . . .	233
Щелевые антенны . . . . .	246
Об одном методе расчета возбуждения волноводов, экзо- и эндовибраторов . . . . .	261
Щелевые антенны. II . . . . .	273
Многощелевые антенны . . . . .	287
О принципе двойственности в теории дифракции электромагнитных волн у плоских экранов . . . . .	295
Наведение токов движущимися зарядами . . . . .	298
О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах . . . . .	304
Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами . . . . .	308
Падение электромагнитных волн на двойные бесконечные решетки . . . . .	312
Основные этапы развития антенных и фидерных устройств в СССР . . . . .	316
Расчет фазовых скоростей волн в искусственном металлодиэлектрике . . . . .	339
Дифракция электромагнитной волны на полубесконечной решетке . . . . .	350
Об одном методе решения граничных задач электродинамики . . . . .	358
О вариационных методах расчета параметров, являющихся линейными функционалами интегралов уравнений электродинамики . . . . .	371
Современное состояние теории синтеза антенн . . . . .	380
Дифракция электромагнитной волны на двойных полубесконечных несимметричных решетках . . . . .	399
Расчет фазовой скорости волн в цепочках связанных резонаторов . . . . .	409
О сведении задач дифракции на незамкнутых поверхностях к интегральным уравнениям второго рода . . . . .	421
Об оптимальных амплитудно-фазовых распределений в плоских перископических системах . . . . .	431
О единственности решения интегральных уравнений (второго рода) задач дифракции на незамкнутых экранах . . . . .	439
Развитие техники антенных устройств . . . . .	443
Об интегральных уравнениях задач дифракции на незамкнутых экранах . . . . .	479
Современное состояние и проблемы теории антенн . . . . .	487
О сведении одного класса решения интегральных уравнений первого рода к уравнениям второго рода . . . . .	505
Применение нерезонансных функций Грина к построению интегральных уравнений задач дифракции на незамкнутых экранах . . . . .	509

Об одном методе решения задач математической физики . . . . .	516
Синтез линейных антенн с абсолютно интегрируемыми токами . . . . .	520
Дифракция скалярной волны на незамкнутой поверхности с краевым условием Дирихле . . . . .	530
Дифракция электромагнитной волны на системе плоскопараллельных волноводов конечной длины . . . . .	534
Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых экранах . . . . .	546
Дифракция скалярных волн на незамкнутых поверхностях . . . . .	550
Дифракция электромагнитных волн на различных телах . . . . .	559
Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых металлических поверхностях . . . . .	568
Метод вариации произвольных постоянных в задаче о возбуждении волноводов . . . . .	579
Дифракция скалярной волны на параболическом зеркале . . . . .	582
Метод вариации произвольных постоянных в задаче о возбуждении шара электрическими и магнитными токами . . . . .	591
Диафрагма в волноводе произвольного сечения . . . . .	600
Возбуждение импедансного цилиндра произвольной системой токов . . . . .	606
Токи и диаграммы параболического зеркала с облучателем типа элемента Гюйгенса . . . . .	610
Дифракция электромагнитных волн на поверхностях с неоднородным адмитансом . . . . .	619
К интегрированию уравнений Максвелла в слоистых средах . . . . .	628
Диаграммы направленности антенны переменного профиля . . . . .	632
Возбуждение радиально-неоднородного шара электрическими и магнитными токами . . . . .	647
К задаче о дифракции волн на поверхностях с неоднородным адмитансом . . . . .	657
К расчету поля апертурных антенн . . . . .	660
Смешанная краевая задача электродинамики . . . . .	662
Смешанная обратная задача теории антенн . . . . .	667
Синтез антенн по максимуму коэффициента направленного действия . . . . .	674
Метод вариации произвольных постоянных для уравнения Гельмгольца на примере задачи о дифракции на неоднородном шаре . . . . .	681
Дифракция электромагнитных волн на поверхностях с адмитансным операторным краевым условием . . . . .	691
О мощности, извлекаемой антенной из падающего на нее поля . . . . .	696
О максимуме мощности, принимаемой антенной в среде с потерями . . . . .	703
Предельное значение коэффициента направленного действия антенны, расположенной в среде с потерями . . . . .	712
Рассеяние волн на идеально проводящих и импедансных телах . . . . .	719
Принцип дополнительности в теории плоских экранов . . . . .	730
Синтез тока на незамкнутых поверхностях по заданной диаграмме	

направленности . . . . .	733
Рассеяние электромагнитных волн антеннами . . . . .	740
Синтез токов облучателя по заданному распределению тока на зеркале . . . . .	762
О критерии реализуемости диаграмм направленности токами, распределенными на криволинейных поверхностях . . . . .	768
Дифракция электромагнитных волн на «нерэлеевских» телах с нулевыми и импедансными краевыми условиями . . . . .	773
Прямые методы в теории антенн . . . . .	780
Краевые задачи и дифракции волн у поверхностей с переменным адмитансом . . . . .	788
Рассеяние электромагнитных волн зеркальными антеннами . . . . .	797
Обратные задачи теории антенн и критерии реализуемости диаграмм . . . . .	805
Общая теорема взаимности для немонохроматических процессов в теории антенн . . . . .	815
Возбуждение заданными токами металлического конуса, оканчивающегося шаром . . . . .	818
Дифракционно-щелевые антенны . . . . .	828
Электрическая прочность импедансных ребристых и штырьковых структур . . . . .	852
Синтез распределения импеданса на замкнутой поверхности по заданной диаграмме рассеяния . . . . .	864
Плоские двумерные щелевые решетки . . . . .	873
Дифракция электромагнитных волн на магнитодиэлектрических телах . . . . .	885
Об одной квадратичной лемме электродинамики . . . . .	890
Теоремы и задачи нестационарных процессов электродинамики . . . . .	895
Некоторые новые квадратичные леммы для электромагнитных полей . . . . .	906
О минимизации интегрального поперечника рассеяния апертурных антенн . . . . .	915
О минимизации рассеяния приемных антенн . . . . .	920
Синтез токов в заданном объеме по диаграмме направленности . . . . .	924
Возбуждение заданными токами металлического конуса, расположенного над металлической плоскостью . . . . .	931
Рассеяние волн системой из двух параллельных смещенных пластин . . . . .	938
Рассеяние волн конечным рупором . . . . .	941
Об одной новой квадратичной лемме для немонохроматических процессов электродинамики . . . . .	945
Вариационные методы в задачах о рассеянии волн . . . . .	949
Излучение биконуса, возбуждаемого включенной между конусами сторонней электродвижущей силой . . . . .	953
<b>Лекции . . . . .</b>	<b>959</b>
Основные уравнения, теорема единственности и граничные задачи электродинамики . . . . .	960
О мощности, извлекаемой антенной из падающей на нее волны . . . . .	979

<b>Библиография.....</b>	<b>994</b>
--------------------------	------------



## Предисловие

Настоящая книга посвящена памяти выдающегося ученого, отличного преподавателя и замечательного человека Якова Наумовича Фельда.

В историю отечественной и мировой науки Я.Н. Фельд войдет как блестящий ученый теоретик, внесший фундаментальный вклад в развитие ряда направлений прикладной электродинамики, теории дифракции и, особенно, современной теории антенн, одним из создателей которой он по праву считается.

В частности, с именем Якова Наумовича связаны: разработка ряда общих теорем электродинамики, касающихся внутренних и внешних краевых задач; создание строгой теории щелевых антенн и основ их инженерного расчета; развитие методов электродвижущих и магнитодвижущих сил; оценка предельных возможностей приемных антенн, работающих в среде с потерями и т.д.

Полученные Я.Н. Фельдом результаты, несомненно, являются классическими, в немалой мере определившими развитие радиофизики в целом. Основополагающий характер его работ подтверждается, в частности, и тем, что большая их часть публиковалась в "Докладах АН СССР".

Огромный вклад внесен Я.Н. также и в подготовку радиоспециалистов и становление высокого уровня отечественной радионауки. Более 60 лет Я.Н. Фельд преподавал в авторитетных вузах Москвы и Ленинграда, существенно способствуя подготовке многих тысяч высококвалифицированных гражданских и военных радиоинженеров.

Особенно хочется подчеркнуть заслуги Я.Н. в подготовке кадров высшей квалификации – кандидатов и докторов наук. Он лично подготовил 10 докторов и около 40 кандидатов наук. Но главное, в чем проявился вклад Я.Н. в рост кадров, – это его многолетняя работа в редакции основного радиотехнического журнала СССР «Радиотехника и электроника», где он курировал раздел «Электродинамика, дифракция, антенны», и работа по руководству им же созданного Всесоюзного дифракционного семинара. Трудно переоценить значимость этих двух направлений деятельности Я.Н., ту роль, которую они сыграли в подъеме нашей радиотехнической науки. Это, несомненно, сказалось и на высоком качестве радиотехнических систем, созданных нашей промышленностью во второй половине XX века в интересах укрепления обороноспособности СССР и решения многих народно-хозяйственных задач.

В свете вышесказанного вызывает удивление и глубокое сожаление тот факт, что огромные заслуги Я.Н. в развитии науки и подготовке кадров не получили достойной оценки со стороны различных государственных структур. Даже представление Я.Н. Фельда к званию «Заслуженный деятель науки России» было отклонено чиновниками министерства радиопромышленности СССР».

Совершенно иным было отношение к нему со стороны научной общественности. Якова Наумовича глубоко ценили и уважали такие академики как В.А. Фок, М.А. Леонтович, В.А. Котельников, А.Н. Тихонов, А.А. Пистолькорс, Л.Д. Бахрах и многие другие. После его ухода из жизни друзья, коллеги и ученики сделали и делают все возможное, чтобы сохранить и упрочить память о Якове Наумовиче, о полученных им уникальных научных результатах. Так, в 2002 г., в связи с 90-летием со дня рождения, имя Я.Н. Фельда было присвоено дифракционному семинару; к его 95-летию (2007 г.) его друзья и коллеги организовали переиздание вышедшего еще в 50-е годы знаменитого двухтомного учебника по антеннам, написанного Я.Н. Фельдом совместно с его учеником Л.С. Бененсоном. При этом было решено включить в новое (однотомное) издание первый том, практически без изменения, «старого» двухтомника, содержащий изложение электродинамических основ теории антенн, а из второго тома включить разделы по общей теории щелевых антенн и по общей теории линий передачи, сохранивших свою актуальность к моменту переиздания книги.

Много добрых слов в адрес Я.Н. прозвучало в марте 2012 г., когда отмечалось 100-летие со дня его рождения. Этому же событию были посвящены также издание спецвыпуска журнала «Радиотехника и электроника» и создание постоянного стенда о Я.Н. Фельде в музее института (ЦНИРТИ), в котором он проработал около 50 лет.

Издание, подготовленное А.Г. Кюркчаном и М.Х. Зимновым - это еще один важный шаг на пути увековечения памяти о Якове Наумовиче Фельде. Составители провели огромную работу по сбору материала и подготовке его к печати. И я хотел бы от своего имени и от имени будущих читателей этой интересной книги выразить им огромную благодарность.

Книга состоит из трех частей.

Первая часть составлена из воспоминаний друзей, коллег и учеников Я.Н. Фельда.

Вторая часть книги содержит его избранные труды.

Третья часть включает полную библиографию научных работ Якова Наумовича и ряд документов из его личного архива.

Немного подробнее о второй, основной, части книги. Здесь впервые около 120 работ автора, опубликованных ранее в разные годы и в разных журналах, собраны воедино. Это существенно облегчит и ускорит освоение молодыми учеными научного наследия Я.Н. Фельда, его фундаментального вклада в радиофизику.

Надеюсь, что приведенные в данной книге материалы позволят читателям получить должное представление о выдающемся ученом и замечательном человеке – Якове Наумовиче Фельде.

*Я.С.Шифрин*

# Краткая биография

**С.Я. Фельд.**

## **Краткая биография Я.Н. Фельда**

Отец родился 10 марта 1912 г. в Киеве и был старшим ребенком в семье "служащего" (до революции про таких в анкете писали "из мещан", а после революции - "из служащих"). Дед - Наум Семенович - работал в Юго-Западном транспортном обществе, которое занималось перевозкой разных товаров по территории нынешней Украины. Тогда еще никто не знал, что это земля древних "укров», все наивно думали, что это просто юго-западная часть Российской империи. Семья сначала жила на Подоле, а потом переехала в квартиру на Красноармейскую улицу (это продолжение Крещатика, сразу за площадью Л. Толстого, вероятно, сейчас улица уже не Красноармейская, а площадь не Толстого).



*1914. Яша с отцом Наумом Семеновичем*

Когда маленькому Яше исполнилось 7 лет (1919 г.), и пора было идти в школу, выяснилось, что обстановка в стране не располагает к этому. В городе чуть ли не ежедневно менялась власть - то "красные", то "белые", то немцы, то "зеленые" (так назывались тогда "бандиты" - Петлюровцы, Махновцы, анархисты) и на улицу просто опасно было выходить. Конечно, по сравнению с

нынешними временами, тогдашние бандиты — это верх благородства и чести. Обстановка в Киеве тех лет хорошо описана в романе М.Ф. Булгакова "Белая гвардия" и пьесе "Дни Турбиных". В результате, ребенка в школу не пустили, а знакомые учителя приходили на дом. Так продолжалось до 1922 г, когда ситуация в Киеве (и в стране) нормализовалась и можно было идти в школу, и Яша пошел в 4 класс средней «трудовой» школы - 7-летки, которую закончил в 1927 г., затем поступил на радиофакультет Киевского политехникума связи и проучился там до 1931 г. Техникум до последних лет находился на ул. Леонтовича (короткая улица, соединяющая просп. Шевченко с Владимирским собором). Названа так в честь отца академика М.А. Леонтовича. По распределению после окончания техникума Я. Фельда направили в г. Рославль Смоленской обл. на городскую радиостанцию. Работа заключалась в обслуживании аппаратуры преобразовании эфирного сигнала для последующего направления в городскую сеть проводного вещания. Похоже, эта деятельность показалась ему недостаточно творческой, и вскоре он покинул радиостанцию и направил свои стопы в г. Ленинград, который до войны оставался научной столицей России. Свою научно-исследовательскую деятельность Яков Наумович начал в 1932 г. в г. Пушкино под Ленинградом в Центральной Радиолaborатории (ЦРЛ) под руководством профессора В.В. Татаринова, сначала в должности инженера, а с 1934 г. в качестве научного консультанта. В ЦРЛ (под разными названиями: с 1938 г. - НИИ-33, во время войны – номерной завод) проработал до 1946 г. (После войны на базе этого завода в Красноярское было образовано НПП «Радиосвязь», которое существует и по сей день.)



*1930. С родителями и сестрой.*

В 1934 г. в научно-техническом сборнике Ленинградского электротехнического института связи он опубликовал свою первую научную статью «Декремент, энергия и мощность колебательного контура». В этом же году он начинает преподавание в ЛЭИСе. В 1939 г. защищает кандидатскую диссертацию по теории антенно-фидерных устройств СВЧ (для защиты потребовалось специальное разрешение Всесоюзного Комитета по Высшей Школе, так как он не имел диплома о высшем образовании). С началом Великой Отечественной войны как сотрудник ленинградского номерного завода эвакуирован в г. Красноярск, где занимался разработкой антенн для самолетных радиомаяков. В 1946 г., уже имея значительный научный задел (фактически готовую докторскую диссертацию, которую и защитил через год), поступает в Докторантуру Физического института АН СССР, где стажировался у академика М.А. Леонтовича. Поступление в докторантуру было необходимо для переезда в Москву. В это время активно развивался созданный академиком А.И. Бергом институт НИИ-108, и в 1946 г. Я.Н. Фельд стал сотрудником этого института. Докторскую диссертацию «Основы теории щелевых антенн» он защитил в 1947 г. в Совете этого института, и вскоре был назначен начальником антенной лаборатории, а затем начальником антенного отдела НИИ-108. В 1948 г. ему было присвоено звание профессора. До конца своей жизни он был сотрудником этого института (впоследствии Центральный научно-исследовательский радиотехнический институт - ЦНИРТИ).

На протяжении всей жизни отец совмещал научно-исследовательскую деятельность с педагогической. С 1934 по 1941 г. он преподавал в Ленинградском электротехническом институте связи им. М.А. Бонч-Бруевича. В 1947-48 гг. доцент Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе, в 1948-49 гг. – профессор физико-технического факультета МГУ им М.В. Ломоносова (впоследствии преобразованный в Московский физико-технический институт). В 1950 - 1960 гг. был профессором Военно-Воздушной Академии им Н.Е. Жуковского, в 1971-72 гг. – профессор Института повышения квалификации руководящих специалистов Министерства радиопромышленности. С 1972 г. и до конца жизни – профессор Московского института радиотехники, электроники, автоматики.



*1952 С сыном в Цхалтубо, гостиница "Тбилиси"*

Он опубликовал 3 монографии и более 200 научных работ. За время своей научно-исследовательской и педагогической деятельности более 40 его учеников защитили кандидатские диссертации и 10 – докторские, он создал целую научную школу. Большой заслугой Я.Н. Фельда была организация и многолетнее функционирование общемосковского семинара по дифракции и распространению радиоволн (так называемого, «Фельдовского семинара»), работавшего на протяжении 35 лет при Институте радиотехники и электроники РАН. На протяжении 40 лет с момента основания отец был членом редколлегии журнала «Радиотехника и электроника».



Я.Н. Фельд внес большой личный вклад в разработку ряда направлений электродинамики и техники СВЧ. Самые главные из них:

- разработка «прямых» методов расчета антенн, в том числе метода наведенных магнитодвижущих сил для расчета поля в щелях;
- разработка методов решения задач дифракции на криволинейных поверхностях и экранах;
- создание законченной теории щелевых антенн.

По инициативе Я.Н. Фельда и под его непосредственным руководством впервые в нашей стране разработана теория и созданы оригинальные конструкции антенн эллиптической поляризации, поверхностных волн, волновоодно-щелевых и линзовых антенн, антенн с электрическим качанием луча, широкополосных осесимметричных фазированных решеток и других.

До последних дней жизни Я.Н. Фельд сохранял высокий творческий потенциал. Последнюю свою работу он сдал в печать за день до смерти.

# Воспоминания

**А.Г. Кюркчан.**

**Мой учитель Яков Наумович Фельд**

Мое первое знакомство с Яковом Наумовичем Фельдом произошло заочно. Учась на IV-м курсе МВТУ им. Н.Э.Баумана, я как-то пошел в библиотеку подобрать книгу по теории антенн. Мне попала книга Я.Н.Фельда и Л.С.Бененсона «Антенно-фидерные устройства». Она произвела на меня огромное впечатление. И когда нас распределяли на преддипломную практику и дипломное проектирование, я попросился в ЦНИРТИ, в антенный отдел. Моим руководителем по диплому был Г.П.Самуйлов. Темой моего закрытого диплома были вопросы, связанные с рассеянием радиоволн групповыми отражателями. Из нашей МВТУ-шной группы в ЦНИРТИ попал также мой хороший приятель В.С.Стеблев. Он меня познакомил с сотрудником своего отдела М.И.Писковым, от которого, в свою очередь, я узнал про работы В.Тверского, посвященные задачам дифракции на нескольких телах, для решения которых он разработал оригинальную и изящную технику, основанную на сведении исходной задачи к решению системы интегральных уравнений второго рода относительно диаграмм рассеяния тел с использованием интегралов Зоммерфельда. Отмечу, что эти работы меня заворожили настолько, что много лет спустя я применил несколько модифицированную технику В.Тверского к решению задач дифракции на *одиночном* рассеивателе. После защиты диплома я был распределен в отдел полигонных испытаний ЦНИРТИ, который располагался недалеко от поселка Протва Калужской области, где я проработал около двух лет. В декабре 1967г. я поехал поступать в аспирантуру ЦНИРТИ. Естественно, я мечтал поступить к Я.Н.Фельду. Вступительный экзамен по специальности я сдавал Я.Н.Фельду и Л.С.Бененсону. Получив оценку «хорошо», я был зачислен в аспирантуру. В качестве темы диссертации я решил выбрать в некотором смысле продолжение темы моего диплома. В те годы мне часто приходилось встречать в коридорах ЦНИРТИ оживленно беседующих друг с другом на научные темы учеников Я.Н.Фельда – И.М.Полищука и Г.А.Свистунова. В дальнейшем мне много приходилось общаться с Г.А.Свистуновым, и во многом благодаря общению с ним я заинтересовался теорией целых функций и теоремой Винера-Пэли. Общение с другими учениками Я.Н.Фельда – Ю.А.Зайцевым, В.И.Кузнецовым и Г.А.Постновым также всегда давало пищу для размышлений.

Но в работе над кандидатской диссертацией я взял за основу метод специальной ортогонализации, предложенный Я.Н.Фельдом в 1959г. Кроме того, в диссертации я использовал также предложенный Я.Н.Фельдом метод стационарного функционала. Со всеми проблемами я приходил к Якову Наумовичу, и он всегда четко и подробно отвечал на любые мои вопросы. Официальными оппонентами по моей кандидатской диссертации были В.П.Яковлев – один из

ведущих специалистов по прикладным аспектам теории целых функций и начальник отдела ЦНИРТИ Н.Г.Пономарев – ученик Я.Н.Фельда. Перед защитой мою работу прочитал, естественно, Яков Наумович, а также, по его просьбе, начальник сектора, в котором я работал – Исаак Борисович Абрамов, также ученик Я.Н.Фельда. Прочитав текст, Исаак Борисович сделал довольно много редакционных замечаний. Я на это довольно раздраженно отметил, что я ведь не писатель. А Исаак Борисович мне мудро возразил: «Если Вы беретесь писать, то Вы – писатель». Мне пришлось согласиться и серьезно переделать текст.

Все свои работы и в мою бытность аспирантом и в последующие годы я обязательно показывал Я.Н. и только после его одобрения отправлял их в редакцию. Я настолько к этому привык, что когда в 1992г. мне пришлось уйти из ЦНИРТИ (в результате перестройки), то некоторое время я чувствовал какую-то незащищенность из-за невозможности показывать свои работы Якову Наумовичу.

В силу ряда обстоятельств я защитился довольно поздно – в 1976г. Тем не менее, даже когда я еще не был кандидатом наук, Я.Н.Фельд довольно часто давал мне на рецензию статьи из своего портфеля члена редколлегии журнала «Радиотехника и электроника». Предварительно все эти статьи он читал сам и составлял собственное мнение. И поныне предметом моей гордости является то, что за исключением одного-двух случаев Яков Наумович принимал решение по поводу публикации статьи, совпадающее с моим заключением. Более того, Яков Наумович иногда просил меня посмотреть диссертации соискателей, у которых он был официальным оппонентом, и высказать свое мнение.

Вообще, общение с Яковом Наумовичем было истинной роскошью. Его величайшая эрудированность, высочайшая интеллигентность притягивали к нему множество коллег и не только.

Особенно следует отметить руководство Я.Н.Фельдом научным семинаром при ИРЭ Академии наук. В его работе принимали участие ведущие ученые в области теории дифракции, технической электродинамики и теории антенн – Л.А.Вайнштейн, Б.З.Каценеленбаум, П.Я.Уфимцев, Б.Е.Кинбер, В.А.Боровиков, В.В.Шевченко и целый ряд других. Поражала способность Я.Н.Фельда, что называется «с ходу» вникать в существо докладываемой работы, делать глубокие, полезные, но при этом всегда доброжелательные замечания. Однажды на этом семинаре выступали математики Б.Ю.Стернин и В.Е.Шаталов с, по сути дела, чисто математическим докладом. Б.Ю.Стернин говорил мне потом, что его потрясло, насколько четко Я.Н.Фельд прокомментировал их доклад участникам семинара, не будучи ни в малейшей степени предварительно знакомым с их работой.

Конечно, Якову Наумовичу приходилось давать и отрицательные отзывы о чьих-либо работах. Людей, чьи способности он оценивал не очень высоко, Яков Наумович называл «путаниками».

Не могу не отметить блестящую манеру чтения лекций Яковом Наумовичем. Он преподносил материал настолько четко и подробно, что, наверное, не было людей, у которых оставалось бы какое-то непонимание материала лекции, даже когда этот материал был достаточно сложным. Я слушал довольно много лекторов и докладчиков на конференциях и могу отметить, что еще только два человека были близки к Я.Н. по доступности изложения сложных вещей – это В.Д.Купрадзе и В.И.Татарский, которые, кстати, также являются классиками в своих областях знаний.

Яков Наумович был интеллигентнейшим человеком. Он прекрасно разбирался в искусстве, знал массу стихов. Мне приходилось бывать дома у Я.Н. Это была типичная квартира ученого – с довольно скромной обстановкой и великолепной научной библиотекой. Дома у него царила прекрасная благожелательная атмосфера. Эту атмосферу, на мой взгляд, во многом определяла жена Якова Наумовича – Вера Михайловна Кристоф. Это была очень умная и интеллигентная женщина. Как я уже отмечал, я бывал дома у Якова Наумовича и Веры Михайловны, в том числе на их днях рождения, которые отмечались в весьма теплой, интеллигентной компании. Я иногда наносил визиты Вере Михайловне также после ухода из жизни Якова Наумовича. Вера Михайловна и их с Яковом Наумовичем сын – Семен Яковлевич подарили мне несколько книг из библиотеки Якова Наумовича (руководствуясь моим выбором), за что я им очень благодарен.

Яков Наумович пользовался огромным и, несомненно, заслуженным авторитетом в научном мире. Его хорошо знали и глубоко уважали многие члены Академии наук СССР. Я могу привести ряд известнейших имен академиков и членов-корреспондентов АН СССР, которые хорошо знали и уважали Якова Наумовича. Это академики В.А.Фок, А.И.Берг, М.А.Леонтович, А.Н.Тихонов, А.Л.Микаэлян, Ю.Б.Кобзарев, члены-корреспонденты А.А.Пистолькорс, Л.А.Вайнштейн, Г.В.Кисунько и ряд других. Я считаю крайней несправедливостью то обстоятельство, что Яков Наумович не был членом Академии Наук. По моему мнению, это, главным образом, связано с тем, что Яков Наумович всю жизнь проработал в закрытой организации. Тем не менее, реальный авторитет в научном мире, как я уже отметил, у Якова Наумовича был как у академика. На этом я закончу свои краткие воспоминания, рассчитывая, что они вместе с другими приведенными в этой книге воспоминаниями позволят читателю хотя бы в общих чертах представить себе масштаб этого выдающегося человека.

**Б.З.Каценеленбаум.**

**Яков Наумович Фельд (1912 – 1995)**

Активная научная жизнь Я.Н. Фельда пришлась на послевоенные годы. В это время энергично развивалась относительно новая наука – прикладная (высокочастотная) электродинамика, и Я.Н. был одной из ярких фигур, обеспечивающих это развитие.

Обязанность ученого состоит в том, чтобы создавать научную продукцию, и в том, чтобы помогать начинающим ученым. Память о людях такого масштаба, как Яков Наумович заставляет нас пытаться подражать им, иногда даже неосознанно. Подражать ученому в его профессиональной деятельности нельзя. Можно подражать в его отношении к людям.

Яков Наумович создал школу антенщиков, и сегодня многие специалисты либо его ученики, либо ученики учеников. Для того, чтобы у ученого были ученики, мало уметь интегрировать систему уравнений Максвелла. Надо, разумеется, придерживаться правила «лучше сто раз отдать свое, чем один раз присвоить чужое». Но надо, кроме того, обладать некими человеческими качествами. Отношение Якова Наумовича к коллегам можно охарактеризовать несколькими чертами:

- априорная доброжелательность и вежливость ко всем,
- уважение к чужому мнению независимо от статуса собеседника,
- желание реально помочь за счет своих дел и своего времени,
- умение оставаться самим собой в любых ситуациях, не суетность и спокойствие.

Жизнь организовала практический эксперимент. В 1951 г. меня уволили из Института, где у меня, разумеется, было много знакомых. Из них первые месяцы продолжали со мной общаться трое. Сегодня их поведение кажется естественным и непонятно, в чем состоял эксперимент. Объяснить это трудно. Как вообще трудно передать атмосферу тех лет. Полвека тому назад это было Поступком. Он свидетельствовал не только о самоуважении, но и о немалой смелости. Эти трое были не только крупными учеными. Они были интеллигентами. Это были Михаил Александрович Леонтович, Лев Альбертович Вайнштейн и Яков Наумович Фельд.

Яков Наумович был и физиком, и математиком. Как физик он владел искусством «неразрушающего упрощения» - он умел заменить реальное устройство моделью, достаточно сложной, чтобы сохранить все существенные особенности этого устройства, и достаточно простой, чтобы её можно было рассчитать.

Одновременно он владел математическим аппаратом, чтобы такой расчёт произвести. В его безразмерной библиотеке находились самые современные математические монографии. Возможно, он был одним из немногих ученых, работавших в прикладной области и серьезно знакомый с функциональным анализом. Его математическая эрудиция проявилась, например, в его работах по условиям реализации заданной диаграммы излучения антенн.

Одной из основных работ Я.Н. Фельда является его исследование щелевых антенн. Они представляют собой замкнутую металлическую поверхность, в которой проделана система щелей, являющихся излучающими элементами. В такой антенне взаимодействуют друг с другом системы резонансных элементов в виде узких щелей и резонатор, образованный стенками. Создание теории столь сложной системы потребовало сочетания физической интуиции и математического искусства.

Авторитет Якова Наумовича, основанный на качестве его работ, на его эрудиции, и – что не менее существенно – на его желании помогать молодым ученым и на органически присущей ему интеллигентности, позволил ему в течение многих лет руководить общемосковским электродинамическим семинаром (и ныне успешно работающим).

Результаты, полученные Я.Н. Фельдом, стиль его работ представляют собой существенный вклад в фонд нашей науки. Участие в создании этого фонда – цель любого ученого. Яков Наумович этой цели достиг.

## П.Ш. Фридберг. Воспоминания о Якове Наумовиче Фельде

Когда тебе под 80, и старая уставшая лошадка, еле волоча ноги, везет тебя «с ярмарки», перед глазами все чаще возникают лица самых близких и дорогих людей, покинувших этот мир. Родители, подарившие жизнь. Учителя, посланные судьбой.

Воспоминания – литературный жанр, а я не литератор и никогда бы не взялся за эту работу, если бы не желание сохранить память о Якове Наумовиче Фельде.

Написал, принялся редактировать и ужаснулся: что это, воспоминания – или хроника моей жизни? Попробовал оставить первое, убрать второе. Не получилось! Потому что Яков Наумович стал частью моей жизни, мудрой, доброй и любимой частью - навсегда.

Начну с главного: он был порядочным человеком. В этом предложении отсутствуют эпитеты типа «абсолютно», «очень» «глубоко». Отсутствуют не случайно. Жизнь доказала мне, что «порядочность» не может иметь градаций: она в человеке либо есть, либо ее нет. И объяснять здесь ничего не надо: порядочный человек поймет, о чем идет речь, а не порядочный никогда со мной не согласится.

Научные заслуги Якова Наумовича превосходно описал Я.С.Шифрин в замечательной статье «К столетию со дня рождения Якова Наумовича Фельда» («Вестник Российской Академии естественных наук», 2012, №1, стр.105-107). Как и автор статьи, я всегда считал, что «за вклад в развитие электродинамики и общей теории дифракции Яков Наумович был вполне достоин быть избранным в АН СССР». Одной из причин, почему этого не произошло, являлась, на мой взгляд, его природная скромность. Характер не позволил ему обращаться к коллегам за «поддержками» и отзывами о научной значимости полученных результатов. Хотя авторитет Якова Наумовича у ряда академиков и генеральных конструкторов был очень высок.

Нашу первую встречу я запомнил до мельчайших подробностей. Произошла она 8-го марта 1963 года, продолжалась всего 15 минут и... не оправдала моих надежд. Но две недели спустя я уже считал ее подарком судьбы. О причине такой невероятной метаморфозы чуть ниже. Начну же с рассказа о полутора годах жизни, которые той встрече предшествовали.



Моя alma mater – Вильнюсский университет, кафедра теоретической физики. Узкая специализация - «атомная спектроскопия». Распределили меня в «почтовый ящик». Был счастлив, потому что избежал работы в общеобразовательной школе, учителем физики.

1 августа 1961 года, полный надежд и ожиданий, переступил порог отдела, занимавшегося разработкой измерительной СВЧ - техники. Начальник отдела пригласила к себе старшего инженера одной из лабораторий и со словами: «Принимай пополнение!», - попрощалась со мной. Вышеупомянутый старший инженер привел меня в лабораторию, посадил за стол с каким-то прибором и спросил, хорошо ли я «секу» в СВЧ-технике. Ответил я вопросом на вопрос: «А что такое СВЧ?» Тогда он поинтересовался, видел ли я в своей жизни паяльник? Пришлось кивнуть головой. Тогда исполняющий обязанности начальника лаборатории немедленно вручил мне паяльник и посадил паять тефлоновые трубочки для болометрических измерителей мощности. При этом добавил: «Через две недели вернется из отпуска начальник, пусть ломает голову, что с тобой делать».

Стиснув зубы, начал паять. Проклинал все на свете. Время тянулось и мучительно, и медленно. Наконец, из отпуска вернулся начальник лаборатории Симон Соломонович Фел. Познакомились. Я тут же ему заявил: «Либо дайте работу по специальности, либо отпустите». В ответ услышал: "Недавно в одном киевском «ящике» для измерения потенциала РЛС начали использовать БЭР (безнастроечный эхорезонатор) сферической формы, радиус которого в 5-7 раз превосходит длину волны. Но обнаружился дефект: на некоторых частотах он «не хочет» резонировать. Нам поручено произвести измерения, выяснить природу дефекта и, если удастся, предложить способ его устранения. Вот Вам реальная задача: сможете до нового года разобраться, в чем дело, будете и дальше работать головой, иначе - 3 года придется поработать руками".

Не зная с чего начать, пошел за советом к Юзику. Так ласково называли друзья работавшего в АН Литвы физика-теоретика Йошуа Бенъяминовича Левинсона. В 1956 году, будучи солдатом 16-ой литовской дивизии, он опубликовал статью по теории групп, которую впоследствии процитировал сам Ландау.

Мне повезло: Юзика заинтересовала проблема. После нашего разговора мы оба приступили к изучению электродинамики СВЧ и за 4 месяца построили теорию вышеупомянутых резонаторов. Оказалось, что причиной «частотных провалов» являются вырожденные колебания, которые в свою очередь являются следствием высокой степени симметрии сферы. Эксперимент полностью подтвердил сказанное: в резонаторе со «слегка негладкой» внутренней поверхностью никаких «провалов звучания» не наблюдалось. Так увидело свет

серийное изделие БЭР-636. А Юзик стал моим Учителем, хотя был старше меня только на шесть лет.

1962-ой год встретил новой задачей - «Расчёт элементов матрицы рассеяния T-образного сочленения прямоугольного многомодового волновода с одномодовым волноводом-отборником через узкую щель в их общей стенке». Единственное, что я в тот момент уже понимал – задача является векторной трехмерной, а широко известный американский «Справочник по волноводам» в этом деле мне не помощник.

Вот тогда я впервые встретился с именем Фельда, о котором до той поры ничего не слышал. В мои руки попала монография Якова Наумовича «Основы теории щелевых антенн», я ее основательно проштудировал и приступил к построению ядра интегро-дифференциального уравнения для напряжения на узкой щели. Тут же столкнулся с проблемой – невозможностью выполнить требуемое двойное дифференцирование тензорной функции Грина волновода. Причина лежала на поверхности: функция Грина волновода (в отличие от функции Грина полупространства, ограниченного идеально проводящим экраном) описывается трехкратным интеграл-рядом, формальное дифференцирование которого недопустимо, ибо возникающий интеграл-ряд расходится.

Поиск правильного способа дифференцирования потребовал года (!) упорного труда. В январе 1963 года нам с Юзиком удалось сформулировать общий метод вычисления элементов ядра интегрального уравнения для апертурного поля при электромагнитной связи двух произвольных объемов. Идея состояла во введении в упомянутые интеграл-ряды экспоненциальных множителей сходимости, что эквивалентно использованию «допредельной» функции Грина, удовлетворяющей уравнению с «размазанной», дельта-функцией. По сути, нами было дано физическое оправдание необходимости суммирования расходящихся рядов в смысле Абеля-Пуассона.

Естественно, у нас возникло желание показать результат Фельду – создателю теории щелевых антенн. Легко сказать, возникло желание. А как его реализовать? Все попытки «выйти на Фельда» наталкивались на глухую стену. И тут, вдруг, мне пришла в голову мысль обратиться за помощью к главному инженеру нашего института Владимиру Петровичу Уфтюжанинову (я знал, что он лауреат Сталинской премии, и что в 1949 году был переведен в Вильнюс из НИИ-17). «С Фельдом не знаком, - ответил В.П. - Но его, наверняка, должен знать мой друг Валериан Георгиевич Дубенецкий; до перевода на работу в министерство он несколько лет был начальником отдела 108-го института»<sup>1</sup>. Владимир Петрович в моем присутствии позвонил в Москву

<sup>1</sup> 108-ой институт - это Центральный Научно-исследовательский радиотехнический институт (ЦНИРТИ), созданный в 1943 году по личному приказу Сталина. В годы войны в его

Дубенецкому и попросил помощи. Тот связался с Фельдом, и вопрос о встрече был решен: 8-го марта в 9 утра. Как выяснилось впоследствии, выбор дня встречи не был случайным: 8-го марта (Международный женский день) реально никто не работал (праздновали!), и Яков Наумович надеялся, что у него будет достаточно времени для спокойной беседы. Однако случилось непредвиденное: на 10 утра было назначено внеочередное заседание НТС.

К поездке готовился основательно: еще раз прочитал «Основы теории щелевых антенн». В 7 утра, прямо с поезда, поехал на Басманную, оформил пропуск и стал ждать сопровождающего. Около 9-ти появился молодой парень. По длинным полутемным коридорам он привел меня к обитой черным дерматином двери с табличкой «Я.Н.Фельд» и попрощался. Вхожу. Кабинетом оказалась длинная и узкая маленькая каморка, видимо отгороженная от соседнего помещения легкой фанерной стеной. Посреди коморки стоит огромный письменный стол. За ним сидит невысокий человек в очках и что-то читает, пощипывая усы. Встречает он меня довольно прохладно, сразу берет быка за рога: «Ну, покажите, что Вы там такое сделали, что за Вас так просил Дубенецкий». Я протягиваю рукопись статьи «Интегральное уравнение для апертурного поля при электромагнитной связи двух объемов». Яков Наумович быстро пролистывает ее и говорит: «Это давно известно. Посмотрите еще раз «Основы теории щелевых антенн». Вместо того чтобы спокойно и аргументированно возразить, я выпаливаю: «Там ничего этого нет. Но если у Вас сейчас нет времени, я могу оставить рукопись и свой домашний адрес. Будет время, прочитайте». Тут же и попрощались. Уезжал я из Москвы с довольно тяжелым осадком на душе. Проклинал свою горячность. Не давала покоя мысль: что же теперь делать?

И вот, спустя две недели... Случилось чудо! От Якова Наумовича Фельда пришло коротенькое, но очень теплое письмо. Начиналось оно со слова «Дорогой...», а не стандартным «Уважаемый...». В письме говорилось, что полученный результат представляет несомненный интерес, и его следует доложить на семинаре ИРЭ АН СССР (теперь Московский электродинамический семинар им. Я.Н.Фельда). Предлагалось также привезти с собой заметку в «Доклады Академии Наук СССР». Заканчивалось письмо словами «Позвоните мне домой после восьми вечера по телефону 194-09-92».

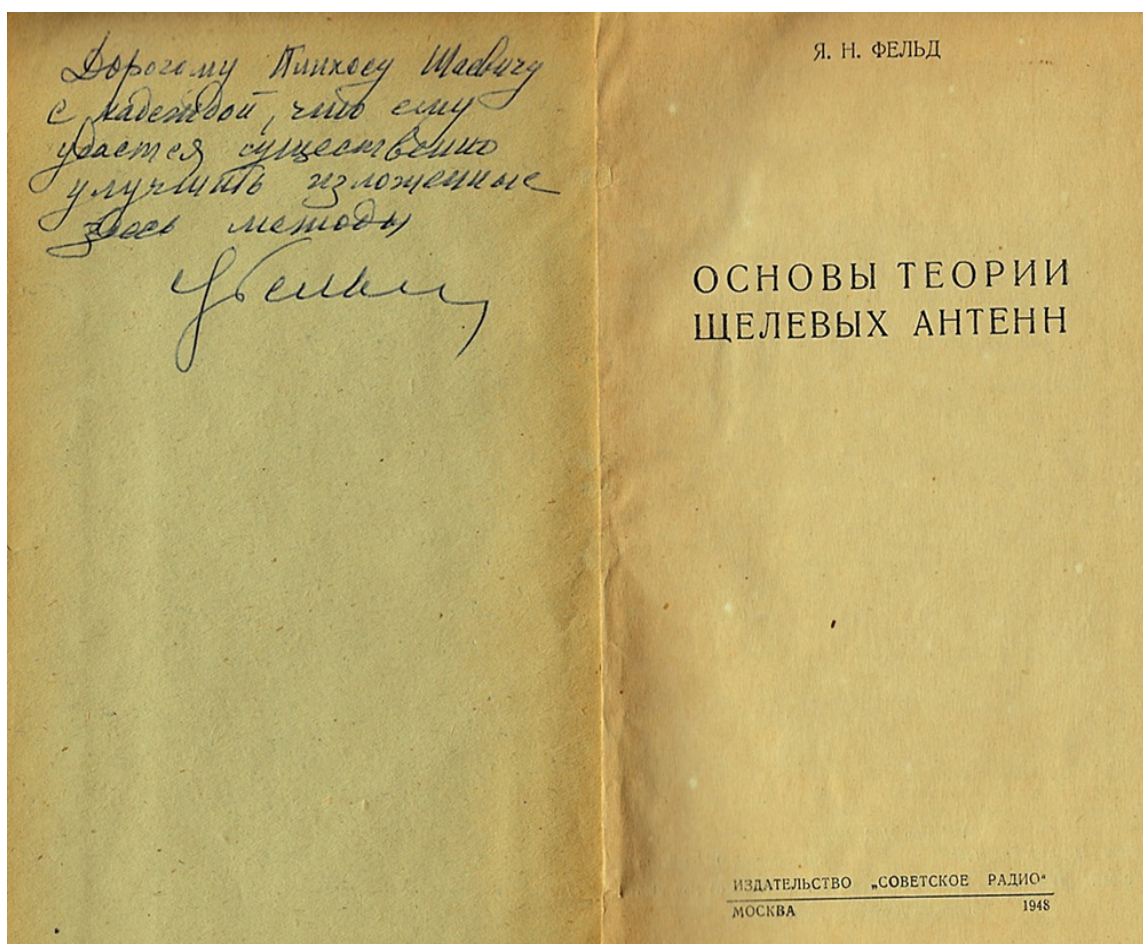
Радости не было предела. Дождался вечера, позвонил. Яков Наумович назвал дату семинара, добавив: «У Вас будет 30 минут. Постарайтесь основное

---

теоретическом отделе работали академики В.А.Фок и М.А.Леонтович, Л.А. Вайнштейн, Б.З.Каценеленбаум и М.Л.Левин, а после войны – создатель теории СТЭЛС П.Я.Уфимцев. Директорами ЦНИРТИ в разные годы были адмирал, академик А.И. Берг и будущий министр радиопромышленности СССР П.С.Плешаков.

время уделить не формулировке интегрального уравнения, что, в общем-то, более или менее известно, а развитому методу вычисления элементов его ядра». И тут я понял, отчего поначалу рукопись не произвела на него должного впечатления: основной результат – необходимость суммирования расходящихся рядов в смысле Абеля-Пуассона – занимал в рукописи только три строчки.

Семинар проходил в конференц-зале ИРЭ. Начался он в четыре часа дня. Присутствовало человек 25-30. Никого из них я не знал. После доклада началась дискуссия. Проходила она в доброжелательной атмосфере и продолжалась примерно минут сорок. После семинара Яков Наумович поинтересовался, когда я уезжаю. На мой ответ «поезд сегодня в 10 вечера» последовало предложение: «Поехали к нам, посидим, попьем чаю». Я с радостью согласился. Чаевничали втроем: Яков Наумович, его жена Вера Михайловна и я. Два часа пролетели словно мгновение. Незадолго до моего ухода Яков Наумович достал из книжного шкафа книгу (на мое счастье, кроме своего, у него оказался еще один экземпляр), сел за покрытый зеленым сукном письменный стол, написал книгу и со словами «это Вам подарок» протянул ее мне. Вот этот трогательный автограф



На радостях не заметил, что он забыл поставить дату. Обнаружил это, когда уже находился в поезде.

Так началась наша 30-тилетняя дружба и моя научная деятельность в электродинамике СВЧ. Оправдал ли я его надежду, судить не мне. Скажу только, что развитию методов расчета волноводно-резонаторных щелевых устройств я посвятил лучшие 15 лет жизни, и что в 1970 году мне удалось создать метод решения интегро-дифференциального уравнения на узкой щели.

В 1964 году я «случайно» оказался участником чаепития, имя которому «День рождения». Дело было так. В начале марта мы с Юзиком подготовили к печати большую статью «Электромагнитная связь двух объемов через узкую щель». Я позвонил Якову Наумовичу и попросил уделить мне часик-полтора (так и сказал – «часик-полтора») для ее обсуждения. В ответ услышал: «Воскресенье, 10 марта, Вас устраивает?» «Конечно», - ответил я. «Тогда жду Вас в 11. Обсудим статью, пообедаем, а вечером, как всегда, попьем чаю».

Оформил командировку, и в воскресенье в 7 утра оказался в Москве. По совету своего знакомого сразу направился в гостиницу «Центральная», получил койку в трехместном номере («бронью» безотказно служила коробка литовских конфет «Karvute» - «Коровка»), позавтракал и направился к Фельдам. Позвонил. Дверь открыла Вера Михайловна. «Как хорошо, что Вы приехали. У Якова Наумовича сегодня день рождения», - искренне обрадовавшись, произнесла она веселым звонким голосом. Хотя я и не робкого десятка, но растерялся: стал извиняться, говорить, что не знал, что, мол, буду в Москве еще три дня, и что могу зайти в любое другое время. В этот момент появился «новорожденный» и со словами «Рад Вашему приезду» обнял меня. Вера Михайловна вернулась на кухню, где она вместе со своей матерью пекла пирог с клюквой, а мы с Яковым Наумовичем пошли в кабинет. Примерно полчаса поговорили «за жизнь». Общаться с ним было одно удовольствие. Он всегда внимательно слушал собеседника, глядя ему прямо в глаза. Сам же говорил мало. Любопытная деталь: за тридцать лет довольно тесного общения я никогда не слышал его смеха. Там, где другие хохотали в голос, Яков Наумович позволял себе беззвучную улыбку. И только.

Обсуждение статьи продолжалось около часа. Закончилось оно предложением: «Подготовьте и пришлите мне сокращенный вариант статьи. Я попрошу академика [Бориса Алексеевича] Введенского представить ее в ДАН. А этот текст отнесите в редакцию «Радиотехники и электроники». Пусть ожидает очереди на публикацию».

Часам к шести стали собираться гости. Их было немного: несколько род-ственников Веры Михайловны и двое близких друзей Якова Наумовича - один из отцов импульсной техники Яков Семенович Ицхоки с женой и дочерью и создатель статистической теории антенн харьковчанин Яков Соломонович Шифрин. Так что за праздничным столом оказались три Якова. Выпили за здоровье Якова Наумовича по рюмке вина, немного перекусили, и начались

обычные в таких случаях разговоры «обо всем и ни о чем». Незаметно перешли к чаепитию с великолепным клюквенным пирогом – фирменным блюдом матери Веры Михайловны, который матушка великолепно выпекала и в столетнем возрасте. Около десяти гости начали расходиться. Прощаясь, Яков Наумович обнял меня и произнес три слова: «Начинайте писать диссертацию».

До сих пор я бережно храню все его автографы. Это фрагмент подписанного им отзыва:

РЕШЕНИЕ

семинара предприятия п/я 2312 от 4 декабря 1964 года

На семинаре тов. П.Ш.Фридберг доложил материал своей диссертационной работы "Электромагнитная связь двух объемов через узкую щель". В известных до сих пор работах развивалась теория экспоненциально узких щелей, для которых  $\ln \gamma_d \gg 1$ .

Автору удалось продвинуться существенно дальше, разлив теорию щелей, для которых  $\gamma_d \gg 1$ , но  $\ln \gamma_d \sim 1$ . Это соответствует щелям, реально применяемым на практике. Такие результаты удалось получить благодаря применению обобщенного суммирования расходящихся рядов сингулярного ядра интегрального уравнения.

Семинар считает целесообразным публикацию полученных результатов в виде отдельной монографии с привлечением дополнительных расчетных данных.

Председатель семинара  
доктор технических наук, профессор *Ф.И.Селиванов* (Я.И.ФЕЛЬД)  
4.12.64

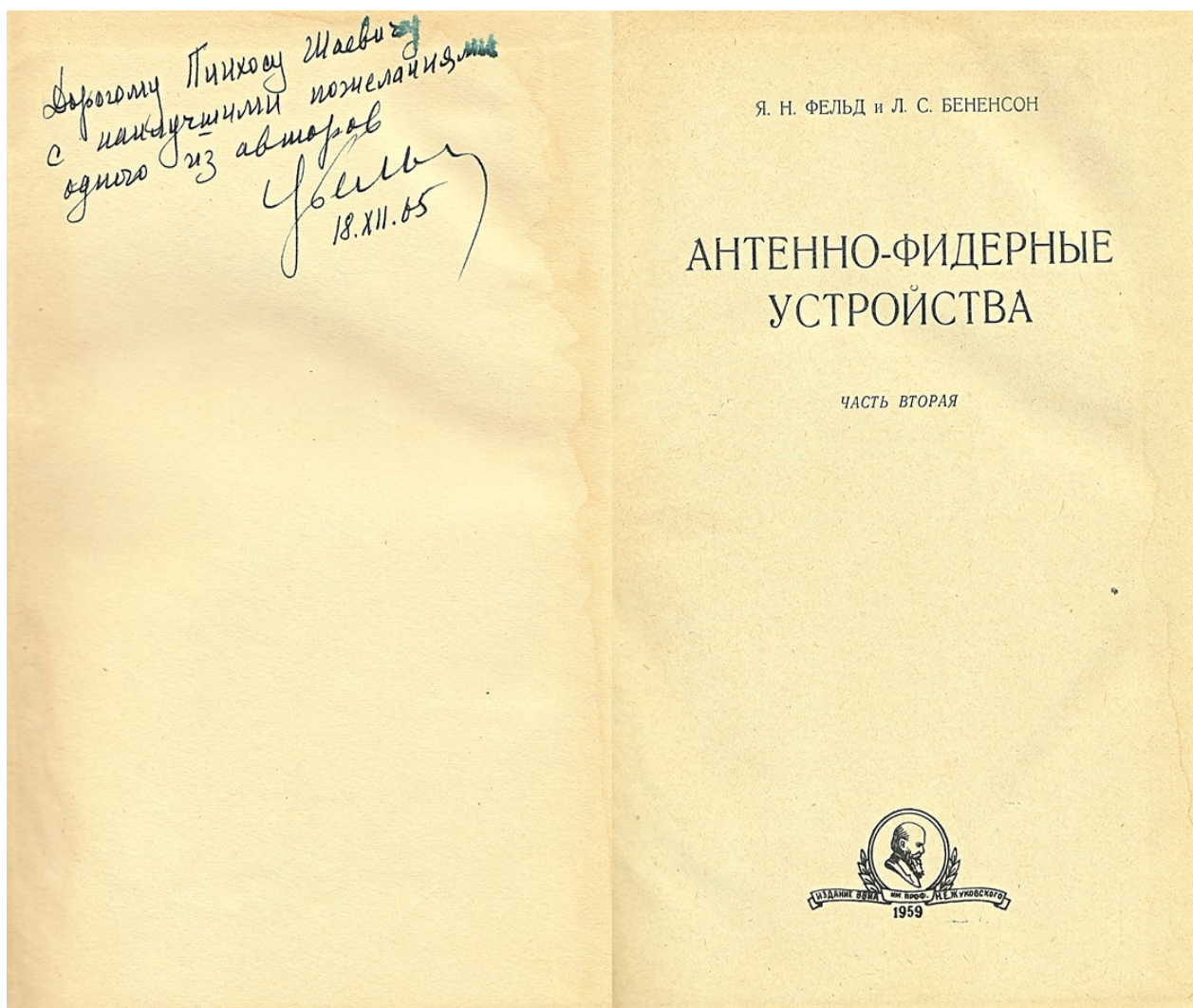
Секретарь семинара  
кандидат технических наук *В.И.Селиванов* (Л.С.БЕНЕНСОН)  
4.11.64

В январе 1965 года АН СССР, Минрадиопром СССР и Минвуз СССР приняли решение провести Первую Всесоюзную школу-семинар по дифракции и распространению волн. Встал вопрос, где ее проводить – в Грузии, Армении или Прибалтике. Выбор пал на Прибалтику. По рекомендации Якова Наумовича я был назначен ученым секретарем школы. Она работала в Паланге с 30-го мая по 15 июня, в ней приняли участие более 150 слушателей,

большинство из которых были кандидатами наук. Об уровне школы говорит состав лекторов: В.А.Фок, В.М.Бабич, В.А.Боровиков, Л.А. Вайнштейн, Б.З.Каценеленбаум, В.Д.Купрадзе, П.Я.Уфимцев, Я.Н.Фельд. Все они в представлении не нуждаются. Благодаря усилиям Якова Наумовича [труды школы](#) были изданы отдельной книгой в 1968 году.

Паланга очень сблизила нас: после лекций мы часами бродили вдоль моря. Говорили, о чем угодно, но только не о науке. Обсуждать научные вопросы Яков Наумович предпочитал за письменным столом.

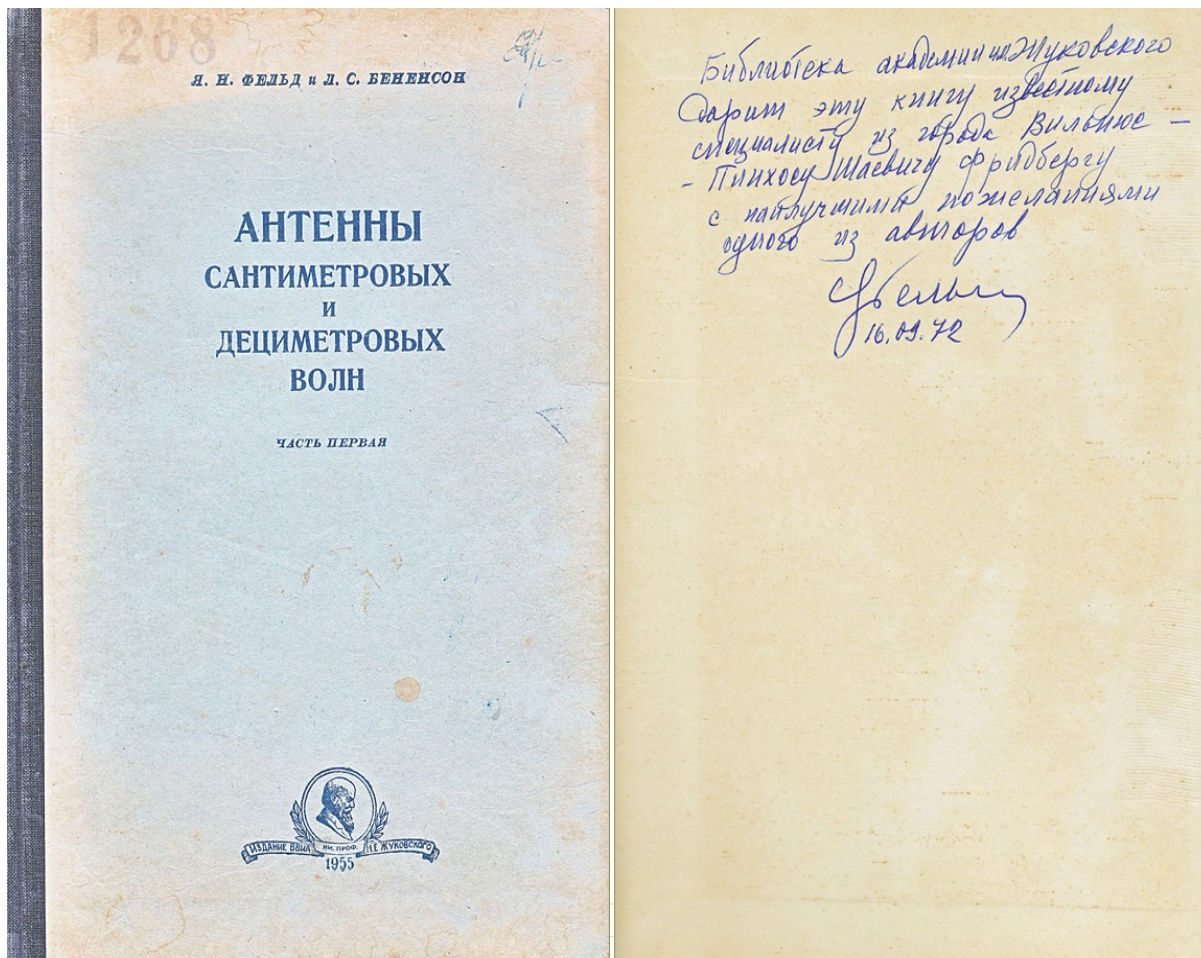
В декабре 1965 года меня ждал еще один подарок. Но теперь уже с датой.



Я поблагодарил Якова Наумовича и, шутя, поинтересовался: «А когда мне ждать часть первую?». Именно, шутя, поскольку хорошо знал, что сразу после появления «часть первая» стала библиографической редкостью. Он улыбнулся и ответил мне в том же ключе: «А Вы, оказывается, еще и вымогатель».

Прошло семь лет. О своей шутке я, естественно, забыл. Как-то в одном из телефонных разговоров Яков Наумович вдруг обмолвился, что меня ждет



большой сюрприз. На вопрос: «Какой?», - ответил: «Узнаете при встрече». Сюрпризом оказался подарок с весьма оригинальным автографом



Торжественное вручение произошло за чаепитием, на которое был специально приглашен Яков Семенович Ицхоки - начальник кафедры Военно-воздушной академии им. Жуковского. Именно он по просьбе Якова Наумовича уговорил начальника библиотеки списать один экземпляр, честно рассказав последнему, кому и зачем эта книга понадобилась. Так что слова «Библиотека академии им. Жуковского дарит эту книгу» недалеко от истины.

В октябре 1988 года (самый разгар «перестройки»!) в Гродненский университет, где я тогда работал, поступило письмо из НПО им. Плешакова с просьбой поддержать выдвижение Я.Н. Фельда, меня и М.Л. Левина (такой порядок фамилий в письме) на государственную премию СССР.



 <p style="text-align: center;"><b>НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ</b> имени П. С. ПЛЕШАКОВА</p> <p style="text-align: center;">107066, г. Москва</p> <hr/> <p><i>от 10.88 № 053/15141</i> На № _____ от _____</p> <p>По вопросу выдвижения работы "Создание общей теории целевых антенн и целевых элементов связи СВЧ-узлов" на соискание Государственной премии СССР</p> <p>Ректору Гродненского Государственного университета профессору г. Бодакову А.В. 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.</p> <p>Директору Московского радиотехнического института АН СССР г. Бацких Г.И. 113519, Москва.</p> <p>Научно-технический совет Научно-производственного объединения им. П.С.Плешакова на заседании от 31 октября 1988г. вынес решение выдвинуть работу "Создание общей теории целевых антенн и целевых элементов связи СВЧ-узлов" на соискание Государственной премии СССР в области науки и техники за 1989 год.</p> <p>Научно-технический совет НПО им. П.С.Плешакова отмечает, что наибольший вклад в создание теории устройств указанного типа внесли специалисты НПО им. П.С.Плешакова (д.т.н, профессор Фельд Я.И.), Гродненского Государственного университета (д.ф.-м.н., профессор Фридберг П.Ш.) и Московского радиотехнического института АН СССР (д.ф.-м.н. Левин М.Л.).</p> <p>Прошу Вас поддержать указанное выдвижение. В случае Вашего согласия прошу на заседании Ученого (или Научно-технического) совета института рассмотреть вопрос о поддержке выдвижения работы и провести (тайным голосованием) выборы одного-от Вашего института-представителя в авторский коллектив.</p> <p style="text-align: right;">Л</p>	<p style="text-align: right;">2.</p> <p>Документы по выдвижению прошу срочно направить в адрес НПО им. П.С. Плешакова.</p> <p style="text-align: center;">         Ю.М. Перунов        Генеральный конструктор,        доктор технических наук,        профессор     </p>
--	--

Однако ректор – кандидат наук в области марксистско-ленинской философии – профессор А.В.Бодаков никак на него не отреагировал. Оправдание таким своим действиям он мог представить в любой момент: за несколько лет до того выдвижения, КГБ Белоруссии направило (не сомневаюсь, что с подачи ректора) в КГБ Литвы шифровку, что я «являюсь объектом проверки и подозреваюсь в шпионской деятельности<sup>2</sup>».

Так по моей «вине» пострадали дорогие моему сердцу Яков Наумович и Михаил Львович Левин.

Теперь немного воспоминаний, далеких от науки. После нескольких встреч я заметил, что Яков Наумович все делает не спеша, без резких движений, всегда старается сохранять олимпийское спокойствие. На первых порах я думал, что медлительность – черта его характера. Оказалось, ее причиной является стенокардия и высокое, часто превышающее 220, кровяное давление. В эти моменты он испытывал сильные головные боли и спасался от них

<sup>2</sup> Сборник документов «KGB slaptieji archyvai 1954-1991» (Секретные архивы КГБ 1954-1991), Вильнюс, 2011, стр. 337, п.7.3.17.

поеданием множества таблеток, которые вкладывала ему в руку Вера Михайловна, его ангел-хранитель: она следила за его здоровьем больше, чем он сам.

Была у Якова Наумовича автомашина «Волга». Ухаживал он за ней как за ребенком: малейший чих, и в гараже тут же появлялся очередной умелец-автомеханик. Водителем он был предельно аккуратным. Использовалась «Волга» исключительно для поездок на отдых. Летом Фельды снимали «дачу». Кавычки я поставил не случайно: это была комнатка в хибаре, расположенной в лиственном лесу. Соснового леса Яков Наумович избегал, смолистые испарения повышали давление.

Несколько недель отпуска Фельды любили проводить в Украине, на острове, расположенном при впадении реки Остер в Десну. Один раз, году, кажется, в 1969, Яков Наумович пригласил меня поехать с ними. Я прилетел в Москву, втроем отправились в путь. Добрались без приключений, переправились на пароме, и я сразу понял, чем их привлекал остров. Посреди него высились невиданной красоты дубовая роща, состоявшая из огромных многовековых дубов. Машин на острове было немного, ближайшая стояла метрах в двухстах. Яков Наумович с Верой Михайловной ночевали в «Волге», я – рядом, в одноместной палатке. С погодой повезло. Вставали чуть свет, Вера Михайловна занималась завтраком, а мы отправлялись в деревню за продуктами – парным молоком, свежими яйцами, овощами и хлебом. Потом снова гуляли, купались в Десне. Такого воздуха как в этой роще я больше нигде не встречал. Думаю, те дубы-исполины играли какую-то важную роль в жизни Якова Наумова, хотя он этого никак не формулировал. Просто раз в год обязательно приезжал к ним на свидание.

Последний раз мы виделись летом 1990 года. В феврале 1995 я вернулся в Литву и с той поры в Москве не был. Не был я и на его похоронах. Так, к сожалению, сложились обстоятельства. По моей просьбе в них принял участие мой брат Исаак. С Яковым Наумовичем он был коротко знаком, из моих рассказов прекрасно знал о роли Якова Наумовича в моей жизни.

Да будет благословенна память о нем!

## П.Я. Уфимцев

После окончания университета, по распределению молодых специалистов я был направлен на работу в ЦНИРТИ. Должен сказать, что мне очень повезло. Молодым инженерам, таким как я, было у кого учиться и с кого брать пример. В институте работало много талантливых ученых. Одним из самых ярких и авторитетных был профессор Яков Наумович Фельд. Его комментарии на семинарах и на ученом совете всегда были интересными и поучительными. Лично мне также были очень полезны его ценные советы при подготовке докторской диссертации. С Яковом Наумовичем у меня сложились хорошие отношения, которые продолжались и после моего перехода из ЦНИРТИ в ИРЭ.

Это был замечательный ученый и прекрасный человек. Сборник его трудов несомненно будет полезен российским ученым.

Вспоминаю один смешной эпизод, произошедший весной 1965 г. Компания в составе двух профессоров (Я.Н. Фельд и Л.А. Вайнштейн) и одного кандидата наук (П.Я. Уфимцев) решила поехать отдохнуть на турбазе в Баксанском ущелье. Профессора достали три путевки, а мне поручили забронировать комнату на турбазе. Я заранее написал туда соответствующее письмо. Когда мы приехали, нам подтвердили, что письмо было получено и комната была забронирована. Однако в данный момент там еще живет какой-то корреспондент и возражает против его переселения, хотя ему и говорят, что эта комната была зарезервирована для двух уважаемых профессоров. Но поскольку этот человек является корреспондентом, администрация не решается настаивать на его переселении из опасения, что у нее могут возникнуть неприятности, если он опубликует о них какую-нибудь нехорошую статью. Нам пообещали найти другую комнату и попросили подождать. Мы присели на скамейку перед входом в корпус и вдруг видим, что к корпусу идет член-корреспондент Академии Наук Леонид Максимович Бреховских. Тут мы и поняли, кто есть этот корреспондент, не пожелавший освободить комнату для профессоров.

## Ю.Н. Ерофеев

В личном деле доктора технических наук, профессора Якова Наумовича Фельда нет копии диплома о высшем образовании. Как так? Оплошность? Небрежность кадровика? Ведь известны железные требования пункта 2 «Положения о порядке присуждения ученых степеней и присвоения ученых званий», гласящем: «Ученая степень доктора наук присуждается... на основании ходатайства специализированного совета, принятого после публичной защиты диссертации соискателем, имеющим высшее образование». И все-таки копию вузовского диплома Я.Н. Фельда искать бесполезно: кандидатскую, а затем и докторскую диссертации Я.Н. Фельд защищал в те легендарные времена, когда требования Положения еще не окаменели, а радиотехническая подготовка, которую давал Политехникум связи (именно его закончил в 1931 году Яков Наумович), по существу приравнивалась к инженерной. Конечно, и тогда возникшая ситуация была все же нестандартной, потребовалось отдельное ходатайство ученого совета, но, как показала жизнь, допущенное исключение принесло отечественной науке только пользу.

Яков Наумович Фельд родился 10 марта 1912 года в Киеве. Там, в Киеве, он окончил в 1927 году Трудовую школу и поступил на радиофакультет техникума связи, переименованного потом в Киевский политехникум (это о нем шла выше речь). Обучение в Киевском техникуме связи Я.Н. Фельд закончил в сентябре 1931 года. С 1932 года началась его самостоятельная трудовая деятельность: Я.Н. Фельд переехал в г. Ленинград и был назначен на инженерную должность в Центральную радиолaborаторию. В 1934 году Я.Н. Фельд перешел на преподавательскую деятельность в Ленинградский электротехнический институт инженеров связи им. М. А. Бонч-Бруевича, не прерывая, однако, связи с промышленностью и продолжая работать в НИИ в качестве консультанта. К этому времени относится и первая научная публикация Я. Н. Фельда: его первая статья называлась «Декремент, энергия и мощность колебательного контура» и была опубликована в 1934 году в научно-техническом сборнике ЛЭИС. Очень скоро определился круг непосредственных научных интересов Я. Н. Фельда: техника СВЧ, теория антенных систем.

25 октября 1939 года Я.Н. Фельд защитил кандидатскую диссертацию по вопросам теории фидерных СВЧ-систем. В 1941 году, вместе с одним из «номерных» ленинградских заводов, на котором Я.Н. Фельд работал сначала научным консультантом по совместительству, а затем — старшим инженером, он был эвакуирован в Сибирь, в г. Красноярск, где в годы Великой Отечественной войны осуществлял разработку антенных систем для самолётных радиомаяков.

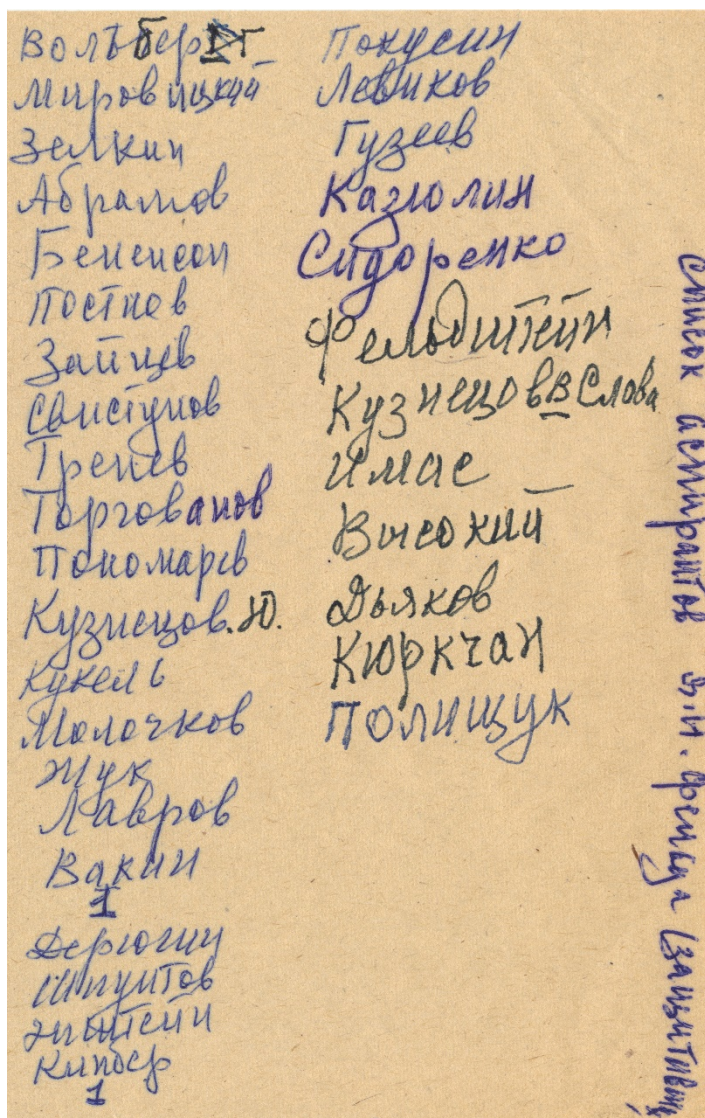
В январе 1946 года Я.Н. Фельд поступил в докторантуру Физического института Академии наук в Москве. В 1947 году завершил работу над докторской диссертацией на тему «Основы теории щелевых антенн», которую защитил на заседании ученого совета нашего института.

В ЦНИРТИ (преемственные изменения в названии института здесь обсуждать не будем) Яков Наумович работает с февраля 1946 года: сначала, в

течение короткого времени, — по совместительству, в должности заместителя начальника лаборатории, а затем, после защиты докторской диссертации, - в качестве штатного работника, руководителя антенной лаборатории и, с сентября 1957 года, — антенного отдела. Высококвалифицированный научный коллектив этих подразделений сложился под личным влиянием и непосредственным руководством Я.Н. Фельда.

Уже с середины 50-х годов Яков Наумович Фельд вошел в число виднейших ученых страны в области антенной техники. Из многочисленных научных результатов, лично полученных Я.Н. Фельдом, здесь отметим только главные: им созданы так называемые «прямые» методы расчета антенн, и в их числе -метод наведенных магнитодвижущих сил для расчета поля в щелях; им разработаны методы решения задач дифракции на незамкнутых криволинейных экранах и поверхностях. Признание научной общественности получила книга Я.Н. Фельда и Л.С. Бененсона «Антенно-фидерные устройства» (в двух частях; первая часть вышла в 1955 г. Под заголовком «Антенны сантиметровых и дециметровых волн», а вторая — в 1959 г.).

Яков Наумович Фельд — создатель крупной научной школы в области теории дифракции электромагнитных волн: более 40 его учеников защитили кандидатские диссертации, а 10 (последний из них хронологически — наш сотрудник А. Г. Кюркчан) - докторские диссертации. Для сравнения отметим: эта цифра, сорок подготовленных Я. Н. Фельдом кандидатов технических и физико-математических наук, — примерно такая же, которая приходится на всех остальных ныне работающих в институте сотрудников с докторскими степенями.



Список защитившихся аспирантов, набросанный Я.Н. по памяти.

Яков Наумович Фельд — признанный руководитель Общественного семинара по прикладной электродинамике и теории дифракции, член Научного совета по радиоастрономии Академии наук, член редакционной коллегии журнала «Радиотехника и электроника», член организационного комитета всех действовавших Всесоюзных школ и симпозиумов по теории дифракции и распространению радиоволн.

Яков Наумович Фельд награжден орденом Трудового Красного Знамени, медалями «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.», «За доблестный труд: В ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина», «Ветеран труда», золотой медалью ВДНХ, Юбилейной медалью им. А. С. Попова Академии наук, знаком «Почетный радист», Почетным дипломом и премией им. А.С. Попова Академии наук.

Родился 10<sup>го</sup> марта 1912<sup>г.</sup> в г. Киеве (Украина)  
 В 1931<sup>г.</sup> окончил радио факультет Киевского Политехникума  
 связи. В 1939<sup>г.</sup> защитил кандидатскую диссертацию  
 в Ленингр. электротехниг. институте связи  
 по радиофизике. В 1947<sup>г.</sup> окончил докторантуру  
 Академии Наук СССР и защитил докторскую  
 диссертацию по радиофизике. В 1948<sup>г.</sup>  
 утвержден в ученом звании профессора.  
 С 1934<sup>г.</sup> по 1992<sup>г.</sup> преподавал в различных  
 высших учебных заведениях. Одновременно  
 работал в научно-исследовательских институтах  
 в должностях нач. лаборат., отдела.  
 В наст. время работаю ведущим научным  
 сотрудником Центрального научно-исследов.  
 радиотехнического института  
 Опубликовал 180 статей и 3 монографии,  
 имею 10 изобретений.  
 лауреат премии им. Топлева Академии  
 наук СССР.

Тема Д. дисс. "Основы теории целевых антенн"  
 кад. дисс. "Основы теории фидерных сетей"

## **Я.С.Шифрин.      Мой «старший брат» - Яков Наумович Фельд**

На мою долю выпало большое счастье – на протяжении свыше тридцати лет дружить и пользоваться неизменным благорасположением замечательного человека – Якова Наумовича Фельда. Познакомились мы в 1962 г. и с тех пор до последних дней его жизни Я.Н. был для меня не просто другом, а скорее «старшим братом». В те времена я часто бывал в Москве, и в каждый мой приезд обязательно бывал в доме Я.Н., зачастую ночевал у него. Встречались мы с ним на многочисленных мероприятиях – конференциях, семинарах, разного рода совещаниях. Бывая у него дома или гуляя по Москве, мы подолгу беседовали на самые разные темы – научные, общественные и просто житейские. Эти беседы всегда доставляли мне большое удовольствие. Во-первых, потому что наши позиции по обсуждаемым вопросам обычно совпадали. А во-вторых, потому что Я.Н. был необычайно эрудированным человеком в вопросах науки, философии, литературы, истории, в частности истории разных религий. Он живо интересовался жизнью во всех ее проявлениях.

И все же главным его увлечением была наука. Необычайные способности к естественным наукам у Якова Наумовича проявились еще тогда, когда после окончания средней школы в 1927 г., в возрасте 15 лет, он поступил на радиофакультет Киевского техникума связи. В 1932 г. по окончании техникума Яков Наумович переезжает в Ленинград, бывший тогда научным центром страны, и начинает свою трудовую деятельность в Центральной радиолaborатории (ЦРЛ). Не имея высшего образования, он, благодаря редкому таланту и феноменальному трудолюбию, к двадцати годам сформировался как блестящий теоретик с исключительно широким научным кругозором. Здесь надо отметить серьезную моральную поддержку, оказанную Якову Наумовичу в его становлении как ученого и педагога, а также отеческую заботу о нем со стороны его руководителя по ЦРЛ – известного антенщика профессора Владимира Васильевича Татарина. Всю свою жизнь Яков Наумович очень тепло вспоминал этого замечательного человека.

С начала 30-х годов началась необычайно плодотворная научная и педагогическая деятельность Я.Н. Фельда, длившаяся свыше 60 лет. С 1932 по 1946 гг. он работал в ЦРЛ (под разными названиями этой организации). В годы войны Яков Наумович работал в Красноярске на заводе Радиосвязь. С тех пор прошло много-много лет. Однако до сих пор заводчане с большим уважением и теплотой вспоминают Якова Наумовича. В частности, это проявилось с десятков лет тому назад, когда отмечался юбилей завода. По просьбе заводского



руководства я отправил информацию о жизни и деятельности Якова Наумовича, которую они поместили в заводской музей.

С 1946 г. и до конца своей жизни Я.Н. заведовал антенным отделом одного из наиболее крупных и авторитетных НИИ министерства радиопромышленности – ЦНИИ-108, впоследствии переименованном в Центральный научно-исследовательский радиотехнический институт (ЦНИРТИ).

Яков Наумович внес фундаментальный вклад в прикладную электродинамику, в теорию дифракции и, особенно, в основы современной теории антенн, одним из основателей которой он по праву считается.

Отметим некоторые из наиболее важных, на наш взгляд, научных достижений Якова Наумовича.

1. Формулировка и доказательство ряда общих теорем электродинамики, касающихся различных типов внутренних и внешних краевых задач.

2. Разработка строгой теории щелевых (дифракционных) антенн. Фундамент этой теории изложен в известной монографии Я.Н. Фельда "Основы теории щелевых антенн" (1948 г.), являющейся первой и лучшей в мировой литературе по данному вопросу.

3. Развитие известного ранее метода наведенных ЭДС в двух направлениях: создание обобщенного метода наведенных ЭДС и метода магнитодвижущих сил (МДС). Обобщенный метод наведенных ЭДС существенно расширил возможности анализа вибраторных антенн. Использование же метода наведенных МДС позволило, в частности, просто определить распределение напряженности поля вдоль узких щелей в многощелевых антеннах. Им введены понятия внешних и внутренних характеристик щелевых антенн и разработана методика их нахождения, используемая повсеместно при проектировании бортовых и наземных щелевых антенн разнообразных типов.

4. Разработан новый метод решения задач дифракции волн на замкнутых и разомкнутых металлических и импедансных поверхностях. В последнем случае граничные условия могут быть неоднородными и анизотропными. В основе предложенного метода лежит сведение краевой задачи к интегральным уравнениям второго рода. На базе предложенного метода разработана, в частности, эффективная методика расчета параметров зеркальных антенн с вибраторным облучателем, а также методика определения поля рассеяния этой антенны при падении на нее плоской электромагнитной волны. В дальнейшем этот метод был модифицирован в интересах решения трех типов обратных задач, сводящихся к нахождению поверхностных электрического и магнитного токов на заданной (замкнутой или разомкнутой) поверхности по известной диаграмме направленности.

5. Разработан метод вариации постоянных, для решения краевых задач, сводящихся к уравнениям в частных производных. Предложенный метод весьма перспективен при решении задач рассеяния волн различными телами и определении присущих им эффективных поперечников рассеяния.

6. Детально изучен комплекс вопросов, связанных с выяснением ограничений, налагаемых реальной средой, в которой работает антенна. Показано, что потери в среде ограничивают максимальную мощность, извлекаемую приемной антенной из падающего поля. Важное практическое значение имеют также полученные Я.Н.Фельдом формулы для мощности, поступающей в приемник при падении на антенну неплоской волны, учитывающие и рассогласование на концах фидерного тракта.

7. Разработаны теория рассеяния поля антеннами, работающими на прием, и теория развязки между двумя антеннами, расположенными на некотором расстоянии друг от друга.

Многие полученные Я.Н.Фельдом теоретические результаты являются классическими, определившими в значительной мере развитие современной прикладной электродинамики в целом. основополагающий характер его работ подтверждается, в частности, и тем, что большая их часть публиковалась в "Докладах АН СССР".

Существенный вклад внесен Яковом Наумовичем также в создание и развитие новой антенной техники. Под руководством и при непосредственном участии Я.Н. антенным отделом ЦНИИ-108 разработаны многие оригинальные образцы антенной техники для различных радиотехнических систем – крупные металловоздушные линзы; антенны поверхностных волн, в том числе, антенны на основе ребристых структур; антенны эллиптической поляризации и ряд других антенн.

Яков Наумович был не только выдающимся ученым, но и отличным преподавателем. Преподавательскую деятельность он начал в 1934 г. в Ленинградском институте связи им. М.А. Бонч-Бруевича. Лекции по основам прикладной электродинамики, которые с блеском читал студентам еще совсем юный учитель, с большим интересом и пользой для себя слушали и многие уже известные радиоспециалисты. В дальнейшем Яков Наумович вел преподавательскую работу во многих московских вузах. Эту работу он вел до последних дней своей жизни. Исключительный педагогический талант Я.Н. Фельда проявился в его общении как со студентами различных гражданских и военных вузов, так и с участниками многочисленных конференций, семинаров, школ молодых ученых, на которых он выступал в течение всей своей жизни. Особо надо выделить Всесоюзный семинар по теории дифракции, который Яков Наумович создал и которым с неиссякаемым энтузиазмом

руководил на общественных началах более 35(!) лет. Через этот регулярно работавший семинар прошли "проверку боем" многие молодые специалисты, ставшие впоследствии видными учеными в различных областях радиофизики. Выступить на "дифракционном" семинаре было и боязно, из-за высокого его научного уровня, и интересно – потому что, благодаря острому уму руководителя семинара, любые спорные и неясные (зачастую самим докладчикам) вопросы быстро находили свое решение. Характерной чертой для Якова Наумовича, как руководителя семинара, было сочетание высокой требовательности к докладчикам с очень доброжелательным отношением к ним. Именно последнее особенно способствовало быстрому научному росту многих молодых талантливых людей. В 2002 г. в связи с 90-летием со дня рождения Якова Наумовича, учитывая его огромные заслуги в организации и многолетнем бескорыстном руководстве семинаром, по моей инициативе (моему письму) было принято решение о присвоении семинару имени Я.Н. Фельда. Это решение было воспринято научной общественностью с большим удовлетворением.

Важным итогом многолетней педагогической деятельности Я.Н. явился написанный им совместно с его учеником Л.С. Бененсоном двухтомный учебник по антеннам (изд-ва Военной академии им Н.Е. Жуковского). Первая часть этого учебника, «Антенны сантиметровых и дециметровых волн», вышла в 1955 г., а вторая, «Антенно-фидерные устройства» – в 1959 г. В этих книгах сочетаются превосходное изложение электродинамических основ теории антенн (базирующееся во многом на оригинальных научных результатах Я.Н. Фельда) с их энциклопедичностью: широким охватом ряда типов антенн сантиметрового и дециметрового диапазонов волн. Фундаментальное рассмотрение принципов построения и теории этих антенн, дополнено богатым экспериментальным материалом об их реальных характеристиках. После 1960 г. в СССР было издано немало прекрасных книг по антеннам, но ничего сопоставимого с фундаментальным учебником Я.Н. Фельда и Л.С. Бененсона не было. В 2007 г., к 95-летию Якова Наумовича, учебник Фельда и Бененсона по инициативе И.Я.Ицхоки и С.Я.Фельда был, наконец-то, переиздан в виде однотомника в серии «Классики отечественной науки» («Основы теории антенн», изд-во Дрофа, 2007). При этом мною и учеником Я.Н. – профессором А.Г. Кюркчаном было решено включить в однотомник практически без изменений первый том двухтомника, содержащий компактное изложение электродинамических основ теории антенн, а из второго тома включить в новое издание оригинальный, сохранивший свою значимость к моменту переиздания книги, материал по общей теории открытых и закрытых линий и по основам теории щелевых антенн. К сожалению, новая книга была издана недостаточным тиражом и поэтому быстро разошлась.

Яков Наумович принимал активное участие в подготовке намечавшегося к изданию пятитомного антенного справочника и, в частности, в работе по

написанию и редактированию вышедшего в свет в 1997 г. первого тома этого справочника (Изд-во ИПРЖР). Здесь Я.Н. Фельдом дано удивительно компактное и строгое изложение электродинамических основ теории антенн – лучшее из всего известного мне в мировой литературе.

Под руководством Я.Н. защищено 10 докторских и более 40 кандидатских диссертаций. Он является автором 3 монографий, более 200 научных работ, 10 авторских свидетельств на изобретения.

На протяжении почти 40 (!) лет Я.Н. Фельд курировал в журнале «Радиотехника и электроника» раздел «Электродинамика, теория дифракции, антенны». Во всех этих областях науки он был одним из наиболее авторитетных ученых СССР. К своей работе в редколлегии, как и ко всем другим делам, Я.Н. относился предельно добросовестно. Он определил для себя штат помощников-рецензентов, которым он доверял как в профессиональном плане, так и в вопросе их объективности. Я был удостоен чести быть одним из таких помощников. Хорошо помню наставления Я.Н. «Если статья хорошая, – говорил он, – то рецензия может быть сравнительно короткой. Но если статья сомнительная, то рецензия должна быть подробной, дабы автору было ясно, почему его работа отклонена». Этому подходу к рецензированию работ я учил и своих учеников, в частности и в таком вопросе, как рецензирование работ студентов-заочников.

Якова Наумовича глубоко ценили и уважали такие крупные физики и математики, как академики В.А. Фок, М.А.Леонтович, В.А. Котельников, А.Н. Тихонов, А.А. Пистолькорс, Л.Д. Бахрах и многие другие.

В 1986 г. Яков Наумович был удостоен премии им. А.С. Попова АН СССР. Тем не менее, мне, как и многим другим его друзьям и почитателям, представляется, что по его вкладу в развитие электродинамики и общей теории дифракции Яков Наумович был вполне достоин быть избранным в АН СССР. К сожалению, этого не произошло. Более того. Несмотря на огромный вклад Я.Н. в науку, в радиофизику, он был обойден официальным признанием со стороны государства. Даже представление его к званию «Заслуженный деятель науки России» было отклонено антисемитски настроенными чиновниками министерства радиопромышленности. И при всей поразительной скромности Я.Н. это, вероятно, не могло его не задевать. Но внешне это никогда и никак не проявлялось. Он по-прежнему активно занимался наукой и педагогикой, добросовестно выполнял свои многочисленные общественные дела. Это был благородный, глубоко порядочный человек, высокопринципиальный не только в делах науки, но и в самых разных жизненных ситуациях. Наряду с этим, он был добрым и отзывчивым человеком, всегда находившим силы и время для оказания помощи многим из окружавших его или обращавшихся к нему людей. И это при своем далеко не лучшем здоровье. Я.Н. был

прекрасным семьянином и трогательно заботился о семьях своих друзей, рано ушедших из жизни.

Мне, как «младшему брату», особенно повезло. Я.Н., остро чувствуя новое в науке, активно поддержал меня, когда я начал заниматься статистической теорией антенн (СТА), способствовал публикации моих статей по СТА и был оппонентом по моей докторской диссертации. В 1983 г. Яков Наумович был одним из двух рецензентов, активно рекомендовавших комиссии АН СССР присудить мне премию им. А.С. Попова за работы в области СТА. И это при том, что сам он имел тогда куда больше оснований для присуждения ему этой премии (это досадное упущение было исправлено три года спустя, в 1986 г.).

Великолепные человеческие качества в сочетании с удивительным педагогическим мастерством, широчайшей научной эрудицией и огромным творческим потенциалом снискали Якову Наумовичу глубокое уважение и любовь огромного количества людей, соприкасавшихся с ним в течение всей его жизни.

Умер Яков Наумович 28 августа 1995 г.

Прошло уже много времени после ухода Я.Н.Фельда из жизни. В марте 2012 г. исполнялось 100 лет со дня его рождения. Еще за год до этого я решил приложить максимум усилий к тому, чтобы отметить эту дату достойным образом. И не столько потому, что Я.Н. был мне очень близок. Главное, что двигало мною, было острое желание напомнить научной общественности об огромном вкладе, внесенном юбиляром в отечественную и мировую науку – радиофизику и прикладную электродинамику. Это мое желание усиливалось еще и потому, что Яков Наумович был, как я писал выше, крайне несправедливо обойден официальным признанием. Мои усилия были активно поддержаны Александром Гавриловичем Кюркчаном, генеральным директором ЦНИРТИ Б.С. Лобановым, руководителями «фельдовского» семинара В.В. Шевченко и С.П. Скобелевым, а также редакциями журнала «Радиотехника и электроника» и ряда других журналов. С А.Г. Кюркчаном мы подробно обсудили содержание юбилейного спецвыпуска журнала «Радиотехника и электроника» и написали для этого выпуска статью «Яков Наумович Фельд. Творческий путь». Не буду описывать другие детали юбилейных мероприятий. В конечном счете, все намеченное удалось выполнить на должном уровне. Отмечу лишь, что в связи с юбилеем, в музее ЦНИРТИ был создан постоянно действующий стенд памяти Я.Н. Фельда.

С тех пор прошло еще несколько лет. Яков Наумович по-прежнему с нами. В Москве регулярно, ежемесячно, проводятся «фельдовские» дифракционные семинары. И эти семинары, помимо того, что они способствуют

дальнейшему развитию теории дифракции и антенн, попутно способствуют и тому, чтобы имя основателя этих семинаров Я.Н. Фельда – этого блестящего ученого, выдающегося педагога и замечательного человека – сохранилось на долгие-долгие годы в благодарной памяти многих поколений специалистов, занимающихся прикладной электродинамикой.

## Р.Л. Евельсон

Судьбе было угодно сложиться так, что в научном плане я не принадлежал ни к какой научной школе. Это всегда осложняло мое продвижение в науке в условиях, когда я сам был уверен в своей правоте. Но эта правота должна стать достоянием научной общественности, что материализуется в виде научных статей, ученых званий, степеней, должностей и т.п. На этом этапе автор всегда оказывается во власти редакций научных журналов и их рецензентов, которые выступают против заявленных идей автора в результате своего непонимания, чести мундира журнала и т.п. непотребного. Если автор принадлежит к какой-либо научной школе, то возникает борьба автора в союзе со своей школой против противной научной школы. Мне приходилось бороться в одиночку против установившегося порядка вещей. И Яков Наумович Фельд всегда меня понимал, поддерживал и внушал мне уверенность в своей правоте.

Впервые я услышал фамилию Фельд, когда в рамках физтеховской системы обучения я попал на базовую кафедру МФТИ в ЦНИРТИ для изучения антенно-фидерных устройств. Преподавателями были Фельд и Бененсон. Но в основном все занятия вел Бененсон. В процессе обучения у меня часто возникали вопросы по электродинамике, на что Бененсон неизменно отвечал; «Фельд считал...».

Через несколько лет моя работа по оптимальном синтезу радиопоглощающих материалов была доложена на конференции молодых специалистов ЦНИРТИ. Подводя итоги этой конференции, Я.Н. Фельд, не называя меня, сказал, что ему было «отрадно слышать» мой доклад. Я был на седьмом небе, готов был работать дальше для ее обобщения, что и привело меня к написанию диссертации. Научным руководителем был мой начальник отдела к.т.н. Данилов Алексей Владимирович, а официальным оппонентом по моей просьбе – тоже выпускник МФТИ начальник сектора в антенном отделе Я.Н. Фельда к.т.н. Зайцев Юрий Аполлонович. Найти второго официального оппонента мне помогал Я.Н. Фельд, которому я очень благодарен. Сначала он предложил мне М.Л. Левина, но тот сказал, что он д.ф.-м.н. как физик, а я преодолел математические трудности, и поэтому мне нужен математик. И тогда Яков Наумович договорился с заведующим кафедрой математики на физфаке МГУ профессором Свешниковым А.Г. быть моим официальным оппонентом на защите, которая происходила на РФФ МФТИ. Защита прошла успешно, Данилов меня обнял, поцеловал, сказал, что я выступал артистически. Это тем более лестно, ибо Я.Н. Фельд советовал мне: «Вы лучше пишете, чем говорите».

Мою манеру письма Яков Наумович хорошо знал, т.к. я неоднократно посылал для публикации статьи в журнал «Радиотехника и электроника», где он был членом редколлегии, и мне часто приходилось опровергать отрицательные рецензии на мои статьи. Так что Фельду приходилось испытывать давление с двух сторон, к чему он относился с большим прилежанием.

Яков Наумович много сделал для моего развития как научного работника, привлекая меня к рецензированию статей для журнала «Радиотехника и электроника», для стимуляции моего имиджа как научного работника в моем отделе, выдавая нашему отделу нужные для антенного отдела заказы, выполнить которые мог только я на основе КВМ и за выполнение которых полагалась самая престижная премия отделу из фонда директора института. Особенно ему понравился результат, согласно которому интегральный поперечник рассеяния в квазиволновом приближении равен двум площадям поперечного сечения не только для идеально проводящего тела, но и для любого импедансного тела с чисто мнимым импедансом.

Яков Наумович хорошо знал мои работы, даже еще не опубликованные, что показал мне один хорошо запомнившийся на всю жизнь эпизод. Однажды мне редакция дала на рецензию статью, на которую я даю положительный отзыв и показываю ее Фельду. Яков Наумович видит, что в статье речь идет о работе, которой занимаюсь я, и говорит: «Это же Ваша работа» - «Ну и что же, в статье все верно, а потому я должен дать положительную рецензию. Кроме того, моя такая же статья из ЦНИРТИ была бы, по крайней мере, секретной». Фельд хмыкнул и согласился. Ну, не мог я отклонять статью только потому, что она не моя.



## **Полное собрание статей**

Я. Н. ФЕЛЬД**Декремент, энергия и мощность колебательного контура**

В современной технике, хотя и редко, но все же встречаются ошибки даже в основных, казалось бы совершенно разработанных, областях.

Такая ошибка вкралась в один из наиболее важных отделов радиотехники и вошла во многие современные фундаментальные курсы, как на русском, так и на иностранных языках. Как видно из названия самой статьи, речь идет о декременте затухания, точнее о связи между декрементом  $\vartheta$  затухания колебаний и углом  $\psi$  сдвига фаз между током и напряжением на конденсаторе. Из просмотренных нами русских руководств, только в „Основных электротехники“ К. А. Круга [1] дано правильное соотношение между  $\vartheta$  и  $\psi$ , для частного случая свободных колебаний, когда конденсатор не имеет ваттной утечки, а именно:

$$\vartheta = 2\pi \operatorname{ctg} \psi. \quad (1)$$

У Hund'a [2] дана неправильная формула:

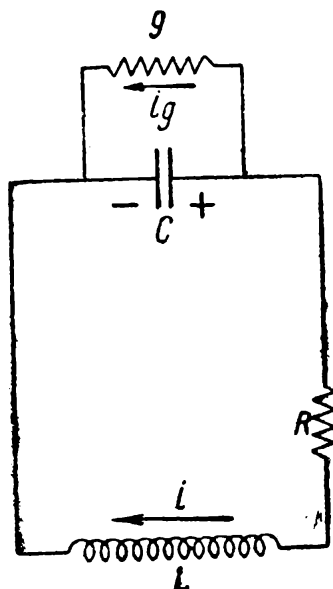
$$\vartheta = \pi \operatorname{ctg} \psi.$$

Но наиболее распространенной является формула:

$$\vartheta = \pi \cos \psi. \quad (2)$$

Она имеется в курсах Фреймана [3], Берга [4], Сузанта [5], Rein-Wirtz'a [6] и Луценко [7].

Правда, Луценко оговаривается, что формула (2) действительна только для незатухающих колебаний. Однако для этого случая формула (2) вообще не имеет никакого смысла, так как декремент затухания колебаний при незатухающих колебаниях всегда равен нулю. Если же рассматривать угол  $\psi$  как угол сдвига фаз между током и подводимым напряжением, а  $\vartheta$  как декремент контура



Фиг. 1.

$$\vartheta = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}},$$

то мы приходим к противоречию, так как левая часть формулы (2) есть величина постоянная для данного контура, а правая зависит от частоты подводимого напряжения. Таким образом, и для случая незатухающих колебаний формула (2) неверна.

Приведем полную теорию декремента, когда контур имеет и последовательное сопротивление  $R$  и ваттную утечку конденсатора  $G$  (фиг. 1). Тогда, на основании законов Кирхгофа, уравнения колебаний будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri - v &= 0 \\ i &= -C \frac{dv}{dt} - Gv \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $v$  — напряжение на конденсаторе, а  $i$  — ток в главном контуре, при чем за положительное направление тока принимается ток, разряжающий конденсатор. 46

Из уравнений (3) легко получить следующие уравнения для напряжения и тока:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \frac{dv}{dt} + \left(\frac{RG}{CL} + \frac{1}{CL}\right) v &= 0 \\ \frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \frac{di}{dt} + \left(\frac{RG}{CL} + \frac{1}{CL}\right) i &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения эти легко привести к обычному виду, положив:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{2L} &= \alpha, & \frac{G}{2C} &= \beta \\ \alpha + \beta &= \epsilon, & \omega_0^2 &= \frac{GR}{CL} + \frac{1}{CL} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

тогда получим

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0. \quad (5a)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\epsilon \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0. \quad (5b)$$

Решения уравнений (5a) и (5b) имеют совершенно такой же вид, как и уравнения свободных колебаний контура без утечки конденсатора:

$$\left. \begin{aligned} v &= V_0 e^{-\epsilon t} \sin(\omega t + \psi) \\ i &= I_0 e^{-\epsilon t} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Однако, благодаря иным исходным уравнениям (3), значения постоянных параметров здесь будут иные, а именно:  $\epsilon = \alpha + \beta = \frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}$ .

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= v_0 \sqrt{1 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{\omega^2}} = \frac{i_0 v_0}{\omega \sqrt{LC}}, & I_0 &= V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \omega^2 &= \frac{1}{LC} - (\alpha - \beta)^2, & \operatorname{tg} \psi &= \frac{\omega}{\alpha - \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $v_0$  есть начальное значение напряжения на конденсаторе, а  $V_0$  и  $I_0$  — начальные значения амплитуд напряжения и тока. При беглом взгляде на формулы (7) бросается в глаза, что при  $\alpha = \beta$  угловая частота  $\omega$  в точности равна  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а  $\psi = 90^\circ$ . Между тем декремент затухания не равен нулю, как это следовало бы из формулы (1) при отсутствии утечки конденсатора ( $G = 0$ ).

Отметим еще весьма интересное выражение, которое легко получить для  $\cos \psi$ :

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \cos \psi &= (\alpha - \beta) \sqrt{LC} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Логарифмический декремент колебаний определяется как логарифм отношения напряжений или токов, отделенных промежутком времени, равным периоду колебаний.

$$\vartheta = \ln \frac{i_t}{i_{t+T}} = \epsilon T = \frac{2\pi}{\omega} (\alpha + \beta).$$

Из последнего уравнения (7) мы имеем:

$$\omega = (\alpha - \beta) \operatorname{tg} \psi.$$

Следовательно

$$\vartheta = 2\pi \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \operatorname{ctg} \psi; \quad (9)$$

при  $\beta = 0$  мы получим формулу (1):

$$\vartheta = 2\pi \operatorname{ctg} \psi. \quad (1)$$

При малых затуханиях угол  $\psi$  близок к  $90^\circ$  и

$$\operatorname{ctg} \psi = \sim \cos \psi.$$

В этом случае можно пользоваться приближенной формулой

$$\vartheta = \sim 2\pi \cos \psi, \quad (1')$$

но никак не формулой (2), которая дает вдвое меньшее значение декремента при заданном  $\psi$ .

Энергия  $A$  контура в любой момент выражается формулой

$$A = \frac{i^2 L}{2} + \frac{v^2 C}{2}$$

или

$$A = \frac{e^{-2\epsilon t}}{2} [LI_0^2 \sin^2 \omega t + CV_0^2 \sin^2(\omega t + \psi)];$$

но  $LI_0^2 = CV_0^2$  и потому

$$A = \frac{CV_0^2}{2} e^{-2\epsilon t} [\sin^2 \omega t + \sin^2(\omega t + \psi)]. \quad (10)$$

Средняя мощность за период, расходуемая контуром, будет

$$P_{\text{cp}} = -\frac{1}{T} \left| A \right|_t^{t+T} \quad (11)$$

или

$$P_{\text{cp}} = \frac{CV_0^2}{2T} e^{-2\epsilon t} (1 - e^{-2\epsilon T}) [\sin^2 \omega t + \sin^2(\omega t + \psi)];$$

при малых значениях  $\epsilon$  последнее выражение можно значительно упростить. Мы уже видели, что в этом случае  $\psi$  близко к  $90^\circ$ . Поэтому выражение в квадратных скобках можно принять за единицу. Кроме того, можно положить:

$$1 - e^{-2\epsilon T} = \sim 2\epsilon T;$$

тогда получим:

$$P_{\text{cp}} = V_0^2 C \epsilon e^{-2\epsilon t} = V_0 I_0 \epsilon \sqrt{LC} e^{-2\epsilon t}$$

$$P_{\text{cp}} = VI \epsilon \sqrt{LC}.$$

Но из формул (8) имеем:

$$\sqrt{LC} = \frac{\cos \psi}{\alpha - \beta}$$

и потому

$$P_{\text{cp}} = IV \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \cos \psi, \quad (12)$$

где  $I$  и  $V$  — мгновенные значения амплитуд. В случае  $\beta = 0$ , получим

$$P_{\text{cp}} = IV \cos \psi. \quad (12')$$

При обыкновенном переменном токе, т. е. при вынужденных незатухающих колебаниях, имеем:

$$P_{\text{ор}} = \frac{1}{2} I E \cos \psi, \quad (13)$$

где  $I$  и  $E$  — амплитуды тока и ЭДС, а  $\psi$  — фазовый угол.

При свободных затухающих колебаниях иногда рассматривают переменное напряжение на конденсаторе как некоторую приложенную ЭДС и применяют к контуру формулу (13).

Из предыдущего видно, однако, что в этом случае формула переменного тока не применима, и необходимо пользоваться формулой (12), а в частном случае, при  $\beta = 0$ , формулой (12').

Неправильное применение формулы (13) к случаю свободных затухающих колебаний и послужило причиной ошибки в выводе формулы (2) для соотношения между  $\vartheta$  и  $\psi$ .

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность проф. В. В. Татаринovu за указание темы и советы при выполнении настоящей работы.

### Л и т е р а т у р а

- [1] К. А. Круг. „Основы Электротехники“, т. II, 1932 г., стр. 613.
- [2] H u n d. „Messungen bei Hochfrequenztechnik“. Springer, 1928, стр. 228.
- [3] И. Г. Фрейман. „Курс радиотехники“, Ленинград, 1924 г., стр. 18.
- [4] А. И. Берг. „Общая теория радиотехники“, Ленинград, 1925 г., стр. 75.
- [5] Сузант. „Радио-сети“. ч. I, 1933 г., стр. 57.
- [6] Rein-Wirtz. „Radiotelegraphisches Praktikum“. Springer, 1922 г., стр. 191.
- [7] Луценко. „Основы теории радиотехники“, Москва, 1933 г., стр. 21.

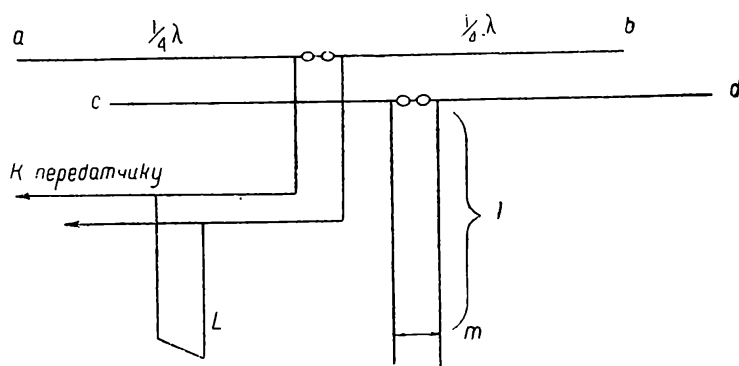
Научно-технический сборник ЛЭИС, 1934, №6, стр.60-71.

**В. В. ТАТАРИНОВ, И. М. РУЩУК и Я. Н. ФЕЛЬД**

**Экспериментальная поверка расчетов направленных передающих антенн**

### § 1. Цель и схема опытов

Рядом работ, произведенных в лаборатории передающих антенн ЦРЛ в 1931—1933 гг., была разработана теория и методы технических расчетов передающих направленных антенн <sup>1)</sup>.



Фиг. 1

Отдельные опыты давали нам уверенность в правильности намеченного пути, но систематическая экспериментальная проверка теории и ее выводов могла быть поставлена лишь в 1933 г.

Для проверки была выбрана формула, дающая относительную мощность луча близкого к горизонту и лежащего в направлении главного азимута синфазной

антенны ([5] стр. 97, формула 125):

$$q = \frac{a}{a_1} = \frac{1 + \mu^2 \cos^2(\delta + \psi) - 2\mu \cos(\delta + \psi) \cos(md + \psi)}{2[1 - \mu^2 \cos(\delta + \psi) \cos(\delta - \psi)]} \quad (1)$$

Эта формула является одним из окончательных выводов теории и потому поверку ее можно рассматривать как поверку всей теории.

Заметим, что заменив в формуле (1)  $d$  через  $-d$ , мы получим закон изменения излучения в направлении противоположном главному, что соответствует замене рефлектора директором. Этот вывод тоже был проверен экспериментально. Значения величины  $q$  для отрицательных значений  $d$  мы в дальнейшем будем обозначать через  $q'$ .

Работу решено было провести с простейшей антенной, состоящей из одного горизонтального вибратора в  $\frac{1}{2} \lambda$  длиной, подвешенного на расстоянии  $a = \frac{1}{2} \lambda$  от земли, и такого же зеркала.

Расстояния зеркала от антенны были различные.

Схема антенны  $ab$  и рефлектора  $cd$  дана на фиг. 1. Питание антенны подводилось в пучности тока. Фидер был настроен на бегущую волну индуктивным мостиком  $L$ . В пучность тока рефлектора включался шлейф с подвижным мостиком  $m$ . Передвижение этого мостика меняло настройку зеркала и сдвиг фазы  $\psi$  его тока относительно тока антенны. Волна была взята 16,8 м. Диаметр проводов был 3,5 мм, расстояние между проводами фидера и шлейфов  $d = 0,4$  м. Волновое сопротивление фидера при этих данных получается  $w \approx 650$  ом. Излучение в главном и обратном главному направлениях определялось двумя индикаторами на расстоянии 100 м.

<sup>1)</sup> См. литературный указатель в конце статьи.

от антенны. Схема индикатора дана на фиг. 2, а общий вид—на фиг. 3. 50  
 В качестве детектора служила пара цинкит—халькопирит.

Первые же ориентировочные опыты показали, что точность метода позволяет учесть влияние омических потерь в проводах сети. Вследствие этого потребовалось соответствующее уточнение теории.

## § 2. Учет омических потерь в проводах антенны с пассивным зеркалом

Влияние омических потерь в проводах сети должно сказаться в увеличении ваттных сопротивлений антенны и зеркала. Вследствие этого активные составляющие собственных сопротивлений антенны и зеркала мы уже не можем считать равными  $R_{2s0}$

Обозначим их соответственно  $R'_{2s0}$  и  $R''_{2s0}$ . Когда мы, кроме того, меняем настройку зеркала, то реактивная составляющая его собственного сопротивления будет не  $R_{2q0}$ , но  $R''_{2q0}$ . Антенна во время опытов не имела органов настройки и реактивная составляющая ее собственного сопротивления оставалась равной  $R_{2q0}$ .

Приняв во внимание указанные изменения мы можем написать основные уравнения, определяющие комплексные сопротивления антенны и зеркала ([5] стр. 89, формулы 109"), в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R'_{2s0} + \alpha [R_{2s} \cos \psi + R_{2q} \sin \psi] + j \{ R_{2q0} + \alpha [R_{2q} \cos \psi - R_{2s} \sin \psi] \} \\ Z_2 &= R''_{2s0} + \frac{1}{\alpha} [R_{2s} \cos \psi - R_{2q} \sin \psi] + j \{ R''_{2q0} + \frac{1}{\alpha} [R_{2q} \cos \psi + R_{2s} \sin \psi] \} \end{aligned} \quad (2)$$

В этих формулах параметры  $R_{2s}$ ,  $R_{2q}$ ,  $R'_{2s0}$ ,  $R''_{2s0}$  и  $R_{2q0}$  определяются вычислением для разных расстояний зеркала  $d$  и при настройке его не меняются.

С изменением настройки зеркала изменяются величины  $\alpha$ ,  $\psi$  и  $R''_{2q0}$ . Эти три переменные связаны между собою двумя уравнениями, вытекающими из равенства нулю  $Z_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha R''_{2s0} + R_{2s} \cos \psi - R_{2q} \sin \psi &= 0 \\ \alpha R''_{2q0} + R_{2q} \cos \psi + R_{2s} \sin \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Таким образом настройка зеркала определяется одной независимой переменной, за которую мы принимаем сдвиг фазы  $\psi$ . Уравнения (3) позволяют вычислить через  $\psi$  остальные переменные:

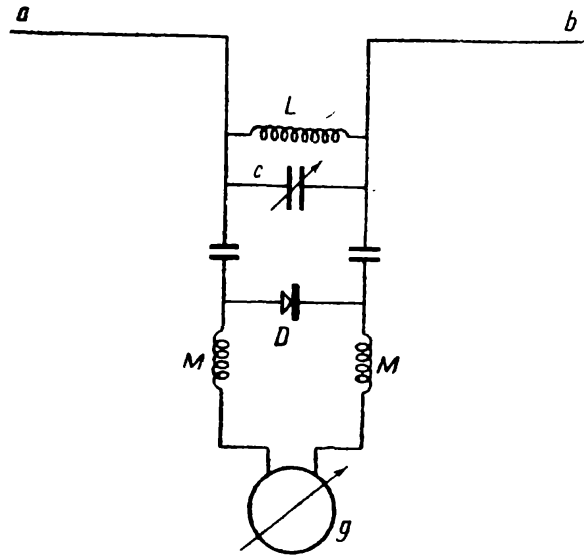
$$\alpha = - \frac{r}{R''_{2s0}} \cos (\delta + \psi) \quad (4)$$

и

$$R''_{2q0} = R''_{2s0} \operatorname{tg} (\delta + \psi),$$

где

$$r = \sqrt{R_{2s}^2 + R_{2q}^2} \quad \text{и} \quad \delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{R_{2q}}{R_{2s}} \quad (4)'$$



Фиг. 2

Сопротивление излучения  $R_{\Sigma}$  будет равно ваттной составляющей  $Z_1$  51  
выразится так:

$$R_2 = R'_{2s0} \left[ 1 - \frac{R''_{2s0}}{R'_{2s0}} \left( \frac{r}{R''_{2s0}} \right)^2 \cos(\delta + \psi) \cos(\delta - \psi) \right] \quad (5)$$

Величина  $a$ , пропорциональная излучению в главном направлении, будет

$$a = \frac{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(md + \psi)}{R_{\Sigma}}$$

или

$$a = \frac{1 + \left( \frac{r}{R''_{2s0}} \right)^2 \cos(\delta + \psi) - 2 \frac{r}{R''_{2s0}} \cos(\delta + \psi) \cos(md + \psi)}{R'_{2s0} \left[ 1 - \frac{R''_{2s0}}{R'_{2s0}} \left( \frac{r}{R''_{2s0}} \right)^2 \cos(\delta + \psi) \cos(\delta - \psi) \right]}$$

Для антенны с активным рефлектором, отстоящим от нее на  $1/4 \lambda$ , получим

$$a_1 = \frac{4}{R'_{2s0} + R''_{2s0}},$$

а отношение этих величин будет:

$$q = \frac{a}{a_1} = \frac{\left( 1 + \frac{R''_{2s0}}{R'_{2s0}} \right) \left[ 1 + \left( \frac{r}{R''_{2s0}} \right)^2 \cos^2(\delta + \psi) - 2 \frac{r}{R''_{2s0}} \cos(\delta + \psi) \cos(md + \psi) \right]}{4 \left[ 1 - \frac{R''_{2s0}}{R'_{2s0}} \left( \frac{r}{R''_{2s0}} \right)^2 \cos(\delta + \psi) \cos(\delta - \psi) \right]}$$

Если обозначим

$$\frac{R''_{2s0}}{R'_{2s0}} = \gamma$$

и

$$\frac{r}{R''_{2s0}} = \mu,$$

то

$$q = \frac{(1 + \gamma) [1 + \mu^2 \cos^2(\delta + \psi) - 2\mu \cos(\delta + \psi) \cos(md + \psi)]}{4 [1 - \gamma \mu^2 \cos(\delta + \psi) \cos(\delta - \psi)]} \quad (6)$$

Формула (6) является обобщением формулы (1), так как при  $\gamma = 1$  мы возвращаемся к формуле 1.

Способ вычисления параметров  $R_{2s}$ ,  $R_{2q}$ ,  $R_{2s0}$  и  $R_{2q0}$  достаточно разработан ([4] и [5]). Поэтому нам остается сказать несколько слов о расчете  $R'_{2s0}$  и  $R''_{2s0}$ .

Если мы обозначим через  $r_1$  и  $r_2$  омические сопротивления антенны и зеркала, приведенные к пучностям тока, то

$$\left. \begin{aligned} R'_{2s0} &= R_{2s0} + r_1 \\ R''_{2s0} &= R_{2s0} + r_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В основание учета сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$  была положена найденная экспериментально величина затухания  $\beta$  в двухпроводных фидерах, сделанных из такого же провода, а именно  $\beta = 0,00030$  на метр. Так как  $\beta = \frac{R_1}{w}$ , где  $R_1$  есть омическое сопротивление 1 метра провода при



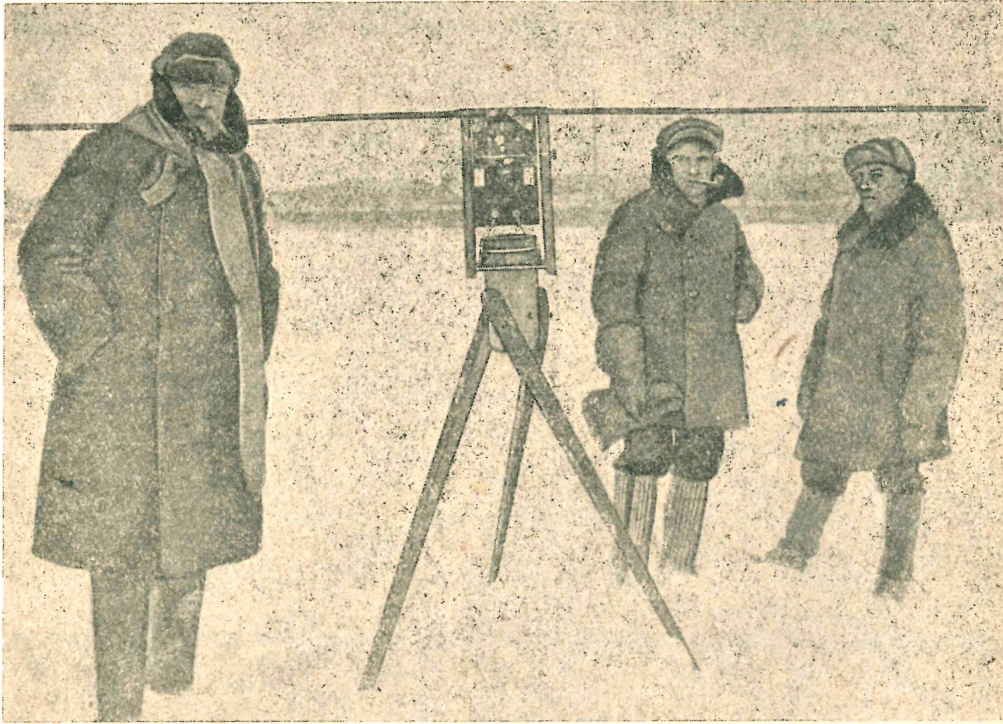
ной частоте, а  $\pi$ —волновое сопротивление фидера, которое было равно 52 650 омам, то

$$R_1 = \beta w = 0,195 = \sim 0,2 \text{ ома.}$$

Омическое сопротивление одного вибратора длиной в  $1/2 \lambda$ , приведенное к пучности тока, будет:

$$R = \frac{R_1 \lambda}{4} = \frac{1}{2} \frac{R_1 \lambda}{2} \quad (8)$$

Другими словами это значит, что приведенное к пучности тока сопротивление мы должны при стоячей волне считать вдвое меньше, чем при равномерном распределении тока.



Фиг. 3

В виду малости поправки на омические потери можно считать, что в антенне, в ближайшем к ней участке фидера до индуктивного мостика и в самом индуктивном мостике, а также в зеркале с настраивающим его шлейфом, имеют место чистые стоячие волны.

Так как общая длина проводов антенны с указанным отрезком фидера и индуктивным мостиком в нашем случае была 54,7 м, а зеркала со шлейфом—25,2 м., то добавочные омические сопротивления были приняты

$$r_1 = 54,7 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = \sim 5,5 \text{ ома}$$

и

$$r_2 = 25,2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = \sim 2,5 \text{ ома.}$$

Для горизонтального вибратора, подвешенного над землей на высоте  $a = 0,5 \lambda$ , получаем по графикам ([5], приложение 2)  $R_{2s_0} = +69,0$  ома и  $R_{2q_0} = +24,8$  ома. По формулам (7) получаем:

$$R'_{2s_0} = 69,0 + 5,5 = 74,5 \text{ ома}$$

$$R''_{2s_0} = 69,0 + 2,5 = 71,5 \text{ ома.}$$

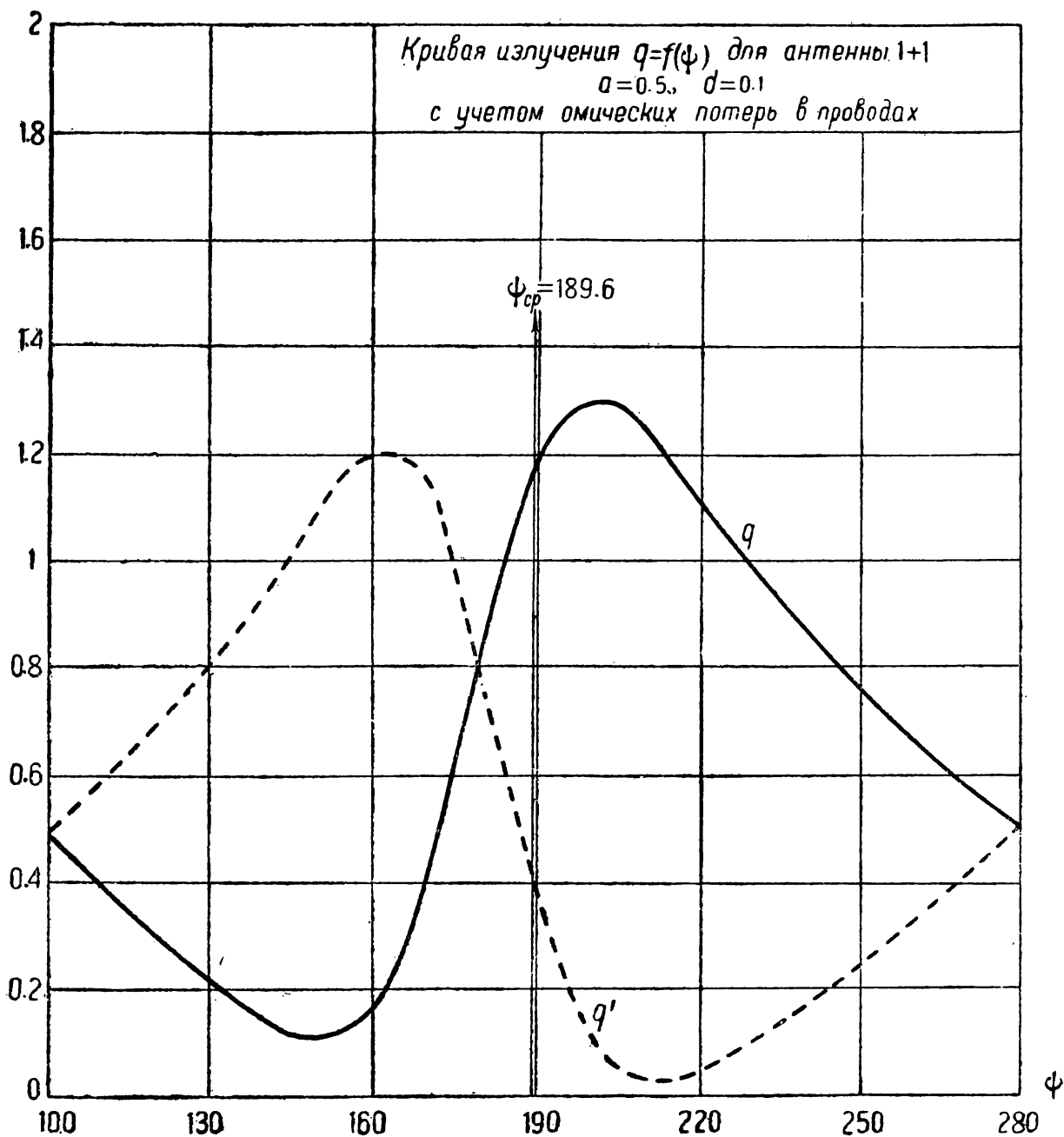
Величины  $R_{2s}$  и  $R_{2q}$  конечно получаются различные в зависимости от расстояния зеркала от антенны.

$$q = f(\psi) \text{ и } q' = f_1(\psi).$$

Для примера на фиг. 4 и 5 даны графики  $q$  и  $q'$  для расстояний зеркала  $d = 0,1\lambda$  и  $d = 0,15\lambda$ .

Кривые эти периодические и имеют периодом  $180^\circ$ .

Формально можно подставить в уравнения (6) любые значения  $\psi$  и получить соответствующие значения  $q$  и  $q'$ . Однако физически мы можем менять  $\psi$  от некоторого среднего значения  $\psi_{cp}$ , соответствующего значе-



Фиг. 4

нию  $R''_{2q0} = 0$ , в обе стороны на  $90^\circ$ , причем  $\psi = \psi_{cp} + 90^\circ$  соответствует настройке  $R''_{2q0} = +\infty$ , а  $\psi = \psi_{cp} - 90^\circ$  — настройке  $R''_{2q0} = -\infty$ . При невозможных сдвигах фазы  $\psi$  для  $\alpha$  получаются отрицательные значения, что соответствует изменению фазы на  $180^\circ$ .

Если мы введем угол  $\delta_0$ , определяемый уравнением

$$\frac{R''_{2q0}}{R''_{2s0}} = \text{tg } \delta_0, \tag{9}$$

что из уравнений (3) легко найдем:

$$\delta + \psi = \delta_0 + 180^\circ \quad (10)$$

([5] стр. 95, формула 120').

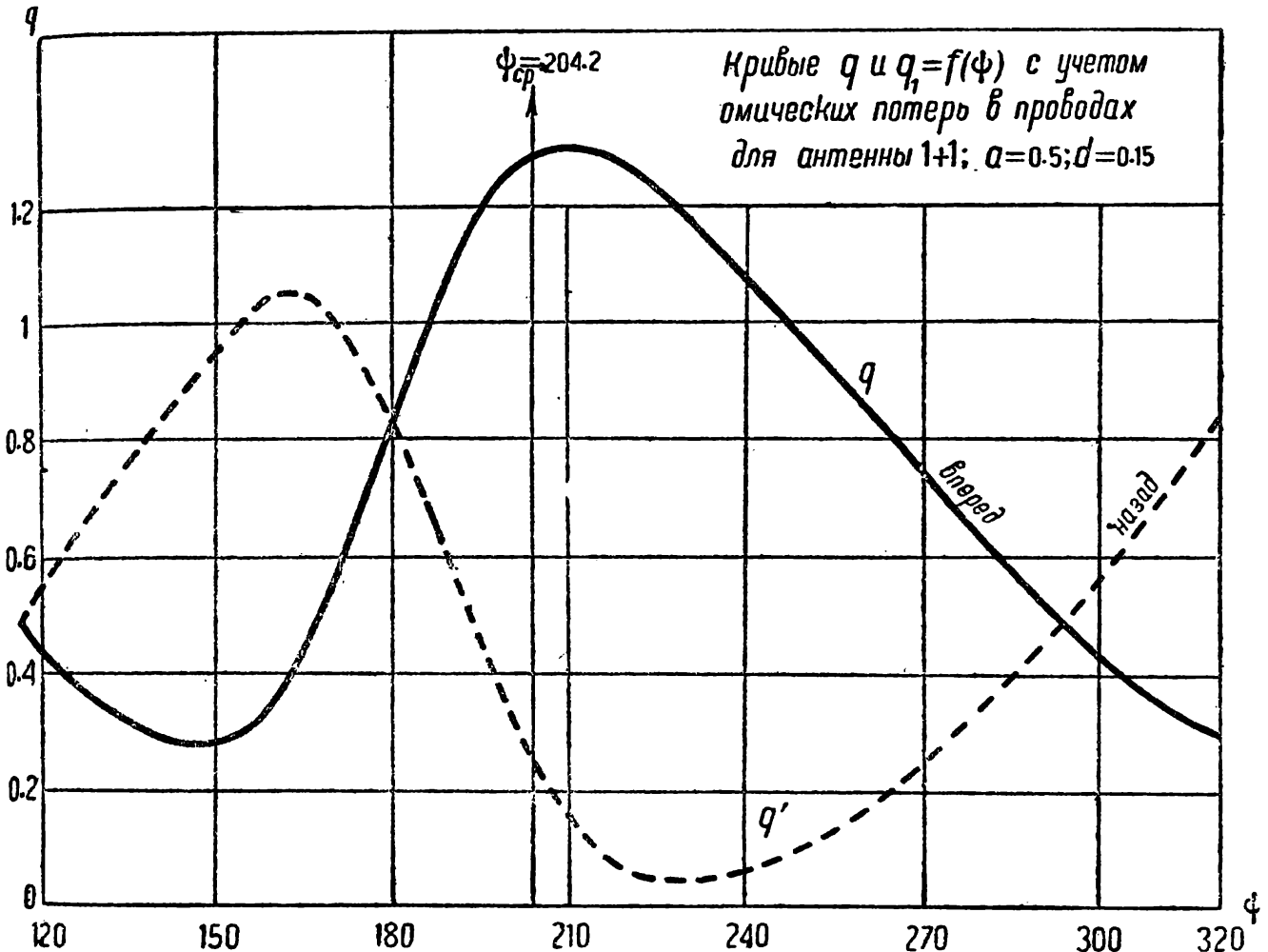
Значение  $\psi_{\text{ср}}$  соответствует  $R''_{2q0} = 0$  или  $\delta_0 = 0$  и, следовательно, определяется уравнением:

$$\psi_{\text{ср}} = 180^\circ - \delta \quad (11)$$

Значения  $\psi_{\text{ср}}$  отмечены на фиг. 4 и 5.

Любое значение  $\psi$  может быть выражено через  $\psi_{\text{ср}}$ , а именно:

$$\psi = \psi_{\text{ср}} + \delta_0 \quad (12)$$



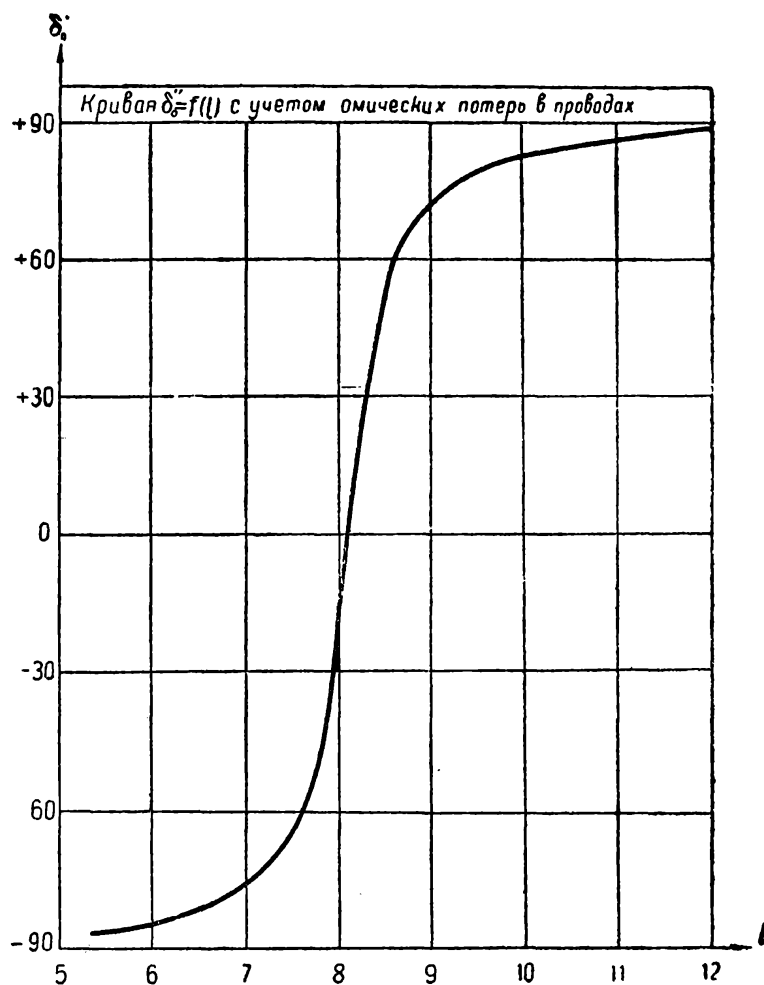
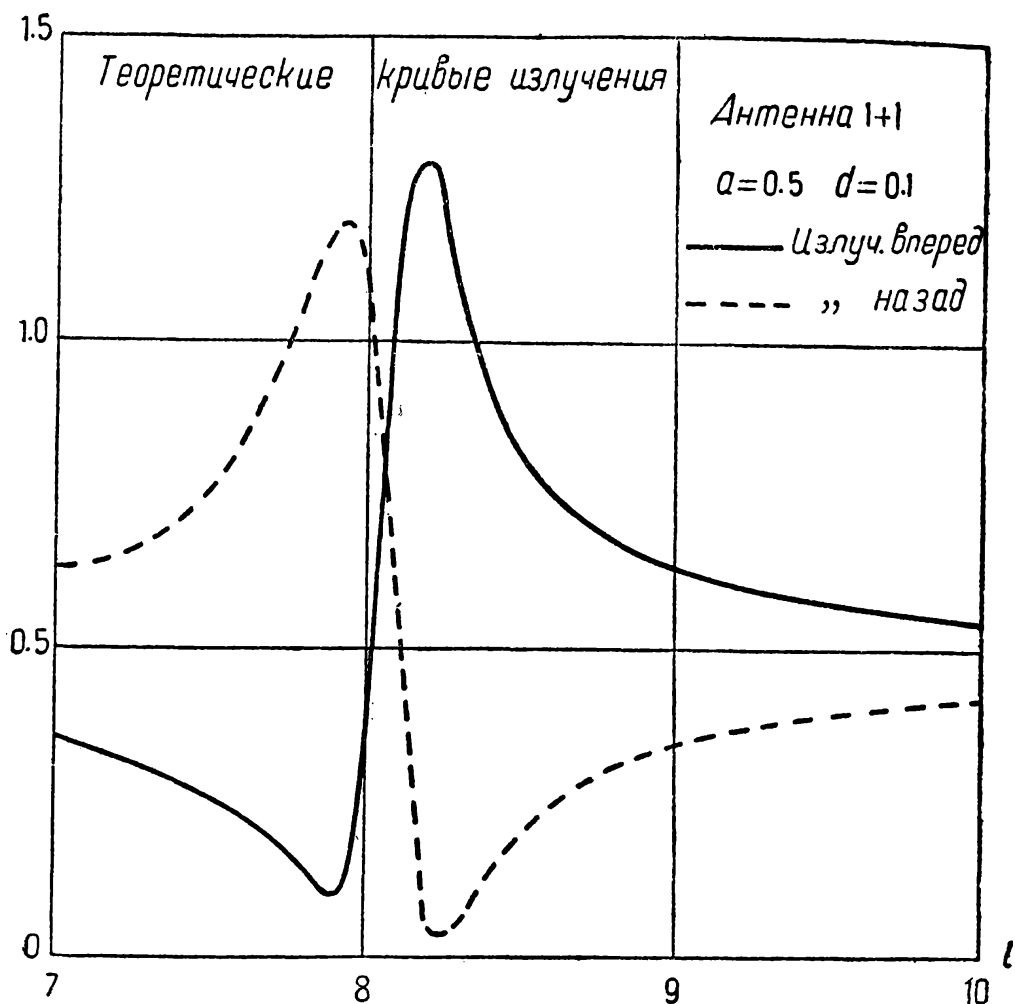
Фиг. 5

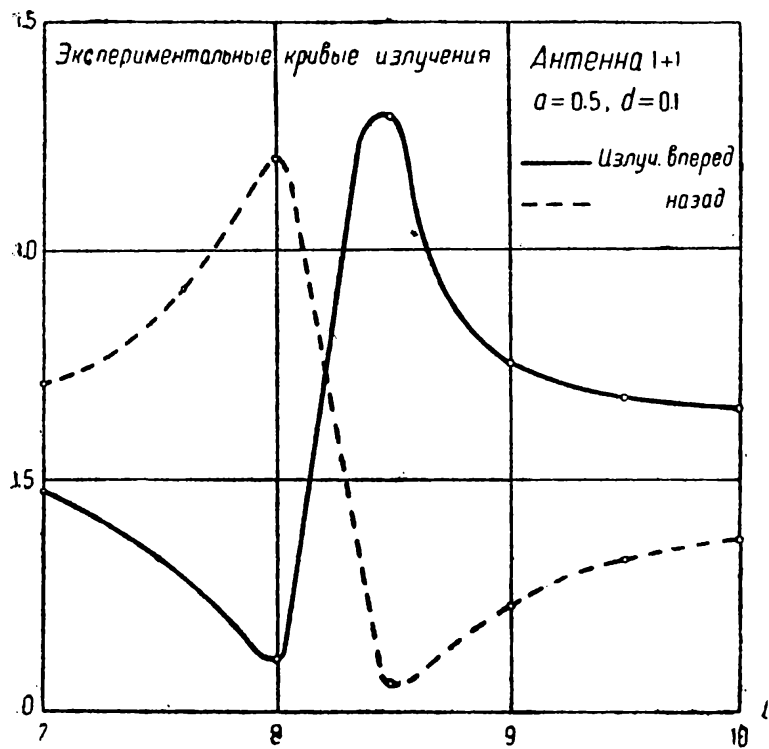
### § 3. Преобразование кривых $q=f(\psi)$ .

Непосредственная проверка опытом кривых  $q=f(\psi)$ , подобных кривым, изображенным на фиг. 4 и 5, затруднительна вследствие невозможности прямого измерения сдвига фазы  $\psi$ . В действительности, чтобы изменить фазу зеркала, мы меняем его настройку при помощи подвижного мостика  $m$  шлейфа (фиг. 1). Поэтому мы можем выразить  $\psi$ , а следовательно и  $q$  в функции длины шлейфа  $l$ . Таким образом мы получим теоретическую зависимость

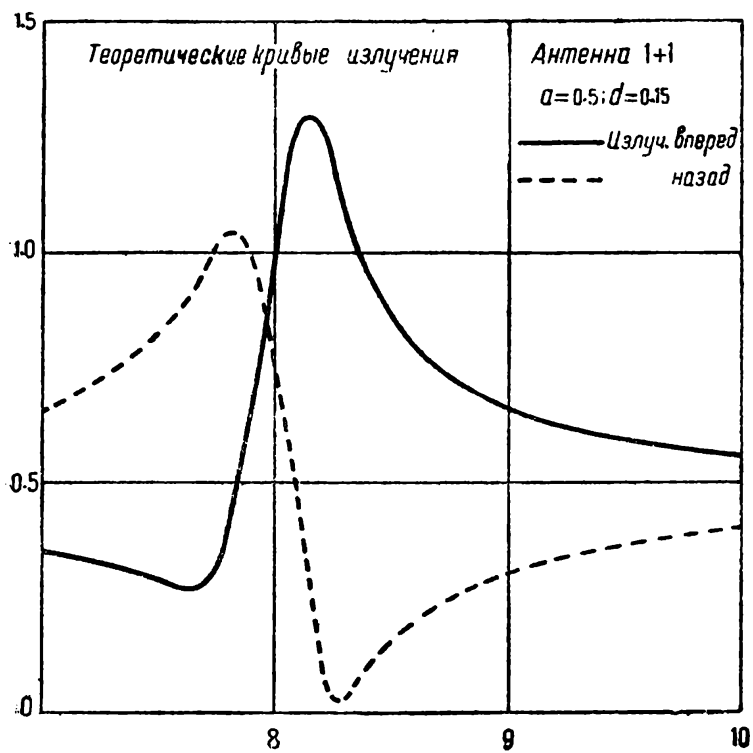
$$q = F(l),$$

экспериментальная проверка которой не представляет никаких затруднений. Покажем, как выполняется такое преобразование кривых (6).

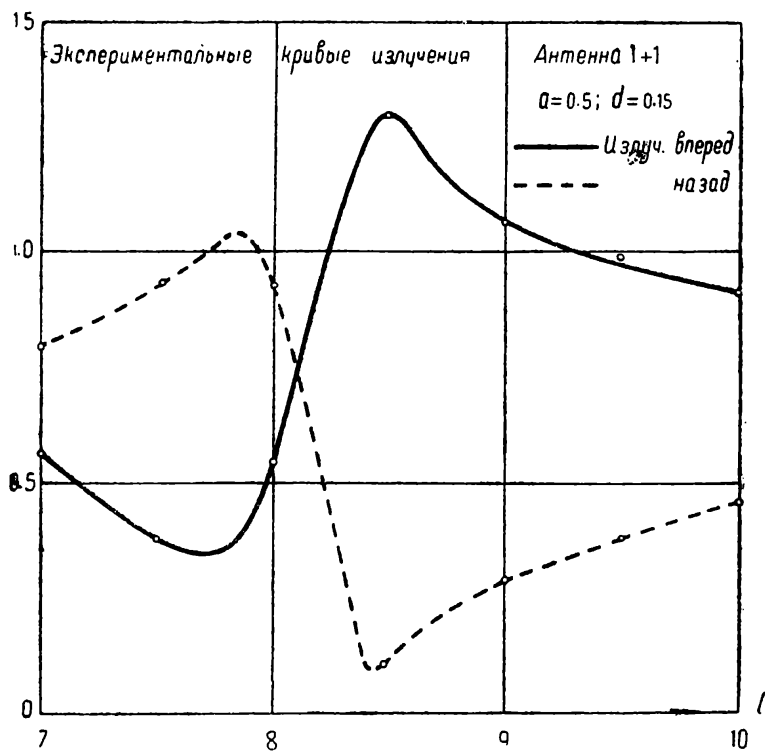




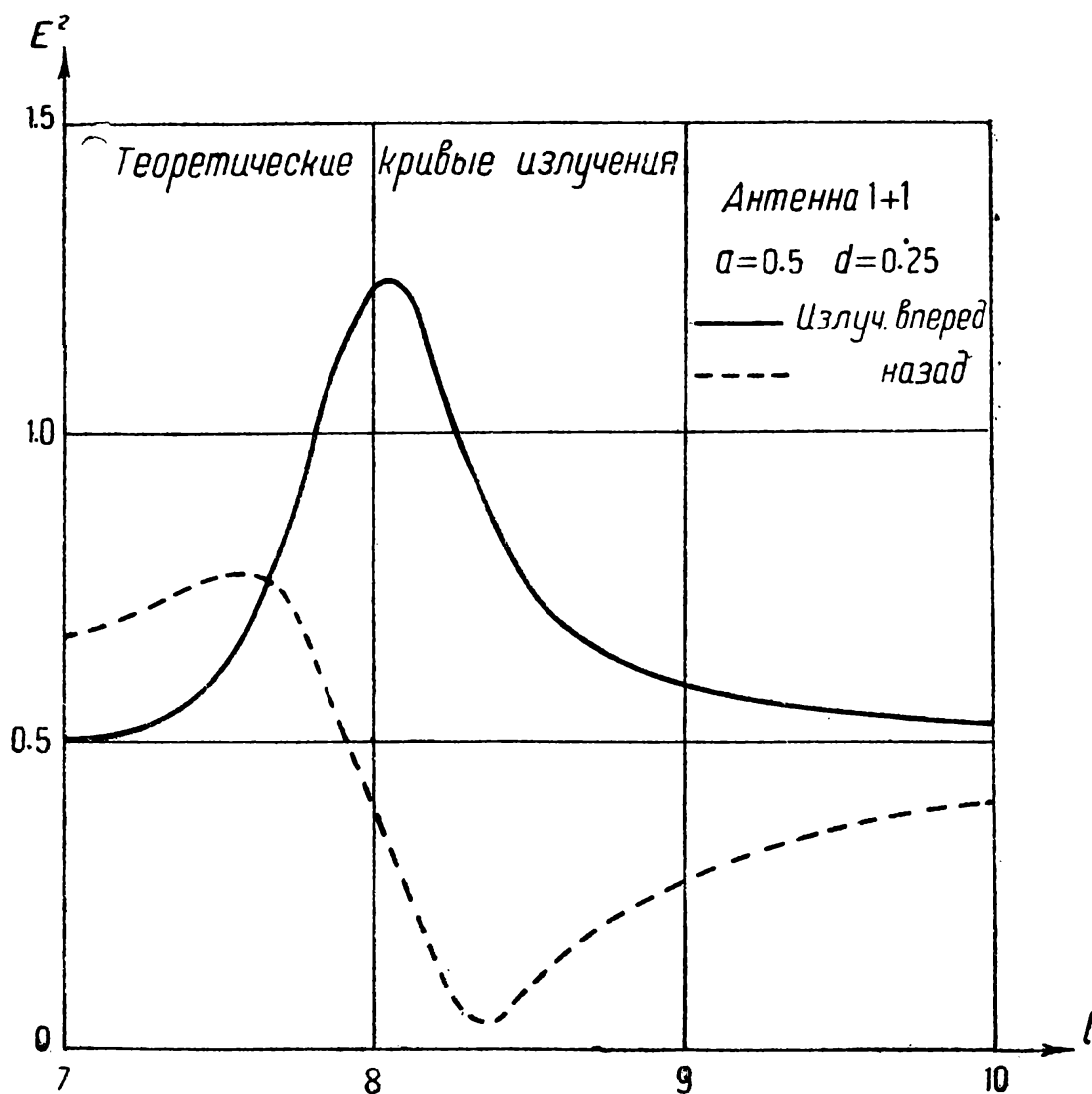
Фиг. 8



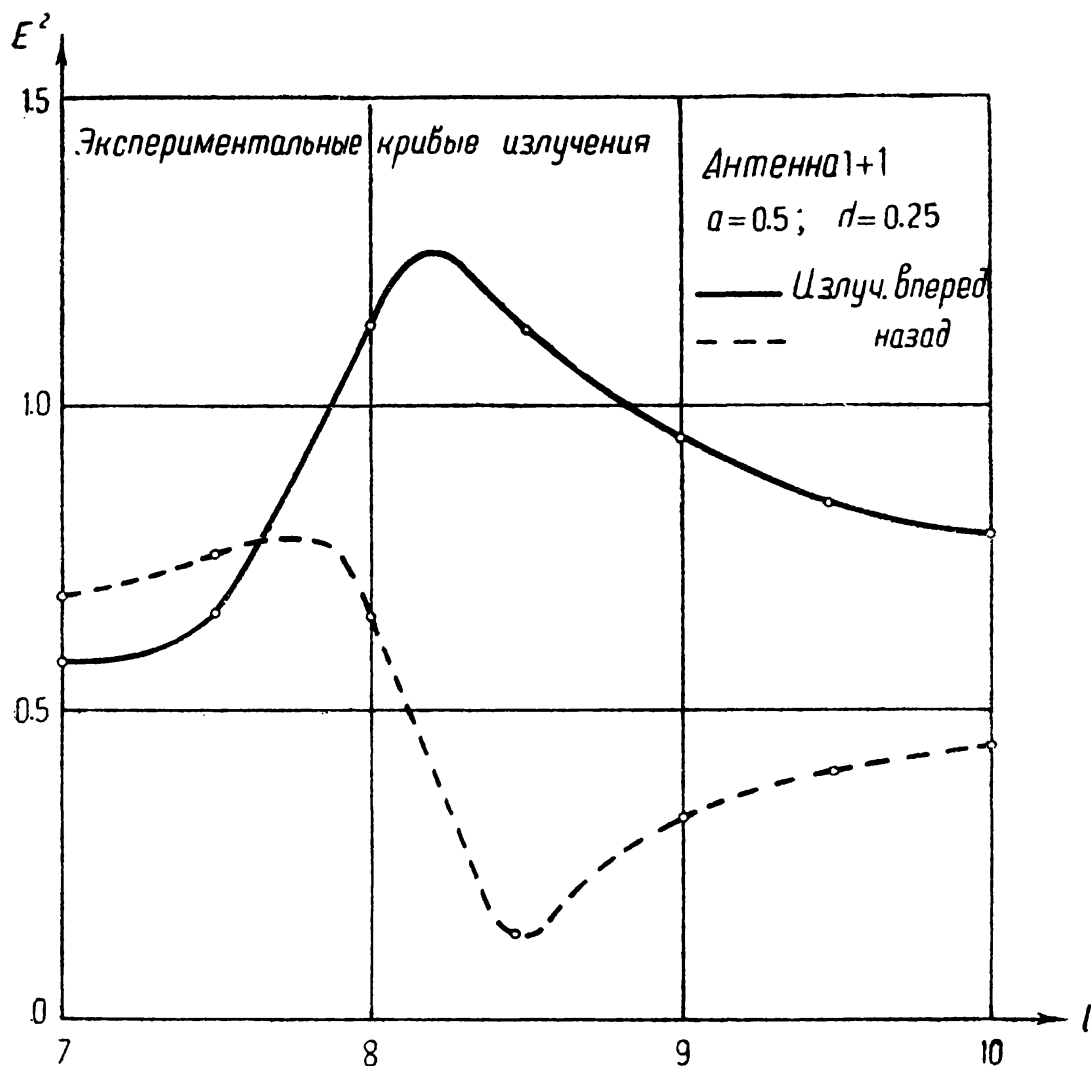
Фиг. 9



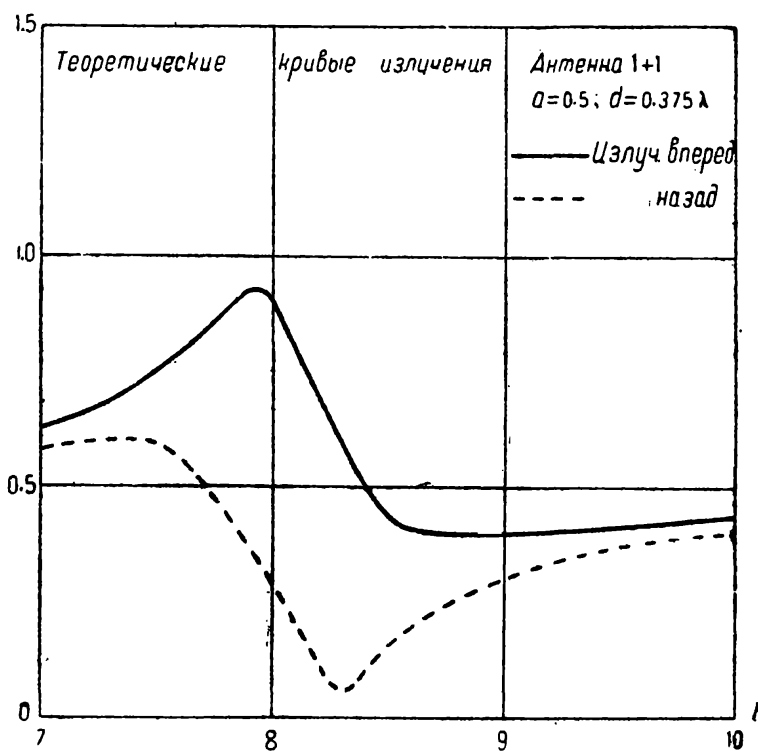
Фиг. 10



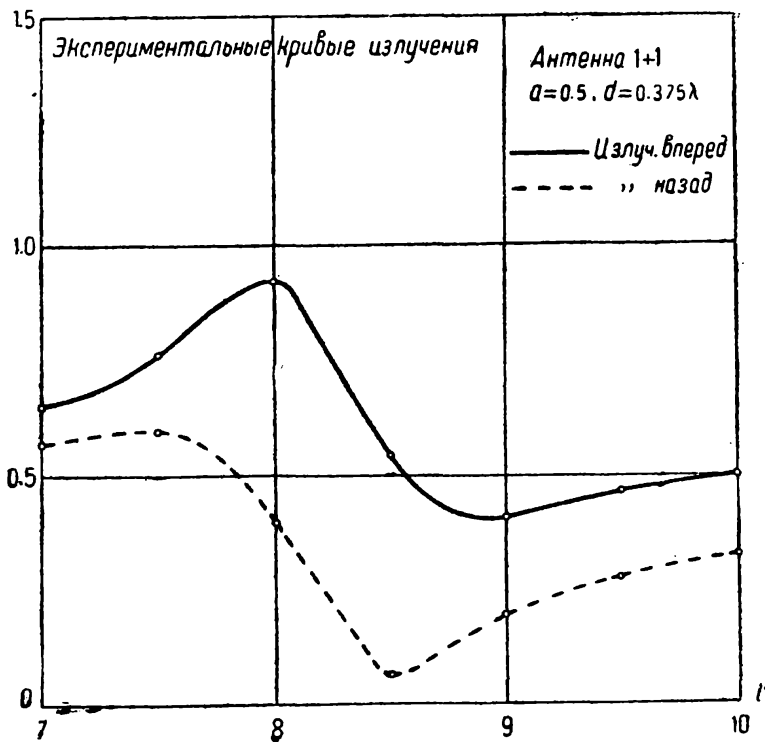
Фиг. 11



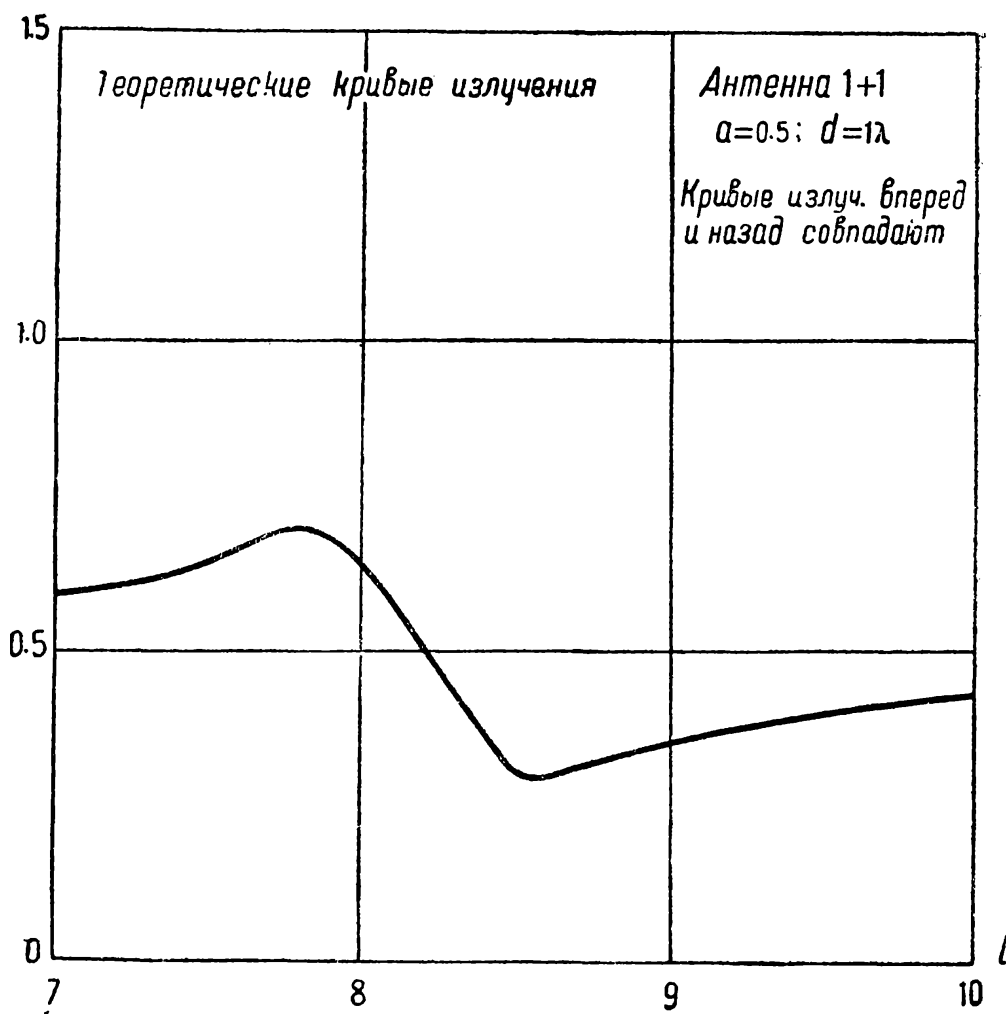
Фиг. 12



Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15

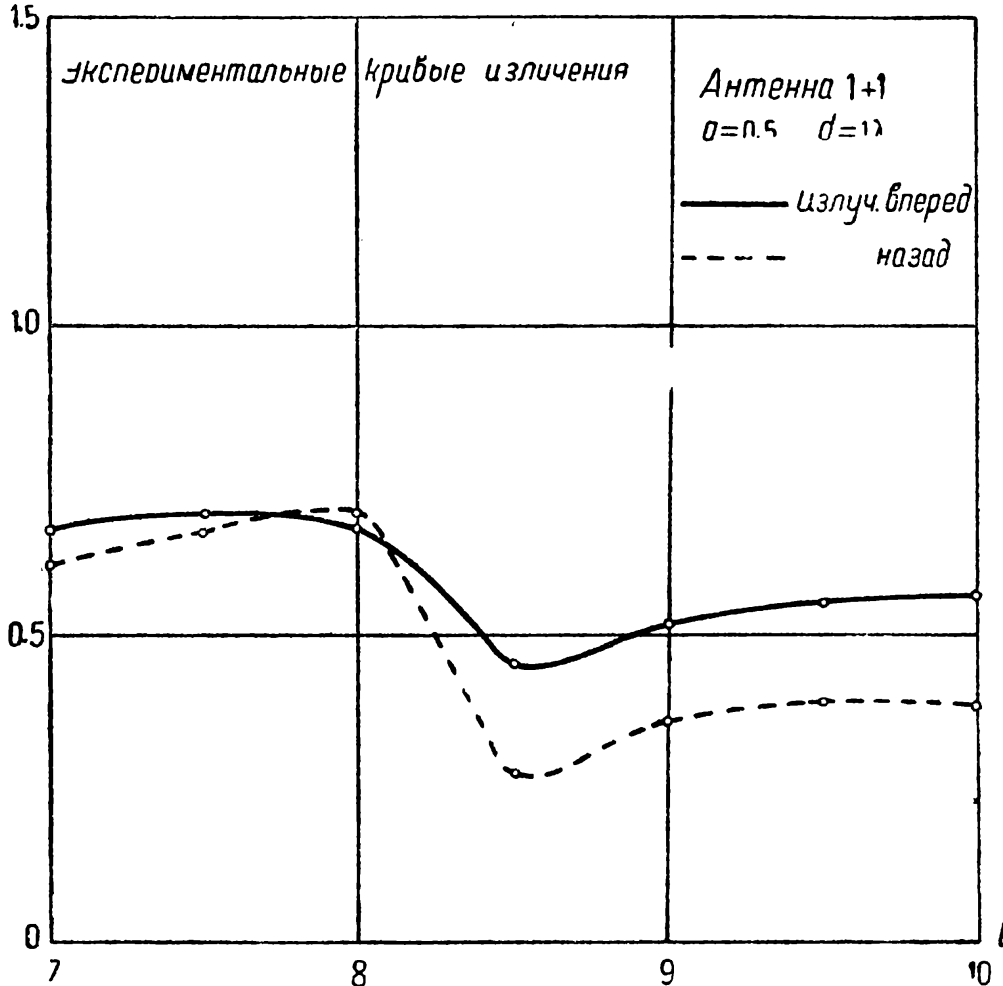


Шлейф включен в пучность тока вибратора. Реактивное сопротивление шлейфа

$$Z = j w \operatorname{tg} m \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right),$$

где  $w$  — волновое сопротивление,  $l$  — длина шлейфа и  $\mu$  — длина мостика. Вследствие этого величина реактивного сопротивления зеркала будет

$$R''_{2q0} = R_{2q0} + Z = R_{2q0} + w \operatorname{tg} m \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right).$$



Фиг. 16

Определив  $R''_{2q0}$ , мы можем по формуле (9) определить  $\delta_0$ :

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{R_{2q0} + w \operatorname{tg} m \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right)}{R''_{2q0}}, \quad (13)$$

а по формуле (10) — сдвиг фазы  $\psi$ :

$$\psi = 180^\circ + \delta_0 - \delta = \psi_{cp} + \delta_0. \quad (14)$$

При изменении настройки угол  $\delta$  не меняется, как это видно из его значения (ур. 4'). Меняется лишь  $\delta_0$  согласно уравнению (13) в зависимости от длины шлейфа  $l$ .

На фиг. (6) дана графика кривой  $\delta_0 = \varphi(l)$ , при помощи которой легко перейти от кривых  $q = f(\psi)$  к кривым  $q = F(l)$ . На фиг. 7, 8 (которые, при сопоставлении, должны быть в одном и том же масштабе) и на фиг. 9 даны такие преобразования кривых (6), изображенных на фиг. 4 и 5.

Фиг. 11, 13 и 15 дают аналогичные теоретические кривые для расстояний между зеркалом и антенной  $d = 0,25\lambda$ ;  $0,375\lambda$  и  $1,0\lambda$ .

Экспериментальные кривые, соответствующие теоретическим кривым фиг. 7, 9, 11, 13 и 15, даны на фиг. 8, 10, 12, 14 и 16. Кривые эти получены следующим образом. Значения  $q$  и  $q'$ , полученные непосредственными измерениями при определенном расстоянии  $d$  зеркала от антенны, приводились к нормальному масштабу теоретических кривых по максимальным значениям, т. е. умножались на некоторый коэффициент, определяемый так, чтобы максимумы теоретических и экспериментальных кривых совпадали.

Приведенные отсчеты индикаторов наносились на координатную бумагу и соединялись плавной кривой.

Сравнивая теоретические и опытные кривые, легко убедиться, что несмотря на ряд допущений, соответствующих лишь первому приближению к действительности, теория достаточно хорошо согласуется с результатами эксперимента.

Таким образом настоящей работой подтверждается правильность теории и полная пригодность разработанных в лаборатории передающих антенн ЦРЛ методов технического расчета коротковолновых направленных антенн.

#### Литература

- [1] В. В. Татарин о в. О питании бегущей волной коротковолновых антенн и об определении их сопротивлений. Вестн. электротехн. 1931, № 1.
- [2] — Антенные резонанс-трансформаторы. Вестн. электротехн. 1931, № 4.
- [3] — О расчете сопротивлений антенн с активными и пассивными зеркалами. Техн. радио и слаб. тока. 1932, № 2.
- [4] — О расчете сложных коротковолновых горизонтальных антенн. Изв. электропром. слаб. тока. 1933, № 2.
- [5] — Коротковолновые направленные антенны. Связьтехиздат. Москва. 1933.

Июнь, 1934 г.

Детское Село,

Опытное Радиополе ЦРЛ.

Научно-технический сборник ЛЭИС, 1934, №17, стр.38-45.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

### PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ALONG AN ELLIPTICAL CYLINDER

#### Содержание

В настоящей статье решена задача распространения электромагнитных волн вдоль бесконечно длинного, бесконечно проводящего эллиптического цилиндра. Найдены выражения для составляющих электромагнитного поля вне цилиндра и плотности тока на поверхности цилиндра. Полученные результаты применены к изучению ленточного фидера и концентрического кабеля эллиптического сечения.

#### Summary

This paper discusses the problem of propagation of electromagnetic waves along an infinitely long and infinitely conductive elliptical cylinder. Formulae are found for the components of the electromagnetic field around the cylinder and for the current density on the cylinder-surface. The obtained results are applied to the study of a flat feeder and of a concentric cable with elliptical cross-section.

Задача о распространении электромагнитных колебаний вдоль эллиптического цилиндра сводится в основном к определению напряженностей электромагнитного поля  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$ .

Так как нас будут интересовать в дальнейшем исключительно гармонические (во времени) колебания, то макроскопические уравнения Максвелла, которым удовлетворяют вектора поля, в нашем случае напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H} &= \left( \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} \right) \dot{E}, \\ \operatorname{rot} \dot{E} &= -j \frac{\omega\mu}{c} \dot{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $\dot{H}$  и  $\dot{E}$  — комплексные напряженности поля, от времени уже не зависящие, а  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  и  $c$  — соответственно проводимость, диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость, угловая частота и электродинамическая постоянная.

Искомые интегралы уравнений (1) должны, как известно из электродинамики, удовлетворять определенным граничным условиям на поверхности эллиптического цилиндра. Постараемся написать их в системе координат, при которой боковая поверхность эллиптического цилиндра совпадает с одной из координатных поверхностей.

Таковыми координатами являются эллиптические  $u$ ,  $v$  и  $z$ , связанные с декартовыми следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 u^2} + \frac{y^2}{a^2 (u^2 - 1)} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2 v^2} - \frac{y^2}{a^2 (1 - v^2)} &= 1, \\ +1 &\leq u \leq +\infty, \\ -1 &\leq v \leq +1, \\ z &= z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$ds^2 = h_u^2 du^2 + h_v^2 dv^2 + h_z^2 dz^2, \quad (3)$$

где

$$h_u = a \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}}; \quad h_v = a \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}},$$

$$h_z = 1.$$

$2a$  есть фокусное расстояние эллиптического цилиндра, а ось  $z$  совпадает с его осью.

В сечении  $z = \text{const}$  координатные линии  $v$  и  $u$  представляют систему конфокальных эллипсов и гипербол, причем, как это видно из фиг. 1, один из эллипсов, определяемый параметром  $u = u_0$ , совпадает с границей сечения нашего эллиптического цилиндра. Таким образом в трехмерном пространстве уравнение боковой поверхности данного эллиптического цилиндра будет

$$u = u_0.$$

Параметр  $u_0$ , определяющий боковую поверхность, связан с большой полуосью  $b$  сечения эллиптического цилиндра следующей простой зависимостью:

$$u_0 = \frac{b}{a}, \quad (4)$$

непосредственно вытекающей из формул (2).

Пользуясь только-что введенными координатами, заменим векторные уравнения (1) шестью эквивалентными дифференциальными уравнениями. Для этого воспользуемся общими формулами векторного анализа для составляющих ротора в криволинейных ортогональных координатах. Тогда, учитывая выражения (3), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} E_u &= \frac{1}{h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (H_z) - \frac{\partial}{\partial z} (h_v H_v) \right], \\ \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} E_v &= \frac{1}{h_u} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (h_u H_u) - \frac{\partial}{\partial u} (H_z) \right], \\ \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} E_z &= \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v H_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u H_u) \right], \\ -j \frac{\omega\mu}{c} H_u &= \frac{1}{h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (E_z) - \frac{\partial}{\partial z} (h_v E_v) \right], \\ -j \frac{\omega\mu}{c} H_v &= \frac{1}{h_u} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (h_u E_u) - \frac{\partial}{\partial u} (E_z) \right], \\ -j \frac{\omega\mu}{c} H_z &= \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v E_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u E_u) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

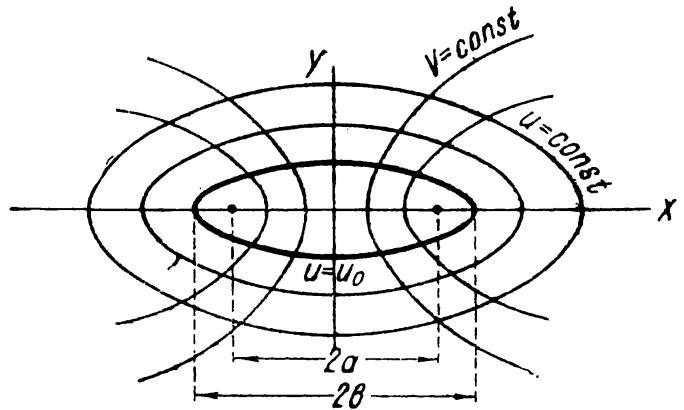
где  $E_u, H_u$  и т. д. — составляющие векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в новых координатах.

Попытаемся решить вышенаписанные уравнения (1a), положив в них

$$E_v = E_z = H_u = H_z = 0, \quad (5)$$

после чего число уравнений (1a) уменьшится до четырех

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} E_u &= -\frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial z} (h_v H_v), \\ \frac{\partial}{\partial u} (h_v H_v) &= 0, \\ -j \frac{\omega\mu}{c} H_v &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial z} (h_u E_u), \\ \frac{\partial}{\partial v} (h_u E_u) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



Фиг. 1.

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi\tau + j\omega\epsilon}{c} E_u &= -\frac{\partial}{\partial z} H_v, \\ \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 - v^2} H_v) &= 0, \\ -j\frac{\omega\mu}{c} H_v &= \frac{\partial}{\partial z} E_u, \\ \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2 - v^2} E_u) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

второе и третье из этих уравнений выражают тот факт, что  $\sqrt{u^2 - v^2} H_v$  не зависит от  $u$ , а  $\sqrt{u^2 - v^2} E_u$  не зависит от  $v$ , что можно аналитически записать так:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{u^2 - v^2} H_v &= f(z, v), \\ \sqrt{u^2 - v^2} E_u &= F(z, u). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из оставшихся двух уравнений (7) (первого и третьего) путем дифференцирования их по  $z$  и исключения одного из неизвестных, получим уравнения для  $E_u$ :

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial z^2} + k^2 E_u = 0 \quad (9)$$

и аналогично для  $H_v$ ,

$$\frac{\partial^2 H_v}{\partial z^2} + k^2 H_v = 0, \quad (10)$$

где

$$k^2 = -j\frac{\omega\mu}{c} \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} = \frac{\omega^2\epsilon\mu - j4\pi\sigma\omega\mu}{c^2}. \quad (11)$$

Подставляя в выражения (9) и (10) значения для  $E_u$  и  $H_v$ , взятые из (8), получим уравнения для функций  $F(z, u)$  и  $f(z, v)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F(z, u)}{\partial z^2} + k^2 F(z, u) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f(z, v)}{\partial z^2} + k^2 f(z, v) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

общие интегралы которых имеют вид

$$\left. \begin{aligned} F(z, u) &= A(u) e^{jkz} + B(u) e^{-jkz}, \\ f(z, v) &= C(v) e^{jkz} + D(v) e^{-jkz}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$A(u)$ ,  $B(u)$ ,  $C(v)$  и  $D(v)$  произвольные пока функции от  $u$  и  $v$  и, наконец, заменив в соотношениях (8) функции  $F$  и  $f$  их только что полученными значениями (12), найдем для  $E_u$  и  $H_v$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{A(u) e^{jkz} + B(u) e^{-jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}, \\ H_v &= \frac{C(v) e^{jkz} + D(v) e^{-jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для определения вида входящих сюда функций  $A(u)$ ,  $C(v)$  и т. д. подставим, например, в первое уравнение (7)  $E_u$  и  $H_v$  из (13)

$$\frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} \frac{A(u) e^{jkz} + B(u) e^{-jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = -\frac{jkC(v) e^{jkz} - jkD(v) e^{-jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Это равенство должно тождественно удовлетворяться для любых значений  $z$ ,  $u$  и  $v$  65 что возможно только при условии выполнения следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon}{c} A(u) &= -jkC(v), \\ \frac{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon}{c} B(u) &= jkD(v). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Соотношения (14) осуществимы лишь при равенстве левых и правых частей (14) одним и тем же постоянным. Обозначая эти постоянные буквами  $M$  и  $N$ , выразим величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  через них

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{cM}{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon}, \\ B(u) &= \frac{cN}{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon}, \\ C(v) &= -\frac{M}{jk}, \\ D(v) &= \frac{N}{jk}. \end{aligned}$$

Вставив эти значения в (13), получим выражения для напряженностей электромагнитного поля

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{cMe^{jkz} + cNe^{-jkz}}{(4\pi\sigma + j\omega\varepsilon) \sqrt{u^2 - v^2}}, \\ H_v &= \frac{-Me^{jkz} + Ne^{-jkz}}{jk \sqrt{u^2 - v^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Формулы (15), куда входят две произвольные постоянные  $M$  и  $N$ , являются общими интегралами уравнений Максвелла (1) при условии выполнения равенств (5) или эквивалентных им формул

$$H = H_v \quad \text{и} \quad E = E_u,$$

из которых очевидно, что магнитные и электрические линии представляют систему конфокальных эллипсов и гипербол.

### Бесконечный одиночный провод эллиптического сечения и бесконечной проводимости

Для изучения электромагнитных волн вдоль провода эллиптического сечения, распространяющихся, например, сверху вниз, т. е. в направлении отрицательных  $z$ -ов, можно использовать полученные нами решения (15). Для этого выберем у корня  $k = \sqrt{k^2}$  [ $k^2$  определяется формулой (11)] тот знак, при котором действительная часть  $jk$  больше нуля. Тогда, учитывая направление движения волны, следует в формулах (15) отбросить вторые члены, т. е. положить  $N = 0$ , при этом поле будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} E = E_u &= \frac{cM}{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}, \\ H = H_v &= -\frac{M}{jk} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Используем известную формулу теории поля для бесконечно проводящих тел<sup>1</sup>

$$\bar{i} = \frac{c}{4\pi} [\bar{n} \cdot \bar{H}_v]_{u=u_0}. \quad (17)$$

<sup>1</sup> См. Там м. „Основы теории электричества“.

Здесь  $\vec{i}$  — вектор поверхностной плотности тока, который в нашем случае параллелен оси  $z$ , а  $\vec{n}$  — единичный вектор, совпадающий с направлением положительной нормали к поверхности. Заменяя в формуле (17) величину  $H_v$  при помощи второго равенства (16), получим:

$$i = i_z = -\frac{cM}{4\pi jk} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u_0^2 - v^2}}. \quad (18)$$

Для нахождения полного тока  $I$ , текущего по проводу, следует проинтегрировать поверхностную плотность тока  $i$  вокруг провода, т. е. в нашем случае по эллипсу, определяемому параметром  $u = u_0$

$$I = \oint i ds,$$

так как

$$ds = h_v dv = a \frac{\sqrt{u_0^2 - v^2}}{\sqrt{1 - v^2}} dv,$$

то

$$I = 2a \int_{-1}^{+1} i \frac{\sqrt{u_0^2 - v^2}}{\sqrt{1 - v^2}} dv;$$

подставляя сюда  $i$  из уравнения (18)

$$I = -\frac{2cMa}{4\pi jk} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{1 - v^2}} dv$$

и интегрируя<sup>1</sup>, найдем

$$I = -\frac{cMa}{2jk} e^{jkz}. \quad (19)$$

Постоянную  $M$  можно определить через полный ток, проходящий, например, через сечение  $z = 0$ .

Действительно, если обозначить этот ток буквой  $I_0$ , то, положив в предыдущем уравнении  $z = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= -\frac{cMa}{2jk}, \\ M &= -\frac{2jkI_0}{ca}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Воспользовавшись этим результатом, перепишем формулы для напряженностей поля (16) плотности тока (18) и полного тока (19) в более удобном виде:

$$\left. \begin{aligned} E = E_u &= \frac{2ckI_0}{jca(4\pi\sigma + j\omega\varepsilon)} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = -\frac{2\omega\mu I_0}{ac^2k} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}, \\ H = H_v &= \frac{2I_0}{ca} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{I_0}{2\pi a} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u_0^2 - v^2}}, \\ I &= I_0 e^{jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

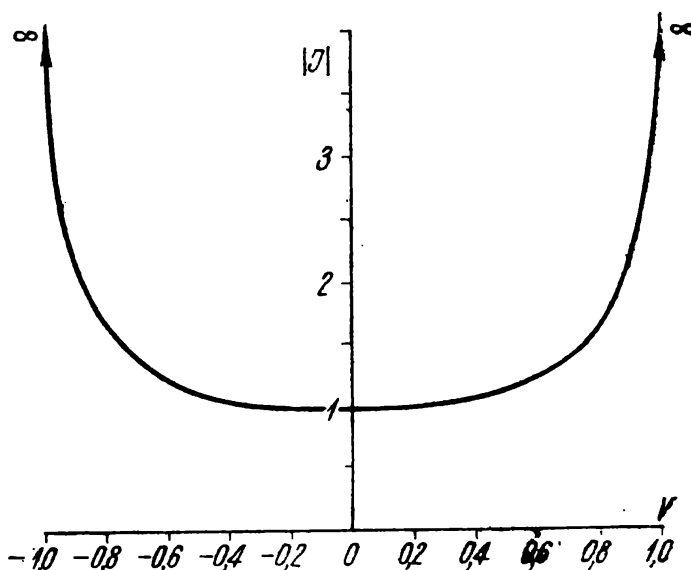
Полученные равенства полностью решают задачу о распространении волн вдоль эллиптического цилиндра бесконечной проводимости.

<sup>1</sup>  $\int_{-1}^{+1} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \pi.$

Формулы (21), (22) предыдущего раздела достаточны для разрешения задачи распространения волн вдоль бесконечно длинной ленты, шириной  $2a$ . Для этого следует только приравнять в них  $u_0$  единице. Тогда эллиптический цилиндр, определяемый параметром  $u = u_0$ , перейдет [как это видно из уравнений (2)] в бесконечную ленту шириной  $2a$ .

При этом формулы, решающие задачу, имеют вид

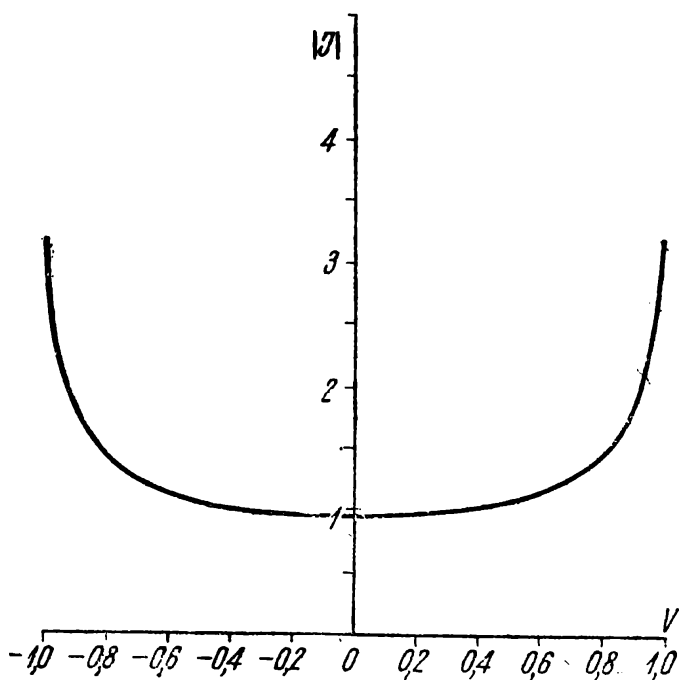
$$\left. \begin{aligned} E = E_u &= -\frac{2\omega\mu I_0}{ac^2k} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}, \\ H = H_v &= \frac{2I_0}{ca} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}}, \\ i &= \frac{I_0}{2\pi a} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ I &= I_0 e^{jkz}, \end{aligned} \right\} (23)$$



Фиг. 2.

т. е. изменилось только выражение для плотности тока. Пользуясь равенствами (23) и (22) на фиг. 2 и 3 построены кривые распределения амплитуд плотности тока (на ленте фиг. 2 и на эллиптическом цилиндре с отношением осей эллипса равным одиннадцати фиг. 3) в функции параметра  $v$ . При построении

кривых амплитуда плотности тока для  $v = 0$  принята равной единице. Как видно из наших формул, кривые распределений плотности тока в различных сечениях  $z = \text{const}$  имеют одинаковую форму.



Фиг. 3.

### Волны вдоль экранированного эллиптического фидера

Рассмотрим экранированный фидер, состоящий из двух софокусных эллиптических цилиндров (фиг. 4), у которого боковая поверхность внутреннего цилиндра определяется значением параметра  $u = u_0$ , а внутренняя поверхность внешнего<sup>1</sup>  $u = u_1$ .

Не представляет никакого труда убедиться, что электромагнитное поле в диэлектрике (между софокусными цилиндрами), ограниченном поверхностями  $u = u_0$  и  $u = u_1$ , определяется формулами (21), а ток и поверхностная плотность тока внутреннего цилиндра —

формулами (22). Аналогичные формулы для внешнего цилиндра получаются подобно предыдущим из равенства (17), если в нем  $u_0$  заменить  $u_1$  и учесть изменение направления нормали  $n$ . Попробуем на основании сказанного, пользуясь равенствами (21) и (22), подсчитать волновое сопротивление  $\rho$  экранирован-

<sup>1</sup> Ясно, что ввиду бесконечной проводимости нашего фидера параметр, определяющий наружную поверхность внешнего цилиндра, нас не интересует.



длина фидера. для этого найдем напряжение  $\mathcal{E}$  между двумя софокусными цилиндрами в сечении, определяемом координатой  $z = \text{const}$ <sup>1</sup>

$$\mathcal{E} = \int_{(L)} \bar{E} \bar{ds}.$$

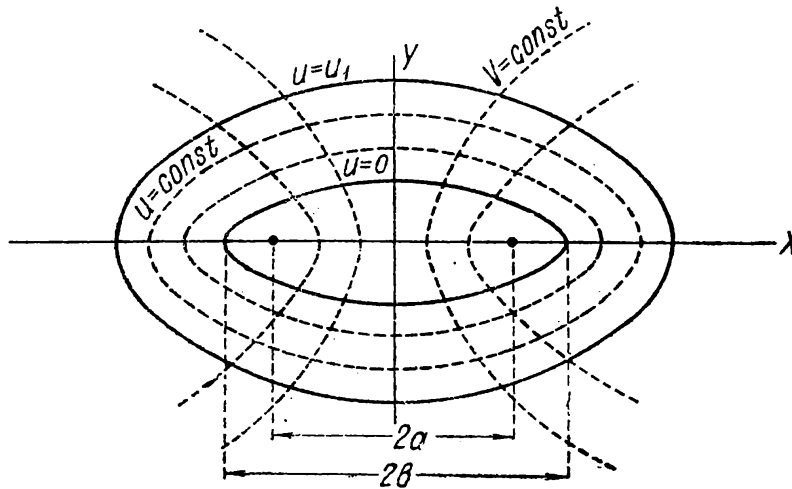
Интеграл взят вдоль отрезка силовой линии  $v = \text{const}$ , заключенного между цилиндрами по направлению убывания параметра  $u$ .

Подставляя в предыдущий интеграл значение для  $E$  и  $ds$ , найдем,

$$\mathcal{E} = - \int_{u_1}^{u_0} \frac{2\omega\mu I_0}{ac^2k} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - v^2}} \frac{a\sqrt{u^2 - v^2}}{\sqrt{u^2 - 1}} du = - \frac{2\omega\mu I_0}{c^2k} \int_{u_1}^{u_0} \frac{e^{jkz}}{\sqrt{u^2 - 1}} du,$$

или, произведя интегрирование,

$$\mathcal{E} = - \frac{2\omega\mu I_0 e^{jkz}}{c^2k} \ln \left( \frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1}}{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}} \right). \quad (24)$$



Фиг. 4.

Учитывая, что в бесконечно длинном фидере имеет место чисто бегущая волна, имеем для волнового сопротивления  $\rho$  следующее равенство:

$$\rho = \frac{\mathcal{E}}{I},$$

которое после подстановки в него формул (24) и (22) даст

$$\rho = \frac{2\omega\mu}{c^2k} \ln \left( \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}}{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1}} \right). \quad (25)$$

В случае нахождения между цилиндрами фидера воздуха предыдущее равенство несколько упростится

$$\rho = \frac{2}{c} \ln \left( \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}}{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1}} \right), \quad (26)$$

так как

$$\mu = \epsilon = 1, \quad \sigma = 0,$$

а отсюда на основании формулы (11)

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

<sup>1</sup> Подобное определение имеет смысл, ибо не трудно убедиться, что в любой поперечной плоскости  $z = \text{const}$  поле имеет потенциальный характер.

Переходя от абсолютных единиц, в каких написана формула (26), к омам<sup>69</sup> получим

$$\rho = 60 \ln \left( \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}}{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1}} \right) \text{ ом}; \quad (27)$$

в частном случае, когда  $u_0 = 1$ , т. е. внутренний цилиндр обращается в ленту шириной  $2a$ , предыдущее равенство переписывается

$$\rho = 60 \ln (u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}).$$

В заключение покажем, как при помощи небольшого предельного перехода получить из формул, найденных нами для эллиптического цилиндра, известные формулы обычного кругового цилиндра. Для этого следует  $u$  и  $a$  так стремиться к бесконечности и нулю, чтобы при этом  $au$  и  $\arccos v$  стремились соответственно к  $r$  и  $\varphi$ , т. е.

$$\text{при} \left. \begin{array}{ll} u \rightarrow \infty, & a \rightarrow 0 \\ au \rightarrow r, & \arccos v \rightarrow \varphi. \end{array} \right\} \quad (28)$$

Тогда равенства (2) перейдут в

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} &= 1, \\ \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

Геометрически это значит, что эллипсы перешли в концентрические круги радиуса  $r$  с центром в начале координат, а гиперболы—в полупрямые, выходящие из начала координат.

Для примера применим предельный переход (28) к формуле (27). Умножая числитель и знаменатель выражения стоящего под знаком логарифма, на  $a$  и переходя к пределу, получим, как и следовало ожидать, известную формулу

$$\rho = 60 \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (29)$$

для волнового сопротивления концентрического фидера, состоящего из двух коаксиальных цилиндров радиусов  $r_0$  и  $r_1$ .



Научно-технический сборник ЛЭИС, 1936, №12, стр.31-41.

## О НЕКОТОРОМ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ВСТРЕЧАЮЩЕМСЯ В ТЕОРИИ ДИФФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### ON A DIFFERENTIAL EQUATION IN THE THEORY OF DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES

#### Содержание

В настоящей статье дано полное исследование волнового уравнения в эллиптических координатах. Причем рассмотрены решения, удовлетворяющие принципу излучения и условиям непрерывности вплоть до особых точек, для случая поглощающих и непоглощающих сред. Для всех построенных решений даны асимптотические формулы.

#### Summary

This paper contains a detailed analysis of a wave-equation in elliptical coordinates.

Solutions are discussed, which correspond to the principles of radiation and to the conditions of continuousness, till certain points, which are different for the case of an absorbing and an unabsorbing medium.

Asymptotic formulae are given for all the obtained solutions.

Теория диффракции электромагнитных волн вокруг вытянутого эллипсоида вращения сводится к исследованию волнового уравнения,

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

в эллиптических координатах  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ , с осевой симметрией вращения. Как известно,<sup>1</sup> эти координаты связаны с цилиндрическими  $z$ ,  $r$  и  $\varphi$  следующими формулами:

$$z = auv$$

$$r = a \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - v^2}$$

$$\varphi = \varphi$$

$$1 \leq u \leq \infty$$

$$-1 \leq v \leq +1$$

где ось  $z$  является осью вращения нашего эллипсоида, а  $2a$ —его фокусным расстоянием.

Волновое уравнение (1) в новых координатах примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ (u^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1 - v^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + a^2 k^2 (u^2 - v^2) \psi = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup> См. Френкель, Электродинамика, т. 2, стр. 502.

Здесь, как и в уравнении (1),  $k^2$  есть заданное комплексное число, зависящее от свойств среды:  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  и от угловой частоты колебаний  $\omega$ .

В уравнении (2) чрезвычайно легко разделить переменные и свести таким образом задачу к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, полагая<sup>1</sup>

$$\psi = V(u) S(v) e^{\mp im\varphi} \quad (3)$$

где  $m$  — любое целое положительное число (что вытекает из соображений однозначности) и подставляя предыдущее выражение в (2), разобьем последнее на два обыкновенных дифференциальных уравнения, определяющих  $V(u)$  и  $S(v)$ :

$$\frac{d}{du} \left[ (u^2 - 1) \frac{dV}{du} \right] + \left[ a^2 k^2 (u^2 - 1) - \frac{m^2}{u^2 - 1} - c \right] V = 0 \quad (4)$$

$$+ 1 \leq u < \infty$$

$$\frac{d}{dv} \left[ (1 - v^2) \frac{dS}{dv} \right] + \left[ a^2 k^2 (1 - v^2) - \frac{m^2}{1 - v^2} + c \right] S = 0 \quad (5)$$

$$- 1 \leq v \leq + 1.$$

Здесь  $c$  есть произвольная постоянная разделения.

Оба уравнения (4) и (5) совершенно одинаковы и имеют три особые точки; из которых две:  $+1$  и  $-1$  являются регулярными, а третья, лежащая на бесконечности, иррегулярной особой точкой.

Очевидно нас будут интересовать только те решения уравнения (5), которые непрерывны на всем промежутке  $-1 \leq v \leq +1$ , включая концы. Это требование в нашей задаче играет роль граничных условий и дает возможность в дальнейшем определить дискретный ряд значений  $c$ , при которых существуют нужные нам решения. Для нахождения же функции  $V(u)$  мы должны искать решения уравнения (4), удовлетворяющие на бесконечности принципу излучения Зоммерфельда,<sup>2</sup> ибо только при этом условии уравнение (1) допускает (учитывая обычные граничные условия) однозначное решение. Принцип излучения для трехмерного пространства может быть записан так:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + jk\psi \right) = 0$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r \cdot \psi) = \text{конечная величина}$$

### Исследование дифференциального уравнения (5)

Ввиду того, что оба интересующие нас уравнения (4) и (5) по виду своему тождественны, мы в дальнейшем ограничимся исследованием только одного из них например (5):

$$\frac{d}{dv} \left[ (1 - v^2) \frac{dS}{dv} \right] + \left[ a^2 k^2 (1 - v^2) + c - \frac{m^2}{1 - v^2} \right] S = 0 \quad (5')$$

Как уже было отмечено, последнее уравнение имеет в конечной области 2 особые точки типа Фукса. Постараемся выяснить характер решения уравнения (5') в области этих точек. Определяющее уравнение в области особой точки  $x = +1$  будет:

$$\beta^2 - \frac{m^2}{4} = 0, \quad \beta = \pm \frac{m}{2}$$

<sup>1</sup> Зависимость от  $\varphi$  нами сразу взята в виде  $e^{\mp im\varphi}$ , так как  $\varphi$  явно не входит в уравнение (2) и следовательно является циклической координатой.

<sup>2</sup> О принципе излучения см. Купрадзе, Д. А. Н. 1934, № 2.

Таким образом основная система решений уравнения (5') в области точки  $x = 1$  (учитывая, что  $m$  — целое положительное число) имеет вид:

$$S_1(v) = (v-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (v-1)^n; \quad a_0 \neq 0 \quad (6')$$

$$S_2(v) = (v-1)^{-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 (v-1)^n + AS_1(v) \ln(v-1); \quad a_0^1 \neq 0 \quad (6'')$$

Как легко убедиться, такой же характер имеют решения и в области точки  $x = -1$  [нужно только в предыдущих выражениях заменить  $(v-1)$  на  $(v+1)$ ]. Так как нас интересует решение (5') непрерывное в замкнутом интервале  $-1 \leq v \leq +1$ , то следовательно в области точки  $x = +1$  оно должно иметь вид:

$$S(v) = (v-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (v-1)^n \quad (7')$$

а в области точки  $x = -1$ :

$$S(v) = (v+1)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (v+1)^n \quad (7'')$$

что возможно только тогда, когда выражение (7') при продолжении вдоль действительной оси от точки  $x = 1$  к точке  $x = -1$  переходит в выражение (7''). Последнее осуществимо при определенных дискретных значениях параметра  $c$ , входящего в уравнение (5'). Таким образом искомые нами решения имеют вид:

$$S(v) = (1-v^2)^{\frac{m}{2}} Z(v) \quad (8)$$

где  $Z(v)$  — функция непрерывная в интервале  $-1 \leq v \leq +1$ .

Подставляя формулу (8) в уравнение (5'), получим дифференциальное уравнение для  $Z(v)$ :

$$(1-v^2)Z'' - 2(m+1)vZ' + [c - m(m+1) + p^2(1-v^2)]Z = 0 \quad (9)$$

где

$$p^2 = a^2 k^2$$

Прежде чем приступить к интегрированию этого уравнения, попробуем определить, хотя бы приближенно, характер асимптотического поведения его решений при  $|v| \rightarrow \infty$ , что нам понадобится в дальнейшем. Для этого поделим уравнение (9) на  $(1-v^2)$  и отбросим члены вида  $\frac{1}{v}$  и выше; тогда для  $|v| \rightarrow \infty$  уравнение (9) переписывается так:

$$Z''(v) + p^2 Z(v) = 0 \quad (10)$$

Общий интеграл этого уравнения равен:

$$Z(v) = Ae^{jpv} + Be^{-jpv} \quad (10')$$

Таким образом любой интеграл уравнения (9) при  $|v| \rightarrow \infty$  стремится к выражению (10').<sup>1</sup>

Перейдем теперь к нашей граничной задаче, нахождения решений уравнения (9) непрерывных в интервале  $-1 \leq v \leq +1$ .

Как известно, существует дискретный ряд значений  $c$  ( $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ), при которых уравнение

$$(1-v^2)Z''(v) - 2(m+1)vZ'(v) + [c_n - m(m+1) + p^2(1-v^2)]Z(v) = 0 \quad (9')$$

<sup>1</sup> Полученное выражение является лишь первым приближением, однако вполне достаточным для наших целей. Строгое решение этого вопроса мы получим в конце настоящей статьи.

имеет соответствующие решения  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ , удовлетворяющие нашим гранич<sup>73</sup> ным условиям.

Построим интегральное уравнение, эквивалентное данной граничной задаче. Для этого ищем решения уравнения (9') в виде

$$W_n(v) = \int_{(L)} e^{jpv y} (1 - y^2)^m Z_n(y) dy \quad (11)$$

где  $(L)$  — соответствующим образом выбранный путь интегрирования. В самом деле, подставляя выражение (11) в уравнение (9'), получим:

$$\int_{(L)} \frac{e^{jpv y}}{(1 - y^2)^{-m}} \{ -p^2 y^2 (1 - v^2) Z_n(y) - 2(m + 1) v j p y Z_n(y) + [c_n - m(m + 1) + p^2(1 - v^2)] Z_n(y) \} dy = 0.$$

Перепишем это уравнение, переставляя члены:

$$\int_{(L)} \frac{e^{jpv y} Z_n(y)}{(1 - y^2)^{-m}} [c_n - m(m + 1) + p^2(1 - y^2)] dy - \int_{(L)} \frac{2(m + 1) v j p y e^{jpv y} Z_n(y)}{(1 - y^2)^{-m}} dy - \int_{(L)} \frac{\rho^2 v^2 e^{jpv y} Z_n(y)}{(1 - y^2)^{-m-1}} dy = 0$$

Произведя в последнем интеграле левой части двукратное интегрирование по частям, найдем:

$$\int_{(L)} \frac{e^{jpv y}}{(1 - y^2)^{-m}} \{ (1 - y^2) Z_n''(y) - 2(m + 1) y Z_n'(y) + [c_n - m(m + 1) + p^2(1 - y^2)] Z_n(y) \} dy + \left| \frac{j p v e^{jpv y} Z_n(y) - e^{jpv y} Z_n'(y)}{(1 - y^2)^{-m-1}} \right|_{y=a}^{y=b} = 0$$

Здесь  $a$  и  $b$  — начало и конец пути интегрирования  $(L)$ .

Интеграл, стоящий в левой части (12), обращается в нуль, так как  $Z_n$  есть, по условию, решение уравнения (9').

Следовательно для того, чтобы (12) обратилось в тождество, остается выбрать такой путь интегрирования  $(L)$ , при котором выражение, стоящее в прямых скобках, обратится в нуль. Последнему удовлетворим, выбрав за путь интегрирования отрезок действительной оси  $-1 \leq y \leq +1$ ; тогда в формуле (12) следует положить  $a = -1$ , а  $b = +1$ , и вышесказанное становится очевидным.

Следовательно мы доказали, что выражение (11), которое при выбранном нами пути  $(L)$  имеет вид:

$$W_n(v) = \int_{-1}^{+1} e^{jpv y} (1 - y^2)^m Z_n(y) dy \quad (13)$$

действительно является решением уравнения (9'), причем, как это видно из формулы (13), удовлетворяющим поставленным выше граничным условиям. Отсюда следует, что  $W_n$  и  $Z_n$  могут отличаться только постоянным множителем<sup>1</sup>  $\lambda_n$ .

$$Z_n = \lambda_n W_n$$

После подстановки этого соотношения в уравнение (13) перепишем последнее так:

$$Z_n(v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{jpv y} (1 - y^2)^m Z_n(y) dy \quad (13')$$

<sup>1</sup> Так как уравнения нашего типа не могут иметь кратных собственных значений.

Полученное интегральное уравнение можно рассматривать как определяющее для функций  $Z_n$ . Умножая (13') на  $(1 - v^2)^{\frac{m}{2}}$ , получим:

$$(1 - v^2)^{\frac{m}{2}} Z_n(v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{ipvy} (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} Z_n(y) dy \quad (13'')$$

Величины  $(1 - v^2)^{\frac{m}{2}} Z_n(v)$  и  $(1 - y^2)^{\frac{m}{2}} Z_n(y)$ , входящие в левую и правую часть предыдущего уравнения, являются, на основании формулы (8), искомыми интегралами основного уравнения

$$\frac{d}{dv} \left[ (1 - v^2) \frac{dS_n}{dv} \right] + \left[ c_n - \frac{m^2}{1 - v^2} + p^2 (1 - v^2) \right] S_n = 0 \quad (5'')$$

Поэтому, пользуясь обозначением

$$S_n(v) = (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} Z_n(v)$$

получим из (13'') уравнение для функции  $S_n$ :

$$S_n(v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{ipvy} (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(y) dy \quad (14)$$

Это есть однородное интегральное уравнение Фредгольма, второго рода с симметричным ядром. Из симметричности ядра вытекает, как известно, ортогональность функций  $S_n$ .

$$\int_{-1}^{+1} S_n(y) S_k(y) dy = 0 \quad \text{при } n \neq k \quad (14')$$

Легко также показать, что функции  $S_n$ , определяемые интегральным уравнением (14), являются четными или нечетными решениями уравнения (5''). В самом деле:

$$S_n(-v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{-ipvy} (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(y) dy$$

Заменяя в интеграле правой части переменную  $y$  на минус  $y$ , имеем:

$$S_n(-v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{ipvy} (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(-y) dy$$

Отсюда следует, что функция  $S_n(-v)$  удовлетворяет тому же интегральному уравнению, что и  $S_n(v)$  (с тем же параметром  $\lambda_n$ ), и значит эти функции могут отличаться только постоянным множителем

$$S_n(-v) = \alpha_n S_n(v)$$

Не трудно убедиться в том, что если сама функция  $S_n(v)$  или какая-нибудь ее четная производная при  $v = 0$  отлична от нуля, то

$$\alpha_n = +1, \text{ а } \left| \frac{d^\beta S_n(v)}{dv^\beta} \right|_{v=0} = 0 \text{ для } \beta = 2k + 1$$

Если же, наоборот, какая-нибудь нечетная производная отлична от нуля, то

$$\alpha_n = -1 \text{ и } \left| \frac{d^\beta S_n(v)}{dv^\beta} \right|_{v=0} = 0 \text{ для } \beta = 2k$$

Таким образом наше предположение доказано.

Для нахождения этих решений используем еще раз выражение (11). Выберем сначала для корня

$$p = R(p) + j \operatorname{Im}(p) = \sqrt{a^2 k^2}$$

такой знак, при котором  $\operatorname{Im}(p) < 0$ .

Тогда, взяв в формуле (11) за путь интегрирования ( $L$ ) часть действительной оси ( $-\infty \leq y \leq +1$ ), легко показать, что:

$$\Pi_n^1(v) = \int_{-\infty}^{+1} e^{jpv} (1-y^2)^m Z_n(y) dy \quad (15)$$

$(v > 1)$

является интегралом уравнения (9') для значений  $v > +1$ . Наше предложение будет доказано, если мы покажем, что при выбранном пути ( $L$ ) второй член левой части (12) [в котором теперь ( $a = -\infty$ ), а ( $b = +1$ )] обращается в нуль. Выражение, стоящее в прямых скобках формулы (12), обращается в нуль при  $y = +1$ , так как туда входит множителем  $(1-y^2)^{m+1}$ . Остается показать, что оно равно нулю и при  $y = -\infty$ . Выше мы доказали, что всякий интеграл (9) при возрастании модуля аргумента стремится к выражению (10'); отсюда:

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{e^{jpv}}{(1-y^2)^{-m-1}} [jpv Z_n(y) - Z_n'(y)] \right\} = \\ = & \lim_{y \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{e^{jpv}}{(1-y^2)^{-m-1}} [jpv (Ae^{jpy} + Be^{-jpy}) - (jvAe^{jpy} - jvBe^{-jpy})] \right\} = \\ = & \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{Ajp(v-1)e^{jpy(v+1)} + Bjpv(v+1)e^{jpy(v-1)}}{(1-y^2)^{-m-1}} = 0 \end{aligned} \quad (12')$$

так как по условию  $v > 1$ , а мнимая часть  $p$  отрицательна. Точно также можно показать, что при положительной мнимой части  $p$  следует для пути интегрирования взять отрезок ( $-1 \leq y \leq +\infty$ ).

Еще одно частное решение уравнения (9') получим, взяв в формуле (11) путь интегрирования вдоль действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$ .<sup>1</sup> Тогда формула

$$\Pi_n^2(v) = \int_{-\infty}^{-1} e^{jpv} (1-y^2)^m Z_n(y) dy \quad (15')$$

$(v > 1)$

тоже будет являться интегралом (9') при  $v > +1$ .

Умножая левую и правую часть (15) и (15') на  $(1-v^2)^{\frac{m}{2}}$  и учитывая то, что по формуле (8) функция

$$M_n^k(v) = (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \Pi_n^k(v)$$

$(k = 1, 2)$

является интегралом уравнения (5''), а  $S_n(y) = (1-y^2)^{\frac{m}{2}} Z_n(y)$ , получим соответственно новые частные решения основного уравнения (5'')

$$M_n^1(v) = \int_{-\infty}^1 e^{jpv} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(y) dy \quad (16)$$

при  $\operatorname{Im}(p) < 0, v > +1$

<sup>1</sup> Последнее очевидно, так как в предыдущем было доказано, что член, стоящий в прямых скобках формулы (12), обращается в нуль при  $a = -\infty$  и  $b = -1$ .



$$M_n^2(v) = \int_{-\infty}^{-1} e^{jpv} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(y) dy \quad (16')$$

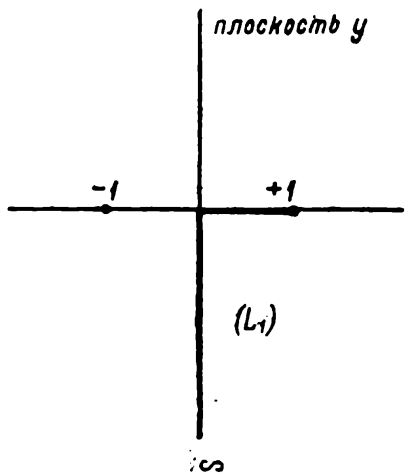
при  $Im(p) < 0$   $v > +1$

76

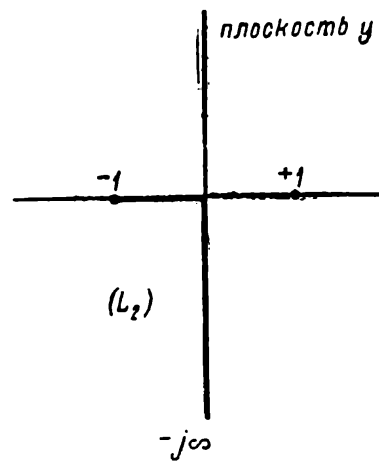
Из различности поведений  $M_n^1(v)$  и  $M_n^2(v)$  на [бесконечности (как это будет показано в дальнейшем) вытекает линейная независимость полученных решений (16) и (16').

### Получение решений для случая действительного $k$ (Непроводящая среда)

Так как для этого случая  $p$  становится действительным числом, то, как видно, левая часть (12') уже не равна нулю, и значит выражения, даваемые формулами (16) и (16'), не будут уже являться решениями уравнения (5''). Однако и сейчас не пред-



Фиг. 1



Фиг. 2

ставляет никакого труда, соответствующим изменением пути интегрирования ( $L$ ) в формуле (11), получить частные интегралы (5'') аналогичные  $M_n^1(v)$  и  $M_n^2(v)$ . В самом деле, выбрав у корня  $p = \sqrt{a^2 k^2}$  отрицательный знак и определив в (11) путь интегрирования ( $L$ ) так, как это показано на фиг. 1 и 2, убедимся, что в обоих случаях выражение (12) обращается в тождество. Следовательно формулы

$$M_n^{1,0}(v) = \int_{(L_1)} e^{jpv} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(y) dy \quad (16_0)$$

$$M_n^{2,0}(v) = \int_{(L_2)} e^{jpv} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} S_n(y) dy \quad (16_0')$$

$$(p < 0 \text{ и } v > +1)$$

будут представлять искомые решения (5'') для действительного  $p$ .

Как легко убедиться, формула (14) для  $S_n(v)$  остается справедливой и в этом случае.

### Асимптотическое представление полученных решений

Для этого перепишем формулы (16), (16') и (14), подставив в них под интеграл правых частей вместо функции  $S_n(y)$  ее значение, взятое из (14):

$$M_n^1(v) = \int_{-\infty}^{+1} e^{jpv y} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{jpy\xi} (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} S_n(\xi) d\xi dy \quad (17) \quad 77$$

$$M_n^2(v) = \int_{-\infty}^{+1} e^{jpv y} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{jpy\xi} (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} S_n(\xi) d\xi dy \quad (17')$$

$$S_n(v) = \lambda_n^2 \int_{-1}^{+1} e^{jpv y} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{jpy\xi} (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} (1-y^2)^{\frac{m}{2}} S_n(\xi) d\xi dy \quad (17'')$$

Меняя порядок интегрирования, найдем:

$$M_n^1(v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+1} e^{jpy(v+\xi)} (1-y^2)^m dy d\xi \quad (18)$$

$$M_n^2(v) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+1} e^{jpy(v+\xi)} (1-y^2)^m dy d\xi \quad (18')$$

$$S_n(v) = \lambda_n^2 \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} (1-v^2)^{\frac{m}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{jpy(v+\xi)} (1-y^2)^m dy d\xi \quad (18'')$$

Вводя обозначение  $(v+\xi) = z$ , дадим асимптотическое выражение интеграла

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+1} e^{jpyz} (1-y^2)^m dy$$

входящего в правую часть (18), для больших значений  $z$ .

Для этого введем новую переменную интегрирования  $u$  при помощи равенства:

$$y = 1 + \frac{u}{z}.$$

Тогда предыдущий интеграл примет вид:

$$J_1 = \frac{(-2)^m e^{jpz}}{z^{m+1}} \int_{-\infty}^0 e^{jpu} u^m \left(1 + \frac{u}{2z}\right)^m du$$

Раскладывая  $\left(1 + \frac{u}{2z}\right)^m$  по формуле бинома Ньютона

$$\left(1 + \frac{u}{2z}\right)^m = 1 + m \left(\frac{u}{2z}\right) + \dots + \left(\frac{u}{2z}\right)^m$$

и подставив в интеграл, найдем:

$$J_1 = \frac{(-2)^m e^{jpz}}{z^{m+1}} \int_{-\infty}^0 e^{jpu} u^m \left[1 + \dots + \left(\frac{u}{2z}\right)^m\right] du$$

Произведя почленное интегрирование

$$J_1 = \frac{(-2)^m e^{jpz}}{z^{m+1}} \left[ \frac{(-1)^m m!}{(jp)^{m+1}} + \frac{(-1)^m m(m+1)!}{2(jp)^{m+1}} \frac{1}{z} + \dots + \frac{(-1)^{2m} (2m)!}{2^m (jp)^{2m}} \frac{1}{z^m} \right]$$

и введя обозначение

$$B_1 = \frac{2^m m!}{(jp)^{m+1}}$$

получим для  $J_1$  следующее выражение:

$$J_1 = e^{jpz} \left[ \frac{B_1}{z^{m+1}} + O(z^{-(m+2)}) \right] \quad (19)$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{-1} e^{jpyz} (1-y^2)^m dy$$

входящего в правую часть (18'), используем замену переменного

$$y = -1 + \frac{u}{z}.$$

Тогда  $J_2$  переписывается так:

$$J_2 = \frac{2^m e^{-jpz}}{z^{m+1}} \int_{-\infty}^0 e^{jpu} u^m \left(1 - \frac{u}{2z}\right)^m du$$

Поступая здесь так же, как и при преобразовании интеграла  $J_1$ , получим

$$J_2 = e^{-jpz} \left[ \frac{B_2}{z^{m+1}} + O(z^{-(m+2)}) \right] \quad (19')$$

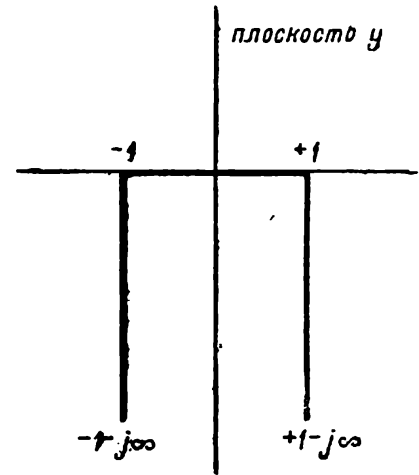
где

$$B_2 = \frac{(-2)^m m!}{(jp)^{m+1}}$$

Аналогичным приемом можно получить асимптотическое представление интеграла

$$J_3 = \int_{-1}^{+1} \overline{e^{jpyz}} (1-y^2)^m dy$$

входящего в правую часть (18''). Положив для определенности  $R(p) < 0$  и деформируя путь интегрирования в плоскости комплексного переменного<sup>1</sup>  $y$  (фиг. 3), можно, на основании известной теоремы Коши, представить наш интеграл в виде:



Фиг. 3

$$J_3 = \int_{-1}^{-1-j\infty} e^{jpyz} (1-y^2)^m dy + \int_{+1-j\infty}^{+1} e^{jpyz} (1-y^2)^m dy$$

Совершая в первом интеграле правой части замену переменного при помощи формулы  $y = j \frac{u}{z} - 1$ , а во втором интеграле при помощи формулы  $y = 1 - j \frac{u}{z}$ , получим для  $J_3$  следующее выражение:

$$J_3 = j(2j)^m \int_0^{-\infty} \frac{e^{-jpz} e^{-pu}}{z^{m+1}} u^m \left(1 - \frac{ju}{2z}\right)^m du - j(2j)^m \int_{+\infty}^0 \frac{e^{jpz} e^{pu}}{z^{m+1}} u^m \left(1 - \frac{ju}{2z}\right)^m du$$

Разлагая далее  $\left(1 - \frac{ju}{2z}\right)^m$  в обоих интегралах по биному Ньютона и производя почленное интегрирование, найдем:

$$J_3 = e^{-jpz} \left[ \frac{B_3}{z^{m+1}} + O(z^{-(m+2)}) \right] + (-1)^{m+1} e^{jpz} \left[ \frac{B_3}{z^{m+1}} + O_1(z^{-(m+2)}) \right]$$

или, отбрасывая члены низшего порядка:

$$J_3 \approx B_3 \frac{e^{-jpz}}{z^{m+1}} + (-1)^{m+1} B_3 \frac{e^{jpz}}{z^{m+1}} \quad (19'')$$

где

$$B_3 = j(2j)^m \left(\frac{1}{p}\right)^{m+1} m!$$

<sup>1</sup> Если  $R(p) > 0$ , то за путь интегрирования нужно выбрать путь, являющийся зеркальным отражением (в действительной оси) пути, указанного на фиг. 3.

При помощи только что полученных формул: (19), (19') и (19'') для интегралов  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  можно легко найти асимптотические выражения для функции  $M_n^1(v)$ ,  $M_n^2(v)$  и  $S_n(v)$ .

Для этого подставим найденные выражения  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  в соответствующие уравнения (18), (18') и (18''), заменив  $z$  через  $(v + \xi)$ :

$$M_n^1(v) \propto \lambda_n \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} e^{j\rho(v + \xi)} \frac{B_1}{(v + \xi)^{m+1}} d\xi$$

$$M_n^2(v) \propto \lambda_n \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} e^{-j\rho(v + \xi)} \frac{B_2}{(v + \xi)^{m+1}} d\xi$$

$$S_n(v) \propto \lambda_n^2 \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} \frac{[B_3 e^{-j\rho(v + \xi)} + (-1)^{m+1} B_3 e^{j\rho(v + \xi)}]}{(v + \xi)^{m+1}} d\xi$$

Ввиду того, что  $\xi$  меняется в пределах от  $-1$  до  $+1$ , ее величиной можно пренебречь по сравнению с  $v$ ; поэтому член  $\frac{(1 - v^2)^{\frac{m}{2}}}{(v + \xi)^{m+1}}$ , входящий в правые части предыдущих выражений, может быть заменен через  $\frac{j^m}{v}$ . После небольших преобразований получим для больших значений  $v$  следующие асимптотические выражения:

$$M_n^1(v) \propto \lambda_n B_1 j^m \frac{e^{j\rho v}}{v} \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} e^{j\rho\xi} d\xi$$

$$M_n^2(v) \propto \lambda_n B_2 j^m \frac{e^{-j\rho v}}{v} \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} e^{-j\rho\xi} d\xi$$

$$S_n(v) \propto \lambda_n^2 B_3 j^m \frac{e^{-j\rho v}}{v} \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} e^{-j\rho\xi} d\xi +$$

$$+ \lambda_n^2 B_3 (-1)^{m + \frac{m}{2} + 1} \frac{e^{j\rho v}}{v} \int_{-1}^{+1} S_n(\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} e^{j\rho\xi} d\xi.$$

Или окончательно, вводя для постоянных множителей, входящих в наши формулы, не требующие дальнейших пояснений обозначения  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$ , перепишем предыдущие формулы так:

$$M_n^1(v) \propto A_1 \frac{e^{j\rho v}}{v}$$

$$M_n^2(v) \propto A_2 \frac{e^{-j\rho v}}{v}$$

$$S_n(v) \propto A_3 \frac{e^{-j\rho v}}{v} + A_4 \frac{e^{j\rho v}}{v} \quad (20)$$

Из только что полученных асимптотических выражений (20) видно, что  $S_n(v)$ ,  $M_n^1(v)$  и  $M_n^2(v)$  представляют соответственно: стоячую и бегущие в противоположные

направления волны. Из всего предыдущего ясно, что для построения решений уравнения (1) внутри эллипсоида следует использовать функции  $S_n(\nu)$ , при построении же решений для внешнего (эллипсоиду) пространства, нужно пользоваться решениями  $M_n^1(\nu)$  или  $M_n^2(\nu)$ .

Например, если  $R(p) > 0$ ,  $Im(p) < 0$ , и значит при переходе от полного волнового уравнения

$$\nabla^2 F - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{4\pi G}{c^2} \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

к нашему уравнению (1) время исключено при помощи соотношения  $F = e^{j\omega t} \psi$ , то следует брать  $M_n^2(\nu)$ ; если же зависимость от времени взята в форме  $F = e^{-j\omega t} \psi$  и соответственно  $R(p) > 0$ ,  $Im(p) > 0$ , то вместо  $M_n^2(\nu)$  пользуются функцией  $M_n^1(\nu)$ . Ибо только при этих условиях наши решения будут удовлетворять (как в этом легко убедиться) принципу излучения Зоммерфельда, физическая сущность которого заключается в требовании отсутствия волн, идущих из бесконечности.

В заключение отмечу, что введенные нами обозначения для решений уравнения (5'') следовало бы писать в форме  $S_{n,m}(\nu)$ ;  $M_{n,m}^1(\nu)$  и  $M_{n,m}^2(\nu)$ , где  $n$  и  $m$  могут принимать любые положительные целые значения.

---

Научно-технический сборник ЛЭИС, 1936, №13, стр.17-24.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВДОЛЬ БЕС- КОНЕЧНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОВОДА, ОДНИМ КОНЦОМ ЗАРЫТОГО В ЗЕМЛЮ

### ON THE PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS ALONG AN INFINITE VERTICAL WIRE, ONE OF THE ENDS OF WHICH IS GROUNDED

#### С о д е р ж а н и е

В настоящей статье дано строгое решение задачи о распространении электромагнитных колебаний вдоль бесконечно-длинного, бесконечно-проводящего цилиндрического провода, одним концом зарытого в землю. Найдены выражения для напряженностей поля и тока в земле и в воздухе, причем обе среды считаются поглощающими. Полученные результаты применены для строгого обоснования метода измерения диэлектрической постоянной и проводимости различных сред, предложенного проф. Татаринковым.

#### S u m m a r y

In this paper a solution is given to the problem of the propagation of electromagnetic oscillations along an infinitely-long and infinitely-conductive cylindrical wire, one end of which is grounded. Expressions are found for the field-potentials, earth-currents and currents in the air; thereby both of these mediums are assumed to be absorbing. The obtained results confirm Prof. W. W. Tatarinoff's method of measurement of the dielectric constant and of the conductivity of different mediums.

Для решения поставленной задачи будем исходить из основной системы уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $c$  соответственно напряженности магнитного и электрического поля, проводимость, диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и электродинамическая постоянная.

Уславливаясь заранее, что зависимость от времени векторов поля взята в форме

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E} e^{j\omega t} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

т. е., что мы изучаем только гармонические колебания, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \left( \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} \right) \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

причем  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  от времени уже не зависят.

В дальнейшем мы ограничимся случаем бесконечно-проводящего провода.

При интегрировании системы уравнений (3) будем пользоваться цилиндрической системой координат, причем положим сразу: <sup>1</sup>

$$E_z = E_\varphi = H_z = H_r = 0. \quad (4a)$$

Тогда, пользуясь формулами для составляющих ротора в цилиндрических координатах, получим из (3)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= \left( \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} \right) E_r \\ \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) &= 0 \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} &= -j \frac{\omega\mu}{c} H_\varphi \\ \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Последние два уравнения показывают, что напряженности поля от угла  $\varphi$  не зависят; впрочем это явствует уже из самой симметрии задачи (фиг. 1).

Для нахождения напряженности магнитного поля  $H_\varphi$  продифференцируем первое уравнение системы (4) по  $z$  и подставим туда вместо производной  $\frac{\partial E_r}{\partial z}$  ее значение из третьего уравнения; тогда найдем:

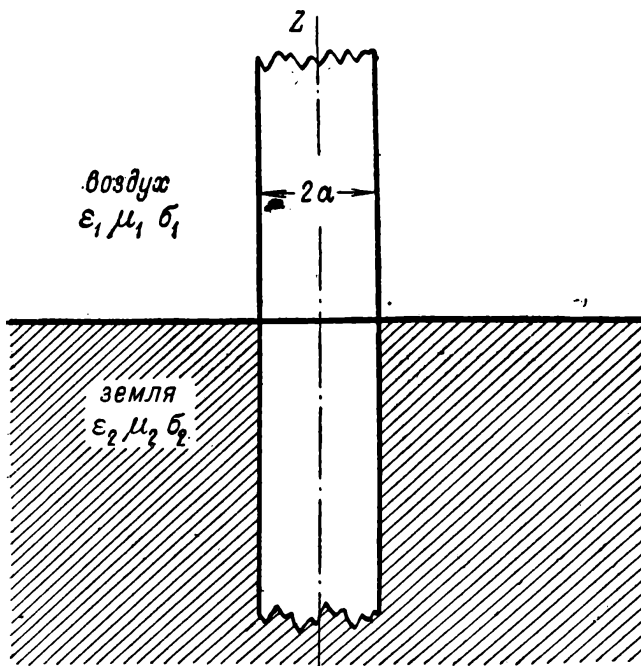
$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\mu\epsilon\omega^2 - j4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} H_\varphi = 0$$

или, вводя обозначение

$$\frac{\mu\epsilon\omega^2 - j4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} = k^2 \quad (5a)$$

и учитывая второе из уравнений (4), получим для определения  $H_\varphi$  следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + k^2 H_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



Фиг. 1

Полный интеграл первого из этих уравнений равен, как известно,

$$H_\varphi = f_1(r) e^{jkz} + f_2(r) e^{-jkz}.$$

Для определения вида функций  $f_1$  и  $f_2$  подставим полученное выражение во второе уравнение (5):

$$e^{jkz} \frac{\partial}{\partial r} (rf_1(r)) + e^{-jkz} \frac{\partial}{\partial r} (rf_2(r)) = 0.$$

Последнее возможно только в случае выполнения следующих равенств:

$$f_1(r) = \frac{A}{r} \quad \text{и} \quad f_2(r) = \frac{B}{r},$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

<sup>1</sup> В заковности такого предположения убедимся в конце настоящей статьи, ибо если при этих предположениях мы получим решение, удовлетворяющее граничным условиям, то на основании теоремы однозначности это решение будет единственным.

Подставляя только что найденные значения  $f_1$  и  $f_2$  в выражения для  $H_\varphi$ , получим<sup>83</sup>

$$H_\varphi = \frac{A}{r} e^{jkz} + \frac{B}{r} e^{-jkz}.$$

Для нахождения  $E_r$  используем первое уравнение (4). Действительно, подставляя туда  $H_\varphi$  из (6), найдем:

$$E_r = -\frac{\mu\omega}{ck} \frac{Ae^{jkz} - Be^{-jkz}}{r}. \quad (6)$$

Формулы (6) и (7) вместе с (4а) дают возможность определить электромагнитное поле нашей задачи. В самом деле, снабжая все величины, относящиеся к воздуху и земле, соответственно индексами 1 и 2, получим для векторов электромагнитного поля в воздухе:

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi_1} &= \frac{A_1}{r} e^{jk_1 z} + \frac{B_1}{r} e^{-jk_1 z} \\ E_{r_1} &= -\frac{\mu_1 \omega}{ck_1} \frac{A_1 e^{jk_1 z} - B_1 e^{-jk_1 z}}{r} \\ H_{r_1} &= H_{z_1} = E_{\varphi_1} = E_{z_1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8^1)$$

В земле:

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi_2} &= \frac{A_2}{r} e^{jk_2 z} + \frac{B_2}{r} e^{-jk_2 z} \\ E_{r_2} &= -\frac{\mu_2 \omega}{ck_2} \frac{A_2 e^{jk_2 z} - B_2 e^{-jk_2 z}}{r} \\ H_{r_2} &= H_{z_2} = E_{\varphi_2} = E_{z_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8^2)$$

Поле же внутри бесконечно-проводящего провода, как известно, равно нулю.

Для определения произвольных постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , входящих в наши формулы, следует использовать так называемые граничные условия на бесконечности и на границе раздела двух различных сред (в нашем случае земля — воздух.)<sup>1</sup>

Выберем у корня  $k = \sqrt{k^2}$  [ $k^2$  определяется формулой (5а)] тот знак, при котором действительная часть  $jk$  больше нуля ( $Re(jk) > 0$ ). Тогда, полагая, что источник энергии включен в верхний конец провода ( $z = +\infty$ ), необходимо приравнять постоянную  $B_2$ , входящую в формулу (8<sup>2</sup>), нулю, ибо в противном случае поле в точке  $z = -\infty$  обратится в бесконечность. Постоянные  $A_1$  и  $B_1$  в уравнениях (8<sup>1</sup>) остаются конечными, так как в виду наличия затухания  $Re(jk_1) > 0$  амплитуда векторов поля в точке  $z = +\infty$  должна быть бесконечной, для того чтобы достигнуть конечных областей пространства.

Учитывая все вышесказанное, перепишем уравнения (8<sup>1</sup>) и (8<sup>2</sup>), положив в них  $B_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi_1} &= \frac{A_1}{r} e^{jk_1 z} + \frac{B_1}{r} e^{-jk_1 z} \\ E_{r_1} &= -\frac{\mu_1 \omega}{ck_1} \frac{A_1 e^{jk_1 z} - B_1 e^{-jk_1 z}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (9^1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi_2} &= \frac{A_2}{r} e^{jk_2 z} \\ E_{r_2} &= -\frac{\mu_2 \omega}{ck_2} \frac{A_2}{r} e^{jk_2 z} \end{aligned} \right\} \quad (9^2)$$

Условия на границе земля воздух ( $z = 0$ ) сводятся к непрерывности тангенциальных составляющих векторов поля:

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi_1} &= H_{\varphi_2} \\ E_{r_1} &= E_{r_2} \end{aligned} \right\} \text{ при } z = 0$$

<sup>1</sup> Условия на поверхности провода удовлетворяются автоматически.



Отсюда, пользуясь предыдущими формулами для  $E_r$  и  $H_\varphi$ , получим два уравнения для определения постоянных:

$$A_1 + B_1 = A_2$$

$$A_1 - B_1 = \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} A_2.$$

Решая их относительно  $A_1$  и  $B_1$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{A_2}{2} \left( 1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) \\ B_1 &= \frac{A_2}{2} \left( 1 - \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Постоянная  $A_2$ , как и следовало ожидать, осталась пока не определенной, ибо она зависит от характера источника энергии; однако мы ее впоследствии определим через полный ток в сечении провода  $z = 0$ .

Так как поле внутри бесконечно-проводящего провода отсутствует, то следовательно ток в нем течет только по поверхности, причем поверхностная плотность его  $i$  связана с тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля  $H_\varphi$  у поверхности, известной из электродинамики формулой:

$$i = \frac{c}{4\pi} [nH_\varphi]_{r=a}, \quad (11)$$

где  $n$  — единичный вектор, совпадающий с направлением положительной нормали к поверхности провода, и  $a$  — радиус последнего.

Из рассмотрения этой формулы следует, что вектор поверхностной плотности тока  $i$  параллелен оси  $z$ , а по величине равен:

$$i = \frac{c}{4\pi} H_\varphi (r = a).$$

Пользуясь уравнениями (9<sup>1</sup>) и (9<sup>2</sup>) для  $H_{\varphi 1}$  и  $H_{\varphi 2}$  и учитывая формулы (10), получим для плотности тока в надземной части провода:

$$i_1 = \frac{c}{4\pi} \frac{A_2 \left( 1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{jk_1 z} + A_2 \left( 1 - \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{-jk_1 z}}{2a} \quad (12)$$

В подземной части провода:

$$i_2 = \frac{c}{4\pi} \frac{A_2}{a} e^{jk_2 z} \quad (12a)$$

Для получения полного тока  $I_1$  и  $I_2$ , текущего по проводу, следует предыдущие выражения помножить на  $2\pi a$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{cA_2}{4} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{jk_1 z} + \left( 1 - \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{-jk_1 z} \right] \\ I_2 &= \frac{c}{2} A_2 e^{jk_2 z} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Входящая в эти уравнения постоянная  $A_2$  может быть определена через ток  $I_0$  в сечении  $z = 0$ , как в этом нетрудно убедиться при помощи следующей формулы:

$$A_2 = \frac{2}{c} I_0, \quad (10^1)$$

вытекающей из (13).

Собирая вместе все полученные нами формулы (9<sup>1</sup>), (9<sup>2</sup>), (10) (10<sup>1</sup>) и (13) для напряженностей электромагнитного поля и тока в проводе, получим для верхнего полупространства:

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi 1} &= \frac{I_0}{cr} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{jk_1 z} + \left( 1 - \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{-jk_1 z} \right] \\ E_{r1} &= -\frac{\mu_1 \omega}{c^2 k_1} \frac{I_0}{r} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{jk_1 z} - \left( 1 - \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{-jk_1 z} \right] \\ I_1 &= \frac{I_0}{2} \left( 1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{jk_1 z} + \frac{I_0}{2} \left( 1 - \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \right) e^{-jk_1 z} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Для нижнего полупространства:

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi 2} &= \frac{2I_0}{cr} e^{jk_2 z} \\ E_{r2} &= -\frac{2\mu_2 \omega}{c^2 k_2} \frac{I_0}{r} e^{jk_2 z} \\ I_2 &= I_0 e^{jk_2 z} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) дают полное решение поставленной задачи, причем, как это видно из предыдущего, справедливое не только для воздуха и земли, но и для любых двух сред с произвольными параметрами  $\epsilon$ ,  $\sigma$  и  $\mu$ .

### Определение диэлектрической постоянной и проводимости почвы<sup>1</sup>

Используем изложенную теорию для строгого вывода формул, необходимых при определении постоянных почвы  $\epsilon$  и  $\sigma$  по методу, предложенному проф. Татариновым.<sup>2</sup>

Для этого займемся исследованием распределения тока в воздушной части провода.

Положив предварительно для воздуха

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{и} \quad \mu_1 = \epsilon_1 = 1,$$

получим для  $k_1$  [см. формулу (5а)] следующее простое выражение:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = m_1,$$

где  $\lambda_1$  — длина волны в воздухе.

Считая, что для земли  $\mu_2 = 1$ , перепишем последнюю формулу (14) в следующем виде:

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \frac{m_1}{k_2} \right) e^{jm_1 z} + \frac{I_0}{2} \left( 1 - \frac{m_1}{k_2} \right) e^{-jm_1 z} \quad (16)$$

Вводя обычные в таких случаях обозначения

$$\frac{I_0}{2} \left( 1 + \frac{m_1}{k_2} \right) = I_e \quad \text{и} \quad \frac{I_0}{2} \left( 1 - \frac{m_1}{k_2} \right) = I_r, \quad (16^1)$$

легко интерпретировать выражение (16) как сумму падающей и отраженной волны с комплексными амплитудами  $I_e$  и  $I_r$ .

Заменяя  $e^{\mp jm_1 z}$  по формуле Эйлера, получим для (16) особо простое выражение

$$I_1 = I_0 \left( \cos m_1 z + j \frac{m_1}{k_2} \sin m_1 z \right), \quad (17)$$

по форме своей сходное с уравнением для тока, получающимся в обычной теории линий без потерь с комплексной нагрузкой на конце.

<sup>1</sup> Последующие рассуждения годятся также для любой другой среды с  $\mu = 1$ .

<sup>2</sup> См. Журнал технической физики № 6, 1935.

$$K = \frac{|I_e| - |I_r|}{|I_e| + |I_r|},$$

которая, учитывая введенные обозначения (16<sup>1</sup>), дает:

$$K = \frac{|k_2 + m_1| - |k_2 - m_1|}{|k_2 + m_1| + |k_2 - m_1|} < 1.$$

Обозначая действительную и мнимую части  $k_2$  буквами  $a_2$  и  $b_2$  ( $k_2 = a_2 + jb_2$ ), получим после несложных преобразований окончательную формулу для коэффициента бегущей волны надземного провода:

$$K = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a_2^2 m_1^2}{(a_2^2 + b_2^2 + m_1^2)^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4a_2^2 m_1^2}{(a_2^2 + b_2^2 + m_1^2)^2}}} \quad (18)$$

Уравнение (17) в том виде, в каком оно написано, не совсем удобно для исследования распределения тока вдоль провода, ибо  $k_2$  — величина комплексная. Поэтому постараемся преобразовать формулу (17) так, чтобы в выражение, стоящее в скобках, мнимость неявно не входила.

Для выполнения сказанного сделаем замену переменного  $z$  в формуле (17):

$$z = z_0 + z_1, \quad (19)$$

что равносильно переносу начала координат вдоль оси  $z$  на величину  $z_0$ , определяемую уравнением:

$$\operatorname{tg} 2m_1 z_0 = \frac{2m_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2 - m_1^2}. \quad (20)$$

Тогда, как в этом нетрудно убедиться, уравнение (17) с новой координатой  $z_1$  примет вид:<sup>1</sup>

$$I_1 = I_0^* (\cos m_1 z_1 + jK \sin m_1 z_1), \quad (21)$$

где  $K$  дается формулой (18).

Переходя в уравнении (21) к модулю, получим закон распределения амплитуд тока вдоль провода:

$$|I_1| = |I_0^*| \sqrt{\cos^2 m_1 z_1 + K^2 \sin^2 m_1 z_1},$$

откуда видно, что пучности тока находятся в точках, определяемых уравнением:

$$\sin m_1 z_1 = 0,$$

или, переходя к старым координатам,

$$\sin m_1 (z - z_0) = 0.$$

Таким образом ближайшая к поверхности раздела (земля — воздух) пучность находится в точке  $z = z_0$ , определяемой формулой (20).

Рассматривая выражения (18) и (20) как систему двух уравнений относительно неизвестных  $a_2$  и  $b_2$ , определим последние через  $K$  и  $z_0$ , после чего не представляет никакого труда, пользуясь соотношениями

$$k_2 = a_2 + jb_2$$

и

$$k_2^2 = \frac{\epsilon_2 \omega^2 - j4\pi\sigma_2 \omega}{c^2},$$

<sup>1</sup> Выражение для постоянной комплексной величины  $I_0^*$  мы здесь не выписываем, так как в дальнейшем она не фигурирует.

найти проводимость  $\sigma_2$  и диэлектрическую постоянную  $\epsilon_2$  земли. Величины  $K$  и  $z_0$  <sup>87</sup> находятся из опыта непосредственными измерениями в надземной части провода. <sup>1</sup>

Произведем вычисление  $\sigma_2$  и  $\epsilon_2$  по приведенной выше схеме. Для этого введем ряд обозначений, сокращающих дальнейшее изложение:

$$k_2^2 = \rho e^{j\varphi} \quad (22a)$$

$$\operatorname{tg} 2m_1 z_0 = D \quad (22б)$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1-K^2}{1+K^2}\right)^2} = B, \quad (22в)$$

где на основании предыдущего величины  $D$  и  $B$  можно считать известными из опыта. Тогда в новых обозначениях (22б) и (22в) формулы (18) и (20) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{2a_2 m_1}{a_2^2 + b_2^2 + m_1^2} \\ D &= \frac{2b_2 m_1}{a_2^2 + b_2^2 - m_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Выразим, пользуясь равенством (22а), величины  $a_2$  и  $b_2$  через  $\rho$  и  $\varphi$ . Для этого приравняем в равенстве

$$k_2 = a_2 + jb_2 = \sqrt{\rho} e^{j\varphi/2}$$

вещественные и мнимые части, откуда получим:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \sqrt{\rho} \cos \varphi/2 \\ b_2 &= \sqrt{\rho} \sin \varphi/2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подставляя эти значения  $a_2$  и  $b_2$  в (23):

$$B = \frac{2m_1 \sqrt{\rho} \cos \varphi/2}{\rho + m_1^2}$$

$$D = \frac{2m_1 \sqrt{\rho} \sin \varphi/2}{\rho - m_1^2}$$

решим полученные уравнения относительно  $\rho$  и  $\varphi$ . Опуская элементарные преобразования, найдем: <sup>2</sup>

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{m_1^2 (D^2 - B^2 + 2)}{D^2 + B^2} \mp \sqrt{\frac{m_1^4 (D^2 - B^2 + 2)^2}{(D^2 + B^2)^2} - m_1^4} \\ \operatorname{tg} \varphi/2 &= \frac{D}{B} \frac{\rho - m_1^2}{\rho + m_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Последние равенства дают возможность последовательно найти  $\rho$  и  $\varphi$ .

Для того чтобы окончательно решить нашу задачу, остается определить  $\epsilon_2$  и  $\sigma_2$  через  $\rho$  и  $\varphi$  при помощи равенства

$$k_2^2 = \frac{\epsilon_2 \omega^2 - j 4\pi \sigma_2 \omega}{c^2} = \rho e^{j\varphi},$$

<sup>1</sup> Все подробности относительно установки для нахождения  $\epsilon$  и  $\sigma$ , а также метод измерения  $K$  и  $z_0$  можно найти в цитированной выше статье проф. В. Татарина.

<sup>2</sup> При выборе знака в формуле (25) следует руководствоваться тем, чтобы  $\operatorname{tg} \varphi/2$  был отрицательным, ибо только при этом угол  $\varphi$  будет лежать в четвертой четверти и следовательно  $\epsilon_2$  и  $\sigma_2$ , определяемые формулой (26), окажутся положительными.

откуда, после несложных вычислений, получается:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\rho}{m_1^2} \cos \varphi \\ \sigma_2 &= -\frac{c\varphi}{4\pi m_1} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Для сравнения полученных нами результатов с формулами проф. Татарина рассмотрим выражение для тока, найденное им, исходя из обычных телеграфных уравнений:

$$I_1 = I_0 \left( \cos m_1 z + j \frac{\xi}{\omega} \sin m_1 z \right), \quad (27^1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\omega}{s_2} \left[ \sqrt{\frac{s_2 + \varepsilon_2}{2}} + j \sqrt{\frac{s_2 - \varepsilon_2}{2}} \right] \\ \left( s_2 = \sqrt{\alpha_2^2 + \varepsilon_2^2}; \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{\omega} \sigma_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (27^2)$$

Сопоставляя последнее уравнение с уравнением (17), убедимся, что они отличаются только тем, что в (17) вместо  $\frac{\xi}{\omega}$  стоит  $\frac{m_1}{k_2}$ .

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении величины  $\frac{m_1}{k_2}$ . Для этого выразим  $k_2 = a_2 + jb_2$  через  $\varepsilon_2$  и  $\sigma_2$  при помощи равенства

$$k_2^2 = (a_2 + jb_2)^2 = \frac{\varepsilon_2 \omega^2 - j 4\pi \sigma_2 \omega}{c^2}.$$

Решая последнее относительно  $a_2^2$  и  $b_2^2$ , найдем

$$\begin{aligned} b_2^2 &= \frac{m_1^2}{2} \left[ -\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2^2 + \alpha_2^2} \right] \\ a_2^2 &= \frac{m_1^2}{2} \left[ \varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2^2 + \alpha_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Знаки у корней выбраны так, чтобы  $a_2^2$  и  $b_2^2$  были положительны. Отсюда, учитывая, что  $\operatorname{Re}(jk_2) > 0$ , получим для  $a_2$  и  $b_2$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} b_2 &= -m_1 \sqrt{\frac{s_2 - \varepsilon_2}{2}} \\ a_2 &= +m_1 \sqrt{\frac{s_2 + \varepsilon_2}{2}}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\frac{m_1}{k_2} = \frac{m_1}{a_2 + jb_2} = \frac{1}{s_2} \left[ \sqrt{\frac{s_2 + \varepsilon_2}{2}} + j \sqrt{\frac{s_2 - \varepsilon_2}{2}} \right] = \frac{\xi}{\omega}.$$

Таким образом доказано, что наше уравнение (17) тождественно с (27<sup>1</sup>), полученным проф. Татаринным, и следовательно все выводы, сделанные из них, должны совпадать.

Научно-технический сборник ЛЭИС, 1937, №16, стр.44-46.

## ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП TELEGRAPH EQUATIONS AND THE „VARIATION PRINCIPLE“

### Содержание

В настоящей статье дан вывод телеграфных уравнений при помощи вариационного принципа, аналогичного принципу Гамильтона в аналитической механике.

### Summary

This paper gives the deduction of telegraph equations by means of the „variation-principle“, which is analogical to the principle of Hamilton in analytical mechanics.

Основные уравнения механики, уравнения Лагранжа, могут быть выражены в чрезвычайно сжатой инвариантной форме при помощи так называемого вариационного принципа Гамильтона.

В свое время Максвелл, пользуясь внешним сходством между уравнениями движения механики и электрического тока, обобщил принцип Гамильтона и вывел из него уравнения квазистационарных процессов в цепях с сосредоточенными постоянными.

Мы попытаемся в настоящей статье получить основные уравнения линий с распределенными постоянными из соответствующего вариационного принципа.

Для сокращения дальнейшего изложения введем обозначения:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{Li^2}{2} dx; \quad U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{cu^2}{2} dx;$$

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} (ri^2 + gu^2) dx; \tag{1}$$

$$L = T - U + Q;$$

где  $i$  и  $u$  — ток и напряжение в сечении линии, находящемся на расстоянии  $x$  от начала,  $x_1$  и  $x_2$  — координаты начала и конца линии, а  $L$ ,  $c$ ,  $r$  и  $g$  — соответственно самоиндукция, емкость, сопротивление и проводимость утечки, отнесенные к погонной единице длины линии. Причем, следуя Максвеллу, будем трактовать магнитную энергию  $T$  как кинетическую, энергию электрического поля  $U$  — как потенциальную, а  $Q$  — как тепловую. Продолжая аналогию, можно назвать величину  $L$ , по примеру аналитической механики, функцией Лагранжа. Пользуясь введенными выше обозначениями, представим искомый вариационный принцип в следующем виде:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L + \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x, t) \left[ \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + gu \right] dx \right\} dt = 0, \tag{2}$$

т. е. наш принцип требует, чтобы интеграл, стоящий в левой части, имел стационарное значение. При варьировании величины  $i(x, t)$ ,  $u(x, t)$  и  $\lambda(x, t)$  рассматриваются как независимые<sup>1</sup>, причем в качестве функций сравнения допускаются

<sup>1</sup>  $\lambda(x, t)$  — вспомогательная функция, назначение которой выяснится в дальнейшем.

все функции, имеющие кусочно непрерывные производные и удовлетворяющие следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned} i(x, t_1) &= f_1(x); & u(x, t_1) &= F_1(x); \\ i(x, t_2) &= f_2(x); & u(x, t_2) &= F_2(x), \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} i(x_1, t) &= \psi_1(t); & u(x_1, t) &= \varphi_1(t); \\ i(x_2, t) &= \psi_2(t); & u(x_2, t) &= \varphi_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f, F, \psi$  и  $\varphi$  — заданные функции, причем ввиду существующих соотношений между током и напряжением они, вообще говоря, не могут быть заданы произвольно.

Для удобства варьирования выражения (2) введем новые две функции  $e$  и  $q$ , определяемые равенствами<sup>1</sup>:

$$i = \frac{\partial e}{\partial t}; \quad u = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (5)$$

Тогда, пользуясь формулами (1), найдем

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta T - \delta U + \delta Q; \\ \delta T &= \int_{x_1}^{x_2} Li \delta i dx = \int_{x_1}^{x_2} Li \frac{\partial \delta e}{\partial t} dx; \\ \delta U &= \int_{x_1}^{x_2} cu \delta u dx = \int_{x_1}^{x_2} cu \frac{\partial \delta q}{\partial t} dx; \\ \delta Q &= - \int_{x_1}^{x_2} (ri \delta e + gu \delta q) dx. \end{aligned}$$

Подставляя все это в выражение (2) и производя варьирование остальных членов, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ Li \frac{\partial \delta e}{\partial t} - cu \frac{\partial \delta q}{\partial t} - ri \delta e - gu \delta q + \delta \lambda \left( \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + gu \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \delta e}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 \delta q}{\partial t^2} + g \frac{\partial \delta q}{\partial t} \right) \right\} dx dt = 0. \quad (6)$$

Наконец, производя в предыдущем выражении интегрирование по частям и учитывая условия (3) и (4), перепишем уравнение (6) в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left( L \frac{\partial i}{\partial t} + ri - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) \delta e - \left( c \frac{\partial u}{\partial t} - gu - g \frac{\partial \lambda}{\partial t} + c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right) \delta q - \left( \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + gu \right) \delta \lambda \right\} dx dt = 0.$$

Отсюда на основании известной леммы вариационного исчисления следует

$$\begin{aligned} L \frac{\partial i}{\partial t} + ri - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} &= 0, \\ c \frac{\partial u}{\partial t} - gu - g \frac{\partial \lambda}{\partial t} + c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + gu &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Причем, на основании предыдущего, функции  $e$  и  $q$  можно рассматривать при варьировании, как независимые, а вариации  $\delta e$  и  $\delta q$  обращающимися в нуль на границах прямоугольника  $t = t_1, x = x_1, t = t_2, x = x_2$ .

исключая из первого двух выражения (1) вспомогательную функцию  $\lambda$  (2), получим уравнение

$$c \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + ri \right] = g \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + ri \right], \quad (8)$$

которое после обозначения выражения, стоящего в квадратных скобках, буквой  $z$  перейдет в следующее:

$$c \frac{\partial z}{\partial t} = gz, \quad (8')$$

где

$$z = \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + ri. \quad (9)$$

Решая это уравнение относительно  $z$ , найдем

$$z = A(x) e^{\frac{g}{c} t}$$

Здесь  $A(x)$  — произвольная функция от  $x$ . Так как в нашем случае  $z$  (см. формулу 9) должно оставаться конечным с возрастанием  $t$ , то единственным возможным решением (8') является решение, при котором  $A(x)$  тождественно равно нулю, и, следовательно,

$$z = \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + ri = 0. \quad (10)$$

Это уравнение вместе с последним уравнением (7) дает искомые телеграфные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + gu &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + ri &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для того, чтобы раскрыть физический смысл формулы (2), заметим, что, пользуясь основным принципом вариационного исчисления<sup>1</sup>, можно свести нашу вариационную задачу к следующей.

Определить функции  $i$  и  $u$  (ток и напряжение), доставляющие стационарное значение интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при условии, что функции эти удовлетворяют условиям (3) и (4) и соотношению:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + gu = 0. \quad (12)$$

Из новой постановки задачи ясно, что наш принцип (формула 2) есть обычный принцип Гамильтона, к которому, ввиду зависимости варьируемых функций  $i$  и  $u$ , добавлено уравнение связи (12).

На основании сказанного становится очевидным роль функции  $\lambda(x, t)$ , фигурирующей в формуле (2), которая является неопределенным множителем Лагранжа.

Электротехнический Институт Связи.  
г. Ленинград

<sup>1</sup> Куррант и Гильберт. Методы математической физики, стр. 224.



Научно-технический сборник ЛЭИС, 1937, №18, стр.21-36.

## ОДНОТАКТНЫЕ И ДВУХТАКТНЫЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

### ONE-PHASE AND TWO-PHASE WAVES ALONG A TWO-WIRE LINE

#### Содержание

В настоящей статье дана строгая теория двухпроводной линии бесконечно-большой проводимости. Получены интегралы уравнений Максвелла, учитывающие двухтактные (Gegentakwelle) и однотоктные (Gleichtaktwelle) волны, что дало возможность найти общие формулы для напряженностей электромагнитного поля, токов и волнового сопротивления. Найденные результаты применены к изучению несимметричной линии, линии окруженной двумя различными средами и линии с нагрузкой на конце.

#### Summary

The author gives the theory of a two-wire line of infinitely high conductivity. Integrals of the equations of Maxwell are found, by means of which two-phase waves (Gegentakwellen) and one-phase waves (Gleichtaktwellen) may be taken into consideration. This allows to deduce generalized formulae for the field-potentials, currents and characteristic impedance. The obtained results may be applied to the study of an asymmetrical line surrounded by two different mediums, and also of a line loaded at its end.

#### Введение

В экспериментальной радиотехнике уже сравнительно давно известно явление, заключающееся в неодинаковости распределения напряжения и тока на разных проводах двухпроводной линии (так называемые скосы в линиях). Исследования Roosenstein'a показали, что это явление возникает в результате наложения однотоктной волны (Gleichtaktwelle), на обычную двухтактную (Gegentakwelle). Причем однотоктная волна появляется вследствие несимметрии самой линии или генератора, возбуждающего ее (линию). В последнее время А. А. Пистолькорсом<sup>1)</sup> разработан метод, дающий возможность учесть наличие однотоктной волны; исходя из телеграфных уравнений.

В настоящей статье мы постараемся дать строгую теорию однотоктных и двухтактных волн в двухпроводной линии бесконечной проводимости, пользуясь основными уравнениями Максвелла. Это позволит изучить также электромагнитное поле вокруг проводов, чего не дают телеграфные уравнения, не говоря уже о их нестрогости.

#### Преобразование координат

Рассмотрим бесконечно-длинную линию, состоящую из двух цилиндрических проводов радиуса  $r_0$ , расположенных параллельно оси  $z$  (см. фиг. 1). Ограничившись изучением бесконечно-проводящих линий, мы будем в дальнейшем удельную проводимость проводов  $\sigma$  полагать равной бесконечности. Решение поставленной задачи получим, проще всего, введением особой системы координат  $\rho$ ,  $\theta$  и  $z$  (так называемой биполярной), координатные поверхности которой имеют форму цилиндров ( $\rho = \text{const}$ ,

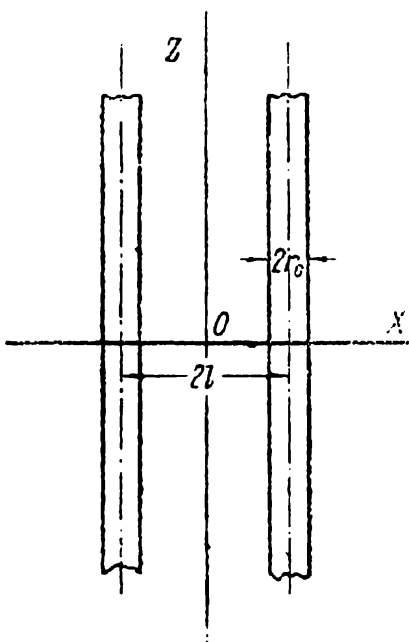
<sup>1)</sup> Работа А. А. Пистолькорса напечатана в 16 и 17 номерах Научно-Технического сборника ЛЭИС.

$\theta = \text{const}$ ) и плоскостей ( $z = \text{const}$ ). К новым координатам мы перейдем при помощи конформного преобразования плоскости  $z = \text{const}$ , которую будем рассматривать, как плоскость комплексного переменного  $\xi = x + jy$ , на плоскость переменного  $W = \rho e^{j\theta}$ .

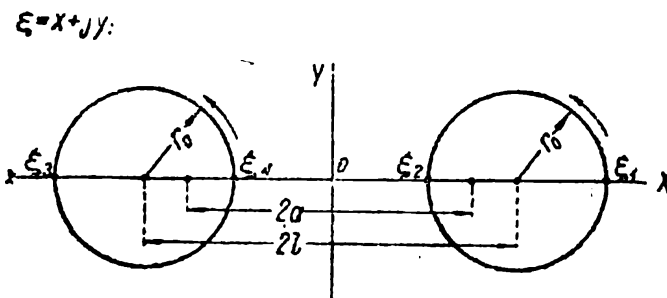
Совершая это преобразование при помощи дробно-линейной функции<sup>1)</sup>.

$$W = \frac{\xi - a}{\xi + a} = \psi(\xi) \quad (1)$$

мы переведем плоскость  $\xi$  в плоскость  $W$ , при этом кругам, получившимся от пересечения проводов с плоскостью (фиг. 2) будут соответствовать в плоскости  $W$ , концентрические круги радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (фиг. 3). Обозначая рас-



Фиг. 1



Фиг. 2

стояние между осями проводов через  $2l$  и пользуясь формулой (1), а также получаемся из нее

$$\xi = a \frac{1+W}{1-W} = \eta(W) \quad (1a)$$

легко установить соответствие между наиболее характерными точками обеих плоскостей (см, фиг. 2 и 3), иллюстрируемое при помощи таблицы:

$\xi$	$\infty$	0	$-a$	$a$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
$W$	1	-1	$\infty$	0	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$

Пять величин  $r_0$ ,  $2l$ ,  $a$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  связаны между собой следующими, очевидными рисунков, равенствами:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1} - \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \rho_1}{1 + \rho_1}, \\ r_0 &= \frac{\xi_4 - \xi_3}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \rho_2}{1 - \rho_2}, \\ 2l &= 2r_0 + \xi_2 - \xi_4 = 2r_0 + a \frac{1 - \rho_1}{1 + \rho_1} - a \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

из которых следует, что  $\rho_1 < 1$ ,  $\rho_2 > 1$ .

<sup>1)</sup> Подробное изучение конформного преобразования, производимого этой функцией можно найти в следующих книгах: Мусхелишвили „Некоторые задачи теории упругости“, стр. 179.

Смирнов „Курс высшей математики“ т. III, стр. 329, а также в любом руководстве по конформным преобразованиям.

Считая  $r_0$  и  $2l$  заданными и решая уравнение (2) относительно  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $a$ , получим после элементарных выкладок:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\sqrt{l+r_0} - \sqrt{l-r_0}}{\sqrt{l+r_0} + \sqrt{l-r_0}} \\ \rho_2 &= \frac{\sqrt{l+r_0} + \sqrt{l-r_0}}{\sqrt{l+r_0} - \sqrt{l-r_0}} \\ a^2 &= (l+r_0)(l-r_0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Введенные нами величины  $\rho$  и  $\theta$ , связанные с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$  при помощи равенства (1)

$$\rho e^{j\theta} = \psi(x + jy)$$

естественно в дальнейшем рассматривать, как новые криволинейные ортогональные<sup>1)</sup> координаты в комплексной плоскости  $\xi$ , или, что тоже самое, в плоскости  $z = \text{const}$ . Значениям  $\theta = \text{const}$  (радиусы в плоскости  $W$ ) будут соответствовать на плоскости  $\xi$  окружности проходящие через точки  $\xi = a$  и  $\xi = -a$ , а значениям  $\rho = \text{const}$  (концентрические круги в плоскости  $W$ ) окружности ортогональные к окружностям проходящим через точки  $\xi = a$  и  $\xi = -a$ , одна из них определяемая параметром  $\rho = 1$  вырождается в ось абсцисс. Из предыдущего очевидно, что координатные поверхности  $\rho = \rho_1$  и  $\rho = \rho_2$  совпадают с боковыми поверхностями наших проводов. В новой системе координат  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $z$  элемент длины будет иметь вид:

$$ds^2 = h_\rho^2 d\rho^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (4)$$

Величины  $h_\rho$  и  $h_\theta$  можно определить исходя из равенства (1а), действительно

$$d\xi = \eta'(W) dW$$

переходя в этом уравнении к модулю и учитывая, что

$$dW = d(\rho e^{j\theta}) = e^{j\theta} (d\rho + j\rho d\theta)$$

найдем:

$$|d\xi|^2 = |\eta'(W)|^2 \cdot |dW|^2$$

или

$$dx^2 + dy^2 = |\eta'(W)|^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)$$

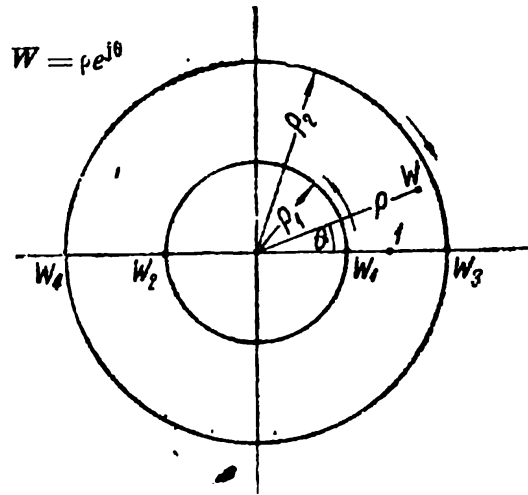
из сравнения с (4) непосредственно вытекает:

$$h_\rho = |\eta'(W)|; \quad h_\theta = |\eta'(W)| \rho, \quad (5)$$

где  $|\eta'(W)|$  найдется путем дифференцирования формулы (1а) с последующим переходом к модулю. Опуская выкладки приведем окончательный результат:

$$|\eta'(W)| = \frac{2a}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Ортогональность вновь введенной координатной системы следует из того, что  $\ln \rho$  и  $\theta$  представляют действительную и мнимую части аналитической функции  $\ln W$ .



Фиг. 3

## Интегрирование уравнений Максвелла

Электромагнитное поле нашей задачи найдется из интегрирования уравнений Максвелла, при определенных условиях на поверхности проводов. Для случая гармонических колебаний, когда зависимость векторов поля от времени взята в виде  $e^{j\omega t}$ , эти уравнения могут быть написаны в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} Q\dot{E} &= \text{rot } \dot{H} \\ D\dot{H} &= \text{rot } \dot{E} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь:

$$Q = \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c}; \quad D = -j \frac{\omega\mu}{c} \quad (7a)$$

$H$  — напряженность магнитного поля,  
 $E$  — „ „ электрического поля,  
 $\sigma$  — удельная проводимость,  
 $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная,  
 $\mu$  — магнитная проницаемость,  
 $\omega$  — угловая частота,  
 $c$  — электродинамическая постоянная.

В дальнейшем нам удобнее будет перейти от векторной формы (7) к уравнениям, написанным в биполярной системе координат  $\rho, \theta, z$ . Для этого используем формулы векторного анализа, дающие составляющие ротора в криволинейных координатах. Кроме этого, учитывая бесконечную проводимость нашей линии, положим составляющие векторов поля по оси  $z$  равными нулю

$$E_z = H_z = 0. \quad (8)$$

В законности такого предположения мы убедимся, по получении решения, удовлетворяющего всем условиям задачи, на основании теоремы однозначности.

Все вышесказанное дает возможность переписать уравнения (7) в следующем эквивалентном виде:

$$\left. \begin{aligned} QE_\rho &= -\frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial z} (h_\theta H_\theta) \\ QE_\theta &= \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial z} (h_\rho H_\rho) \\ \frac{1}{h_\rho h_\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (h_\theta H_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\rho H_\rho) \right] &= 0 \\ DH_\rho &= -\frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial z} (h_\theta E_\theta) \\ DH_\theta &= \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial z} (h_\rho E_\rho) \\ \frac{1}{h_\rho h_\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (h_\theta E_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\rho E_\rho) \right] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $E_\rho, H_\rho, E_\theta$  и  $H_\theta$  — составляющие напряженностей поля в биполярных координатах.

Так как  $h_p$  и  $h_\theta$  не зависят от  $z$  (см. форм. 5), то предыдущие уравнения можно представить еще проще:

$$\left. \begin{aligned} QE_p &= -\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \\ QE_\theta &= \frac{\partial H_p}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} (h_\theta H_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h_p H_p) &= 0 \\ DH_p &= -\frac{\partial E_\theta}{\partial z} \\ DH_\theta &= \frac{\partial E_p}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} (h_\theta E_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h_p E_p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Третьему и шестому из этих уравнений удовлетворим, положив:

$$\left. \begin{aligned} h_\theta H_\theta &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; & h_p H_p &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ h_\theta E_\theta &= \frac{\partial F}{\partial \theta}; & h_p E_p &= \frac{\partial F}{\partial \rho}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

а произвольными пока функциями  $\Phi$  и  $F$  распорядимся так, чтобы удовлетворить оставшимся четырем уравнениям (9a). Исключая из первого и пятого равенств (9a) составляющую поля  $E_p$  (или  $H_\theta$ ) получим уравнение для  $H_\theta$  (или  $E_p$ ), аналогично этому из второго и четвертого найдем уравнения для  $H_p$  и  $E_\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial z^2} + k^2 H_\theta &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} + k^2 E_p &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_p}{\partial z^2} + k^2 H_p &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial z^2} + k^2 E_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

здесь

$$k^2 = QD = \frac{\omega^2 \epsilon \mu - j4\pi \sigma \omega \mu}{c^2}. \quad (12)$$

И наконец подставив в (11) вместо  $H_\theta$ ,  $E_p$ ,  $H_p$  и  $E_\theta$  их значения из (10) получим ряд равенств, определяющих функции  $\Phi$  и  $F$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F \right] &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что выражения, стоящие в квадратных скобках зависят только от переменной  $z$ .

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = \varphi_1(z) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F = \varphi_2(z).$$

Общие интегралы неоднородных линейных уравнений (13) можно написать, как известно, так:

$$\begin{aligned} \Phi &= \alpha(\rho, \theta) e^{jkz} + \beta(\rho, \theta) e^{-jkz} + u_1(z) \\ F &= \gamma(\rho, \theta) e^{jkz} + d(\rho, \theta) e^{-jkz} + u_2(z), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $d$  произвольные функции от  $\rho$  и  $\theta$ , а  $u_1$  и  $u_2$  частные интегралы неоднородных уравнений (13) нарочито выбранные независимыми от  $\rho$  и  $\theta$ .

Пользуясь равенствами (14) и (10) можно найти составляющие напряженности электромагнитного поля с точностью до произвольных функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $d$ :

$$\begin{aligned} h_\theta H_\theta &= \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} e^{jkz} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} e^{-jkz} \\ h_\rho H_\rho &= \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} e^{jkz} + \frac{\partial \beta}{\partial \rho} e^{-jkz} \\ h_\theta E_\theta &= \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \theta} e^{-jkz} \\ h_\rho E_\rho &= \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \rho} e^{-jkz}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для нахождения функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $d$  применим следующий метод: заменим в первом и четвертом из основных равенств (9а), составляющие векторов поля по формулам (15)

$$\begin{aligned} \frac{Q}{h_\rho} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \rho} e^{-jkz} \right] &= -\frac{jk}{h_\theta} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} e^{jkz} - \frac{\partial \beta}{\partial \theta} e^{-jkz} \right] \\ \frac{D}{h_\rho} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} e^{jkz} + \frac{\partial \beta}{\partial \rho} e^{-jkz} \right] &= -\frac{jk}{h_\theta} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} e^{jkz} - \frac{\partial d}{\partial \theta} e^{-jkz} \right]. \end{aligned}$$

Полученные два выражения должны тождественно удовлетворяться для любых значений переменных  $\rho$ ,  $\theta$  и  $z$ , а это возможно лишь при выполнении четырех равенств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{h_\rho} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= -\frac{jk}{h_\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}; & \frac{D}{h_\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} &= -\frac{jk}{h_\theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \\ \frac{Q}{h_\rho} \frac{\partial d}{\partial \rho} &= \frac{jk}{h_\theta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}; & \frac{D}{h_\rho} \frac{\partial \beta}{\partial \rho} &= \frac{jk}{h_\theta} \frac{\partial d}{\partial \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

которые будем рассматривать, как уравнения определяющие искомые функции. Исключив из первых двух  $\alpha$ , а из последних  $\beta$  получим дифференциальные уравнения для  $\gamma$  и  $d$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial d}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 d}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

при этом учтено, что на основании формул (5) и (12)

$$h_\theta = \rho h_\rho \quad \text{и} \quad QD = k^2.$$

Найдя из уравнений (17)  $\gamma$  и  $d$  не представляет труда выразить через них при помощи равенств (16) функции  $\alpha$ ,  $\beta$  и их производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} &= -\frac{Q\rho}{jk} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}; & \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} &= -\frac{jk}{D\rho} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \theta} &= \frac{Q\rho}{jk} \frac{\partial d}{\partial \rho}; & \frac{\partial \beta}{\partial \rho} &= \frac{jk}{D\rho} \frac{\partial d}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Таким образом составляющие  $H_\theta$ ,  $E_\theta$  и т. д. (см. форм. 15) могут быть определены через  $\gamma$  и  $d$ .

$$\left. \begin{aligned} h_\theta H_\theta &= \frac{Q\rho}{jk} \left[ -\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \rho} e^{-jkz} \right] \\ h_\rho H_\rho &= \frac{jk}{D\rho} \left[ -\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \theta} e^{-jkz} \right] \\ h_\theta E_\theta &= \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \theta} e^{-jkz} \\ h_\rho E_\rho &= \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} e^{jkz} + \frac{\partial d}{\partial \rho} e^{-jkz} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Окончательное определение поля упирается (как видно из формул (19), в нахождение функций  $\gamma$  и  $d$ . Уравнения (17), которым удовлетворяют эти функции, представляют известные уравнения Лапласа, написанные в полярных координатах  $\rho$  и  $\theta$  плоскости  $W$ . Так как уравнение Лапласа инвариантно, относительно конформных преобразований, то  $\gamma$  и  $d$  будут также гармоническими функциями переменных  $x$  и  $y$ . Но одних этих данных недостаточно для полного определения их. Однако, недостающие сведения о функциях  $\gamma$  и  $d$  легко получить, исходя из граничных условий, которым должны удовлетворять вектора поля на границе раздела двух сред.

В нашем случае эти условия напишутся так<sup>1)</sup>:

$$H = E_\theta = 0 \text{ при } \rho = \rho_1, \rho_2, \quad (20)$$

а отсюда, учитывая формулы (19) найдем так называемые граничные условия, необходимые для определения гармонических функций  $\gamma$  и  $d$ :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\partial d}{\partial \theta} = 0 \text{ при } \rho = \rho_1, \rho_2$$

или интегрируя по  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \text{const.} \\ d &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \text{ при } \rho = \rho_1, \rho_2. \quad (20a)$$

Функции  $\gamma$  и  $d$ , как нетрудно сообразить, играют роль скалярного потенциала. Поэтому, если мы хотим ограничиться двухтактной волной в линии, то к условиям на поверхности проводов (20a) необходимо прибавить требование регулярности наших функций во всем внешнем к проводам пространстве включая бесконечно-удаленную точку или переходя к комплексной плоскости  $W$ , эти требования должны выполняться внутри кольца ограниченного окружностями радиуса  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В настоящей статье мы поставим задачу общее и постараемся найти решение, учитывающее так-же наличие однотоктной волны. Для этого нужно несколько ослабить требования, предъявляемые к  $\gamma$  и  $d$ , а именно, кроме условий (20a) следует ограничиться непрерывностью и однозначностью этих функций во всем внешнем пространстве (соответственно внутри кольца плоскости  $W$ ), допуская в бесконечно-удаленной точке (соответ.  $W=1$ )

<sup>1)</sup> Так как параметр  $\rho$ , равный  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определяет поверхности бесконечно-проводящих проводов.

логарифмическую особенность. На основании сказанного, искомые функции должны иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\rho, \theta) &= M \ln r + G(\rho, \theta) \\ d(\rho, \theta) &= N \ln r + q(\rho, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $M$  и  $N$  произвольные пока постоянные,  $r = |W - 1|$  расстояние от точки  $W = 1$  до переменной точки наблюдения  $W$ , а  $G$  и  $q$  — гармонические функции регулярные всюду внутри кольца. Причем на основании (20а)

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\rho_1, \theta) &= c_1; & \gamma(\rho_2, \theta) &= c_2 \\ d(\rho_1, \theta) &= c_3; & d(\rho_2, \theta) &= c_4, \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

$c_1, c_2, c_3, c_4$  — постоянные.

Займемся сначала функцией  $\gamma$ .

Задача нахождения  $\gamma$  может быть разбита на две; из которых одна заключается в определении гармонической функции  $\gamma_1(\rho, \theta)$ , имеющей внутри кольца в точке  $W = 1$  логарифмическую особенность вида  $M \ln r$  и обращающейся на контуре кольца ( $\rho = \rho_1, \rho_2$ ) в нуль, а вторая в нахождении гармонической функции  $\gamma_2(\rho, \theta)$ , регулярной всюду внутри кольца и удовлетворяющей на контуре его следующим условиям:

$$\gamma_2(\rho_1, \theta) = c_1; \quad \gamma_2(\rho_2, \theta) = c_2. \quad (22)$$

Тогда искомая функция  $\gamma(\rho, \theta)$  выразится, как сумма двух предыдущих:

$$\gamma(\rho, \theta) = \gamma_1(\rho, \theta) + \gamma_2(\rho, \theta). \quad (23)$$

Функция  $\gamma_1(\rho, \theta)$  известна в математике под названием функции Грина для кольца и может быть определена равенством:

$$\gamma_1(\rho, \theta) = M \cdot \ln |f(W)|, \quad (24)$$

здесь  $f(W)$  — аналитическая функция без особых точек внутри кольца, имеющая там один простой нуль в точке  $W = 1$  и модуль, которой равен на контуре кольца единице.

Так как в нашем случае произведение внутреннего и внешнего радиусов кольца равно единице  $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$  (см. форм. 3), то можно воспользоваться выражением для  $f(W)$ , имеющимся у Р. Куранта<sup>1)</sup>. После чего получим *mutatis mutandis*:

$$\left. \begin{aligned} f(W) &= \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} \\ W &= e^{j2\pi v} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$\theta_1(v)$  и  $\theta_0(v)$  соответственно первая и нулевая тэта функции, определяемые быстро сходящимися рядами:<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(v) &= 2q^{1/4} \sin \pi v - 2q^{9/4} \sin 3\pi v + 2q^{25/4} \sin 5\pi v - + \dots \\ \theta_0(v) &= 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + - \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$q = \rho_1^2 < 1.$$

Вторая вспомогательная функция  $\gamma_2(\rho, \theta)$  очевидно равна

$$\gamma_2(\rho, \theta) = A \ln \rho + C_0, \quad (27)$$

постоянные  $A$  и  $C_0$  входящие в эту формулу определяются при помощи (22).

<sup>1)</sup> См. Курант и Гильберт, „Методы математической физики“ изд. II, стр. 364.

<sup>2)</sup> См. А. Гурвиц „Теория аналитических и эллиптических функций“ стр. 259.



$$\gamma(\rho, \theta) = M \ln \left| \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} \right| + A \ln \rho + C_0, \quad (28)$$

функция  $d(\rho, \theta)$  на основании предыдущего может отличаться от (28) только постоянными, поэтому для нее напишем выражение:

$$d(\rho, \theta) = N \ln \left| \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} \right| + B \ln \rho + C. \quad (28a)$$

Полученные формулы (28), (28a) и (19) дают возможность определить электромагнитное поле нашей задачи в самом общем виде:

$$\left. \begin{aligned} H_\theta &= \frac{Q}{j2\pi kh_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) \cdot [-Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] + \\ &\quad + \frac{Q}{jkh_0} [-Ae^{jkz} + Be^{-jkz}] = H_\theta^{(1)} + H_\theta^{(2)} \\ H_\rho &= \frac{jk}{2\pi Dh_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) [-Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] = H_\rho^{(1)} \\ E_\theta &= \frac{1}{2\pi h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) [Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] = E_\theta^{(1)} \\ E_\rho &= \frac{1}{2\pi h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) [Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] + \\ &\quad + \frac{1}{h_0} [Ae^{jkz} + Be^{-jkz}] = E_\rho^{(1)} + E_\rho^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Первые и последние члены этих равенств, обозначенные соответственно буквами  $H^{(1)}$ ,  $E^{(1)}$  и  $H^{(2)}$ ,  $E^{(2)}$  характеризуют (как в этом не трудно убедиться на основании сказанного на странице (27)) поля однотактной и двухтактной волны. То, что поле одной из них имеет четыре составляющие, а другой — две, объясняется специальным выбором кроволинейных координат. Следует отметить, что при выводе формул (29) мы пользовались следующими тождествами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left| \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} \right| &= \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Re} \left( \ln \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} \right) = \frac{1}{2\pi\rho} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left| \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} \right| &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right). \end{aligned}$$

Применим формулы (29) для нахождения напряжения  $U$  между проводниками (последнее возможно, так как в плоскости  $z = \text{const.}$  поле имеет потенциальный характер). Для этого подсчитаем циркуляцию вектора напряженности электрического поля по отрезку координатной линии  $\theta = \text{const.}$  между точками  $\rho = \rho_1$  и  $\rho = \rho_2$ :

$$U = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_\rho h_\rho d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_\rho^{(1)} h_\rho d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_\rho^{(2)} h_\rho d\rho = U^{(1)} + U^{(2)},$$

последние два интеграла дают напряжения, обусловленные соответственно наличием однотактной и двухтактной волны. Рассмотрим их в отдельности, учтя последнее равенство (29)

$$U^{(1)} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_\rho^{(1)} h_\rho d\rho = \frac{1}{2\pi} [Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] \operatorname{Im} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d}{dv} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \frac{d\rho}{\rho}$$

или производя замену переменной интегрирования  $\rho$  на  $v$  по второй формуле (25) 101

$$U^{(1)} = [Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] \operatorname{Im} \int_{\rho=\rho_1}^{\rho_2} j \frac{d}{dv} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) dv$$

$$U^{(1)} = [Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] \cdot \operatorname{Re} \int_{\rho=\rho_1}^{\rho_2} \frac{d}{dv} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) dv = [Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] \ln \left| \frac{\theta_1}{\theta_0} \right| \Bigg|_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} = 0,$$

так как  $\left| \frac{\theta_1}{\theta_0} \right|$  равен единице на контуре кольца ( $\rho = \rho_1, \rho_2$ ) в плоскости  $W$ .

Аналогично берется и второй интеграл:

$$U^{(2)} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_0^{(2)} h_0 d\rho = [Ae^{jkz} + Be^{-jkz}] \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho},$$

а отсюда:

$$U^{(2)} = [Ae^{jkz} + Be^{-jkz}] \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Как и следовало ожидать, напряжение между проводами вызывается исключительно двухтактной волной

$$U = U^{(2)} = (Ae^{jkz} + Be^{-jkz}) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (30)$$

Займемся еще определением поверхностной плотности тока  $i$  на проводах. Из теории электромагнитного поля известна формула:

$$i = \frac{c}{4\pi} [ \hat{n} \cdot \dot{H}_0 ], \quad (31)$$

имеющая место на поверхности бесконечно-проводящего тела. В этой формуле  $\hat{n}$  обозначает единичный вектор, совпадающий с нормалью к поверхности, а  $\dot{H}_0$  составляющая  $\dot{H}$  касательная к той-же поверхности. Приведенная формула дает возможность после подстановки в нее значения  $H_0$  из (29) найти плотность тока на проводе, определяемом координатой  $\rho = \rho_1$  <sup>1)</sup>

$$i_{\rho=\rho_1} = \frac{c}{4\pi} H = \frac{c}{4\pi} H_0^{(1)} + \frac{c}{4\pi} H_0^{(2)} = i_{\rho=\rho_1}^{(1)} + i_{\rho=\rho_1}^{(2)} \quad (32)$$

$$i_{\rho=\rho_1} = \frac{cQ}{j8\pi^2 kh_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) [-Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] + \frac{cQ}{j4\pi \cdot kh_0} [-Ae^{jkz} + Be^{-jkz}] \Big|_{\rho=\rho_1}$$

Найдем также полный ток  $I$  протекающий по проводу. Для этого возьмем интеграл от плотности тока по окружности провода  $\rho = \rho_1$ :

$$I_{\rho=\rho_1} = \int_0^{2\pi} i_{\rho=\rho_1} h_0 d\theta$$

$$I_{\rho=\rho_1} = \frac{cQ}{j8\pi^2 k} [-Me^{jkz} + Ne^{-jkz}] \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) d\theta + \frac{cQ}{j4\pi k} [-Ae^{jkz} +$$

$$+ Be^{-jkz}] \int_0^{2\pi} d\theta = I_{\rho=\rho_1}^{(1)} + I_{\rho=\rho_1}^{(2)}.$$

<sup>1)</sup> За положительное направление тока принято направление возрастания  $z$ .

$$\int_0^{2\pi} \text{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) d\theta = \text{Im} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) d\theta = \text{Im} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) d\theta,$$

заменяя переменную интегрирования  $\theta$  на  $v$  по формуле (25), помня при этом, что  $\rho = \rho_1 = \text{const}$ , получим:

$$\text{Im} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) d\theta = \text{Im} \int_0^{2\pi} 2\pi \frac{\partial}{\partial v} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) dv = 2\pi \text{Im} \left( \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}.$$

Выражение, стоящее в правой части равно приращению аргумента функции  $\frac{\theta_1}{\theta_0}$ , при обходе по окружности  $\rho = \rho_1$  в плоскости  $W$ , помноженному на  $2\pi$ . Пользуясь теорией тэта функции нетрудно показать, что это приращение аргумента равняется  $-\pi$ , таким образом искомый интеграл равен:

$$\int_0^{2\pi} \text{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) d\theta = -2\pi^2 \text{ при } \rho = \rho_1.$$

Полученный результат дает возможность написать формулу для тока:

$$I_{\rho=\rho_1} = \frac{jcQ}{4k} \left[ -Me^{jkz} + Ne^{-jkz} \right] + \frac{cQ}{j2k} \left[ -Ae^{jkz} + Be^{jkz} \right] = I_{\rho=\rho_1}^{(1)} + I_{\rho=\rho_1}^{(2)}. \quad (33)$$

Точно так же из (31), учитывая изменение направления возрастания координаты  $\theta$  (см. фиг. 2), найдем поверхностную плотность тока на втором проводе  $\rho = \rho_2$

$$\left. \begin{aligned} i_{\rho=\rho_2} &= -\frac{c}{4\pi} H_\theta = i_{\rho=\rho_2}^{(1)} + i_{\rho=\rho_2}^{(2)} \\ i_{\rho=\rho_2} &= \frac{jcQ}{8\pi^2 kh_0} \text{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) \left[ -Me^{jkz} + Ne^{-jkz} \right] + \\ &+ \frac{jcQ}{4\pi kh_0} \left[ -Ae^{jkz} + Be^{-jkz} \right] \Bigg|_{\rho=\rho_2}, \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

а затем и полный ток:

$$\left. \begin{aligned} I_{\rho=\rho_2} &= \int_0^{2\pi} i_{\rho=\rho_2} h_0 d\theta = I_{\rho=\rho_2}^{(1)} + I_{\rho=\rho_2}^{(2)} \\ I_{\rho=\rho_2} &= \frac{jcQ}{4k} \left[ -Me^{jkz} + Ne^{-jkz} \right] + \frac{jcQ}{2k} \left[ -Ae^{jkz} + Be^{-jkz} \right], \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

при этом мы пользовались равенством:

$$\int_0^{2\pi} \text{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) d\theta = 2\pi^2 \text{ при } \rho = \rho_2$$

### Несимметричные линии

До сих пор мы изучали исключительно симметричные линии. Наличие в них однотактной волны объясняется, как мы уже отметили в введении, несимметрией источников питания. Однако, не представляет труда обобщить изложенную теорию на случай наличия несимметрии в самой линии. Пусть несимметрия заключается

в неравенстве радиусов проводов, обозначаемых буквами  $r_1$  и  $r_2$ . Тогда изменен<sup>103</sup> в наших рассуждениях будет заключаться в следующем: вместо формулы (1), совершающей конформное преобразование плоскости  $\xi$  на плоскость  $W$  введем

$$W = b \frac{\xi - a}{\xi + a}, \quad (1a)$$

где  $b$  действительная постоянная, выбранная так, чтобы произведение радиусов окружностей кольца  $\rho_1$  и  $\rho_2$  равнялось единице. Ввиду иной преобразующей функции (1a), точке  $\xi = \infty$  будет соответствовать теперь в плоскости  $W$  точка  $W = b$  (а не  $W = 1$ , как раньше), что вызывает необходимость заменить равенство (25), определяющее функцию  $f(W)$ , новым:<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} f(W) &= W^{-\frac{2j\pi a}{\ln q}} \cdot \frac{\theta_1(v-a)}{\theta_0(v+a)} \\ W &= e^{j2\pi v}, \quad b = e^{j2\pi z}. \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

Схема всех выкладок после этого останется без изменения.

Так как несимметрия линии не выносит ничего принципиально нового, то мы не будем приводить всех вычислений для этого случая и в дальнейшем ограничимся изучением симметричных линий.

### Бесконечно длинная линия

Для изучения электромагнитных волн, распространяющихся вдоль бесконечно длинной двухпроводной линии, можно использовать полученные нами общие решения (29). Положим для определенности, что волна движется сверху вниз, т. е. в направлении отрицательных  $z$  и выберем у корня  $k = \sqrt{k^2}$  определяемого формулой (12), тот знак, при котором действительная часть  $jk$  больше нуля. Тогда, учитывая направление движения волны, следует в равенствах (29) отбросить члены, множители которых равны  $e^{-jkz}$ , т. е. положить  $N = B = 0$ , при этом поле будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \frac{jQM}{2\pi kh_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) \cdot e^{jkz} + \frac{jQA}{kh_0} e^{jkz} = H_0^{(1)} + H_0^{(2)} \\ H_\rho &= \frac{kM}{j2\pi Dkh_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) \cdot e^{jkz} = H_\rho^{(1)} \\ E_0 &= \frac{M}{2\pi h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) \cdot e^{jkz} = E_0^{(1)} \\ E_\rho &= \frac{M}{2\pi h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)} - \frac{\theta_0'(v)}{\theta_0(v)} \right) \cdot e^{jkz} + \frac{A}{h_0} e^{jkz} = E_\rho^{(1)} + E_\rho^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

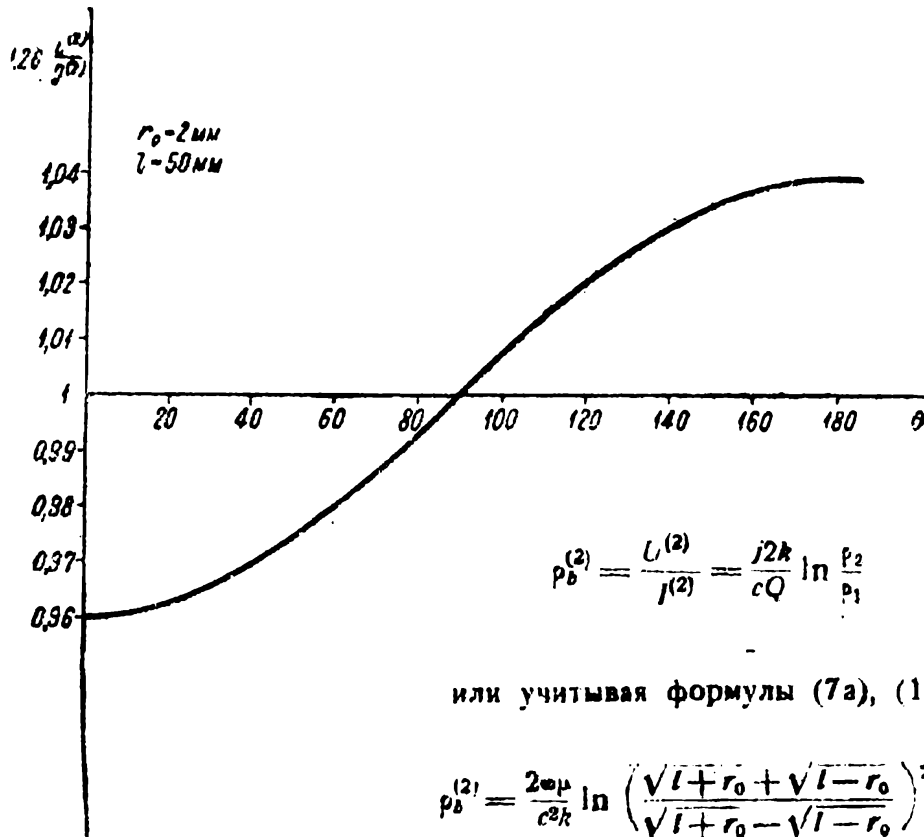
Аналогично этому формулы (30), (32), (33), (32a) и (33a) для напряжения и тока переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} U &= U^{(2)} = A \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} e^{jkz}, \\ i_{\rho=\rho_1} &= \frac{j c Q M}{8\pi^2 k h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) \cdot e^{jkz} + \frac{j c Q A}{4\pi k h_0} e^{jkz} = i_{\rho=\rho_1}^{(1)} + i_{\rho=\rho_1}^{(2)} \quad \text{при } \rho = \rho_1 \\ I_{\rho=\rho_1} &= \frac{c Q M}{j 4 k} e^{jkz} + \frac{j c Q A}{2 k} e^{jkz} = I_{\rho=\rho_1}^{(1)} + I_{\rho=\rho_1}^{(2)} \\ i_{\rho=\rho_2} &= \frac{c Q M}{j 8\pi^2 k h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) e^{jkz} + \frac{c Q A}{j 4\pi k h_0} e^{jkz} = i_{\rho=\rho_2}^{(1)} + i_{\rho=\rho_2}^{(2)} \quad \text{при } \rho = \rho_2 \\ I_{\rho=\rho_2} &= \frac{c Q M}{j 4 k} e^{jkz} - \frac{j c Q A}{2 k} e^{jkz} = I_{\rho=\rho_2}^{(1)} + I_{\rho=\rho_2}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

1) См. Курант, loc. cit.

Из третьей и пятой формул, между прочим, видно, что токи одностактной волны направлены в обоих проводах в одну и ту же сторону, а токи двухтактной в противоположные. 104

Входящие в наши равенства постоянные  $M$  и  $A$  зависят от генератора, питающего линию<sup>1)</sup> и при желании могут быть найдены через полный ток, заданный в каком-нибудь сечении проводов. Формулы (35) дают также возможность определить величину волнового сопротивления  $\rho_b^{(2)}$  для двухтактной волны. Действительно, благодаря отсутствию отраженной волны имеем очень простую формулу, определяющую  $\rho_b^{(2)}$ <sup>2)</sup>



Фиг. 4

На практике нас чаще всего интересует случай, когда окружающая линия среда, воздух, для которого  $\epsilon = \mu = 1$  и  $\sigma = 0$ . При этом (36) переписывается так:

$$\rho_b^{(2)} = \frac{4}{c} \ln \left( \frac{\sqrt{l+r_0} + \sqrt{l-r_0}}{\sqrt{l+r_0} - \sqrt{l-r_0}} \right).$$

Переходя в этой формуле от абсолютных единиц к практическим, окончательно получим:

$$\rho_b^{(2)} = 120 \ln \left( \frac{\sqrt{l+r_0} + \sqrt{l-r_0}}{\sqrt{l+r_0} - \sqrt{l-r_0}} \right) \text{ ом.} \quad (37)$$

Равенства (35) дают также возможность построить кривые распределения плотности тока по окружности провода. На фиг. 4 это сделано для плотности тока двухтактной волны.

### Смешанные волны в линии

Смешанные волны возникают в том случае, когда в линии имеет место отражение. Последнее вызывается как неоднородностью самой линии, так и неоднородностью окружающей среды.

<sup>1)</sup> В нашем случае следует считать, что генератор включен в точках  $z = \infty$ .

<sup>2)</sup> Не путать с координатой  $\rho$ .

Проще всего получить смешанные волны, рассмотрев конечную или полубесконечную линию с нагрузкой на конце.<sup>1)</sup> Однако при строгом решении такой задачи мы сталкиваемся с почти непреодолимыми, в настоящий момент, математическими трудностями. Поэтому применим несколько иной метод, заключающийся в изучении бесконечно длинной линии, погруженной на своем протяжении в две среды с различными электрическими параметрами, причем так, что плоскость раздела этих сред перпендикулярна к осям проводов (см. фиг. 5). Предполагая, как и раньше, что источник энергии включен в точках  $z = \infty$ , получим в верхнем полупространстве смешанную волну, возникшую в результате интерференции падающей и отраженной от границы раздела ( $z = 0$ ) бегущих волн. В нижнем полупространстве будет очевидна одна падающая волна. Снабжая все величины, относящиеся к нижнему полупространству индексами  $n$ , получим на основании сказанного и равенств (29) следующие формулы для электромагнитного поля в нижней среде<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} H_{\theta n} &= \frac{jQ_n M_n}{2\pi k_n h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) e^{jk_n z} + \frac{jQ_n A_n}{k_n h_0} e^{jk_n z} \\ H_{\rho n} &= \frac{k_n M_n}{j2\pi D_n h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) e^{jk_n z} \\ E_{\theta n} &= \frac{M_n}{2\pi h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) e^{jk_n z} \\ E_{\rho n} &= \frac{M_n}{2\pi h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) e^{jk_n z} + \frac{A_n}{h_0} e^{jk_n z} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Поле верхней среды будет определяться общими равенствами (29). Входящие в наши формулы (29) и (38) постоянные  $M$ ,  $N$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $M_n$  и  $A_n$  найдутся из граничных условий на поверхности раздела ( $z = 0$ ) наших двух сред:<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} H_{\theta} &= H_{\theta n} \\ H_{\rho} &= H_{\rho n} \\ E_{\theta} &= E_{\theta n} \\ E_{\rho} &= E_{\rho n} \end{aligned} \right\} \text{при } z = 0.$$

Подставляя сюда значения составляющих поля из (29) и (38) найдем ряд тождеств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{jk h_0 2\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) \cdot [-M + N] + \frac{Q}{j k h_0} [-A + B] &= \\ &= \frac{jQ_n M_n}{2\pi k_n h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) + \frac{jQ_n A_n}{k_n h_0} \\ \frac{jk}{2\pi D h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) [-M + N] &= \frac{k_n M_n}{j2\pi D_n h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) \\ \frac{1}{2\pi h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) [M + N] &= \frac{M_n}{2\pi h_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) \\ \frac{1}{2\pi h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) [M + N] + \frac{A + B}{h_0} &= \frac{M_n}{2\pi h_0} \operatorname{Im} \left( \frac{\theta_1'}{\theta_1} - \frac{\theta_0'}{\theta_0} \right) + \frac{A_n}{h_0} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

которые должны удовлетворяться при любых значениях  $\rho$  и  $\theta$ .

<sup>1)</sup> Нагрузка в этом случае не должна равняться волновому сопротивлению.

<sup>2)</sup> Строгое обоснование этих формул см. в статье автора: Сб. № 13.

<sup>3)</sup> Условия на поверхности проводов и на бесконечности удовлетворяются при любых постоянных.

$$(-M + N) \frac{Q}{k} = -\frac{Q_n}{k_n} M_n$$

$$(-A + B) \frac{Q}{k} = -\frac{Q_n}{k_n} A_n$$

$$M + N = M_n$$

$$A + B = A_n$$

решая эти уравнения относительно  $M$ ,  $N$ ,  $A$  и  $B$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{M_n}{2} \left( 1 + \frac{kQ_n}{k_n Q} \right); & N &= \frac{M_n}{2} \left( 1 - \frac{kQ_n}{k_n Q} \right) \\ A &= \frac{A_n}{2} \left( 1 + \frac{kQ_n}{k_n Q} \right); & B &= \frac{A_n}{2} \left( 1 - \frac{kQ_n}{k_n Q} \right). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Постоянные  $M_n$  и  $A_n$ , как и следовало ожидать, остались неопределенными, так как они зависят от источника энергии. Подставляя полученные значения (40) в равенства (29) и (38), будем иметь окончательные выражения для поля в верхней и нижней средах. Однако, мы не будем выписывать этих формул и остановимся несколько подробнее только на выражениях для тока, текущего в верхних частях проводов. Для этого напишем равенства (33) и (33а), заменив в них постоянные  $M$ ,  $N$ ,  $A$  и  $B$  при помощи (40)

$$\left. \begin{aligned} I_{z=1} &= \frac{jcQ}{2k} \left( A_n - \frac{M_n}{2} \right) \left[ \frac{kQ_n}{k_n Q} \cos kz + j \sin kz \right] \\ I_{z=2} &= -\frac{jcQ}{2k} \left( A_n + \frac{M_n}{2} \right) \left[ \frac{kQ_n}{k_n Q} \cos kz + j \sin kz \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$Q_n$  и  $k_n$  находятся по формулам (7а) и (12), параметры, входящие в них, относятся в этом случае к нижней среде.

Анализируя полученные формулы (41), можно сделать следующие выводы.

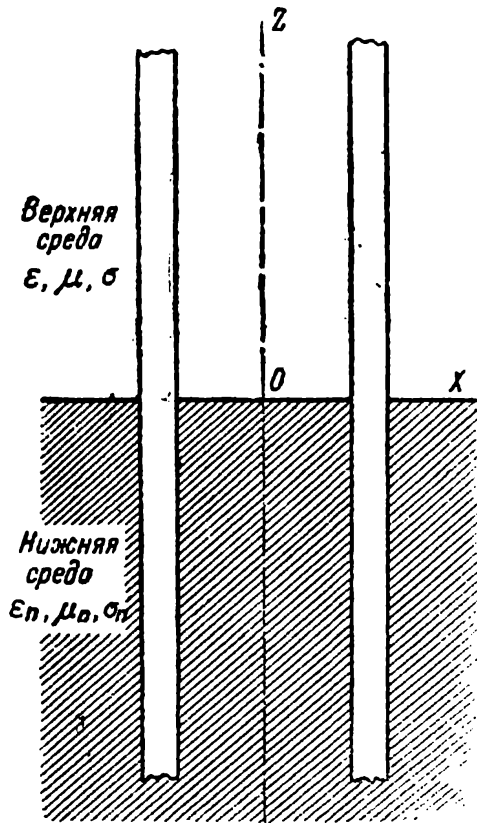
В верхней части проводов имеется смешанная волна, причем кривые распределения тока в обоих проводах подобны и никаких скосов нет. Наличие однотоковой волны сказывается только на различности масштабов кривых. Этот результат чрезвычайно важен, так как дает возможность обобщить полученные нами результаты (ос. kit.) по строгому обоснованию метода измерения электрических параметров различных сред,<sup>1)</sup> на случай двухпроводных линий с однотоковой волной.

### Линия с нагрузкой на конце

Применить нашу теорию непосредственно к линиям с нагрузкой мы не в состоянии, что было отмечено выше, поэтому нам придется пойти несколько окольным путем. Влияние нагрузочного сопротивления на электрические процессы в линии однозначно определяется комплексным коэффициентом отражения. Если же в линии имеются двухтактные и однотоковые волны, то таких коэффициентов отражения должно быть два, ибо очевидно, что условия отражения от заданной нагрузки для обоих типов волн будут различны. Так, например, для линии, нагруженной сопротивлением, равным волновому (для двухтактной), коэффициенты отражения будут соответственно

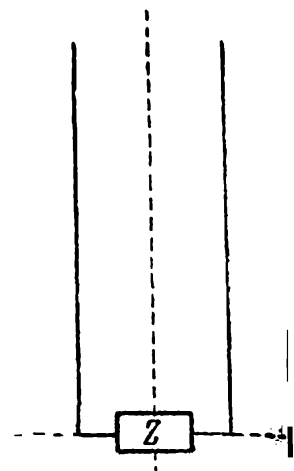
<sup>1)</sup> Метод этот предложен проф. Татариновым.

равны нулю и единице. Исходя из этих соображений, попытаемся заменить полубесконечную линию с нагрузкой на конце (фиг. 6) бесконечной линией, у которой нижняя часть окружена другой средой (фиг. 5). Параметры этой среды должны быть выбраны так, чтобы ее влияние на верхнюю часть проводов было эквивалентно



Фиг. 5

в электрическом отношении, влиянию нагрузки на полубесконечную линию. Такая замена возможна только в том случае, если в линии имеется волна одного типа, тогда остается только подобрать нижнюю среду с коэффициентом отражения, равным коэффициенту отражения от сопротивления нагрузки. Так как нас интересует общий случай, когда в линии (фиг. 6) имеются волны обоих типов то при переходе к эквивалентной схеме (фиг. 5) будем рассматривать две различных нижних среды, из которых одна эквивалентна нагрузке для однократной волны, а другая для двухкратной. Согласно этому нужно определять поля однократных и двухкратных волн в отдельности, пользуясь при этом различными эквивалентными нижними средами. Обозначая все величины, относящиеся к этим двум эквивалентным средам буквами  $n_1$  и  $n_2$ , получим на основании предыдущего формулы для тока в линии с нагрузкой:



Фиг. 6

$$\begin{aligned}
 I_{p=p_1} &= \frac{jcQ}{2k} \left\{ \frac{Q}{k} \left( A \frac{Q_{n_2}}{k_{n_2}} - \frac{M}{2} \frac{Q_{n_1}}{k_{n_1}} \right) \cos kz + j \left( A - \frac{M}{2} \right) \sin kz \right\} \\
 I_{p=p_2} &= -\frac{jcQ}{2k} \left\{ \frac{Q}{k} \left( A \frac{Q_{n_2}}{k_{n_2}} + \frac{M}{2} \frac{Q_{n_1}}{k_{n_1}} \right) \cos kz + j \left( A + \frac{M}{2} \right) \sin kz \right\}
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

$A$  и  $M$  постоянные, зависящие от генератора, возбуждающего линию. Из формул (42) следует, что кривые распределения тока в проводах сдвинуты одна относительно другой и максимумы их не равны по величине.

Для численных расчетов по формулам, куда входят тэта функции, следует пользоваться рядами (26), в которых, ввиду их быстрой сходимости, можно ограничиться одним — двумя членами.



Электросвязь, 1938, №4, стр.61-71.

## ТЕОРИЯ ФИДЕРОВ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЭКРАНАМИ

### Содержание

В статье дана общая теория двухпроводного и однопроводного фидера, помещенных в прямоугольный экран.

При условии бесконечной проводимости фидера и экрана выведены общие формулы для определения электромагнитного поля внутри экрана, токов и зарядов. И, наконец, что является самым важным для практики, получены расчетные формулы волновых сопротивлений как для двухпроводного, так и однопроводного фидера с прямоугольным экраном.

### Общая теория

При рассмотрении различных вопросов, связанных с длинными линиями, обычно пользуются так называемыми телеграфными уравнениями. Эти уравнения дают возможность с достаточной для практики точностью найти распределение токов, зарядов и напряжений в линии, совершенно не интересуясь при этом расчетом электромагнитного поля, окружающего линию.

Однако было бы неверно думать, что телеграфные уравнения совершенно не связаны с полем.

В действительности они очень тесно связаны с ним при помощи параметров линии  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_1$ , ибо последние определяются в основном распределением электромагнитного поля.

Таким образом для того чтобы написать телеграфные уравнения, необходимо прежде всего рассчитать электромагнитное поле.

Из сказанного очевидно, что использование телеграфных уравнений имеет смысл только в тех случаях, когда заранее известны параметры  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_1$  (т. е. известно поле).

Поэтому для нашей задачи изучения фидеров, помещенных в прямоугольный экран, естественнее всего исходить из уравнений Максвелла, определяющих электромагнитное поле.

Условимся в дальнейшем считать проводимость экрана и самих линий бесконечной. Это даст нам возможность положить составляющие векторов поля, параллельные осям проводов, равными нулю. Введем декартову систему координат с осью  $z$ , параллельной проводам.

Основные уравнения Максвелла в этом случае, учитывая гармоническую зависимость от времени, напишутся так:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } k_1 E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z} & \text{d) } k_2 H_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \text{b) } k_1 E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} & \text{e) } k_2 H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \text{c) } \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 & \text{f) } \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

при этом  $E_z = H_z = 0$ .

Постоянные  $k_1$  и  $k_2$ , входящие в уравнения (1), очень просто связаны с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и удельной проводимостью  $\sigma$

$$k_1 = \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c}; \quad k_2 = -j \frac{\omega\mu}{c},$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.} \quad (1')$$

Займемся интегрированием системы (1).

Уравнение (1f) удовлетворим, введя функцию  $\varphi$ , играющую роль скалярного потенциала:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \quad (2)$$

При этом равенства (1d) и (1e) будут служить для определения магнитного поля через потенциал:

$$k_2 H_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}; \quad k_2 H_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}. \quad (3)$$

Оставшиеся три уравнения (1a, 1b, 1c) используем для определения потенциала  $\varphi$ . Подставляя в них значение  $E$  и  $H$  из формул (2) и (3), найдем:

$$\left. \begin{aligned} k^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial z^2} &= 0, \\ k^2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial y \partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2 \partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

где

$$k^2 = k_1 k_2. \quad (1'')$$

Три уравнения (4a) будут удовлетворены, если  $\varphi$  подчинить следующим двум равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

Решая первое из них, напишем общий интеграл его в виде:

$$\varphi = \varphi_1(x, y) e^{jkz} + \varphi_2(x, y) e^{-jkz}, \quad (5)$$

здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — произвольные пока функции, которые мы определим, исходя из второго уравнения (4b).

Действительно, подставив туда  $\varphi$  из (5), найдем, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются гармоническими функциями  $x, y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для однозначного решения уравнений (6) следует задать еще граничные условия для функций  $\varphi_1, \varphi_2$  на поверхности проводников, а также на бесконечности, если пространство, для которого определяются искомые функции, простирается на бесконечность.

Эти условия получаются непосредственно из рассмотрения известных из электродинамики требований о непрерывности тангенциальных составляющих векторов поля на границе раздела двух сред.

В нашем случае ввиду бесконечной проводимости экрана и фидера и, следовательно, наличия поверхностных токов условия на поверхности проводников напишутся так:

$$E_z = 0, \quad (7a)$$

$$H_z = \frac{4\pi i}{c}, \quad (7b)$$

$E_\tau$  и  $H_\tau$  — тангенциальные составляющие напряженностей поля, а  $i$  — плотность поверхностного тока. Уравнение (7b), очевидно, можно рассматривать как определяющее ток  $i$ , равенство же (7a) эквивалентно следующему [см. формулы (2)]:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \text{ на поверхности проводников}$$

( $\tau$  — направление касательной к проводникам, лежащей в плоскости  $z = \text{const}$ ).

Из написанного следует, что  $\varphi = \text{const}$  на поверхностях проводников при заданном  $z$  и, значит, на основании формулы (5):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \text{const} \\ \varphi_2 &= \text{const} \end{aligned} \right\} \text{ на поверхности проводников.} \quad (8)$$

Уравнения (6) и условия (8) полностью определяют функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Следует отметить, что изложенное справедливо для любых систем параллельных проводников при бесконечной проводимости последних.

### Двухпроводный фидер с прямоугольным экраном

Применим полученные в предыдущем разделе результаты к изучению двухпроводного экранированного фидера. Для этого введем следующие обозначения:  $r$  — радиус проводов,  $d$  — расстояние между осями проводов,  $a$  и  $b$  — размеры внутреннего сечения экрана.

Наружные размеры нас не интересуют, так как экран — бесконечно проводящий (рис. 1).

Для определения электромагнитного поля внутри экрана следует на основании вышеизложенной теории найти две гармонические внутри экрана функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , принимающие на поверхностях проводников и на внутренней поверхности экрана постоянные значения.

К сожалению, строгое решение этой задачи чрезвычайно сложно, так как оно сводится к конформному преобразованию трехсвязной области.

Поэтому для упрощения задачи мы при нахождении функций  $\varphi_1$   $\varphi_2$  заменим реальные провода линейными проводами, совпадающими с осями реальных проводов. При этом  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определятся как гармонические внутри экрана функции, имеющие на осях проводов логарифмические особенности<sup>1</sup> и обращающиеся на внутренней поверхности экрана в нуль<sup>2</sup>.

Такие функции легко построить, воспользовавшись известной из математической физики функцией Грина для прямоугольника.

Действительно, функция Грина определяется как гармоническая внутри прямоугольника функция, имеющая там единственную особенность типа  $-\frac{1}{2\pi} \ln r$  [ $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ] в точке  $(\xi, \eta)$  и обращающаяся в нуль на контуре.

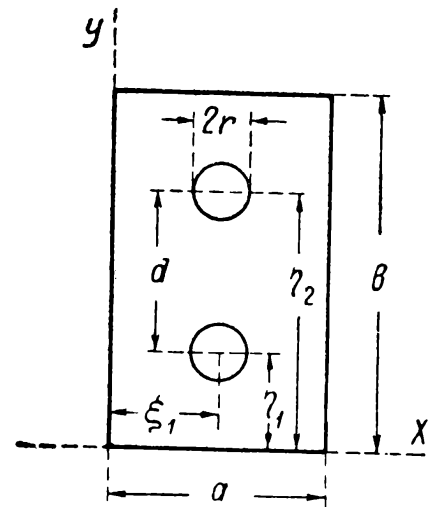


Рис. 1

<sup>1</sup> Настоящее утверждение вытекает из рассмотрения теоремы Гаусса, которая в нашем случае имеет вид:

$$-\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \frac{4\pi Q}{\epsilon}.$$

Здесь слева стоит интеграл, взятый по контуру, охватывающему линейный проводник,  $n$  — направление внешней нормали к контуру интегрирования и  $Q$  — линейная плотность заряда на проводнике.

Так как это равенство остается справедливым при сколь угодно малом контуре, охватывающем линейный проводник, то, как легко сообразить, функция  $\varphi$  должна иметь на оси проводника особенность типа  $-\frac{2Q}{\epsilon} \ln r$ .

<sup>2</sup> Последнее условие ничуть не уменьшает общности задачи.

В математике доказывается (см. Курант и Гильберт, «Методы математической физики», изд. 2, стр. 364), что функция Грина равна

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi \eta}{b}}{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}}. \quad (9)$$

С другой стороны, искомые функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют такого же типа особенности и так же обращаются в нуль на контуре экрана.

Поэтому они могут быть выражены при помощи суперпозиций двух функций Грина:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= A_1 G(x, y; \xi_1, \eta_1) + A_2 G(x, y; \xi_2, \eta_2), \\ \varphi_2(x, y) &= B_1 G(x, y; \xi_1, \eta_1) + B_2 G(x, y; \xi_2, \eta_2), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где первая из них  $G(x, y; \xi_1, \eta_1)$  имеет особенность в точке  $(\xi_1, \eta_1)$ , совпадающей с осью первого провода, а вторая  $G(x, y; \xi_2, \eta_2)$  в точке  $(\xi_2, \eta_2)$ , совпадающей с осью второго провода.

Определенные, таким образом, функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  мы используем для нахождения электромагнитного поля внутри экрана. Очевидно, в виду конечности радиусов проводов условия (8) для  $\varphi_1, \varphi_2$  будут выполнены только приближенно, так как последние построены для линейных (бесконечно тонких) проводов. Однако если радиус проводов мал по сравнению с расстоянием между ними и размерами экрана, то погрешность при этом будет незначительна. Формулы (10) дают возможность при помощи равенств (5), (3) и (2) определить электромагнитное поле внутри экрана. Поле же внутри проводов и в самой толще экрана, очевидно, равно нулю вследствие бесконечной проводимости последних.

Введем для сокращения записи обозначения:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= G(x, y; \xi_1, \eta_1); \\ G_2 &= G(x, y; \xi_2, \eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (A_1 G_1 + A_2 G_2) e^{jkz} + (B_1 G_1 + B_2 G_2) e^{-jkz}, \\ E_x &= - \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) e^{jkz} - \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) e^{-jkz}, \\ E_y &= - \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) e^{jkz} - \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) e^{-jkz}, \\ H_x &= \frac{jk}{k_2} \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) e^{jkz} - \frac{jk}{k_2} \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) e^{-jkz}, \\ H_y &= - \frac{jk}{k_2} \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) e^{jkz} + \frac{jk}{k_2} \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) e^{-jkz} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Найдем еще линейную плотность заряда  $Q$  на первом и втором проводе (т. е. заряд, приходящийся на единицу длины провода).

Функция Грина  $G_1$  имеет на оси первого провода особенность вида  $-\frac{1}{2\pi} \ln r_1$ .

Точно такую же особенность имеет функция  $G_2$  на оси второго провода.

Следовательно (см. формулу 12), потенциал  $\varphi$  имеет на оси первого провода особенность вида:

$$-\frac{A_1}{2\pi} e^{jkz} \ln r_1 - \frac{B_1}{2\pi} e^{-jkz} \ln r_1,$$

а на оси второго провода ( $r_1$  и  $r_2$  отсчитываются соответственно от осей первого и второго провода):

$$-\frac{A_2}{2\pi} e^{jkz} \ln r_2 - \frac{B_2}{2\pi} e^{-jkz} \ln r_2.$$

С другой стороны (см. примечание 1 на стр. 63), потенциал  $\varphi$  должен иметь на осях проводов особенности типа:

$$-\frac{2Q_1}{\varepsilon} \ln r_1$$

и

$$-\frac{2Q_2}{\varepsilon} \ln r_2.$$

Из сравнения четырех вышенаписанных выражений сразу получаем:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varepsilon A_1}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon B_1}{4\pi} e^{-jkz}, \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon A_2}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon B_2}{4\pi} e^{-jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Для нахождения токов  $I_1$  и  $I_2$ , текущих по проводам, используем известный закон «сохранения электричества»:

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Здесь  $j$  — вектор плотности тока, а  $\rho$  — объемная плотность заряда.

В применении к нашему случаю его можно переписать так:<sup>3</sup>

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = -j\omega Q$$

или

$$I = j\omega \int Q dz.$$

Подставляя сюда выражение для  $Q$  из формул (14) и производя интегрирование, найдем:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\omega \varepsilon A_1}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\varepsilon \omega B_1}{4\pi k} e^{-jkz} \\ I_2 &= \frac{\varepsilon \omega A_2}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\varepsilon \omega B_2}{4\pi k} e^{-jkz} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Пользуясь формулой (7 б), можно также определить распределение токов и зарядов на внутренней поверхности экрана, но мы на этом не будем останавливаться.

Постоянные  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , входящие во все наши предыдущие формулы, зависят от граничных условий на обоих концах линии, или, другими словами, от оконечных устройств, включенных в линию. Обычно мы привыкли в теории линий иметь дело с двумя постоянными. Наличие в нашем случае четырех постоянных объясняется общностью постановки задачи, учитывающей как несимметрию самой линии, так и несимметрию оконечных устройств.

В дальнейшем мы убедимся, что в случае строго симметричной системы число постоянных, подлежащих определению, сведется к двум, а в случае чисто бегущей волны к одному.

### Бегущие волны в фидере

Ограничимся рассмотрением чисто бегущих волн в фидере. Прежде всего выберем у корня  $k = \sqrt{k_1 k_2}$  [см. формулу (1'')] тот знак, при котором  $\operatorname{Re}(jk) > 0$ , тогда для получения чисто бегущей волны, движущейся в сторону отрицательных  $z$ , сле-

<sup>3</sup> При этом учтено, что за положительное направление тока  $I$  взято направление отрицательной оси  $z$ .

дует положить в формулах (12), (13), (14) и (15)  $B_1 = B_2 = 0$ , после чего получим **113**

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (A_1 G_1 + A_2 G_2) e^{jkz}, \\ Q_1 &= \frac{\varepsilon A_1}{4\pi} e^{jkz}, \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon A_2}{4\pi} e^{jkz}, \\ I_1 &= \frac{\varepsilon \omega A_1}{4\pi k} e^{jkz}, \\ I_2 &= \frac{\varepsilon \omega A_2}{4\pi k} e^{jkz}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

формул для  $E$  и  $H$  мы не будем выписывать.

Из равенств (16) непосредственно видно, что в фидере имеются двухтактные и одноктактные волны, т. е. система несимметрична. Вводя две новые постоянные  $A'$  и  $A''$  при помощи равенств:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A' + A'', \\ A_2 &= A' - A'', \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

сделаем наличие одноктактной и двухтактной волны явным

$$\varphi = A'(G_1 + G_2)e^{jkz} + A''(G_1 - G_2)e^{jkz}, \quad (18a)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varepsilon A'}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon A''}{4\pi} e^{jkz}, \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon A'}{4\pi} e^{jkz} - \frac{\varepsilon A''}{4\pi} e^{jkz}, \\ I_1 &= \frac{\varepsilon \omega A'}{4\pi k} e^{jkz} + \frac{\varepsilon \omega A''}{4\pi k} e^{jkz}, \\ I_2 &= \frac{\varepsilon \omega A'}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\varepsilon \omega A''}{4\pi k} e^{jkz} \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

Первые члены формул (18b) относятся к одноктактной волне, а вторые к двухтактной. Определим еще напряжение между проводами  $U_{12}$ , оно, очевидно, равно разности потенциалов двухтактной волны:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

или, пользуясь равенством (18a):

$$\begin{aligned} U_{12} &= [A'(G_1^{(1)} + G_2^{(1)}) + A''(G_1^{(1)} - G_2^{(1)})] e^{jkz} - [A'(G_1^{(2)} + G_2^{(2)}) + \\ &\quad + A''(G_1^{(2)} - G_2^{(2)})] e^{jkz}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $G_1^{(1)}$ ,  $G_2^{(1)}$  есть значение функций Грина  $G_1$ ,  $G_2$  на поверхности первого провода, а  $G_1^{(2)}$ ,  $G_2^{(2)}$  на поверхности второго.

Из формулы (19), между прочим, следует, что в общем случае несимметричной системы, несмотря на отсутствие двухтактной волны напряжения, возможно наличие обеих волн тока, и наоборот.

Действительно, отсутствие двухтактной волны напряжения равносильно равенству:

$$U_{12} = 0,$$

но это равенство может существовать при  $A' \neq 0$  и  $A'' \neq 0$  [см. формулу (19)], откуда на основании формул (18b) следует справедливость вышесказанного.

В случае симметрии самого экранированного фидера формула для напряжения (19) может быть значительно упрощена. Для этого используем вытекающие из определения функции Грина (в случае симметрии фидера) равенства:

$$G_1^{(1)} = G_2^{(2)}, \quad G_1^{(2)} = G_2^{(1)}$$

$$U_{12} = 2A'' (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}) e^{jkz}. \quad (19a)$$

Так как в фидере имеет место чисто бегущая волна, то волновое сопротивление для двухтактной волны равно:

$$\rho = i_1 \frac{U_{12}}{(\partial v_{yx})} = \frac{2A'' (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}) e^{jkz}}{\frac{\varepsilon \omega A''}{4\pi k} e^{jkz}},$$

сокращая найдем:

$$\rho = \frac{8\pi k}{\varepsilon \omega} (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}). \quad (20)$$

Если среда, заполняющая пространство между экраном и проводниками, имеет  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = \mu = 1$ , то в практических единицах формула для  $\rho$  напишется так:

$$\rho = 240\pi (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}) \Omega. \quad (20a)$$

### Численные расчеты функции Грина и расчетная формула для волнового сопротивления

Для того чтобы практически пользоваться всеми выведенными ранее формулами, необходимо уметь вычислять функцию Грина  $G$  при различных значениях аргументов. Формула (9), выражающая функцию  $G$  в виде двойного ряда, мало подходит для этой цели из-за сравнительно медленной сходимости последнего. Более удобным для наших целей является известное представление функции Грина через  $\sigma$  — функции Вейерштрасса<sup>4</sup>, построенные для периодов, равных  $\omega_1 = 2a$ ,  $\omega_2 = j2b$ :

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sigma(\omega - \psi) \sigma(\omega + \psi)}{\sigma(\omega - \bar{\psi}) \sigma(\omega + \bar{\psi})} \right|, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \omega &= x + jy, \\ \psi &= \xi + j\eta, \\ \bar{\psi} &= \xi - j\eta. \end{aligned}$$

Вычисление  $\sigma$  — функций, входящих в правую часть (21), проще всего провести, используя известную из теории эллиптических функций формулу<sup>5</sup>:

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\wp_1'(0)} e^{\eta_0 \frac{u^2}{\omega_1}} \wp_1(v); \quad \left[ \omega_1 = 2a, v = \frac{u}{\omega_1}, \eta_0 = \zeta \left( \frac{\omega_1}{2} \right) \right]. \quad (22)$$

Функция  $\wp$ , фигурирующая в равенстве (22), имеет очень быстро сходящийся ряд Фурье, его мы и используем для наших расчетов:

$$\begin{aligned} \wp_1(v) &= 2h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - + \dots \\ &\left( h = e^{j\pi\tau}, \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = j \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Так как величины  $b$  и  $a$  определяют размеры внутреннего сечения экрана (рис. 1) и отношение их  $|\tau|$  не меньше единицы<sup>6</sup>, то  $h$  не больше 0,05 (в случае двухпроводного экранированного фидера  $h \approx 0,0025$ ).

Малая величина  $h$  дает возможность при вычислении ряда (23) ограничиться первым членом ряда:

$$\wp_1(v) \approx 2h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v. \quad (23a)$$

<sup>4</sup> Курант и Гильберт, Методы математической физики, изд. 2. стр. 362.

<sup>5</sup> А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, стр. 259.

<sup>6</sup>  $|\tau| = 1$  — для однопроводного экранированного фидера (рис. 2).

После этих замечаний перейдем к выводу расчетной формулы для функции Грина  $G$ . 115

Введем сокращающую запись обозначение выражения, стоящего под знаком модуля в формуле (21):

$$f = \frac{\sigma(\omega - \psi)\sigma(\omega + \psi)}{\sigma(\omega - \bar{\psi})\sigma(\omega + \bar{\psi})}. \quad (24)$$

Подставляя в (24) вместо  $\sigma$  — функций их значение из (22), найдем:

$$f = \frac{e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(\omega - \psi)^2} e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(\omega + \psi)^2}}{e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(\omega - \bar{\psi})^2} e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(\omega + \bar{\psi})^2}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\omega - \psi}{\omega_1}\right) \cdot \vartheta_1\left(\frac{\omega + \psi}{\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\omega - \bar{\psi}}{\omega_1}\right) \cdot \vartheta_1\left(\frac{\omega + \bar{\psi}}{\omega_1}\right)}$$

или [см. формулу (23a)]:

$$f = e^{j8 \frac{\eta_0}{\omega_1} \xi \eta} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{\omega_1}(\omega - \psi) \cdot \sin \frac{\pi}{\omega_1}(\omega + \psi)}{\sin \frac{\pi}{\omega_1}(\omega - \bar{\psi}) \cdot \sin \frac{\pi}{\omega_1}(\omega + \bar{\psi})}. \quad (25)$$

В дальнейшем нам придется применять формулу (25) только для случая, когда абсциссы точки наблюдения  $\omega$  и источника  $\psi$  равны между собой, т. е.

$$x = \xi,$$

при этом получим:

$$f = e^{j8 \frac{\eta_0}{\omega_1} \xi \eta} \cdot \frac{1 - j \operatorname{tg} 2 \frac{\pi}{\omega_1} \xi \cdot \operatorname{ctg} h \frac{\pi}{\omega_1} (y + \eta)}{1 - j \operatorname{tg} 2 \frac{\pi}{\omega_1} \xi \cdot \operatorname{ctg} h \frac{\pi}{\omega_1} (y - \eta)}. \quad (25a)$$

Переходя к модулю функции  $f$ , заметим, что ввиду вещественности величин  $\omega_1$ ,  $h$ ,  $\eta_0$  также вещественна (см. А. Гурвиц, стр. 277, формула (5), причем в обозначениях Гурвица индекс нуль у  $\eta_0$  опущен) и, следовательно:

$$|f| = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{\omega_1} \xi + \operatorname{ctg} h^2 \frac{\pi}{\omega_1} (y + \eta)}{\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{\omega_1} \xi + \operatorname{ctg} h^2 \frac{\pi}{\omega_1} (y - \eta)}}. \quad (26)$$

Отсюда получим расчетную формулу для функции Грина:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{\omega_1} \xi + \operatorname{ctg} h^2 \frac{\pi}{\omega_1} (y + \eta)}{\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{\omega_1} \xi + \operatorname{ctg} h^2 \frac{\pi}{\omega_1} (y - \eta)}}, \quad (27)$$

при  $x = \xi$ .

Применим полученный результат к расчету волнового сопротивления [формула (20a)]. Для этого необходимо подсчитать значение функции  $G_1$  (т. е. функции Грина, у которой источник находится в точке с координатами  $\xi = \xi_1$ ;  $\eta = \eta_1$ ) в двух местах:

1) на поверхности первого провода, например, в точке с координатами  $x = \xi_1$ ,  $y = \eta_1 + r$ ;

2) на поверхности второго провода или на оси его ( $x = \xi_1$ ,  $y = \eta_1 + d$ ), что практически одно и то же, так как  $r \ll d + \eta_1$ .

Пользуясь формулой (27), найдем:

$$G_1^{(1)} = G(\xi_1, \eta_1 + r; \xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} (2\eta_1 + r)}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r} \quad (28a)$$



$$G_1^{(2)} = G(\xi_1, \eta_1 + d; \xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} b}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} d}, \quad (28b)$$

при этом учтено (рис. 1), что:

$$\omega_1 = 2a, \xi_1 = \frac{a}{2}, 2\eta_1 + d = b.$$

Равенства (28a), (28b) дают возможность написать окончательную расчетную формулу для волнового сопротивления симметричного двухпроводного фидера, помещенного в прямоугольный экран:

$$\rho = 120 \ln \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} (2\eta_1 + r) \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} d}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} b} \Omega, \quad (29)$$

или так как  $r \ll 2\eta_1$ :

$$\rho = 120 \ln \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} 2\eta_1 \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} d}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} b} \Omega. \quad (30)$$

Значение входящих в формулу параметров  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $d$  и  $\eta_1$  очевидно на рис. 1, причем независимыми являются только первые четыре, так как:

$$\eta_1 = \frac{b - d}{2}.$$

Для проверки правильности выведенной формулы (30) попробуем получить из нее путем перехода к пределу известную формулу волнового сопротивления двухпроводного неэкранированного фидера.

Будем стремиться в равенстве (30)  $a$  и  $b$  к бесконечности, не меняя значений  $r$  и  $d$ . Пользуясь разложением, для гиперболического тангенса:

$$\operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots$$

легко найти, что:

$$\lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} (b - d)}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} b} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} d}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r} = \frac{d}{r},$$

откуда непосредственно видно, что в случае бесконечного увеличения размеров экрана формула (30) переходит в:

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r} \Omega,$$

чем лишний раз подтверждается правильность формулы (30).

Проведем для примера расчет волнового сопротивления по формуле (30). Так как при нормальной работе фидера напряжение между проводами вдвое больше напряжения между проводом и экраном, то наиболее рациональными размерами фидерного устройства будут те, при которых:

$$b = 2a = 2d,$$

формула (30) при этом условии переписывается:

$$\rho = 120 \ln \frac{\operatorname{tgh}^2 \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tgh} \pi \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r}. \quad (31)$$

$$\rho \approx 282\Omega.$$

Для удобства пользования формулой (31) дадим краткую таблицу гиперболических тангенсов.

$x$	$\operatorname{tgh} x$	$x$	$\operatorname{tgh} x$
0,00	0,0000	0,16	0,1586
0,01	0,0100	17	1684
02	0200	18	1781
03	0300	19	1877
04	0400	20	1974
05	0500	21	2070
06	0599	22	2165
07	0699	23	2260
08	0798	24	2355
09	0898	25	2449
10	0997	26	2543
11	1096	27	2636
12	1194	28	2729
13	1293	29	2821
14	1391	30	2913
15	1489	31	3004

$$\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2} = 0,9170,$$

$$\operatorname{tgh} \pi = 0,9962.$$

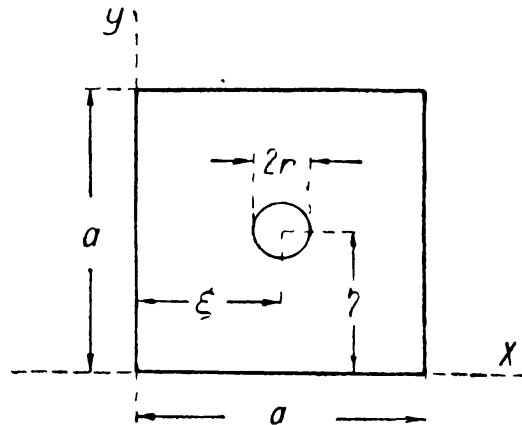


Рис. 2

### Однопроводный фидер в прямоугольном экране

Предыдущая теория может быть без всяких изменений распространена на случай однопроводного фидера, помещенного в прямоугольный (точнее квадратный) экран (рис. 2). При этом электромагнитное поле внутри экрана определяется теми же формулами (2), (3). Однако потенциальная функция  $\varphi$ , входящая в эти формулы, должна быть несколько изменена.

Действительно, в случае однопроводного фидера потенциальная функция  $\varphi$  имеет внутри экрана только одну логарифмическую особенность на оси единственного провода. В остальном эта функция подчинена тем же условиям, что и прежде, и потому имеет вид:

$$\varphi = G(x, y; \xi, \eta) [Ae^{jkz} + Be^{-jkz}], \quad (32)$$

здесь  $A$  и  $B$  — постоянные, а  $\xi$  и  $\eta$  — координаты оси провода.

Линейная плотность заряда и ток, текущий по проводу, определяются и в этом случае равенствами, аналогичными формулами (14), (15):

$$Q = \frac{\varepsilon A}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon B}{4\pi} e^{-jkz},$$

$$I = \frac{\omega \varepsilon A}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\varepsilon \omega B}{4\pi k} e^{-jkz}, \quad (33)$$

Напряжение  $U_{10}$  между проводом и экраном, очевидно, равно значению потенциальной функции  $\varphi$  на поверхности провода, например, в точке с координатами  $x = \xi$ ,  $y = \eta + r$  (рис. 2):

$$U_{10} = G(\xi, \eta + r; \xi, \eta) [Ae^{jkz} + Be^{-jkz}]. \quad (34)$$

Ограничившись, как и в случае двухпроводного фидера, чисто бегущей волной, получим:

$$U_{10} = G(\xi, \eta + r; \xi, \eta) Ae^{jkz},$$

$$I = \frac{\omega \varepsilon}{4\pi k} Ae^{jkz}, \quad (35)$$

И, наконец, волновое сопротивление однопроводного экранированного фидера найдется из формулы: 118

$$\rho = \frac{U_{10}}{I} = \frac{4\pi k}{\epsilon\omega} G,$$

или в практических единицах для воздуха:

$$\rho = 120 \pi G \Omega.$$

Для численных расчетов функции  $G$  используем формулу (28а), помня, что  $\xi = \frac{a}{2}$ :

$$G = G(\xi, \eta + r; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} (2\eta + r)}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r}.$$

Если учесть, что в нашем случае (рис. 2)  $a = b$ ,  $\eta = \xi = \frac{a}{2}$  и  $r \ll 2\eta$ , то получим окончательную расчетную формулу для волнового сопротивления однопроводного экранированного фидера:

$$\rho = 60 \ln \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2a} r} \Omega. \quad (36)$$

---

## О ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Я. Н. Фельд

В настоящей статье дано общее доказательство теоремы единственности решений уравнений Максвелла для гармонических вынужденных колебаний в случае поглощающих сред.

### 1. Введение

Из электродинамики хорошо известно,<sup>1)</sup> что уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 &= \frac{4\pi\sigma}{c} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^{\text{стр}}) + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} \end{aligned}$$

при определенных начальных и граничных условиях допускают одно единственное решение. В написанных уравнениях векторы  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  обозначают напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{E}_0^{\text{стр}}$  — напряженность сторонних электродвижущих сил, а  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $c$  — соответственно удельную проводимость, диэлектрическую постоянную, магнитную проницаемость и электродинамическую постоянную. Однако в случае вынужденных гармонических колебаний указанная теорема почти ничего не дает,<sup>2)</sup> так как при этом из уравнений Максвелла время исключается, и о начальных условиях не приходится говорить. Насколько нам известно, для этого случая теорема „единственности“ в общем виде не доказана, и ее обычно доказывают для каждой данной частной задачи.<sup>3)</sup>

Уравнения Максвелла для гармонических колебаний, когда зависимость от времени взята в форме:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} e^{j\omega t}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H} e^{j\omega t}, \quad \mathbf{E}_0^{\text{стр}} = \mathbf{E}^{\text{стр}} e^{j\omega t} \quad (1)$$

( $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$  — комплексные векторы, не зависящие от времени), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}^{\text{стр}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

к ним следует прибавить еще условия, характеризующие поведение векторов

<sup>1)</sup> Там м, Основы теории электричества, т. II, стр. 211.

<sup>2)</sup> Франк и Мизе т, Дифференциальные интегральные уравнения математической физики, статья Зоммерфельда, стр. 811.

<sup>3)</sup> Введенский, Основы теории распространения радиоволн, стр. 97.

поля на поверхностях разрыва непрерывности, каковыми являются, например, границы раздела двух сред:<sup>4)</sup>

$$E_{ta} = E_{ti}, \quad H_{ta} = H_{ti}. \quad (3)$$

Здесь  $E_{ta}$ ,  $H_{ta}$  и  $E_{ti}$ ,  $H_{ti}$  — тангенциальные составляющие напряженностей поля, взятые на разных сторонах поверхности раздела.

Прежде чем заняться формулировкой и доказательством теоремы „единственности“ для вынужденных гармонических колебаний, докажем вспомогательную лемму.

## 2. Доказательство леммы

Пусть бесконечное пространство, для которого ищется решение уравнений Максвелла, состоит из нескольких, вообще говоря неоднородных, сред. Для определенности мы будем говорить о двух средах: внешней  $V$ , простирающейся на бесконечность, и внутренней конечной<sup>5)</sup> среде  $V_0$  (рис. 1). Электрические параметры каждой из сред в общем случае являются заданными непрерывными функциями координат.

Покажем, что единственным, регулярным в каждой из сред, решением уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4)$$

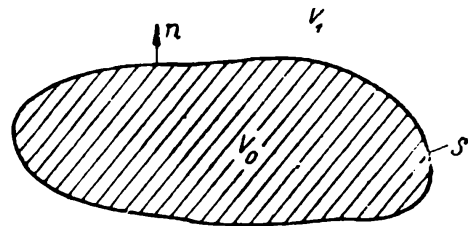


Рис. 1.

при следующих двух условиях:

I) Тангенциальные составляющие  $E_t$  и  $H_t$  непрерывны на границе раздела двух сред. II) На бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rH = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} rE = 0,$$

является

$$H = E = 0.$$

Для доказательства мы используем теорему о комплексном векторе Пойнтинга:<sup>6)</sup>

$$-\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*] = \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* + 2j\omega \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H} \mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \right). \quad (5)$$

$A^*$  обозначает величину, комплексно-сопряженную с  $A$ .

Эта теорема легко получается из уравнений (4), если первое из них написать в комплексно-сопряженной форме и умножить скалярно на  $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E}$ , а второе просто умножить на  $-\frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^*$  и результаты сложить.

Проведем в пространстве три замкнутых поверхности  $S_1, S_2, S_3$ , так, как это показано на рис. 2, и проинтегрируем равенство (5) по объему  $V_1$ ,

<sup>4)</sup> К уравнениям (2) и (3) обычно добавляются еще два уравнения и два условия, определяющие поведение нормальных составляющих векторов поля на поверхности раздела; однако мы их не выписываем, так как они получаются как следствие уравнений (2) и (3). Это между прочим подтвердится тем, что мы проведем доказательство теоремы „единственности“ без их учета.

<sup>5)</sup> Доказательство не изменится, если обе среды считать бесконечными.

<sup>6)</sup> См. А б р а г а м - Б е к к е р, Теория электричества, стр. 201.

ограниченному поверхностью  $S_1$ , и по объему  $V_2$ , ограниченному двумя поверхностями  $S_2, S_3$ .

$$-\int_{(V_1)} \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] dV = \int_{(V_1)} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_{(V_1)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* \right) dV,$$

$$-\int_{(V_2)} \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] dV = \int_{(V_2)} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_{(V_2)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* \right) dV.$$

Применяя к левым частям написанных выражений теорему Гаусса, что мы, очевидно, в праве сделать, найдем

$$\left. \begin{aligned} -\frac{c}{4\pi} \int_{(S_1)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n dS &= \int_{(V_1)} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_{(V_1)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* \right) dV, \\ -\frac{c}{4\pi} \int_{(S_2)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n dS - \frac{c}{4\pi} \int_{(S_3)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n dS &= \int_{(V_2)} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV + \\ &+ 2j\omega \int_{(V_2)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* \right) dV; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

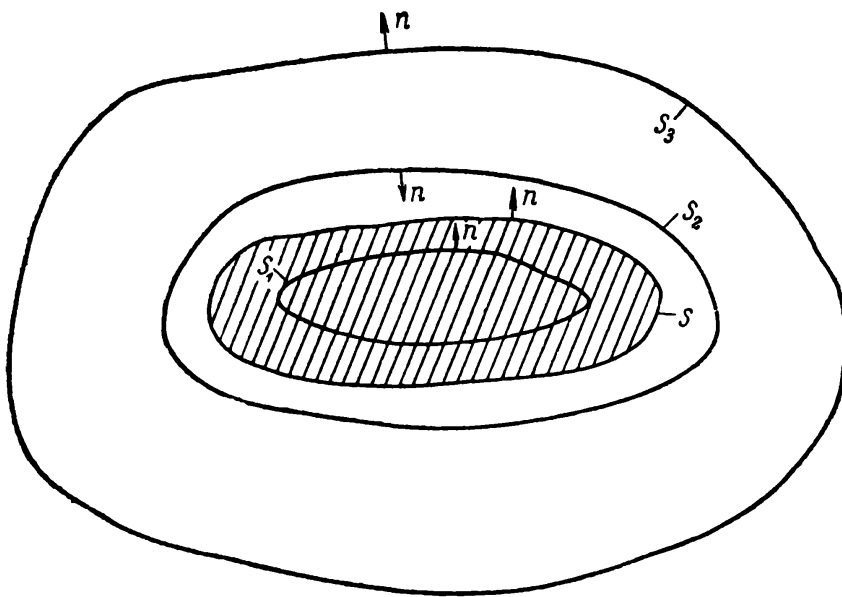


Рис. 2.

$n$  — обозначает наружную нормаль к соответствующей поверхности интегрирования (рис. 2).

Перейдем в уравнениях (6) к пределу, стремя поверхности  $S_1$  и  $S_2$  к совпадению с границей раздела  $S$  наших двух сред, а поверхность  $S_3$  к бесконечности. Тогда, учитывая условие II, определяющее поведение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на бесконечности, заметим, что интеграл по поверхности  $S_3$  в пределе обратится в

нуль, и равенства (6) напишутся так:

$$-\frac{c}{4\pi} \int_{(S)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n dS = \int_{(V_0)} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_{(V_1)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* \right) dV, \quad (6a)$$

$$\frac{c}{4\pi} \int_{(S)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n dS = \int_{(V)} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_{(V)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* \right) dV.$$

Изменение знака в левой части последней формулы обусловлено тем, что направления нормалей к поверхностям  $S$  и  $S_2$  прямо противоположны (рис. 2). При интегрировании по поверхности  $S$  в первом равенстве (6a) под  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}^*$  подразумеваются пределы этих величин при стремлении к поверхности  $S$  изнутри, а во втором равенстве снаружи.

Наконец, складывая эти два уравнения, помня при этом, что танген-

циальные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  непрерывны на границе раздела  $S$  (условие 1), получим <sup>7)</sup>

$$\int_{(V_0+V)} \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_{(V_0+V)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H} \mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \right) dV = 0. \quad (7)$$

Так как оба интеграла, входящие в написанное равенство, вещественны, то они порознь равны нулю:

$$\int_{(V_0+V)} \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* dV = 0, \quad (8)$$

$$\int_{(V_0+V)} \left( \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H} \mathbf{H}^* - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \right) dV = 0. \quad (9)$$

Подинтегральное выражение в первом интеграле во всем пространстве неотрицательно; отсюда следует, что оно тождественно равно нулю:

$$\sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* = 0.$$

Если считать  $\sigma$  неравным нулю, то немедленно получим:

$$\mathbf{E} = 0. \quad (10a)$$

Переписывая формулу (9) с учетом (10a)

$$\int_{(V_0+V)} \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H} \mathbf{H}^* dV = 0,$$

найдем из нее аналогично предыдущему:

$$\mathbf{H} = 0. \quad (10b)$$

Равенства (10a) и (10b) доказывают нашу лемму. Очевидно предыдущее доказательство не годится, если  $\sigma = 0$ . Следует также отметить, что уравнения (4) могут иметь отличные от нуля решения, удовлетворяющие обоим условиям I и II, если  $\omega$  — комплексное число.

Физически этот случай соответствует свободным, затухающим во времени колебаниям. Не трудно сообразить, как следует видоизменить условия леммы при рассмотрении решений уравнений (4) для конечной части пространства. Условие II, определяющее поведение векторов поля на бесконечности, должно быть заменено условием на поверхности, ограничивающей рассматриваемую конечную часть пространства. Очевидно, достаточно потребовать, чтобы тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) обращалась в нуль на граничной поверхности, и доказательство леммы в остальном останется без изменений.

### 3. Теорема „единственности“

Пусть дано произвольное бесконечное пространство, в котором задано распределение сторонних электродвижущих сил (или источников, как их естественно называть), гармонически изменяющихся во времени. Эти источники могут быть распределены непрерывно или сосредоточены в отдельных точках. <sup>8)</sup> Однако все они должны находиться на конечном расстоянии, т. е. заданная функция координат  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ , представляющая меру интенсивности источников, должна на бесконечности достаточно быстро стремиться к нулю.

<sup>7)</sup> Нужно помнить, что при интегрировании по различным средам  $V_0$  и  $V$ , параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  являются различными функциями координат, хотя понятно можно считать, что каждый параметр определен во всем пространстве одной разрывной функцией координат.

<sup>8)</sup> В последнем случае решение имеет в точках нахождения источников заданную особенность.

После этих замечаний можно формулировать теорему „единственности“ вынужденных электромагнитных процессов следующим образом.

Существует только одно единственное решение, удовлетворяющее во всем пространстве уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi\mathcal{J}}{c} \mathbf{E}^{\text{стр}}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H}, \quad (11)$$

имеющее на границе двух сред непрерывные тангенциальные составляющие векторов поля и ведущее себя на бесконечности так, чтобы выполнялись равенства: <sup>9)</sup>

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{E} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{H} = 0. \quad (12)$$

Доказательство этой теоремы проведем, как обычно, от обратного.

Предположим, что существуют два различных решения, удовлетворяющие всем требованиям теоремы:  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ .

Тогда разность их

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$$

удовлетворяет во всем пространстве уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + j \frac{\omega\epsilon}{c} \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H},$$

имеет непрерывные тангенциальные составляющие на границе двух различных сред и на бесконечности удовлетворяет условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{E} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{H} = 0,$$

из чего следует, на основании доказанной леммы, что эти разности тождественно равны нулю:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 = 0,$$

и теорема „единственности“ доказана.

В заключение остановимся несколько подробнее на выяснении физического смысла условий на бесконечности (12).

В нашем случае поглощающей среды ( $\sigma \neq 0$ ) выполнение этого условия означает отсутствие волн, идущих из бесконечности, и поэтому физически невозможных при размещении всех источников на конечном расстоянии. Действительно, для того, чтобы волна, идущая из бесконечности, достигла конечных <sup>10)</sup> областей пространства (в случае  $\sigma \neq 0$ ), она необходимо должна иметь на бесконечности бесконечную амплитуду, что противоречит условию (12).

Для решений же, составленных из волн, излучаемых источниками, находящимися на конечном расстоянии, условие (12) всегда выполнено, так как для этих волн фазовый множитель имеет отрицательную вещественную часть (ибо  $\sigma \neq 0$ ), и следовательно, решение, составленное из них, убывает на бесконечности по экспоненциальному закону.

Ленинград  
Л. Э. И. С.

Поступило в Редакцию  
28 ноября 1937 г.

<sup>9)</sup> Условие (12) должно быть заменено другим, если теорема доказывается для пространства, лежащего на конечном расстоянии, а именно: в этом случае следует задать значение тангенциальной составляющей  $\mathbf{H}$  (или  $\mathbf{E}$ ) на поверхности, ограничивающей рассматриваемое пространство.

<sup>10)</sup> Т. е. находящихся на конечном расстоянии.



## КОНДЕНСАТОР КАК СИСТЕМА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Я. Н. Фельд

В статье рассматривается конденсатор, размеры которого соизмеримы с длиной волны. При помощи вариационного принципа, аналогичного принципу Гамильтона в механике, выведены дифференциальные уравнения, определяющие распределение тока и напряжения по поверхности пластин конденсатора.

Исходя из полученных уравнений, дан закон распределения тока и напряжения в круглом конденсаторе при гармоническом возбуждении, а также найдена формула для сопротивления конденсатора, учитывающая неравномерность распределения напряжения на нем.

### 1. Введение

В настоящее время в связи с большим развитием техники ультракоротких и дециметровых волн, проникающих во все области, начиная от радиотехники и кончая медициной, естественно начать пересмотр наших представлений об основных деталях радиотехнических и иных схем. Такой основной деталью бесспорно является конденсатор. Он обычно рассматривается как система, обладающая сосредоточенной емкостью, причем потенциал во всех точках пластины считается одним и тем же. Это верно только до тех пор, пока размеры конденсатора несоизмеримо малы по сравнению с длиной волны. На УКВ и, особенно, на дециметровых волнах размеры конденсаторов становятся соизмеримыми с длиной волны и в некоторых случаях на пластине может уложиться значительная доля волны. Пренебрежение неравномерностью распределения потенциала на пластинах при этом может повлечь за собой значительные ошибки. Особенно это относится к измерениям, при которых приходится помещать различные объекты между пластинами конденсатора<sup>1)</sup>. На основании сказанного желательно было бы более детально изучить конденсатор и найти законы распределения тока и напряжения в нем. Естественнее всего начать это исследование с определения электромагнитного поля конденсатора при помощи интегрирования уравнений Максвелла. Однако такая простая с точки зрения физики постановка задачи приводит к почти неразрешимым в настоящий момент математическим трудностям. Поэтому мы в настоящей работе применим несколько иной метод, а именно: мы попытаемся получить дифференциальные уравнения для распределения тока и напряжения в круглом конденсаторе, аналогичные телеграфным уравнениям длинных линий, причем эти уравнения должны также относиться к строгой теории, как обычные телеграфные уравнения относятся к уравнениям Максвелла.

Было бы заманчиво построить такие квазителеграфные уравнения для определения распределения тока и напряжения в любых плоских провод-

<sup>1)</sup> Татаринов, Ж. Э. Т. Ф. 6, вып. 10, 1936.

никах произвольной формы, в которых происходят электрические колебания<sup>2)</sup>. Однако выполнение этой задачи в общем случае приводит к тем же математическим трудностям, о которых мы говорили выше. Действительно, искомые уравнения должны быть связаны с электромагнитным полем колеблющихся пластин при помощи входящих в уравнения коэффициентов, эквивалентных погонным емкостям, самоиндукциям и сопротивлениям, фигурирующим в обычных телеграфных уравнениях и зависящих, в основном, от картины электромагнитного поля. Расчет этих коэффициентов сводится, таким образом, к нахождению электромагнитного поля, т. е. к решению уравнений Максвелла со всеми вытекающими отсюда трудностями. И только в случае круглого конденсатора, возбуждаемого при помощи фидера, подключенного к центру пластин, возможно определить нужные нам коэффициенты, не прибегая к решению уравнений Максвелла, так как в виду симметрии нам заранее известно направление магнитных линий и тока в пластинах.

## 2. Уравнения для тока и напряжения круглого симметрично-возбуждаемого конденсатора без потерь

Рассмотрим круглый конденсатор, радиус пластин которого равен  $a$ , а расстояние между ними  $h$  (рис. 1). Пусть он возбуждается током, подводимым к центру пластин линейными проводниками так, как это показано на рис. 1. Для вывода искомых дифференциальных уравнений, определяю-

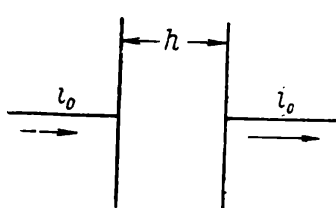


Рис. 1.

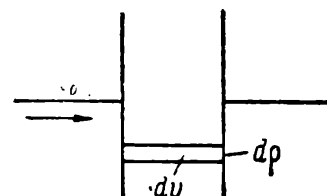
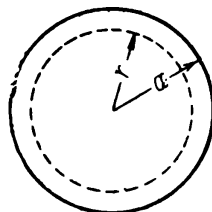


Рис. 2.

щих распределение тока и напряжения в конденсаторе, введем прежде всего понятие о самоиндукции и емкости, отнесенных к единице площади пластин. Ток, подводимый линейным проводом к центру пластины, растекается в виде тока проводимости симметрично во все стороны по радиальным направлениям. Затем в виде тока смещения попадает через диэлектрик между пластинами на вторую обкладку и уже в виде тока проводимости подтекает к центру второй пластины и отводится вторым линейным проводником. Обозначим ток смещения, проходящий через площадь круга радиуса  $r$ , мысленно проведенного между пластинами с центром, лежащим на оси, соединяющей центры пластин, буквой  $i$ , а напряжение между двумя точками, лежащими на разных пластинах друг против друга, буквой  $u$ . Очевидно ток  $i$  и напряжение  $u$  будут функциями одного только  $r$  и времени  $t$ . Силовые линии магнитного поля, находящегося между пластинами, будут иметь вид концентрических (с пластинами) кругов, и на основании известных формул напряженность магнитного поля  $H$  определится так<sup>3)</sup>:

$$H = 0,2 i/r. \quad (1)$$

<sup>2)</sup> Аналогичную мысль высказал Л. Д. Гольдштейн для определения распределения напряжений в противовесах.

<sup>3)</sup> Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться практической системой единиц.

Найдем энергию  $dT$  магнитного поля, заключенного в прямом цилиндре с основаниями  $dS$ , лежащими на пластинах конденсатора на расстоянии  $r$  от центра (рис. 2). Из теории электромагнитного поля известно, что

$$dT = \frac{\mu H^2}{8\pi \cdot 10^7} dv, \quad dv = hdS. \quad (2)$$

С другой стороны ясно, что магнитные силовые линии, проходящие через рассматриваемый цилиндр объема  $dv$ , сцеплены с током смещения  $i(r, t)$ , поэтому естественно считать энергию  $dT$  пропорциональной квадрату этого тока. Коэффициент пропорциональности, который, вообще говоря, зависит от  $r$ —расстояния цилиндрика от центра, мы возьмем в форме  $L(r)dS/2$ .

Величину  $L(r)$  будем в дальнейшем называть коэффициентом самоиндукции конденсатора, отнесенным к единице площади пластин,

На основании сказанного напишем:

$$dT = \frac{L(r)i^2}{2} dS,$$

откуда, сравнивая с формулой (2)

$$\frac{\mu H^2}{8\pi \cdot 10^7} dv = \frac{L(r)i^2}{2} dS,$$

найдем [используя выражение (1)]

$$L(r) = \frac{\mu h}{10^9 \pi} \frac{1}{r^2},$$

или вводя сокращающее запись обозначение

$$L(r) = \frac{L'}{r^2}, \quad L' = \frac{\mu h}{10^9 \pi}. \quad (3)$$

Полная энергия магнитного поля, заключенного в конденсаторе, определится интегралом

$$T = \int_S \frac{L(r)i^2}{2} dS = \int_0^a \frac{L'i^2}{r} \pi dr. \quad (4)$$

Аналогично может быть выражена энергия  $V$  электрического поля конденсатора:

$$V = \int_S \frac{Cu^2}{2} dS = \int_0^a Cu^2 \pi r dr. \quad (5)$$

Здесь  $C$  означает емкость конденсатора, отнесенную к единице площади пластин и равную

$$C = \frac{\epsilon}{4\pi h \cdot 9 \cdot 10^{11}}. \quad (6)$$

Если ограничиться случаем конденсатора без потерь, то полученных выражений (4), (5) вполне достаточно для вывода уравнений, определяющих распределение тока и напряжения в конденсаторе. Действительно, трактуя (как это делается со времен Максвелла) энергию магнитного поля  $T$ —как кинетическую, а энергию электрического поля  $V$ —как потенциальную, можно определить при помощи их функцию Лагранжа

$$L = T - V. \quad (7)$$

После этого, для решения нашей задачи остается только использовать вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

который учитывая равенства (7), (5) и (4), перепишем в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left[ \frac{L' i^2}{r} \pi - C u^2 r \pi \right] dr dt = 0. \quad (8)$$

Нужно, однако, помнить, что при варьировании функции  $i(r, t)$  и  $u(r, t)$  нельзя рассматривать как независимые, так как между ними существует связь. Для определения этой связи подсчитаем ток смещения, проходящий через площадь кольца концентрического с пластинами и мысленно проведенного между ними (см. рис. 3). Пусть внутренний радиус кольца равен  $r$ , а наружный  $r + dr$ , тогда искомый ток равен:

$$\left( i + \frac{\partial i}{\partial r} dr \right) - i.$$

С другой стороны легко сообразить, что этот ток можно выразить через напряжение  $u$ , между двумя точками, лежащими на пластинах против мысленно проведенного кольца, при помощи выражения

$$\frac{\partial u}{\partial t} C dS,$$

где  $dS$  площадь кольца, равная  $2\pi r dr$ . Приравнявая друг другу две вышенаписанные величины найдем искомое уравнение, связывающее ток и напряжение

$$\frac{\partial i}{\partial r} = 2\pi r C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9)$$

Итак, нашей задачей является определение функций  $i$  и  $u$ , доставляющих стационарное значение интегралу, стоящему под знаком  $\delta$  в равенстве (8), при условии, что эти функции удовлетворяют соотношению (9) и вариации их на контуре прямоугольника  $0 \leq r \leq a$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  обращаются в нуль.

Производя варьирование в формулах (8) и (9), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left[ \frac{L' \pi}{r} 2i \delta i - C \pi r 2u \delta u \right] dr dt = 0 \quad (10a)$$

и

$$\frac{\partial \delta i}{\partial r} - 2\pi r C \frac{\partial \delta u}{\partial t} = 0. \quad (10б)$$

Умножим (10б) на пока неопределенный множитель Лагранжа  $\lambda(r, t)$  и прибавим к подинтегральному выражению (10а)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left[ \left( \frac{L' \pi}{r} 2i \delta i - C \pi r 2u \delta u \right) + \lambda \left( \frac{\partial \delta i}{\partial r} - 2\pi r C \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right) \right] dr dt = 0. \quad (11)$$

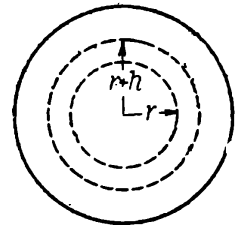


Рис. 3.

Для преобразования равенства (11) используем следующие, получаемые в результате интегрирования по частям равенства

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \lambda \frac{\partial \delta i}{\partial r} dr dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| \lambda \delta i \right|_0^a dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \frac{\partial \lambda}{\partial r} \delta i dr dt, \quad (12)$$

$$\int_{t_2}^{t_1} \int_0^a 2\pi Cr \lambda \frac{\partial \delta u}{\partial t} dr dt = \int_0^a \left| 2\pi Cr \lambda \delta u \right|_{t_1}^{t_2} dr - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a 2\pi Cr \frac{\partial \lambda}{\partial t} \delta u dr dt.$$

Однократные интегралы, входящие сюда, равны нулю, так как вариации  $\delta i$  и  $\delta u$  по условию обращаются в нуль на контуре прямоугольника  $0 \leq r \leq a$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . После подстановки в (11) найдем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left[ \left( \frac{\pi L'}{r} 2i - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \delta i + \left( 2\pi Cr \frac{\partial \lambda}{\partial t} - 2\pi Cru \right) \delta u \right] dr dt = 0.$$

Отсюда, подбирая  $\lambda$  так, чтоб удовлетворялось равенство

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - u = 0, \quad (13)$$

получаем немедленно уравнение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{2\pi L'}{r} i = 0, \quad (14)$$

которое вместе с (9) и (13) полностью определяют ток и напряжение.

Действительно, исключая из (9) и (14) вспомогательный множитель  $\lambda$  при помощи (13), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial r} &= 2\pi Cr \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{2\pi L'}{r} \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Это и есть искомые уравнения, определяющие распределение тока и напряжения в круглом симметрично возбуждаемом конденсаторе без потерь.

### 3. Вынужденные колебания конденсатора

Рассмотрим установившийся режим в конденсаторе, возбуждаемом чистым синусоидальным током с угловой частотой  $\omega$ . Будем искать решение уравнений (15) в форме

$$\begin{aligned} i &= \dot{i} e^{j\omega t} \\ u &= \dot{u} e^{j\omega t}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\dot{u}$  и  $\dot{i}$  с точками наверху означают комплексные амплитуды напряжения и тока, от времени уже не зависящие. Подставив решения (16) в (15), получим уравнения для комплексных амплитуд тока и напряжения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{i}}{dr} &= j\omega 2\pi Cr \dot{u} \\ \frac{d\dot{u}}{dr} &= j\omega \frac{2\pi L'}{r} \dot{i} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Так как в этом разделе речь будет идти только о комплексных амплитудах тока и напряжения, то мы (без боязни спутать) в дальнейшем будем опускать точки над  $u$  и  $i$ .

Приступим к интегрированию уравнений (17); исключая из них сначала  $u$ , а затем  $i$ , получим уравнения для тока и напряжения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 i}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{di}{dr} + k^2 i &= 0, \\ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + k^2 u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь введено сокращающее запись обозначение

$$k^2 = 4\pi^2 \omega^2 CL'. \quad (19)$$

Правую часть этого равенства можно представить в несколько ином, более привычном, виде, если воспользоваться формулами (3) и (6)

$$k^2 = (\omega/v)^2 = (2\pi/\lambda)^2 \quad (19a)$$

где  $v = 3 \cdot 10^{10} / \sqrt{\epsilon\mu}$  — скорость электромагнитной волны в среде с постоянными  $\epsilon$  и  $\mu$ , а  $\lambda$  — длина волны <sup>4)</sup> в этой же среде.

Общий интеграл второго из уравнений (18), как известно, может быть выражен через сумму функций Ганкеля нулевого порядка, соответственно умноженных на произвольные постоянные  $A$  и  $B$

$$u = AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr). \quad (20)$$

Ток  $i$  проще всего найти, подставив (20) во второе уравнение (17), после чего найдем, учтя формулу (19)

$$i = -j\sqrt{\frac{C}{L'}} r [AH_0^{(1)'}(kr) + BH_0^{(2)'}(kr)]. \quad (21)$$

Для определения постоянных  $A$  и  $B$ , используем граничные условия для тока, имеющие вид

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow a} i &= i_0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$i_0$  — полный ток, подводимый к конденсатору. Первое из этих условий очевидно, второе же постараемся обосновать. Из определения тока  $i(r, t)$  следует:

$$i(r, t) = \int_{(S)} C \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} dS,$$

интегрирование происходит по площади круга  $S$  радиуса  $r$ . Используя операционное равенство  $\partial/\partial t = j\omega$ , перейдем к пределу в предыдущем выражении

$$\lim_{r \rightarrow 0} i = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{(S)} j\omega C u dS.$$

Из формулы (20) видно что при  $r \rightarrow 0$   $u$  стремится в худшем случае логарифмически к бесконечности <sup>5)</sup>, в то время, как площадь круга  $S$  стре-

<sup>4)</sup> Не путать с множителем Лагранжа.

<sup>5)</sup> Это следует из того, что функции Ганкеля имеют в начале координат логарифмическую особенность.

мится к нулю как  $r^2$  и следовательно интеграл в пределе обращается в нуль, что и требовалось доказать.

Возвращаясь к определению постоянных  $A$  и  $B$ , подставим в (22) выражение для тока из (21)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow a} \left\{ -j \sqrt{\frac{C}{L}} r [AH_0^{(1)'}(kr) + BH_0^{(2)'}(kr)] \right\} &= i_0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -j \sqrt{\frac{C}{L}} r [AH_0^{(1)'}(kr) + BH_0^{(2)'}(kr)] \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для перехода к пределу в последнем уравнении используем ряды, определяющие функции Ганкеля вблизи начала координат<sup>6)</sup>

$$\begin{aligned} j \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\rho) &= -J_0(\rho) \ln \left( \frac{\gamma \rho}{2j} \right) + \dots \\ j \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\rho) &= +J_0(\rho) \ln \left( \frac{j \gamma \rho}{2} \right) + \dots \\ \gamma &= 1,7811 \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь не выписаны члены, регулярные в начале координат.

Тогда равенства (23) перейдут в

$$\begin{aligned} -j \sqrt{\frac{C}{L}} a [AH_0^{(1)'}(ka) + BH_0^{(2)'}(ka)] &= i_0, \\ -A + B &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно  $A$  и  $B$ , найдем

$$A = B = \frac{j i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} i_0}{a [H_0^{(1)'}(ka) + H_0^{(2)'}(ka)]}, \quad (25)$$

или, используя известные из теории цилиндрических функций соотношения

$$2J_0(\rho) = H_0^{(1)}(\rho) + H_0^{(2)}(\rho)$$

и

$$J_1(\rho) = -J_0'(\rho), \quad (26)$$

где  $J_0(\rho)$  и  $J_1(\rho)$  — функции Бесселя нулевого и первого порядка, напомним формулу (25) в более кратком виде

$$A = B = \frac{-j \sqrt{\frac{L}{C}} i_0}{2a J_1(ka)}. \quad (25)$$

Подставив в формулы (20) и (21) значения постоянных  $A$  и  $B$  из (25а), найдем, учтя соотношения (26), окончательные формулы для комплексных амплитуд напряжения и тока

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{\frac{L}{C}} i_0}{ja J_1(ka)} J_0(kr), \\ i &= \frac{i_0 r}{a J_1(ka)} J_1(kr). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

<sup>6)</sup> Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики ч. II, стр. 867.

Равенства (27) дают возможность определить комплексное сопротивление конденсатора  $Z$ , отнесенное к месту включения питания, т. е. к началу координат

$$Z = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u}{i_0} = -j \sqrt{\frac{L'}{C}} \frac{1}{aJ_1(ka)}. \quad (28)$$

Покажем, что сопротивление конденсатора, данное формулой (28), при достаточно малых значениях  $ka$  как угодно мало отличается от известного выражения для сопротивления конденсатора  $1/j\omega\pi a^2 C$ .

Для этого, используя ряд

$$J_1(\rho) = \frac{\rho}{2} \left[ 1 - \frac{(\rho/2)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\rho/2)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(\rho/2)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right],$$

получим для  $Z$  следующее выражение

$$Z = -j \sqrt{\frac{L'}{C}} \frac{2}{ka^2} \left[ 1 + \frac{(ka)^2}{8} + \dots \right],$$

или [см. формулу (19)]

$$Z = \frac{1}{j\omega\pi a^2 C} \left[ 1 + \frac{(ka)^2}{8} + \dots \right], \quad (28a)$$

что и доказывает наше предложение. Дадим небольшую сводную таблицу расчетов сопротивлений круглого конденсатора, проделанных по строгой формуле (28). Для сравнения в табл. 1 также даны величины сопротивлений просчитанных по обычной формуле. Если задан не ток  $i_0$ , подводимый к конденсатору, а напряжение  $u_0$  (т. е.  $u$  при  $r=0$ ), то формулу (27) удобнее писать так

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 J_0(kr) \\ i &= j \sqrt{\frac{C}{L'}} u_0 r J_1(kr) \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

Определим еще узловые окружности напряжения.

Обозначив радиусы их буквами  $r_n$ , а нули функций Бесселя нулевого порядка буквами  $x_n$ , получим очевидные равенства

$$r_n = x_n/k \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

Таблица 1

см	$a$ см	$\lambda$ см	$Z = -j \sqrt{\frac{L'}{C}} \frac{1}{aJ_1(ka)}$	$Z = -j \frac{1}{\omega\pi a^2 C}$
20	50	100	$-j 84,2$	$-j 15,3$
10	20	100	$-j 58,8$	$-j 47,7$
5	10	100	$-j 100,3$	$-j 95,5$
3	5	100	$-j 232,2$	$-j 229,3$

Из таблиц функций Бесселя найдем:

$$x_1 = 2,4048, \quad x_2 = 5,5201, \quad x_3 = 8,6537 \text{ и т. д.,}$$



после чего, учтя формулу (19а), получим радиусы первых трех узловых окружностей напряжения

$$r_1 = 2,4048 \lambda/2\pi, \quad r_2 = 5,5201 \lambda/2\pi, \quad r_3 = 8,6537 \lambda/2\pi.$$

Интересно также определить радиусы окружностей, на которых напряжение имеет пучность, а также значение модуля напряжения на них.

Обозначив радиусы этих окружностей буквами  $r_n'$ , а значение аргументов, при которых функция Бесселя  $J_0(x)$  принимает экстремальные значения, буквами  $x_n'$ , получим

$$r_n' = x_n'/k = x_n'\lambda/2\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

Из таблиц найдем для первых трех окружностей данные, сведенные в табл. 2.

Таблица 2

	$x_n'$	$u/u_0$
1	3,8317	0,4028
2	7,0156	0,3001
3	10,1735	0,2497

Таким образом радиусы окружностей, на которых напряжение имеет пучность или узел, определяются исключительно длиной волны.

Основное отличие картины распределения напряжения и тока в конденсаторе от распределения напряжения и тока в длинной линии заключается, как вытекает из формул (27а), в следующем:

В линии распределение напряжения и тока задается с конца, а в конденсаторе — от места включения питания, т. е. в нашем случае от центра пластины. Действительно, напряжение на краю конденсатора может иметь и узел и пучность в зависимости от размеров пластин, в то время как на конце открытой линии напряжение всегда имеет пучность. И наоборот, в начале линии напряжение может принимать любые значения, в зависимости от длины ее, в то время как в точке возбуждения конденсатора напряжение имеет всегда наибольшее значение.

Из соотношений (26) видно, что на тех окружностях, где напряжение имеет пучность, ток имеет узел. Следует отметить, что при учете конечной проводимости пластин, напряжение  $u$  в точке питания ( $r = 0$ ) обращается в бесконечность. Поэтому в этом случае нельзя ограничиться рассмотрением точечного возбуждения пластин при помощи линейных проводников, а следует учесть конечность диаметра последних. Только при этом условии возможно получить формулу для сопротивления конденсатора, которое, вообще говоря, будет зависеть от диаметра подводных проводов. Обобщение изложенной теории на случай конденсатора с потерями мы рассмотрим в следующей статье.

Ленинград.  
ЛЭТИС

Поступило в Редакцию  
20 апреля 1938 г.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЛИНИЯХ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЭКРАНАМИ

Я. Н. Фельд

В статье дана общая теория несимметричных двухпроводных и однопроводных линий, помещенных в прямоугольный экран. При условии бесконечной проводимости линии и экрана выведены общие формулы для определения электромагнитного поля внутри экрана, токов и зарядов. И наконец, что является самым важным для практики, получены расчетные формулы канонических волновых сопротивлений для двухпроводных и однопроводных линий с прямоугольными экранами.

### 1. Общая теория

При рассмотрении различных вопросов, связанных с длинными линиями, обычно пользуются так называемыми телеграфными уравнениями. Эти уравнения дают возможность, с достаточной для практики точностью, найти распределение токов, зарядов и напряжений в линии, совершенно не интересуясь при этом расчетом электромагнитного поля, окружающего линию.

Однако было бы неверно думать, что телеграфные уравнения совершенно не связаны с полем. В действительности они очень тесно связаны с ним при помощи параметров линии  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , ибо последние определяются в основном распределением электромагнитного поля. Таким образом для того чтобы написать телеграфные уравнения, необходимо прежде всего рассчитать электромагнитное поле. Из сказанного очевидно, что использование телеграфных уравнений имеет смысл только в тех случаях, когда заранее известны параметры  $L$ ,  $C$  и  $R$  (т. е. известно поле). Поэтому для нашей задачи изучения линий, помещенных в прямоугольный экран, естественнее всего исходить из уравнений Максвелла, определяющих электромагнитное поле. Условимся в дальнейшем считать проводимость экрана и самих линий бесконечной. Это даст нам возможность положить составляющие векторов поля, параллельные осям проводов, равными нулю. Введем декартову систему координат с осью  $z$ , параллельной проводам. Основные уравнения Максвелла в этом случае, учитывая гармоническую зависимость от времени, напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} k_1 E_x &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}, & (a) & & k_2 H_x &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}, & (d) \\ k_1 E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z}, & (b) & & k_2 H_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z}, & (e) \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0, & (c) & & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0. & (f) \end{aligned} \right\} (1)$$

При этом положено:

$$E_z = H_z = 0.$$

Постоянные  $k_1$  и  $k_2$ , входящие в уравнения (1), очень просто связаны с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и удельной проводимостью  $\sigma$ , среды, находящейся между проводами и экраном:

$$k_1 = \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{c}, \quad k_2 = -j\omega \frac{\mu}{c}, \quad (1')$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

Займемся интегрированием системы (1). Уравнению (1f) удовлетворим, введя функцию  $\varphi$ , играющую роль скалярного потенциала:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2)$$

При этом равенства (1d) и (1e) будут служить для определения магнитного поля через потенциал

$$k_2 H_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad k_2 H_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}. \quad (3)$$

Оставшиеся три уравнения (1a), (1b), (1c) используем для определения потенциала  $\varphi$ . Подставляя в них значение  $E$  и  $H$  из формул (2) и (3), найдем:

$$\left. \begin{aligned} k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z^2} &= 0, \\ k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial y^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

где

$$k^2 = k_1 \cdot k_2. \quad (4a')$$

Три уравнения (4a) будут удовлетворены, если  $\varphi$  подчинить следующим двум равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

Решая первое из них, напишем общий интеграл его в виде

$$\varphi = \varphi_1(x, y) e^{jkz} + \varphi_2(x, y) e^{-jkz}. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — произвольные пока функции от  $x$  и  $y$ , которые мы определим, исходя из второго уравнения (4b). Действительно, подставив туда  $\varphi$  из (5), найдем, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются гармоническими функциями  $x$ ,  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для однозначного решения уравнений (6) следует задать еще граничные условия для функций  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  на поверхности проводников<sup>1)</sup>. Эти условия получаются непосредственно из рассмотрения известных из электродинамики требований о непрерывности тангенциальных составляющих векторов поля на границе раздела двух сред.

В нашем случае, в виду бесконечной проводимости экрана и линии и, следовательно, наличия поверхностных токов, условия на поверхности проводников напишутся так:

$$E_\tau = 0, \quad (7)$$

$$H_\tau = \frac{4\pi}{c} i. \quad (8)$$

$E_\tau$  и  $H_\tau$  — тангенциальные составляющие напряженностей поля, а  $i$  — плотность поверхностного тока. Уравнение (8) очевидно можно рассматривать как опре-

<sup>1)</sup> А также на бесконечности, если пространство, для которого определяются искомые функции, простирается на бесконечность.

деляющее ток  $i$ ; равенство же (7) эквивалентно следующему [см. формулы (2)]:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \text{ на поверхности проводников}$$

( $\tau$  — направление касательной к проводникам, лежащей в плоскости  $z = \text{const}$ ).

Из написанного немедленно следует, что  $\varphi = \text{const}$  на поверхностях проводников при заданном  $z$ , и, значит, на основании формулы (5)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \text{const}, \\ \varphi_2 &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \text{ на поверхности проводников.} \quad (9)$$

Уравнения (6) и условия (9) полностью определяют функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Следует отметить, что изложенное справедливо для любых систем параллельных проводников при бесконечной проводимости последних.

## 2. Двухпроводная несимметричная линия с прямоугольным экраном

Применим полученные в предыдущем разделе результаты к изучению несимметричной двухпроводной экранированной линии. Для этого введем следующие обозначения:  $r_1, r_2$  — радиусы проводов,  $d$  — расстояние между осями проводов,  $a, b$  — размеры внутреннего сечения экрана<sup>2)</sup> (рис. 1).

Для определения электромагнитного поля внутри экрана следует на основании вышеизложенной теории найти две гармонические внутри экрана функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , принимающие на поверхностях проводников и на внутренней поверхности экрана постоянные значения. К сожалению, строгое решение этой задачи чрезвычайно сложно, так как оно сводится к конформному преобразованию трехсвязной области. Поэтому для упрощения задачи мы при нахождении функций  $\varphi_1, \varphi_2$  заменим реальные провода линейными проводами, совпадающими с осями реальных проводов. При этом  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определятся как гармонические внутри экрана функции, обращающиеся на внутренней поверхности экрана в нуль<sup>3)</sup> и имеющие на оси проводов логарифмические особенности<sup>4)</sup>.

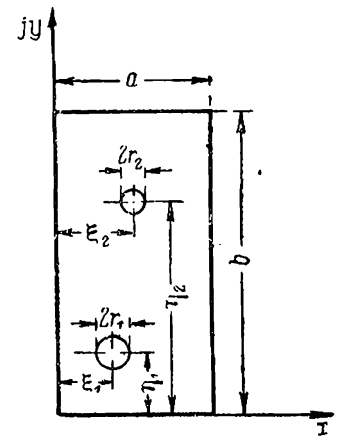


Рис. 1.

Такие функции легко построить, воспользовавшись известной из математической физики функцией Грина для прямоугольника<sup>5)</sup>.

Действительно, функция Грина определяется как гармоническая внутри прямоугольника функция, имеющая там единственную особенность типа

$$-\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2})$$

в точке  $(\xi, \eta)$  и обращающаяся в нуль на контуре.

С другой стороны, искомые функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют такого же типа особенности и также обращаются в нуль на контуре экрана. Поэтому они могут быть выражены при помощи суперпозиций двух функций Грина:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= A_1 G(x, y; \xi_1, \eta_1) + A_2 G(x, y; \xi_2, \eta_2), \\ \varphi_2(x, y) &= B_1 G(x, y; \xi_1, \eta_1) + B_2 G(x, y; \xi_2, \eta_2), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

<sup>2)</sup> Наружные размеры нас не интересуют, так как экран бесконечно-проводящий.

<sup>3)</sup> Последнее условие ничуть не уменьшает общности задачи.

<sup>4)</sup> Настоящее утверждение вытекает из рассмотрения теоремы Гаусса, которая в нашем случае имеет вид:  $-\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \frac{4\pi Q}{\epsilon}$ . Здесь слева стоит интеграл, взятый по контуру, охватывающему линейный проводник,  $n$  — направление внешней нормали к контуру интегрирования и  $Q$  — линейная плотность заряда на проводнике. Так как это равенство остается справедливым при каком угодно малом контуре, охватывающем линейный проводник, то, как легко сообразить, функция  $\varphi$  должна иметь на оси проводника особенность типа  $-\frac{2Q}{\epsilon} \ln r$ .

<sup>5)</sup> Курант и Гильберт. Методы математической физики, изд. 2-е, стр. 364.

где первая из них  $G(x, y; \xi_1, \eta_1)$  имеет особенность в точке  $(\xi_1, \eta_1)$ , совпадающей с осью первого провода, а вторая  $G(x, y; \xi_2, \eta_2)$  — в точке  $(\xi_2, \eta_2)$ , совпадающей с осью второго провода. Определенные таким образом функции  $\varphi_1, \varphi_2$  мы используем для нахождения электромагнитного поля внутри экрана. Очевидно, что в виду конечности радиусов проводов условия (9) для  $\varphi_1, \varphi_2$  будут выполнены только приближенно, так как последние построены для линейных (бесконечно-тонких) проводов. Однако, если радиус проводов мал по сравнению с расстоянием между ними и размерами экрана, то погрешность при этом будет незначительна.

Формулы (10) дают возможность при помощи равенств (5), (3) и (2) определить электромагнитное поле внутри экрана. Поле же внутри проводов и в самой толще экрана, очевидно, равно нулю вследствие бесконечной проводимости последних.

Введем сокращающие запись обозначения:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= G(x, y; \xi_1, \eta_1), \\ G_2 &= G(x, y; \xi_2, \eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (A_1 G_1 + A_2 G_2) e^{jkz} + (B_1 G_1 + B_2 G_2) e^{-jkz} \\ E_x &= - \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) e^{jkz} - \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) e^{-jkz}, \\ E_y &= - \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) e^{jkz} - \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) e^{-jkz}, \\ k_2 H_x &= \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) jke^{jkz} - \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) jke^{-jkz}, \\ k_2 H_y &= - \left( A_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + A_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) jke^{jkz} + \left( B_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) jke^{-jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Найдем еще линейную плотность заряда  $Q$  на первом и втором проводе (т. е. заряд, приходящийся на единицу длины провода):

Функция Грина  $G_1$  имеет на оси первого провода особенность вида

$$-\frac{1}{2\pi} \ln r_I;$$

точно такую же особенность имеет функция  $G_2$  на оси второго провода. Следовательно (см. формулу 12), потенциал  $\varphi$  имеет на оси первого провода особенность вида:

$$-\frac{A_1}{2\pi} e^{jkz} \cdot \ln r_I - \frac{B_1}{2\pi} e^{-jkz} \cdot \ln r_I,$$

а на оси второго провода <sup>6)</sup>

$$-\frac{A_2}{2\pi} e^{jkz} \ln r_{II} - \frac{B_2}{2\pi} e^{-jkz} \ln r_{II}.$$

С другой стороны, <sup>4)</sup> потенциал  $\varphi$  должен иметь на осях проводов особенности типа:

$$-\frac{2Q_1}{\varepsilon} \ln r_I$$

и

$$-\frac{2Q_2}{\varepsilon} \ln r_{II}.$$

<sup>6)</sup>  $r_I$  и  $r_{II}$  отсчитываются соответственно от осей первого и второго провода.

Из сравнения четырех вышенаписанных выражений сразу получаем:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varepsilon A_1}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon B_1}{4\pi} e^{-jkz}, \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon A_2}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon B_2}{4\pi} e^{-jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Для нахождения токов  $I_1$  и  $I_2$ , текущих по проводам, используем известный закон „сохранения электричества“:  $\operatorname{div} j = -\partial \rho / \partial t$  ( $j$  — вектор плотности тока, а  $\rho$  — объемная плотность заряда).

В применении к нашему случаю его можно написать так<sup>7)</sup>:

$$I = j\omega \int Q dz.$$

Подставляя сюда выражение для  $Q$  из формул (14) и производя интегрирование, найдем:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\omega \varepsilon A_1}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\omega \varepsilon B_1}{4\pi k} e^{-jkz}, \\ I_2 &= \frac{\omega \varepsilon A_2}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\omega \varepsilon B_2}{4\pi k} e^{-jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Пользуясь формулой (8), можно также определить распределение токов и зарядов на внутренней поверхности экрана, но мы на этом не будем останавливаться. Постоянные  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , входящие во все наши предыдущие формулы, зависят от граничных условий на обоих концах линии, или, другими словами, от окончных устройств, включенных в линию. Обычно мы привыкли в теории линий иметь дело с двумя постоянными. Наличие в нашем случае четырех постоянных объясняется общностью постановки задачи, учитывающей как несимметрию самой линии, так и несимметрию окончных устройств. В дальнейшем мы убедимся, что в случае строго симметричной системы число постоянных сведется к двум, а в случае чисто бегущей волны — к одному.

### 3. Бегущие волны в линии

Ограничимся рассмотрением чисто бегущих волн в линии. Прежде всего выберем у корня  $k = \sqrt{k_1 k_2}$  [см. формулу (4а')] тот знак, при котором  $\operatorname{Re}(jk) > 0$ . Тогда для получения чисто бегущей волны, движущейся в сторону отрицательных  $z$ , следует положить в формулах (12), (13), (14) и (15)  $B_1 = B_2 = 0$ , после чего получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (A_1 G_1 + A_2 G_2) e^{jkz}, \\ Q_1 &= \frac{\varepsilon A_1}{4\pi} e^{jkz}, \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon A_2}{4\pi} e^{jkz}, \\ I_1 &= \frac{\varepsilon \omega A_1}{4\pi k} e^{jkz}, \\ I_2 &= \frac{\varepsilon \omega A_2}{4\pi k} e^{jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Формул для  $E$  и  $H$  мы не будем выписывать. Из равенств (16) непосредственно видно, что в линии имеются двухтактные и однотоктные волны,

<sup>7)</sup> При этом учтено, что за положительное направление тока  $I$  взято направление отри-

т. е. система несимметрична<sup>8)</sup>. Вводя две новые постоянные  $A^I$  и  $A^{II}$  при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A^I + A^{II}, \\ A_2 &= A^I - A^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

сделаем наличие однотоктной и двухтоктной волны явным:

$$\varphi = A^I (G_1 + G_2) e^{jkz} + A^{II} (G_1 - G_2) e^{jkz}, \quad (18a)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varepsilon A^I}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon A^{II}}{4\pi} e^{jkz}, \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon A^I}{4\pi} e^{jkz} - \frac{\varepsilon A^{II}}{4\pi} e^{jkz}, \\ I_1 &= \frac{\varepsilon \omega A^I}{4\pi k} e^{jkz} + \frac{\varepsilon \omega A^{II}}{4\pi k} e^{jkz}, \\ I_2 &= \frac{\varepsilon \omega A^I}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\varepsilon \omega A^{II}}{4\pi k} e^{jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

Первые части формул (18b) относятся к однотоктной волне, а вторые — к двухтоктной. Определим еще напряжение между проводами  $U_{12}$ ; оно очевидно равно разности потенциалов двухтоктной волны:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

или, пользуясь равенством (18a):

$$\begin{aligned} U_{12} &= [A^I (G_1^{(1)} + G_2^{(1)}) + A^{II} (G_1^{(1)} - G_2^{(1)})] e^{jkz} - \\ &- [A^I (G_1^{(2)} + G_2^{(2)}) + A^{II} (G_1^{(2)} - G_2^{(2)})] e^{jkz}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $G_1^{(1)}$ ,  $G_2^{(1)}$  — значения функций Грина  $G_1$ ,  $G_2$  на поверхности первого провода, а  $G_1^{(2)}$ ,  $G_2^{(2)}$  — на поверхности второго.

Из формулы (19) между прочим следует, что в общем случае несимметричной системы, несмотря на отсутствие двухтоктной волны напряжения, возможно наличие обеих волн тока, и наоборот. Действительно, отсутствие двухтоктной волны напряжения равносильно равенству

$$U_{12} = 0,$$

но это равенство может существовать при  $A^I \neq 0$  и  $A^{II} \neq 0$  [см. формулу (19)], откуда на основании формул (18b) следует справедливость вышесказанного.

В случае симметрии самой экранированной линии (рис. 2) формула для напряжения (19) может быть значительно упрощена. Для этого используем вытекающие из определения функции Грина (в случае симметрии линии) равенства

$$\begin{aligned} G_1^{(1)} &= G_2^{(2)}, \\ G_1^{(2)} &= G_2^{(1)}, \end{aligned}$$

после чего выражение (19) переписется так:

$$U_{12} = 2A^{II} (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}) e^{jkz}. \quad (19a)$$

<sup>8)</sup> Об однотоктных и двухтоктных волнах см. статью автора в Научно-технич. сборнике по электросвязи, № 18, 1937.

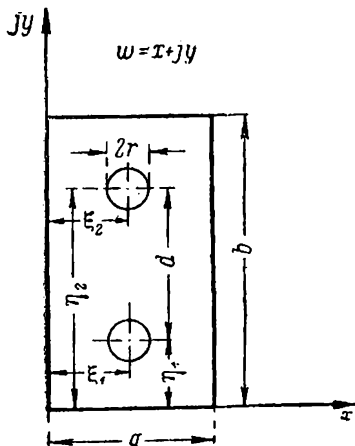


Рис. 2.

#### 4. Волновые сопротивления несимметричной двухпроводной экранированной линии

В общем случае под несимметричной линией мы будем подразумевать линию, несимметрия которой вызвана как конструкцией самой линии, так и конструкцией ее оконечных устройств.

Для описания электрических свойств несимметричной линии недостаточно одного волнового сопротивления, а таких параметров нужно ввести четыре (независимыми из них, однако, являются только три).

Определение этих параметров может быть проведено различно.

Однако наиболее удобными и естественными являются параметры, введенные проф. В. В. Татариновым<sup>9)</sup> и названные им „каноническими волновыми сопротивлениями“.

В нашем случае эти параметры проще всего получить, рассмотрев общие уравнения (16) для чисто бегущих волн.

Исключив в них из выражения для  $\varphi$  постоянные  $A_1, A_2$  найдем:

$$\varphi = \frac{4\pi k}{\varepsilon\omega} (I_1 G_1 + I_2 G_2). \quad (20)$$

Эта формула дает возможность написать уравнения, связывающие напряжения  $U_1$  и  $U_2$  проводов с токами в них. Для этого нужно только вспомнить, что под напряжением провода мы понимаем разность потенциалов между ним и экраном.

Учитывая, что потенциал экрана равен нулю, искомые уравнения напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{4\pi k}{\varepsilon\omega} (I_1 G_1^{(1)} + I_2 G_2^{(1)}), \\ U_2 &= \frac{4\pi k}{\varepsilon\omega} (I_1 G_1^{(2)} + I_2 G_2^{(2)}). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Разрешим уравнения (21) относительно токов, одновременно перейдя в них к практическим единицам:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1 G_2^{(2)} - U_2 G_2^{(1)}}{120\pi D}, \\ I_2 &= \frac{U_2 G_1^{(1)} - U_1 G_1^{(2)}}{120\pi D}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где положено:

$$\left. \begin{aligned} D &= G_1^{(1)} G_2^{(2)} - G_1^{(2)} G_2^{(1)}, \\ \varepsilon &= 1, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Отношение напряжений  $U$  к токам  $I$ , при произвольном возбуждении линии зависит от координаты  $z$  даже при чисто бегущих волнах. Поэтому для введения канонических волновых сопротивлений рассмотрим два частных случая возбуждения линии, в которой отсутствует отражение от конца. Общий случай произвольного возбуждения линии может быть получен в результате суперпозиции этих двух частных случаев.

##### Первый случай

Линия возбуждается так, что в ней имеется только однотоковая волна напряжения. При этом:

$$U_1 = U_2,$$

<sup>9)</sup> Работа В. В. Татарина вскоре будет напечатана.



и уравнения (22) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= U_1 \frac{G_2^{(2)} - G_2^{(1)}}{120\pi D}, \\ I_2 &= U_2 \frac{G_1^{(1)} - G_1^{(2)}}{120\pi D}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Сам внешний вид этих уравнений наталкивает нас на мысль о введении двух волновых сопротивлений: волнового сопротивления первого провода при однотоковой волне напряжения:

$$\varrho_1' = \frac{U_1}{I_1} = \frac{120\pi D}{G_2^{(2)} - G_2^{(1)}}, \quad (24)$$

и волнового сопротивления второго провода при однотоковой волне напряжения:

$$\varrho_2' = \frac{U_2}{I_2} = \frac{120\pi D}{G_1^{(1)} - G_1^{(2)}}. \quad (24a)$$

### Второй случай

Линия возбуждается так, что в ней имеется только двухтактная волна напряжения. При этом

$$U_1 = -U_2,$$

и уравнения (22) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= U_1 \frac{G_2^{(2)} + G_2^{(1)}}{120\pi D}, \\ I_2 &= U_2 \frac{G_1^{(1)} + G_1^{(2)}}{120\pi D}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Отсюда так же естественно, как и в первом случае, получаются еще два канонических волновых сопротивления: волновое сопротивление первого провода при двухтактной волне напряжения:

$$\varrho_1'' = \frac{U_1}{I_1} = \frac{120\pi D}{G_2^{(2)} + G_2^{(1)}} \quad (26)$$

и волновое сопротивление второго провода при двухтактной волне напряжения:

$$\varrho_2'' = \frac{U_2}{I_2} = \frac{120\pi D}{G_1^{(1)} - G_1^{(2)}}. \quad (26a)$$

Формулы (24), (24a), (26) и (26a) определяют четыре искомого волновых сопротивления, при помощи которых характеризуются свойства несимметричной линии. Когда несимметрия линии вызывается исключительно конечными устройствами, а сама линия строго симметрична (рис. 2), число волновых сопротивлений сводится к двум.

Для того, чтобы это показать, используем два очевидных в нашем случае равенства<sup>10)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} G_1^{(2)} &= G_2^{(1)}, \\ G_1^{(1)} &= G_2^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

<sup>10)</sup> Первая из формул (27) выражает теорему взаимности для функций Грина и справедлива всегда.

Тогда из формул (24), (24а), (26), (26а) и (22а) немедленно получаем:

$$\text{и } \left. \begin{aligned} \varrho' &= \varrho'_1 = \varrho'_2 = 120\pi (G_1^{(1)} + G_1^{(2)}) \\ \varrho'' &= \varrho''_1 = \varrho''_2 = 120\pi (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

И наконец, в случае полной симметрии линии (включая концы), число волновых сопротивлений, характеризующих линию, вследствие отсутствия одностактных волн напряжения и тока, сведется к одному:

$$\varrho = \frac{U_{12}}{I_1} = 240\pi (G_1^{(1)} - G_1^{(2)}) \Omega. \quad (29)$$

Здесь  $U_{12}$  — напряжение между проводами (19а), а  $I_1$  — ток в первом проводе.

Волновые сопротивления  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_{12}$ , которыми пользуется в своих работах А. А. Пистолькорс<sup>11)</sup>, очень просто выражаются через канонические волновые сопротивления:

$$W_1 = \frac{2\varrho'_1 \varrho''_1}{\varrho'_1 + \varrho''_1}, \quad W_2 = \frac{2\varrho'_2 \varrho''_2}{\varrho'_2 + \varrho''_2}, \quad W_{12} = \frac{2\varrho'_1 \varrho''_1}{\varrho'_1 - \varrho''_1}. \quad (30)$$

### 5. О расчете функции Грина

Для того, чтобы действительно пользоваться всеми ранее выведенными формулами, необходимо уметь вычислять функцию Грина  $G$  при различных значениях аргументов. Наиболее удобным для этой цели является известное представление функции Грина через сигма-функции Вейерштрасса<sup>12)</sup>, построенные для периодов, равных  $\omega_1 = 2a$ ,  $\omega_2 = 2jb$ :

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sigma(w - \psi) \cdot \sigma(w + \Psi)}{\sigma(w - \bar{\psi}) \cdot \sigma(w + \bar{\Psi})} \right|, \quad (31)$$

где

$$w = x + jy, \quad \psi = \xi + j\eta, \quad \bar{\psi} = \xi - j\eta.$$

Вычисление сигма-функций, входящих в правую часть (31), проще всего провести, используя известную из теории эллиптических функций формулу<sup>13)</sup>

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta'_1(0)} e^{\eta_0 \frac{u^2}{\omega_1}} \cdot \vartheta_1(V). \quad (32)$$

$$\left( \omega_1 = 2a, \quad V = \frac{u}{\omega_1}, \quad \eta_0 = \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right).$$

Тэта-функция фигурирующая в равенстве (32), имеет очень быстро сходящийся ряд Фурье; его мы и используем для наших расчетов:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(V) &= 2h^{1/4} \sin \pi V + 2h^{9/4} \sin 3\pi V + 2h^{25/4} \sin 5\pi V - \dots, \\ &\left( h = e^{j\pi\tau}, \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = j \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

<sup>11)</sup> Теория несимметричной двухпроводной линии. Научно-технич. сборник по электро-связи, № 16, 1937.

<sup>12)</sup> Курант и Гильберт. Методы математической физики. Изд. 2-е, стр. 362.

<sup>13)</sup> А. Гурвиц. Теория аналитич. и эллиптич. функций, стр. 253.

После этих замечаний перейдем к выводу расчетной формулы для функции Грина  $G$ . Введем сокращающее запись обозначение выражения, стоящего под знаком модуля в формуле (31):

$$f = \frac{\sigma(w - \psi) \cdot \sigma(w + \psi)}{\sigma(w - \bar{\psi}) \cdot \sigma(w + \bar{\psi})}. \quad (34)$$

Подставляя в (34) вместо сигма-функций их значение из (32), найдем:

$$f = \frac{e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(w-\psi)^2} \cdot e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(w+\psi)^2} \cdot \vartheta_1\left(\frac{w-\psi}{\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{w+\psi}{\omega_1}\right)}{e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(w-\bar{\psi})^2} \cdot e^{\frac{\eta_0}{\omega_1}(w+\bar{\psi})^2} \cdot \vartheta_1\left(\frac{w-\bar{\psi}}{\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{w+\bar{\psi}}{\omega_1}\right)},$$

или [см. (33)]

$$f = \frac{\left[ \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w - \psi) - h^2 \sin \frac{3\pi}{\omega_1} (w - \psi) + \dots \right]}{\left[ \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w - \bar{\psi}) - h^2 \sin \frac{3\pi}{\omega_1} (w - \bar{\psi}) + \dots \right]} \cdot \frac{\left[ \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w + \psi) - h^2 \sin \frac{3\pi}{\omega_1} (w + \psi) + \dots \right]}{\left[ \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w + \bar{\psi}) - h^2 \sin \frac{3\pi}{\omega_1} (w + \bar{\psi}) + \dots \right]} \cdot e^{j8 \frac{\eta_0}{\omega_1} \xi \cdot \eta}. \quad (35)$$

Перемножая ряды в числителе и знаменателе и деля результаты друг на друга, найдем после элементарных, но длинных тригонометрических выкладок:

$$f = e^{j8 \frac{\eta_0}{\omega_1} \xi \cdot \eta} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{\omega_1} (w - \psi) \cdot \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w + \psi)}{\sin \frac{\pi}{\omega_1} (w - \bar{\psi}) \cdot \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w + \bar{\psi})} \cdot \left[ 1 + j8h^2 \cos \frac{\pi}{a} w \cdot \sin \frac{\pi}{a} \xi \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \eta + h^4 D(w, \psi) + \dots \right]. \quad (36)$$

Выражения для  $D(w, \psi)$  мы не будем выписывать вследствие его громоздкости. Дадим оценки членов ряда (36) при условии выполнения неравенства:

$$y + \eta \leq b. \quad (37)$$

Оценим сначала модуль второго члена ряда, стоящего в квадратных скобках в формуле (36):

$$\left| 8h^2 \cos \frac{\pi}{a} w \cdot \sin \frac{\pi}{a} \xi \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \eta \right| \leq 8h^2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \eta \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} y \cong 2h^2 e^{\frac{\pi}{a}(y+\eta)}$$

Учитывая неравенство (37) и формулы:

$$h = e^{-\pi|\tau|}, \quad |\tau| = \frac{b}{a},$$

получим окончательно:

$$\left| 8h^2 \cos \frac{\pi}{a} w \cdot \sin \frac{\pi}{a} \xi \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \eta \right| \leq 2h. \quad (38)$$

Аналогично этому может быть дана оценка и для третьего члена ряда (36):

$$|h^4 D(w, \psi)| \leq 2(h^2 + h^3). \quad (39)$$

Так как  $b \geq a$ , то  $|\tau|$  и  $h$  удовлетворяют неравенствам:

$$|\tau| \geq 1, \quad h \leq e^{-\pi} \quad (40)$$

(для нормальной двухпроводной линии  $h = e^{-2\pi}$ ).

Приведенные неравенства (40) и (39) показывают, что, независимо от размеров экрана, третий и высшие члены в формуле (36) могут быть отброшены, после чего она примет вид:

$$f = e^{j8 \frac{\eta_0}{\omega_1} \xi \eta} \frac{\sin \frac{\pi}{\omega_1} (w - \psi) \cdot \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w + \psi)}{\sin \frac{\pi}{\omega_1} (w + \bar{\psi}) \sin \frac{\pi}{\omega_1} (w - \bar{\psi})} \left[ 1 + j8h^2 \cos \frac{\pi}{a} w \cdot \sin \frac{\pi}{a} \xi \cdot \text{sh } \eta \right]. \quad (41)$$

Переходя в этой формуле к модулю и подставляя результат в выражение (31), получим, учитывая, что в виду вещественности величин  $\omega_1$  и  $h$ ,  $\eta_0$  также вещественна<sup>14</sup>), расчетную формулу для функции Грина:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(\text{tg}^2 \alpha + \text{th}^2 \theta) (\text{tg}^2 \beta + \text{th}^2 \gamma)}{(\text{tg}^2 \alpha + \text{th}^2 \gamma) (\text{tg}^2 \beta + \text{th}^2 \theta)} - \frac{1}{4\pi} \ln \left( 1 + 16h^2 \sin \frac{\pi}{a} \xi \cdot \text{sh} \frac{\pi}{a} \eta \cdot \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \text{sh} \frac{\pi}{a} y \right), \quad (42)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{\omega_1} (x - \xi); \quad \gamma = \frac{\pi}{\omega_1} (y + \eta);$$

$$\beta = \frac{\pi}{\omega_1} (x + \xi); \quad \theta = \frac{\pi}{\omega_1} (y - \eta).$$

Второй член в формуле (42) носит характер поправочного члена и поэтому часто может быть опущен. Действительно, оценивая его, легко найти

$$\left| \frac{1}{4\pi} \ln \left( 1 + 16h^2 \sin \frac{\pi}{a} \xi \text{sh} \frac{\pi}{a} \eta \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \text{sh} \frac{\pi}{a} y \right) \right| < \frac{h}{\pi}, \quad (43)$$

т. е. уже для  $b \geq 2a$  этот поправочный член меньше 0.0006.

Вышеприведенная оценка (43) показывает, что для любых практических расчетов, за исключением, быть может, квадратного экрана<sup>15</sup>), формула для функции Грина  $G$  может быть написана так:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(\text{tg}^2 \alpha + \text{th}^2 \theta) (\text{tg}^2 \beta + \text{th}^2 \gamma)}{(\text{tg}^2 \alpha + \text{th}^2 \gamma) (\text{tg}^2 \beta + \text{th}^2 \theta)}. \quad (44)$$

Все найденные оценки (38), (39) и (43) выведены при условии выполнения неравенства (37). Поэтому расчетные формулы для функции Грина (42) и (44) справедливы также лишь при таком расположении источника  $(\xi, \eta)$  и точки наблюдения  $(x, y)$ , когда

$$y + \eta \leq b. \quad (37)$$

Существенность последнего замечания следует хотя бы из того, что в формулу (44) не входит параметр  $b$  и, значит, без учета неравенства (37) функция Грина определялась бы только размером одной из сторон прямоугольника, что абсурдно.

Для доказательства универсальности формул (42) и (44) остается показать, что при любом положении источника  $(\xi, \eta)$  и точки наблюдения  $(x, y)$  внутри прямоугольника (экрана) вычисление функции Грина можно провести так, чтобы выполнялось неравенство (37). Действительно, рассмотрим все возможные представиться случаи расположения источника  $(\xi, \eta)$  и точки наблюдения  $(x, y)$ . Таких случаев может быть четыре:

I. Источник  $(\psi = \xi + j\eta)$  и точка наблюдения  $(w = x + jy)$  находятся в нижней половине прямоугольника (рис. 3).

<sup>14</sup>) А. Гурвиц, loc. cit., стр. 277, формула (5), причем в обозначениях Гурвица индекс нуль у  $\eta_0$  опущен.

<sup>15</sup>) В случае квадратного экрана поправочный член также не превосходит 0.014.

II.  $\psi$  и  $w$  находятся в верхней половине прямоугольника (рис. 4).

III.  $\psi$  и  $w$  находятся в разных половинах прямоугольника, но так, что при этом  $y + \eta \leq b$  (рис. 5).

IV.  $\psi$  и  $w$  находятся в разных половинах прямоугольника, но так, что  $y + \eta > b$  (рис. 6).

В первом и третьем случаях неравенство (37) непосредственно выполнено.

Второй случай легко может быть сведен к первому, так как в виду симметрии прямоугольника относительно прямой  $C-D$  (рис. 4) расчет функции Грина<sup>16)</sup>  $G(w, \psi)$  эквивалентен расчету  $G(w^*, \psi^*)$ .

$$G(w, \psi) \equiv G(w^*, \psi^*), \quad (45)$$

где  $w^*$  и  $\psi^*$  — зеркальные отображения точек  $w$  и  $\psi$  в прямой  $C-D$ . Аналогичным образом четвертый случай может быть сведен к третьему.

Таким образом формулы (42) и (44) полностью разрешают поставленную в начале настоящего раздела задачу.

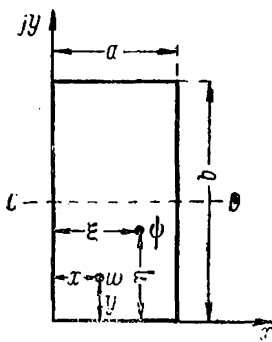


Рис. 3.

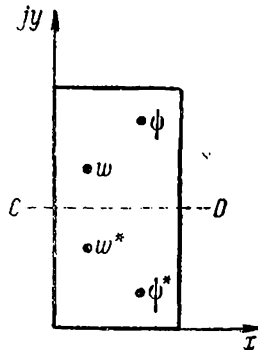


Рис. 4.

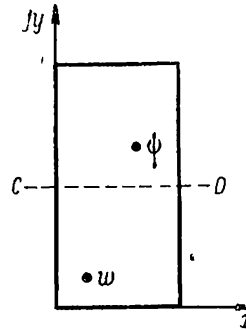


Рис. 5.

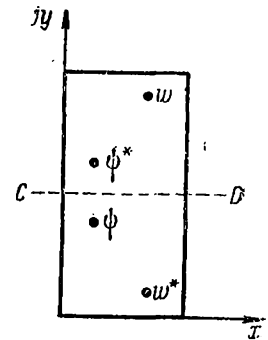


Рис. 6.

## 6. Расчетные формулы для волновых сопротивлений

Полученная нами формула (42) для функции Грина дает возможность получить расчетные формулы волновых сопротивлений, причем мы ограничимся случаем линии, несимметрия которой обусловлена исключительно конечными устройствами. Канонические волновые сопротивления определяются в этом случае выражениями (28). Для подсчета входящих туда функций  $G_1^{(1)}$  и  $G_1^{(2)}$  используем формулу (42), после чего найдем:

$$G_1^{(1)} \equiv G(\xi_1, \eta_1 + r; \xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\text{th} \frac{\pi}{2a} 2\eta_1}{\text{th} \frac{\pi}{2a} r}, \quad (46a)$$

$$G_1^{(2)} \equiv G(\xi_1, \eta_1 + d; \xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\text{th} \frac{\pi}{2a} b}{\text{th} \frac{\pi}{2a} d}. \quad (46b)$$

При этом учтено (рис. 2), что

$$\omega_1 = 2a, \quad \xi_1 = \frac{a}{2}, \quad 2\eta_1 + d = b, \quad r \ll 2\eta_1, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_2 = \eta_1 + d.$$

Равенства (46a), (46b) дают возможность написать окончательные расчетные формулы для волновых сопротивлений:

$$q' = 60 \ln \frac{\text{th} \frac{\pi}{2a} 2\eta_1 \cdot \text{th} \frac{\pi}{2a} b}{\text{th} \frac{\pi}{2a} r \cdot \text{th} \frac{\pi}{2a} d} \Omega, \quad (47)$$

<sup>16)</sup> Обозначение  $G(w, \psi)$  эквивалентно обозначению  $G(x, y; \xi, \eta)$ .

$$\varrho'' = 60 \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2a} 2\eta_1 \cdot \operatorname{th} \frac{\pi}{2a} d}{\operatorname{th} \frac{\pi}{2a} r \cdot \operatorname{th} \frac{\pi}{2a} b} \Omega. \quad (48)$$

Линия, симметричная вплоть до оконечных устройств, характеризуется единственным волновым сопротивлением (формула 29), которое после использования равенств (46а) и (46b) определится формулой:

$$\varrho = 120 \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2a} 2\eta_1 \cdot \operatorname{th} \frac{\pi}{2a} d}{\operatorname{th} \frac{\pi}{2a} r \cdot \operatorname{th} \frac{\pi}{2a} b} \Omega. \quad (49)$$

Значение входящих в формулы (47), (48) и (49) параметров  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $r$  и  $\eta_1$  очевидно из рис. 2, причем независимыми являются только первые четыре, так как

$$\eta_1 = \frac{b-d}{2}.$$

### 7. Однопроводная линия в прямоугольном экране

Предыдущая теория может быть без всяких изменений распространена на случай однопроводной линии, помещенной в прямоугольный (точнее квадратный) экран (рис. 7).

При этом электромагнитное поле внутри экрана определяется теми же формулами (2) и (3). Однако потенциальная функция  $\varphi$ , входящая в эти формулы, должна быть несколько изменена.

Действительно, в случае однопроводной линии потенциальная функция  $\varphi$  имеет внутри экрана только одну логарифмическую особенность на оси единственного провода. В остальном эта функция подчинена тем же условиям, что и прежде, и поэтому имеет вид:

$$\varphi = (Ae^{jkz} + Be^{-jkz}) G(x, y; \xi, \eta).$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные, а  $\xi$  и  $\eta$  — координаты оси провода.

Линейная плотность заряда и ток, текущий по проводу, определяются и в этом случае равенствами, аналогичными формулам (14) и (15):

$$Q = \frac{\varepsilon A}{4\pi} e^{jkz} + \frac{\varepsilon B}{4\pi} e^{-jkz},$$

$$I = \frac{\varepsilon \omega A}{4\pi k} e^{jkz} - \frac{\varepsilon \omega B}{4\pi k} e^{-jkz}.$$

Напряжение  $U_{10}$  между проводом и экраном, очевидно, равно значению потенциальной функции  $\varphi$  на поверхности провода, например, в точке с координатами  $x = \xi$ ,  $y = \eta + r$  (рис. 7):

$$U_{10} = (Ae^{jkz} + Be^{-jkz}) G(\xi, \eta + r; \xi, \eta).$$

Ограничившись, как и в случае двухпроводной линии, чисто бегущей волной, получим:

$$U_{10} = AG(\xi, \eta + r; \xi, \eta) e^{jkz}$$

$$I = \frac{\varepsilon \omega}{4\pi k} A e^{jkz}.$$

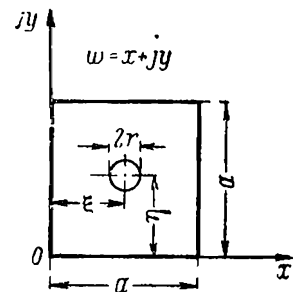


Рис. 7.

И наконец, волновое сопротивление однопроводной экранированной линии найдется из формулы:

$$\varrho = \frac{U_{10}}{I} = \frac{4\pi k}{\varepsilon\omega} G,$$

или в практических единицах для воздуха

$$\varrho = 120\pi G \Omega.$$

Для численных расчетов функции  $G$  используем формулу (44).

Если при этом учесть, что в нашем случае (рис. 7)  $a = b$ ,  $\eta = \xi = \frac{a}{2}$ ,  $r \ll 2\eta$ , то получим расчетную формулу для волнового сопротивления однопроводной экранированной линии:

$$\varrho = 60 \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2}}{\operatorname{th} \frac{\pi}{2a} r} - 4.4 \Omega.$$

В заключение отметим, что большинство формул, полученных нами, годится для цилиндрических экранов любого сечения. Для этого следует только под функцией Грина  $G$ , входящей в эти формулы, подразумевать функцию Грина, построенную для контура, совпадающего с сечением экрана.

Ленинградский  
электротехнический институт связи.

Поступило в Редакцию  
8 декабря 1938 г.

## ПОТЕРИ В ФИДЕРНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Я. Н. Фельд

В настоящей работе выводятся формулы для расчета сопротивления потерь: 1) двухпроводной линии с учетом эффекта близости при различных радиусах проводов; 2) двухпроводной линии, помещенной в прямоугольный экран с учетом потерь в экране; 3) ленточного провода с учетом краевого эффекта.

### 1. Введение

В последнее время в радиотехнике, в связи с использованием коротких и ультракоротких волн, широко применяются различные типы фидерных устройств. Часто встречается необходимость в применении фидеров с пониженным волновым сопротивлением и малым затуханием.

В случае использования для этой цели двухпроводной линии приходится делать последнюю из проводов большого диаметра, расположенных друг от друга на расстоянии, соизмеримом с радиусами проводов.

До настоящего времени при расчете сопротивления потерь таких систем продолжают пользоваться формулами, не учитывающими возрастания потерь вследствие эффекта близости, что в некоторых случаях приводит к значительным ошибкам.

Как известно, эффект близости состоит в том, что вследствие взаимного влияния проводов нарушается осевая симметрия в распределении тока по сечению провода и возрастает сопротивление потерь.

На ряду с указанным типом применяются еще двухпроводные фидеры, помещенные в экраны прямоугольного сечения. Для них вообще не существует методов расчета потерь, значительную долю которых составляют потери в экране.

И, наконец, большой интерес представляет определение сопротивления потерь ленточного провода. Существующие для этого формулы хотя и учитывают скин-эффект, однако недостаточно точны, так как они выведены в пренебрежении краевым эффектом. Важность получения строгой формулы для сопротивления ленточного провода станет очевидной, если вспомнить, что ленточный провод является основной частью так называемых ленточных фидеров.

Целью нашей работы является получение удобных расчетных формул сопротивления потерь для перечисленных выше случаев. Потери в проводнике определяются, как известно, распределением плотности тока в нем и объемной проводимостью  $\sigma$ . Таким образом задача сводится к определению плотности тока в сечении проводника. Непосредственное решение этой задачи для проводников с конечной проводимостью  $\sigma$  представляет в большинстве случаев почти непреодолимые в настоящий момент математические трудности. Если же задача и может быть строго решена, как, например, в случае двухпроводной симметричной линии [1] или ленты эллиптического сечения [2],<sup>1</sup> то окончательные формулы получаются настолько громоздкими, что совершенно не годятся для инженерных расчетов.



Поэтому мы в настоящей работе пойдем несколько иным путем.

Фидеры, употребляемые в радиотехнике, обладают настолько высокой проводимостью, что при коротких и ультракоротких волнах вследствие скин-эффекта ток течет в очень тонком слое у самой поверхности проводников. Толщина этого слоя  $S$  при расчете сопротивления потерь может быть принята равной „глубине погружения волны“<sup>2</sup> (т. е. глубине, на которой амплитуда тока убывает в  $e$  раз).

Примерно такая же картина распределения тока имеет место в идеально-проводящем фидере, где ток течет целиком по поверхности проводников. Поэтому в нашем случае можно считать, что токи в фидере с конечной (но большой) проводимостью определяются теми же формулами, что и при идеально проводящем фидере, с той только разницей, что теперь эти токи текут не по поверхности, а в очень тонком слое толщины  $S$ . „Глубина погружения волны“  $S$  на коротких волнах получается порядка 0.01 мм, а на ультракоротких — 0.001 мм. Указанные соображения сводят нашу задачу к нахождению сопротивления потерь по заданному распределению тока, так как распределение плотности тока для интересующих нас типов фидеров в случае идеальной проводимости последних изучено нами ранее [4, 5, 6].

## 2. Сопротивление потерь двухпроводной линии с учетом эффекта близости

Рассмотрим двухпроводную линию, состоящую из двух параллельных проводов, причем для общности будем считать радиусы их различными.

Введем систему координат, в которой боковые поверхности проводов совпадают с координатными поверхностями. К этим координатам проще всего перейти при помощи конформного преобразования плоскости  $z = \text{const}$  ( $z$  — ось, параллельная проводам), которую будем рассматривать как плоскость комплексного переменного  $\xi = x + jy$ , на плоскость переменного  $w = \rho e^{j\theta}$ .

Совершая это преобразование при помощи дробно-линейной функции

$$w = \frac{\xi - a}{\xi + a} \equiv \psi(\xi), \quad (1)$$

мы переведем круги, получающиеся от пересечения проводов с плоскостью  $\xi$  (рис. 1), в концентрические круги радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  плоскости  $w$  (рис. 2).

Обозначая расстояние между центрами кругов и началом координат буквами  $d_1$  и  $d_2$ , легко установить соотношения между введенными нами параметрами, при которых формула (1) реализует указанное выше преобразование:

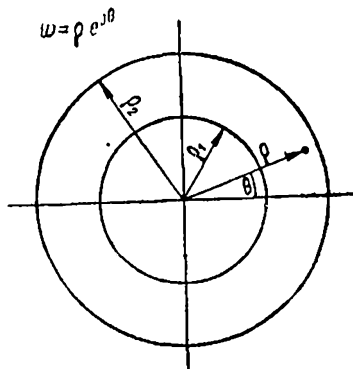


Рис. 2.

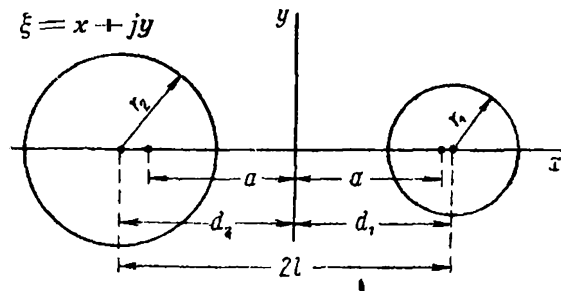


Рис. 1.

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{4l} + l, & \rho_1 &= \frac{d_1 + r_1 - a}{d_1 + r_1 + a}, \\ d_2 &= l - \frac{r_1^2 - r_2^2}{4l}, & \rho_2 &= \frac{d_2 + r_2 + a}{d_2 + r_1 - a}, \\ a^2 &= d_1^2 - r_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $2l = d_1 + d_2$ , а  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы проводов.

В системе координат  $\rho, \theta, z$ , называемой обычно биполярной, квадрат элемента длины имеет вид:

$$dl^2 = h_\rho^2 d\rho^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Коэффициенты Ляме  $h_\rho$  и  $h_\theta$  выражаются следующими формулами:<sup>3</sup>

$$h_\rho = \frac{2a}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos \theta}, \quad h_\theta = \varrho h_\rho. \quad (4)$$

Связь между декартовыми координатами  $x, y, z$  и биполярными  $\varrho, \vartheta, z$ , определяемая формулой (1), осталась такой же, как и в цитированной статье [4], где изучалась симметричная линия; изменились только выражения для параметров  $a, \varrho_1$  и  $\varrho_2$ . Поэтому большинство формул, выведенных в статье [4], остается верным для линии с  $r_1 \neq r_2$ . Так, например, последние члены формул (32), (32а) [4], определяющие двухтактные токи, остаются справедливыми, если параметры  $a, \varrho_1$  и  $\varrho_2$  определять выражениями (2).

Указанные формулы для поверхностной плотности токов первого и второго проводов в несколько иных обозначениях примут вид:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{I_1}{2\pi h_\theta} \Big|_{\varrho=\varrho_1}, \\ i_2 &= \frac{I_2}{2\pi h_\theta} \Big|_{\varrho=\varrho_2}, \\ I_1 &= -I_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  — полные токи, текущие в проводах.

Как мы уже отмечали, при высокой частоте почти весь ток концентрируется у поверхности проводов в узких кольцах  $D_1$  и  $D_2$ , сопротивление которых на единицу длины проводов, без учета эффекта близости, обозначим буквами  $R_{01}$  и  $R_{02}$ .<sup>4</sup>

Считая, что распределение тока в линии с большой проводимостью выражается теми же формулами (5), что и при идеальной линии, и обозначая сопротивление единицы длины первого и второго провода с учетом эффекта близости буквами  $R_1$  и  $R_2$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{|I_1|^2} \oint_{(L_1)} 2\pi r_1 R_{01} |i_1|^2 dl, \\ R_2 &= \frac{1}{|I_2|^2} \oint_{(L_2)} 2\pi r_2 R_{02} |i_2|^2 dl. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интегрирование происходит по окружности проводов (рис. 1). Подставляя в формулы (6) выражения для  $i_1$  и  $i_2$  из уравнений (5), перепишем их так:

$$R_1 = \frac{r_1 R_{01}}{2\pi} \oint_{(L_1)} \frac{dl}{h_\theta^2}, \quad R_2 = \frac{r_2 R_{02}}{2\pi} \oint_{(L_2)} \frac{dl}{h_\theta^2},$$

или учитывая формулы (4) и то, что на окружности проводов

$$dl = h_\theta d\theta,$$

получим:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 R_{01}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 \cos \theta}{2a\varrho_1} d\theta, \\ R_2 &= \frac{r_2 R_{02}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \varrho_2^2 - 2\varrho_2 \cos \theta}{2a\varrho_2} d\theta. \end{aligned}$$

Производя интегрирование, легко найти:

$$R_1 = \frac{r_1}{a} \frac{1 + \varrho_1^2}{2\varrho_1} R_{01}, \quad R_2 = \frac{r_2}{a} \frac{1 + \varrho_2^2}{2\varrho_2} R_{02}.$$

<sup>3</sup> [4], стр. 23.

<sup>4</sup>  $R_{01}$  — обычное сопротивление провода с учетом скин-эффекта.

Наконец, используя формулы (2), для  $a$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  напишем окончательные выражения для сопротивления проводов двухпроводной линии с учетом эффекта близости:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{d_1^2}}} R_{01}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_2^2}{d_2^2}}} R_{02}. \quad (7)$$

Величины  $d_1$  и  $d_2$ , входящие в написанные выражения, определяются через расстояние между осями проводов  $2l$  и их радиусы — по формулам (2).

Из формул (7) следует, что когда провода линии касаются друг друга (оставаясь изолированными), то сопротивление проводов с учетом эффекта близости обращается в бесконечность, так как при этом  $r_1 = d_1$ , а  $r_2 = d_2$ .

Такой, на первый взгляд, странный результат физически вполне понятен. Действительно, при этом линия касания проводов становится особой линией для потенциальной функции, и плотность тока на этой линии оказывается бесконечно большой, вследствие чего сопротивление обращается в бесконечность.

Рассмотрим еще два частных случая применения формул (7).

### 3. Провод, параллельный бесконечной плоскости

Этот случай может быть получен из предыдущего путем предельного перехода, при котором

и 
$$\begin{aligned} r_2 &\rightarrow \infty \\ 2l &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что при этом выполняется следующее предельное равенство:

$$\lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ r_2 \rightarrow \infty}} (2l - r_2) = b,$$

где  $b$  — расстояние между осью провода и плоскостью.

Первая формула (7), которая теперь будет определять сопротивление провода, параллельного плоскости, в пределе примет вид:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{b^2}}} R_{01}, \quad (8)$$

так как

$$\lim_{\substack{r_2 \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} d_1 = b.$$

Для совершения предельного перехода во второй формуле (7) напишем сначала выражение для сопротивления провода  $R_{02}$ , не учитывающее эффекта близости. Как известно из теории переменного тока, сопротивление провода с учетом скин-эффекта при высоких частотах имеет вид:<sup>5</sup>

$$R_{02} = \frac{30}{r_2} \sqrt{\frac{f}{\sigma_1}} \Omega/\text{см};$$

здесь  $f$  — частота, а  $\sigma_1$  — удельная проводимость провода в CGSE.

Подставляя это выражение во вторую формулу (7) и учитывая, что

$$\lim_{\substack{r_2 \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \frac{r_2}{d_2} = 1$$

и

$$\lim_{\substack{r_2 \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} (d_2^2 - r_2^2) = b^2 - r_1^2,$$

найдем, переходя к пределу:

$$R_2 = \frac{30}{\sqrt{b^2 - r_1^2}} \sqrt{\frac{f}{\sigma_1}} \Omega/\text{см.} \quad (9)$$

Эта формула определяет сопротивление плоскости, заменяющей обратный провод, с учетом эффекта близости.

#### 4. Симметричная двухпроводная линия

Для линий, провода которых имеют одинаковые радиусы  $r$ , справедливы следующие равенства:

$$r_1 = r_2 = r, \quad d_1 = d_2 = l.$$

Поэтому формулы (7) переписутся так:

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}}} R_0. \quad (10)$$

Следует отметить, что в предыдущих разделах мы определяли сопротивление двухпроводных линий только для нормальных двухтактных волн. Для однитактных волн формулы имели бы другой вид, так как распределение тока в проводе при однитактных волнах отлично от распределения при двухтактных.<sup>6</sup>

Вводить понятие сопротивления потерь линии при наличии волн обоих типов не имеет смысла, так как это сопротивление оказывается зависящим от оконечных устройств линии и поэтому не может служить параметром, характеризующим только линию и тип волн.

#### 5. Потери в прямоугольных экранах

Рассмотрим двухпроводную симметричную линию, помещенную в экран (рис. 3), внутренний контур сечения которого имеет форму прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ . Если радиусы проводов малы по сравнению с размерами экрана и последний обладает идеальной проводимостью, то электромагнитное поле внутри экрана при чисто двухтактных бегущих волнах в проводах определяется потенциальной функцией:<sup>7</sup>

$$\varphi = \frac{4\pi}{c} I [G(x, y; \xi_1, \eta_1) - G(x, y; \xi_2, \eta_2)]; \quad (11)$$

здесь  $I$  — ток, текущий в проводах;  $G(x, y; \xi, \eta)$  — функция Грина, построенная для прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ ;  $\xi_1, \eta_1$  и  $\xi_2, \eta_2$  — координаты осей первого и второго провода;  $x, y$  — координаты точки наблюдения;  $c$  — электродинамическая постоянная.

Для определения поверхностной плотности тока  $i$ , текущего по внутренней поверхности экрана, используем известную из электродинамики формулу:

$$i = \frac{c}{4\pi} H_\tau,$$

где  $H_\tau$  — составляющая напряженности магнитного поля, касательная к поверхности экрана.

Так как в нашем случае магнитные силовые линии лежат в плоскости, перпендикулярной к осям проводов, то ток в экране течет параллельно осям

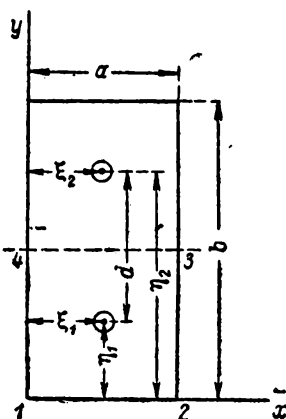


Рис. 3.

<sup>6</sup> См. нашу работу [4].

<sup>7</sup> В [5] формула (20) по в том учтено, что  $I_1 = -I_2 = I$ , а внутри экрана  $\sigma = 0$ .

проводов. Вводя векторы  $\tau$  и  $n$ , совпадающие с направлением касательной и внутренней нормали к контуру экрана, легко получить:

$$H_\tau = H_x \frac{\partial y}{\partial n} - H_y \frac{\partial x}{\partial n}. \quad (12)$$

Составляющие  $H$  связаны с  $\varphi$  при помощи равенств:<sup>8</sup>

$$H_x = \frac{1}{k_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad H_y = -\frac{1}{k_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad k_2 = -j \frac{\omega}{c}.$$

Подставляя их в формулу для  $H_\tau$ , найдем:

$$H_\tau = \frac{1}{k_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial n}; \quad (13)$$

здесь  $z$  — ось, параллельная проводам.

Наконец, учитывая формулу (12), получим выражение для поверхностной плотности тока в экране:

$$i = \frac{c}{4\pi k_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial n}. \quad (14)$$

Для определения потерь мощности в экране необходимо, очевидно, учесть конечную проводимость последнего  $\sigma_1$ . Металлические экраны обладают обычно настолько большой проводимостью, что при высоких частотах вследствие скин-эффекта ток течет в очень тонком слое у внутренней поверхности экрана. Толщина этого слоя  $S$ , принимаемая равной „глубине погружения волны“, определяется следующей формулой:<sup>9</sup>

$$S = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_1 \omega}} \text{ см.} \quad (15)$$

Будем считать, как и ранее, что токи в экране с конечной проводимостью  $\sigma_1$  определяются теми же формулами (14), (11), что и при  $\sigma_1 = \infty$ , с той только разницей, что при  $\sigma_1 \neq \infty$  эти токи текут не по поверхности экрана, а в тонком слое толщины  $S$ .

Пользуясь только что сказанным, определим мощность, расходуемую на потери в элементе поверхностного слоя экрана длиной в 1 см, толщиной в  $S$  см и шириною в  $dl$  см:

$$dP_1 = \frac{0.5}{S\sigma_1 dl} |i dl|^2.$$

Интегрируя это выражение по внутреннему контуру сечения экрана  $L$ , найдем мощность, расходуемую на потери в единице длины экрана:

$$P_1 = \oint_{(L)} \frac{|i|^2}{2\sigma_1 S} dl. \quad (16)$$

Формулы (14), (11) для тока и потенциала дают возможность переписать выражение для  $P_1$  так:

$$P_1 = \frac{1}{2\sigma_1 S |k_2|^2} \left| \frac{\partial I}{\partial z} \right|^2 \oint_{(L)} \left| \frac{\partial}{\partial n} (G_1 - G_2) \right|^2 dl, \quad (17)$$

где

$$G_1 = G(x, y; \xi_1, \eta_1), \quad G_2 = G(x, y; \xi_2, \eta_2). \quad (18)$$

Так как при чисто бегущих волнах зависимость тока  $I$  от координаты  $z$  выражается множителем  $e^{jkz}$ , где  $k = \frac{\omega}{c}$  (если внутри экрана находится воз- дух), то

$$P_1 = \frac{|I|^2}{2\sigma_1 S} \oint_{(L)} \left| \frac{\partial}{\partial n} (G_1 - G_2) \right|^2 dl.$$

<sup>8</sup> [5], формула (3).  
<sup>9</sup> [3], стр. 195—196.

Деля полученное выражение на  $\frac{|I^2|}{2}$ , найдем сопротивление потерь единицы длины экрана, отнесенное к току в проводах:

$$R_{1 \text{ эк.}} = \frac{1}{S\sigma_1} \oint_{(L)} \left| \frac{\partial}{\partial n} (G_1 - G_2) \right|^2 dl. \quad (19)$$

Формула (19) может быть упрощена, если учесть следующие замечания.

Из симметрии системы относительно прямой 3—4 (рис. 3) следует, что разность  $G_1 - G_2$  обращается в нуль на прямой 3—4.

Таким образом гармоническая функция  $G_1 - G_2$  обращается в нуль на контуре прямоугольника 1—2—3—4 (рис. 3) и имеет там единственный полюс на оси первого провода. Поэтому на основании теоремы единственности для функций Грина разность  $G_1 - G_2$  тождественно равна функции Грина  $g_1$ , построенной для прямоугольника 1—2—3—4 с полюсом в точке  $\xi_1, \eta_1$ .

$$g_1 \equiv G_1 - G_2.$$

Формула для  $R_{1 \text{ эк.}}$ , после сказанного, напишется так:

$$R_{1 \text{ эк.}} = \frac{1}{S\sigma_1} \oint_{(L)} \left| \frac{\partial}{\partial n} g_1 \right|^2 dl. \quad (20)$$

Входящая сюда функция Грина  $g_1$  определяется формулой (44) [5]:

$$g_1 = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{th}^2 \theta)(\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{th}^2 \gamma)}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{th}^2 \gamma)(\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{th}^2 \theta)}, \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2a} (x - \xi_1); & \gamma &= \frac{\pi}{2a} (y + \eta_1); \\ \beta &= \frac{\pi}{2a} (x + \xi_1); & \theta &= \frac{\pi}{2a} (y - \eta_1). \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

Формула (21) дает достаточную точность при условии выполнения неравенства:

$$y + \eta_1 \leq \frac{b}{2}.$$

Так как при нормальной работе фидера напряжение между проводами вдвое больше напряжения между проводом и экраном, то наиболее рациональными размерами фидерного устройства будут те, при которых:

$$\begin{aligned} b &= 2a = 2d, \\ \xi_1 &= \eta_1 = \frac{a}{2}; \end{aligned}$$

здесь  $d$  — расстояние между осями проводов.

Для этого случая мы и проведем дальнейший расчет сопротивления по формуле (20).

Так как прямоугольник 1—2—3—4 теперь обратится в квадрат со стороной, равной  $a$ , то, как легко сообразить, формула (20) может быть написана так:

$$R_{1 \text{ эк.}} = \frac{6}{S\sigma_1} \int_0^a \left| \frac{\partial}{\partial y} g_1 \right|_{y=0}^2 dx. \quad (22)$$

Дифференцируя в равенстве (21)  $g_1$  по  $y$  и полагая затем  $y$  равным нулю, получим после подстановки в (22):

$$R_{1 \text{ эк.}} = \frac{3}{2S\sigma_1 a^2} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{4} \operatorname{th}' \frac{\pi}{4} \right]^2 \int_0^a \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{4}} \right)^2 dx.$$

Производя замену переменного  $x$  в интеграле по формуле:

$$a = \frac{\pi}{2a} \left( x - \frac{a}{2} \right),$$

найдем:

$$R_{1 \text{ эк.}} = \frac{3}{\pi S \sigma_1 a} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{4} \operatorname{th}' \frac{\pi}{4} \right]^2 \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{4}} \right)^2 da.$$

Интеграл, стоящий в правой части, проще всего взять графически, после чего найдем:

$$R_{1 \text{ эк.}} \cong \frac{1.65}{\pi S \sigma_1 a},$$

или, учитывая формулу (15),

$$R_{1 \text{ эк.}} \cong \frac{99}{a} \sqrt{\frac{f}{\sigma_{1 \text{ CGSE}}}} \Omega/\text{см.} \quad (23)$$

Аналогично предыдущему может быть рассчитан случай, когда

$$b \neq 2a.$$

Полное сопротивление потерь фидерного устройства получим, если к величине  $R_{1 \text{ эк.}}$  прибавим сопротивление проводов  $R_{1 \text{ пр.}}$ , на единицу длины с учетом скин-эффекта. Зная волновое сопротивление фидера<sup>10</sup>  $Q$ , легко определить затухание фидера  $\beta$  по формуле:

$$\beta = \frac{R_{1 \text{ эк.}} + R_{1 \text{ пр.}}}{2Q}.$$

## 6. Сопротивление ленточного провода с учетом краевого эффекта

Формулы для сопротивления ленточного провода прямоугольного сечения имеются в литературе (см. например [7]). Однако, как уже указывалось во введении, они недостаточно точны, так как при их выводе не учитывалось влияние краев на распределение тока по контуру ленты.

Для того чтобы учесть также влияние краевого эффекта и получить вместе с тем достаточно простые формулы, мы заменим при расчете прямоугольное сечение ленточного провода эквивалентным ему эллиптическим сечением.

Действительно, имея узкий прямоугольник со сторонами  $2b$  и  $2d$ , можно с большой точностью заменить его эквивалентным эллипсом с осями, равными соответственно  $2b$  и  $2d$ .

Фокусное расстояние эллипса  $2a$  при этом будет равно:

$$2a = 2\sqrt{b^2 - d^2}. \quad (24)$$

В случае идеальной проводимости провода эллиптического сечения поверхностная плотность тока  $i$ , текущего вдоль него, определяется формулой.<sup>11</sup>

$$i = \frac{I}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v^2}}, \quad (25)$$

где  $I$  — полный ток, текущий по ленте,  $u_0 = \frac{b}{a}$ ,  $v$  — криволинейная эллиптическая координата, пробегающая интервал  $-1 \leq v \leq 1$  дважды при обходе по контуру эллипса.

<sup>10</sup> См. формулу (49) [5].

<sup>11</sup> [6], формула (22).

Длина элемента дуги эллипса определяется в эллиптических координатах выражением:<sup>12</sup>

$$dl = h_v dv = a \frac{\sqrt{u_0^2 - v^2}}{\sqrt{1 - v^2}} dv. \quad (26)$$

Метод, примененный нами в предыдущих разделах, может быть использован и для расчета сопротивления потерь ленточного провода (обладающего конечной проводимостью  $\sigma_1$ ) при достаточно высоких частотах.

Обозначая сопротивление единицы длины ленты буквой  $R_1$ , найдем:

$$R_1 = \frac{1}{|I^2|} \oint \frac{|i dl|^2}{\sigma_1 S dl}.$$

Интегрирование происходит по контуру эквивалентного эллипса.

Используя формулы (25) и (26), перепишем предыдущее выражение так:

$$R_1 = \frac{1}{\pi^2 S \sigma_1 b} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}},$$

$$k = \frac{a}{b} < 1.$$

Полный эллиптический интеграл первого рода, входящий в формулу для  $R_1$ , сокращенно обозначается  $K(k)$ . Используя формулу (15) и указанное обозначение для эллиптического интеграла, получим окончательное выражение для  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{60}{\pi b} \sqrt{\frac{f}{\sigma_1}} K(k) \Omega/\text{см}; \quad (27)$$

$$k = \frac{a}{b}.$$

здесь  $\sigma_1$  измеряется в CGSE, а  $b$  — в сантиметрах.

Для расчетов по формуле (27) следует пользоваться таблицами<sup>[8]</sup> для

$$K(k) \equiv F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

или при значениях  $k$ , близких к единице, быстро сходящимся рядом:

$$K(k) = a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_2 k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 a_4 k'^4 + \dots,$$

где

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad a_0 = \ln \frac{4}{k'}, \quad a_2 = a_0 - 1, \quad a_4 = a_2 - \frac{1}{6}.$$

#### Литература

- [1] Mie. Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten. Ann. d. Phys., 2, 201, 1900. — [2] Стретт. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, 1935. — [3] Тамм. Основы теории электричества, I, ч. 2. — [4] Я. Фельд. Однотактные и двухтактные волны вдоль двухпроводной линии. Научно-техн. сб. ЛЭИС, № 18. — [5] Я. Фельд. Распространение электромагнитных волн в линиях с прямоугольными экранами. ЖТФ, IX, вып. 7, 1939. — [6] Я. Фельд. Распространение электромагнитных волн вдоль эллиптического цилиндра. Научно-техн. сб. ЛЭИС, № 17. — [7] Круг. Основы электротехники, II, 1932. — [8] Шпильрейн. Таблицы специальных функций, ч. 2.

Ленинград.  
Электротехнический институт связи.

Поступило в Редакцию  
14 декабря 1939 г.



1943

## ИЗЛУЧЕНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ

Я. Н. Фельд

В статье излагается метод решения электромагнитных задач при наличии в пространстве металлических поверхностей с отверстиями.

Задача об излучении энергии через отверстия рассматривалась М. С. Нейманом [1].

Однако метод, предложенный им, содержит ряд допущений и применим только к малым отверстиям. Метод, развиваемый в настоящей работе, обладает значительной принципиальной общностью и применим к решению различных электромагнитных задач при наличии в пространстве замкнутых металлических поверхностей с отверстиями.

Поля, рассматриваемые в дальнейшем, мы будем считать гармонически изменяющимися во времени с угловой частотой  $\omega$ .

Уравнения Максвелла для таких полей, если зависимость от времени взята в форме  $e^{j\omega t}$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{C} E + \frac{4\pi}{C} i^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} E &= -j \frac{\omega\mu}{C} H. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $E$  и  $H$  — электрический и магнитный векторы поля,  $i^{\text{ст}}$  — вектор плотности сторонних токов (источников),  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  — электромагнитные параметры среды, являющиеся в общем случае разрывными функциями координат,  $C$  — электродинамическая постоянная.

Рассмотрим предварительно вспомогательную задачу, которую будем называть смешанной граничной задачей электродинамики. Заключается она в определении поля внутри замкнутой геометрической поверхности  $s$  по следующим данным:

1) на части  $s_1$  поверхности  $s$  задана тангенциальная составляющая<sup>1</sup> электрического вектора  $E_t$ ;

2) на оставшейся части  $s_2$  поверхности  $s$  задана тангенциальная составляющая магнитного вектора  $H_t$ ;

3) внутри поверхности  $s$  заданы источники  $i^{\text{ст}}$ . Как следует из „теоремы единственности“ [2], перечисленных данных вполне достаточно для однозначного определения поля внутри  $s$ .

Путь к решению этой задачи в основном намечен работами Зоммерфельда [3] и Свешниковой [4]. Следуя ему, поместим в точку наблюдения  $A$  внутри поверхности  $s$  вспомогательный электрический диполь с моментом  $p$ , колеблющийся с частотой основного поля  $\omega$ .

<sup>1</sup> Задать тангенциальную составляющую это значит задать ее величину и направление.

При определении поля  $E'$ ,  $H'$ , создаваемого этим диполем, будем считать геометрическую поверхность  $s$  обладающей бесконечной электрической проводимостью в части  $s_1$  и бесконечной магнитной проводимостью в части  $s_2$ . Тогда, как известно [5], поле  $E'$ ,  $H'$  должно удовлетворять на поверхности  $s$  следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} E'_t &= 0 \text{ на поверхности } s_1, \\ H'_t &= 0 \text{ на поверхности } s_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Применяя к полям  $E$ ,  $H$  и  $E'$ ,  $H'$  лемму Лорентца<sup>2</sup>, получим в нашем случае равенство

$$\operatorname{div} [E H'] - \operatorname{div} [E' H] = \frac{4\pi}{C} E' i_{\text{ст}}, \quad (3)$$

справедливое в точках регулярности обоих полей. Проинтегрируем равенство (3) по объему  $v$ , ограниченному поверхностью  $s$ , предварительно исключив из него места, где нарушается регулярность векторов полей. Тогда, применяя теорему Гаусса о преобразовании объемного интеграла в поверхностный и учитывая непрерывность тангенциальных составляющих поля на поверхностях разрыва параметров  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ , найдем

$$\int_{s+s_0} ([E H']_n - [E' H]_n) ds = \frac{4\pi}{C} \int_v E' i_{\text{ст}} dv. \quad (4)$$

Здесь  $s_0$  — сфера бесконечно-малого радиуса, выключающая диполь,  $v'$  — объем, ограниченный поверхностями  $s$  и  $s_0$ , а  $n$  — вектор внешней (по отношению к  $v'$ ) нормали к поверхностям  $s$  и  $s_0$ . Перейдем в уравнении (4) к пределу, когда радиус сферы  $s_0$  стремится к нулю. Учитывая при этом характер особенности поля<sup>3</sup>  $E'$ ,  $H'$  в месте нахождения диполя и граничные условия (2), получим следующую формулу

$$\begin{aligned} E_p(A) &= \frac{1}{C} \int_v E' i_{\text{ст}} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} [H' E]_n ds + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{s_2} [E' H]_n ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_p$  — проекция вектора  $E$  на направление момента диполя  $p$  в месте нахождения последнего.

Так как точка нахождения вспомогательного диполя и направление его момента произвольны, то формула (5) полностью определяет электрический вектор  $E$  внутри поверхности  $s$ .

<sup>2</sup> См. статью Зоммерфельда [8].

<sup>3</sup> Величина момента диполя при этом принята равной  $p = \frac{Cs}{4\pi\epsilon + j\omega\sigma}$ .

Аналогично формуле (5) выводится выражение для магнитного вектора  $\mathbf{H}$ . Для этого необходимо только заменить в точке наблюдения  $A$  электрический диполь магнитным с моментом  $\mathbf{m}$ .

Обозначая поле магнитного диполя буквами  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  и считая, что условия (2) остаются в силе, найдем, повторяя предыдущие рассуждения с учетом несколько видоизменившегося характера особенности поля<sup>4</sup> в точке  $A$ ,

$$H_m(A) = \frac{1}{C} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{i}^{ст} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} [\mathbf{H}' \mathbf{E}]_n ds + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{s_2} [\mathbf{E}' \mathbf{H}]_n ds. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) остаются справедливыми и для внешней по отношению к  $s$  области. Однако при этом необходимо наложить на искомое и на вспомогательные поля требование выполнения на бесконечности „принципа излучения“ Зоммерфельда, а под  $\mathcal{V}$  и  $\mathbf{n}$  следует понимать соответственно внешнее к  $s$  пространство и внешнюю (по отношению к последнему) нормаль к поверхности  $s$ .

Полученные формулы (5), (6) решают, таким образом, как внутреннюю, так и внешнюю граничные задачи электродинамики и являются по существу обобщением на случай уравнений Максвелла известных формул, дающих решение смешанной граничной задачи для уравнения Пуассона.

Роль функции Грина и ее производных играют при этом вспомогательные поля  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$ .

Следует отметить, что частный случай формулы (5) при  $\mathbf{i}^{ст} = 0$  и  $s_2 = 0$  дан в работе Свешниковой<sup>[4]</sup>.

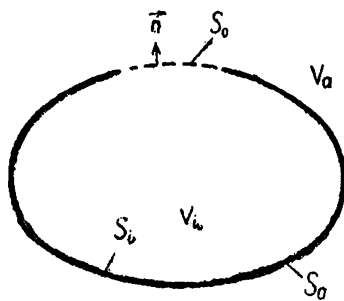


Рис. 1

Приступая к нашей основной задаче, рассмотрим произвольную полую идеально-проводящую<sup>5</sup> ( $\sigma = 0$ ) камеру (эндовибратор) с отверстием<sup>6</sup> (рис 1). Наружную и внутреннюю поверхности ее обозначим соответственно буквами  $s_a$  и  $s_i$ . Затянув отверстие камеры поверхностью  $s_0$ , разделим все пространства на две части: наружную  $\mathcal{V}_a$ , ограниченную поверхностью  $s_a + s_0$ , и внутреннюю  $\mathcal{V}_i$ , ограниченную поверхностью  $s_i + s_0$ .

Для того чтобы одновременно решить две задачи: 1) об излучении энергии из поллой камеры через отверстие и 2) о возбуждении поллой камеры через отверстие извне, зададим распределение источников  $\mathbf{i}^{ст}$  как снаружи, так и внутри камеры.

<sup>4</sup> Момент диполя принят равным  $\mathbf{m} = \mathbf{j} \frac{\mathcal{E}}{\omega}$ .

<sup>5</sup> При достаточно высоких частотах металл может считаться в задачах рассматриваемого типа идеально-проводящим.

<sup>6</sup> Излагаемый метод применим также при наличии нескольких отверстий.

В дальнейшем нам будет удобно искомое поле<sup>7</sup> в области  $v_i$  обозначать буквами  $E, H$ , а в области  $v_a$  буквами  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ . Определим поле  $E, H$  через значение тангенциальной составляющей  $E_t$  на поверхности  $s_i + s_o$ . Для этого положим в формулах (5) и (6)  $s_2 = 0, s_1 = s_i + s_o$ , после чего, учитывая, что на  $s_i$   $E_t$  равно нулю (камера идеально проводящая), найдем

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{1}{C} \int_{v_i} E' i^{ct} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{s_o} [H' E]_n ds; \\ H_m &= \frac{1}{C} \int_{v_i} E'' i^{ct} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{s_o} [H'' E]_n ds. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Напомним, что при нахождении вспомогательных полей  $E', H'$  и  $E'', H''$  поверхность  $s_i + s_o$  должна считаться обладающей бесконечной электрической проводимостью. Поле (снаружи)  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  найдем через значение  $\mathcal{E}_t$  на поверхности  $s_a$  и через значение  $\mathcal{H}_t$  на поверхности  $s_o$ . Для этого в формулах (5), (6) положим  $s_1 = s_a, s_2 = s_o$ . Так как на  $s_a$   $\mathcal{E}_t = 0$  и направление внешней (по отношению к  $v_a$ ) нормали к поверхности  $s_o$  равно  $-n$ , выражения для  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  примут вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_p &= \frac{1}{C} \int_{v_a} \vec{\mathcal{E}}' i^{ct} dv - \frac{1}{4\pi} \int_{s_o} [\vec{\mathcal{E}}' \vec{\mathcal{H}}]_n ds; \\ \mathcal{H}_m &= \frac{1}{C} \int_{v_a} \vec{\mathcal{E}}'' i^{ct} dv - \frac{1}{4\pi} \int_{s_o} [\vec{\mathcal{E}}'' \vec{\mathcal{H}}]_n ds. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При определении  $\vec{\mathcal{E}}', \vec{\mathcal{H}}'$  и  $\vec{\mathcal{E}}'', \vec{\mathcal{H}}''$  поверхность  $s_a (s_o)$  предполагается обладающей бесконечной электрической (магнитной) проводимостью. Для дальнейшего важно отметить, что какую бы непрерывную последовательность значений  $E_{0,t} (\mathcal{H}_{0,t})$ , заданных на поверхности  $s_o$ , мы ни подставили бы в правую часть формул (7), (8), поле  $E, H (\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}})$ , определяемое этими формулами, удовлетворяет в области  $v_i (v_a)$  уравнениям Максвелла (1).

При стремлении точки наблюдения к поверхности  $s_i (s_a)$   $E_t \rightarrow 0$  ( $\mathcal{E}_t \rightarrow 0$ ), а при стремлении к  $s_o$   $E_t \rightarrow E_{0,t} (\mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}_{0,t})$ .

Если бы при этом случайно оказалось, что тангенциальные составляющие векторов поля непрерывны при переходе через поверхность  $s_o$ , формулы (7) и (8) решили бы нашу задачу определения поля во всем пространстве  $v_i + v_a$ .

Однако, так как значения тангенциальных составляющих поля на поверхности  $s_o$  неизвестны, а рассчитывать на только что указанную случайность не приходится, то формулы (7), (8) непосредственно не дают решения задачи, и мы вынуждены искать другой путь.

Ниже излагается метод, дающий возможность обойти это затруднение и путем последовательных приближений построить искомое решение.

Зададим на поверхности  $s_o$  произвольную непрерывную последо-

<sup>7</sup> То же относится и к вспомогательным полям.

вательность значений  $E_{1,t}$ . Подставив ее в правую часть (7), найдем некоторое поле  $E_1, H_1$  (а значит и  $H_{1,t}$  на  $s_0$ ).

Положив затем

$$\mathfrak{H}_{1,t} = H_{1,t} \text{ на } s_0,$$

определим по формулам (8)  $\vec{\mathfrak{E}}_1$  и  $\vec{\mathfrak{H}}_1$ . Если при этом случайно окажется, что

$$\mathfrak{E}_{1,t} = E_{1,t} \text{ на } s_0,$$

то наша задача решена, в противном же случае перейдем к следующему приближению. Для этого положим

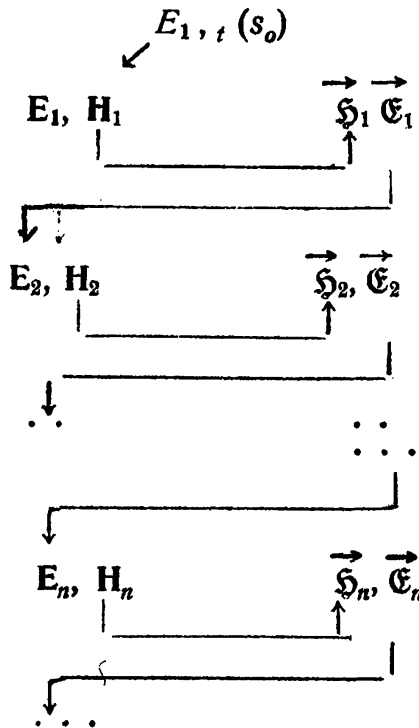
$$E_{2,t} = \mathfrak{E}_{1,t} \text{ на } s_0$$

и найдем по формулам (7)  $E_2$  и  $H_2$ .

Положив затем

$$\mathfrak{H}_{2,t} = H_{2,t} \text{ на } s_0,$$

определим  $\vec{\mathfrak{E}}_2$  и  $\vec{\mathfrak{H}}_2$  по формулам (8) и т. д. Продолжая этот процесс, получим две бесконечных последовательности:



Здесь стрелки показывают порядок перехода от одного приближения к другому, а также тангенциальную составляющую, которая остается при этом непрерывной на  $s_0$ . Из самого определения векторов  $E_n, H_n$  и  $\vec{\mathfrak{E}}_n, \vec{\mathfrak{H}}_n$  следует, что

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } H_n(\vec{\mathfrak{H}}_n) &= \frac{4\pi\sigma + j\omega\epsilon}{C} E_n(\vec{\mathfrak{E}}_n) + \frac{4\pi}{C} i^{ct}; \\ \text{rot } E_n(\vec{\mathfrak{E}}_n) &= -j\frac{\omega\mu}{C} H_n(\vec{\mathfrak{H}}_n) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} H_{n,t} = \mathfrak{H}_{n,t} \\ E_{n,t} = \mathfrak{E}_{n-1,t} \end{array} \right|_{\text{на } s_0} \left. \begin{array}{l} E_{n,t} = 0 \text{ на } s_l \\ \mathfrak{E}_{n,t} = 0 \text{ на } s_a \end{array} \right\} \quad (10)$$

Если рассматриваемый нами процесс сходится, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n &= \mathbf{E}; & \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\mathfrak{E}}_n &= \vec{\mathfrak{E}}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}; & \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\mathfrak{H}}_n &= \vec{\mathfrak{H}}, \end{aligned}$$

и векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\vec{\mathfrak{E}}$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}$  являются искомыми решениями, определяющими поле во всем пространстве  $v_t + v_a$ . Действительно, переходя в равенствах (9)<sup>8</sup>, (10) к пределу, при  $n \rightarrow \infty$  убедимся, что  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\vec{\mathfrak{E}}$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) и граничным условиям

$$\left[ \begin{array}{l} E_t = \mathfrak{E}_t \\ H_t = \mathfrak{H}_t \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} E_t = 0 \text{ на } s_l; \text{ на } s_0; \\ \mathfrak{E}_t = 0 \text{ на } s_a, \end{array} \right.$$

что и подтверждает сказанное. ✓

Из теоремы „единственности“ следует, что построенное таким образом решение не зависит от выбора величины  $E_{1,t}$ .

При рассмотрении задачи об излучении энергии через отверстие ( $i^{\text{ст}} = 0$  внутри  $v_a$ ) условие

$$\mathfrak{E}_t = 0 \text{ на } s_a$$

можно заменить следующим

$$\mathfrak{H}_t = 0 \text{ на } s_a.$$

Это не изменит практически поля снаружи излучающей камеры и в то же время облегчит нахождение вспомогательных полей  $\vec{\mathfrak{E}}'$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}'$  и  $\vec{\mathfrak{E}}''$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}''$ , так как даст возможность упростить граничные условия, заменив их следующими:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{H}_t' = 0 \\ \mathfrak{H}_t'' = 0 \end{array} \right|_{\text{на } s_0 + s_a.}$$

Формулы (7), (8) при этом останутся в силе.

#### Литература

- [1] М. С. Нейман. ИЭСТ, 6, 1, 1940. — [2] Я. Н. Фельд. ЖЭТФ, 8, 6, 754, 1938. — [3] А. Sommerfeld. Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph., 26, 93, 1925. — [4] М. П. Свешникова. ЖРФХО, 59, 5-6, 453. 1927. — [5] S. Scheikunoff The Belg. System Technical Journ., 15, 92, 1936.

Поступило в Редакцию  
19 декабря 1942 г.

<sup>8</sup> При этом приходится менять местами порядок операций rot и перехода к пределу.

## О РАСЧЕТЕ СТАТИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ АНТЕНН

Я. Н. Фельд

В статье приводятся примеры антенн, для которых неприменимы приближенные методы расчета емкости Хоу и Шулейкина.

Излагается способ расчета емкости произвольной системы проводников, с учетом неравномерного распределения зарядов на них.

### § 1. Введение

Строгий расчет емкости может быть выполнен фактически только для проводников простейшей геометрической формы.

Поэтому в технике для расчета емкости проводников сложной геометрической конфигурации применяются обычно приближенные методы или эмпирические формулы.

Таковыми методами являются, например, применяемые в радиотехнике методы Шулейкина<sup>[1]</sup> и Хоу<sup>[2]</sup>.

Первый из них применим к ограниченному числу случаев, главным образом к расчету емкости антенн, состоящих из горизонтальных и вертикальных параллельных проводов одинакового радиуса. При этом емкость горизонтальной и вертикальной частей антенны рассчитывается отдельно, без учета их влияния друг на друга. Метод Хоу обладает значительно большей универсальностью и применим к значительно большему числу случаев. Однако основное допущение Хоу о равномерном распределении поверхностной плотности зарядов на всех соединенных между собою проводниках иногда совершенно не соответствует действительности; применение метода Хоу часто приводит к значительным ошибкам.

К таким случаям следует отнести:

1. Г-образные, Т-образные и зонтичные сети с разветвленной горизонтальной частью, у которых снижением служит один или несколько свернутых в жгут проводов.

2. Зонтичные или иные антенны с горизонтальной частью, у которых снижением служит тело изолированной у основания металлической мачты, поддерживающей сеть.

3. И, наконец, вообще системы, куда входят проводники с сильно различающимися радиусами.

В настоящей работе излагается общий метод, позволяющий рассчитать емкость системы проводников любой конфигурации, с учетом неравномерного распределения зарядов на них.

Расчет емкости системы соединенных между собой проводников сводится к нахождению суммарного заряда системы  $Q$  по заданному потенциалу проводников  $\varphi$ . Емкость определяется далее формулой:

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Таким образом, найдя закон распределения плотности зарядов на проводниках, задачу об определении их емкости можно считать решенной. Имея в виду применение рассматриваемого метода к расчету емкости антенн с учетом влияния окружающих предметов, мы

разбираем в дальнейшем более общую задачу — когда некоторые из проводников системы электрически не соединены между собой и имеют различные потенциалы.

## §. 2. Расчет распределения плотности зарядов на проводниках

Рассмотрим произвольную систему проводников, часть которых может быть соединена между собой.

Наша задача сводится к нахождению распределения плотности зарядов на проводниках  $\sigma$  по заданным потенциалам проводников  $\varphi$ .

Как известно из электростатики, эта задача допускает единственное решение, удовлетворяющее интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\varphi(a) = \int_{\Sigma_s} \frac{\sigma(q)}{r_{aq}} ds_q. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi(a)$  — заданный потенциал в произвольной точке наблюдения  $a$ , находящейся на поверхности одного из проводников (само собой понятно, что  $\varphi(a) = \text{const}$  на поверхности каждого из проводников; интегрирование в правой части уравнения (1) производится по поверхностям  $s$  всех проводников),  $r_{aq}$  — расстояние между точкой наблюдения  $a$  и переменной точкой  $q$ , по координатам которой производится интегрирование,  $\sigma(q)$  — искомая поверхностная плотность зарядов.

Применим для решения уравнения (1) приближенный метод, который может быть, однако, проведен с любой наперед заданной точностью. Для этого разобьем поверхности проводников на отдельные части  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )<sup>1</sup>, настолько малые, чтобы в пределах каждой из этих частей поверхностная плотность  $\sigma$  могла быть принята постоянной. Тогда уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{s_i} \frac{ds_{qi}}{r_{aqi}},$$

где  $\sigma_i$  — плотность заряда на поверхности  $s_i$  (в силу сказанного выше, она вынесена за знак интеграла). Выбрав в пределах каждой поверхности  $s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) произвольную точку  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и положив в предыдущем уравнении последовательно:

$$a = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

придем к следующей системе уравнений, которой удовлетворяют искомые величины  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ):

$$\varphi(a_k) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{s_i} \frac{ds_{qi}}{r_{akqi}} \quad (2)$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Окончательную систему уравнений для  $\sigma_i$  получим, усреднив уравнения (2) по соответствующим поверхностям  $s_k$ . Учитывая, что потенциал  $\varphi(a_k)$  остается постоянным, когда точка  $a_k$  пробегает поверхность  $s_k$ , найдем:

<sup>1</sup> Нумерация частей  $s_i$ , общая для всех проводников.



$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{1}{s_k} \int_{s_k} ds_{ak} \int_{s_i} \frac{ds_{qi}}{r_{aki}} \quad (3)$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Здесь  $\varphi_k$  — потенциал поверхности  $s_k$ .

И, наконец, вводя сокращенные обозначения<sup>2</sup>:

$$b_k^i = \frac{1}{s_k} \iint_{s_k s_i} \frac{ds_i ds_k}{r_{ki}} \quad (4)$$

перепишем уравнение (3) в виде:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n b_k^i \sigma_i \quad (5)$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Легко убедиться, что в пределе, когда  $n \rightarrow \infty$  так, что при этом  $s_i$  стремятся к нулю, приближенная система уравнений (5) переходит в точное уравнение (1).

Так как потенциалы проводников  $\varphi_k$  заданы, то определение плотности зарядов сводится к решению системы, состоящей из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Решение такой системы элементарно и в общем виде может быть дано в определителях, на чем мы не останавливаемся.

Для расчета коэффициентов  $b_k^i$  [формула (4)], входящих в уравнение (5), можно пользоваться кривыми, таблицами и формулами, применяемыми при расчете емкости по методу Хоу. Действительно, учитывая формулу (4), легко сообразить, что члены  $b_k^i \sigma_i$ , входящие в уравнение (5), представляют не что иное, как средний потенциал<sup>3</sup>, наведенный на поверхность  $s_k$  зарядами, находящимися на поверхности  $s_i$ . Вводя обозначения

$$\varphi_{\text{ср } ki} = b_k^i \sigma_i,$$

можно придать уравнениям (5) привычный для метода Хоу вид:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n \varphi_{\text{ср } ki} \quad (5a)$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), с той только разницей, что, в отличие от метода Хоу, плотности зарядов на различных поверхностях проводников  $s_i$  предполагаются различными.

Уравнение метода Хоу можно получить, положив в формулах (5)  $\sigma_i = \sigma$  для любых  $i$  (ограничиваясь случаем соединенных между собой проводников), после чего найдем:

$$\varphi_k = \sigma \sum_{i=1}^n b_k^i \quad (6)$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Однако этой системе нельзя удовлетворить при заданных (равных друг другу) значениях  $\varphi_{ki}$ ; поэтому в методе Хоу задаются зна-

<sup>2</sup> Здесь введено само собой понятное упрощение индексов при  $ds$  и  $r$ .

<sup>3</sup> По терминологии, применяемой в методе Хоу.

чением  $\sigma$  и по формуле (6) определяют потенциалы  $\varphi_k$  различных частей системы; последние получаются, вообще говоря, неравными друг другу. Степень их неравенства и является критерием применимости метода Хоу.

Уравнениям (5) можно придать форму, совпадающую с формой известных уравнений Максвелла для потенциалов:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_i,$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ),

где  $Q_i = \sigma_i s_i$  — заряд на поверхности  $s_i$ , а

$$p_{ki} = \frac{1}{s_i} b_{ki} = \frac{1}{s_i s_k} \iint_{s_i s_k} \frac{ds_i ds_k}{r_{ik}}. \quad (6a)$$

Величины  $p_{ki}$ , очевидно, играют роль потенциальных коэффициентов. Однако, так как уравнения (6), в отличие от упомянутых уравнений Максвелла, являются приближенными, то формулу (6a) следует рассматривать как приближенное выражение для потенциальных коэффициентов.

Изложенный здесь способ позволяет с какой угодно точностью рассчитать как распределение зарядов, так и емкость любой системы проводников. Для этого необходимо только разбить поверхности проводников на достаточно малые элементы  $s_i$ .

### § 3. Пример

Рассчитаем емкость зонтичной антенны, имеющей следующие данные:

1. Зонтик антенны состоит из четырех симметрично расположенных лучей длиной 25 м, образующих с вертикалью угол  $45^\circ$ . Диаметр луча — 5 мм.

2. Вертикальная часть антенны (снижение) состоит из трех параллельных проводов длиной 35 м, находящихся в одной плоскости. Средним проводом является металлическая изолированная у основания мачта, поддерживающая антенну. Диаметр мачты — 75 мм.

3. Крайние провода имеют диаметр 4 мм и натянуты параллельно мачте на расстоянии 1 м от нее.

Для сокращения расчета мы не будем учитывать влияния земли (что, однако, легко проделать, пользуясь принципом „зеркального изображения“).

Разобьем антенну на три части: зонтик, мачту и крайние провода снижения. Будем считать поверхностную плотность заряда постоянной в пределах каждой из указанных частей и равной, соответственно,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Для определения плотностей зарядов воспользуемся системой уравнений в форме (5a), которая в нашем случае принимает вид:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^3 \varphi_{sp\ k^i} \quad (7)$$

( $k = 1, 2, 3$ ).

Так как все три части антенны электрически соединены между собой, то

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi.$$

Для нахождения величины  $\varphi_{\text{ср } ki}$ , означающей средний потенциал, наведенный на  $k$ -тую часть антенны зарядами, расположенными на  $i$ -той части, следует полностью использовать методику, формулы, таблицы и кривые метода Хоу, помня при этом, что  $\varphi_{\text{ср } ki}$  пропорционально  $\sigma_i$ .

Не останавливаясь на деталях расчета  $\varphi_{\text{ср } ki}$ , подробные сведения о которых можно найти в любом курсе по радиосетям, приведем только окончательные уравнения для  $\sigma_i$ , полученные в результате подстановки в (7) вычисленных значений  $\varphi_{\text{ср } ki}$ :

$$\begin{aligned} 6,00 \sigma_1 + 11,25 \sigma_2 + 1,20 \sigma_3 &= \varphi/2 \pi; \\ 2,16 \sigma_1 + 49,00 \sigma_2 + 2,60 \sigma_3 &= \varphi/2 \pi; \\ 2,16 \sigma_1 + 24,35 \sigma_2 + 4,81 \sigma_3 &= \varphi/2 \pi. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно  $\sigma_i$ , найдем:

$$\sigma_1 = 0,129 \varphi/2 \pi; \quad \sigma_2 = 0,009 \varphi/2 \pi; \quad \sigma_3 = 0,104 \varphi/2 \pi.$$

По этим цифрам видно, что основное допущение метода Хоу о постоянстве поверхностной плотности заряда вдоль антенны в нашем примере явно не выполняется.

Зная поверхностную плотность зарядов на различных частях антенны, легко найти суммарный заряд  $Q$ , а затем и емкость антенны по формуле:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 587 \text{ см.}$$

#### Литература

- [1] М. В. Шулейкин. Телеграфия и телефония без проводов, № 1, 1918. —  
[2] М. С. Нейман. Передающие антенны, 1934.

г. Красноярск

Поступило в редакцию  
9 марта 1943 г.

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ  
ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ**

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 24 VI 1943)

Теорема взаимности в электродинамике, насколько нам известно, рассматривалась только для случая установившихся гармонических колебаний (<sup>1,2</sup>). В настоящей работе теорема взаимности распространяется на неустановившиеся электромагнитные процессы, любым образом изменяющиеся во времени.

Вывод этой теоремы, как и в случае гармонических колебаний, проведем, используя лемму, являющуюся обобщением известной (<sup>1</sup>) леммы Лоренца.

1. Обобщенная лемма Лоренца. Рассмотрим два произвольных электромагнитных поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , удовлетворяющих в некоторой области пространства уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{pmatrix} &= \left\{ \frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{pmatrix}; \\ \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{pmatrix} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при следующих начальных условиях

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ для } t \leq 0. \quad (1a)$$

Электромагнитные параметры среды  $\epsilon, \mu, \sigma$ , входящие в уравнения (1), в общем случае являются функциями пространственных координат. Искомую лемму проще всего получить, используя операционный метод. Для этого введем изображения векторов поля

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_1 &\doteq \vec{E}_1; \quad \vec{\mathcal{H}}_1 \doteq \vec{H}_1; \\ \vec{\mathcal{E}}_2 &\doteq \vec{E}_2; \quad \vec{\mathcal{H}}_2 \doteq \vec{H}_2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

связанные с соответствующими векторами поля известными интегральными соотношениями Карсона и Бромвича (<sup>3</sup>).

Уравнения для изображений получим, заменив в равенствах (1) оператор  $\frac{\partial}{\partial t}$  параметром  $p$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{H}}_1 \\ \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix} &= \frac{4\pi\sigma + \epsilon p}{c} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_1 \\ \vec{\mathcal{E}}_2 \end{pmatrix}; \\ \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_1 \\ \vec{\mathcal{E}}_2 \end{pmatrix} &= -\frac{\mu}{c} p \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{H}}_1 \\ \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Поскольку равенства (3) для изображений отличаются от уравнений Максвелла для гармонических установившихся колебаний только тем, что в них  $j\omega$  заменено параметром  $p$ , то для изображений, как и для векторов поля в случае гармонических колебаний, справедлива лемма Лоренца (1)

$$\operatorname{div} [\vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\mathcal{H}}_2] = \operatorname{div} [\vec{\mathcal{E}}_2 \vec{\mathcal{H}}_1]. \quad (4)$$

Равенству (4) для изображений векторов поля соответствует, очевидно, некоторое уравнение, связывающее между собой вектора поля. Для нахождения его разделим равенство (4) на  $p$ , после чего, применяя основные теоремы операционного исчисления и, в частности, теорему Бореля, найдем

$$\int_0^t \operatorname{div} [\vec{E}_1(t-\tau) \vec{H}_2(\tau)] d\tau = \int_0^t \operatorname{div} [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] d\tau. \quad (5)$$

Интегрируя равенство (5) по произвольной области  $v$ , ограниченной поверхностью  $s$ , внутри которой выполняются уравнения (1), и применяя затем теорему Гаусса, придадим равенству (5) более удобный для приложений вид

$$\int_0^t d\tau \int_s [\vec{E}_1(t-\tau) \vec{H}_2(\tau)] \vec{d}s = \int_0^t d\tau \int_s [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] \vec{d}s. \quad (5a)$$

Вектора поля, фигурирующие в формулах (5) и (5a), зависят также от пространственных координат, но для сокращения записи это явно не отмечено. Полученные равенства (5) и (5a) являются обобщениями леммы Лоренца на случай произвольных неуставившихся процессов, удовлетворяющих начальным условиям (1a). Обобщенная лемма Лоренца может быть непосредственно использована для обоснования теоремы взаимности, к выводу которой мы и перейдем.

2. Теорема взаимности. Рассмотрим теорему взаимности применительно к двум произвольным антеннам, любым образом расположенным в пространстве с изменяющимися от точки к точке параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ . Будем считать антенны идеально проводящими, т. е. токи в них текущими только по поверхностям, что в большой степени соответствует действительности для металлических проводников на радиочастотах. Рассмотрение конечной проводимости антенн потребовало бы введения объемного распределения сторонних эдс и некоторого усложнения леммы (5a), не изменяя ничего в окончательных результатах. Обозначим поле, создаваемое первой антенной при приложении к ее поверхности сторонней эдс  $\vec{E}_1^{cm}$ , буквами  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  (при этом вторая антенна играет роль приемной). Поле, создаваемое второй антенной при приложении к ее поверхности сторонней эдс  $\vec{E}_2^{cm}$ , обозначим буквами  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  (первая антенна играет роль приемной).

Применим к полям  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  обобщенную лемму Лоренца (5a), причем под поверхностью  $s$  будем подразумевать поверхности антенн  $s_1$  и  $s_2$ , ограничивающие пространство (заполненное электромагнитными полями) изнутри, и поверхность сферы бесконечно большого радиуса, ограничивающей пространство снаружи. Так как интеграл по последней поверхности равен нулю, то равенство (5a) в нашем случае принимает вид

$$\int_0^t d\tau \int_{s_1+s_2} [\vec{E}_1(t-\tau) \vec{H}_2(\tau)] \vec{d}s = \int_0^t d\tau \int_{s_1+s_2} [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] \vec{d}s. \quad (6)$$

Для преобразования этого уравнения используем известные из электродинамики условия для тангенциальных составляющих векторов поля на поверхности идеальных проводников (антенн) с учетом приложенных сторонних эдс:

$$E_{1,t} = \begin{cases} -E_{1,t}^{cm} & \text{на } s_1; \\ 0 & \text{на } s_2; \end{cases} \quad E_{2,t} = \begin{cases} -E_{2,t}^{cm} & \text{на } s_2; \\ 0 & \text{на } s_1; \end{cases} \quad (7)$$

$$[\vec{n} \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}_2 \text{ на } s_2; \quad [\vec{n} \vec{H}_2] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}_1 \text{ на } s_1. \quad (7a)$$

Здесь  $\vec{i}_1$  и  $\vec{i}_2$  — поверхностные плотности токов на первой и второй антеннах, когда они работают как приемные, а  $\vec{n}$  — единичный вектор, нормальный к соответствующей поверхности. Умножив уравнения (7a) векторно на  $\vec{n}$ , придадим им несколько иной вид:

$$\vec{H}_1 = (\vec{n} \vec{H}_1) \vec{n} - \frac{4\pi}{c} [\vec{n} \vec{i}_2] \text{ на } s_2; \\ \vec{H}_2 = (\vec{n} \vec{H}_2) \vec{n} - \frac{4\pi}{c} [\vec{n} \vec{i}_1] \text{ на } s_1.$$

Подставляя эти значения  $\vec{H}$  в равенство (6) и учитывая условия (7), получим после элементарных преобразований искомую теорему взаимности

$$\int_0^t d\tau \int_{s_1} \vec{E}_1^{cm}(t-\tau) \vec{i}_1(\tau) ds = \int_0^t d\tau \int_{s_2} \vec{E}_2^{cm}(t-\tau) \vec{i}_2(\tau) ds. \quad (8)$$

В частном случае (обычно имеющем место на практике), когда сторонняя эдс приложена на небольшом линейном участке антенны, вдоль которого сила тока может считаться постоянной, теорема взаимности приобретает особенно наглядную форму:

$$\int_0^t I_1(\tau) \mathcal{E}_1(t-\tau) d\tau = \int_0^t I_2(\tau) \mathcal{E}_2(t-\tau) d\tau. \quad (9)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  — полные токи в первой и второй антеннах (при работе их как приемные), протекающие на линейных участках, к которым прикладываются сторонние эдс при работе антенн как передающие, а  $\mathcal{E}_1 = \int \vec{E}_1^{cm} d\vec{l}$  и  $\mathcal{E}_2 = \int \vec{E}_2^{cm} d\vec{l}$  — полные эдс, прикладываемые к антеннам ( $d\vec{l}$  — элемент длины).

Рассмотрим еще теорему взаимности применительно к точечным источникам — электрическим диполям. Для этого применим лемму Лоренца (5a) к полям  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , создаваемым электрическими диполями, находящимися соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Понимая под поверхностью  $s$  две бесконечно малых сферы  $s_1$  и  $s_2$ , выключаящие места нахождения диполей  $A_1$  и  $A_2$ , в которых нарушается регулярность векторов поля, перепишем равенство (5a) так

$$\int_0^t d\tau \int_{s_1+s_2} [\vec{E}_1(t-\tau) \vec{H}_2(\tau)] \vec{ds} = \int_0^t d\tau \int_{s_1+s_2} [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] \vec{ds}. \quad (10)$$

Если в непосредственной близости к обоим диполям имеют место однородные среды с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1 = 0^*$  и  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$ , то главная часть поля вблизи создавшего его диполя имеет

$$\left. \begin{aligned} \text{главная часть } \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon} \text{grad div } \vec{\Pi} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}; \\ \text{главная часть } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi}; \quad \vec{\Pi} = \frac{p(t - \frac{r}{v})}{r} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $p(t)$  — электрический момент диполя.

\* Вне непосредственной окрестности диполей  $\sigma$  может быть произвольной функцией координат.

Переходя в равенстве (10) к пределу, устремляя радиусы сфер  $s_1$  и  $s_2$  к нулю и учитывая при этом формулы (11) и начальные условия (1а), найдем после несложных вычислений\*

$$\int_0^t \vec{p}_1(\tau) \cdot \vec{E}_2(t-\tau) dz = \int_0^t \vec{p}_2(\tau) \cdot \vec{E}_1(t-\tau) d\tau. \quad (12)$$

Здесь  $\vec{E}_1$  ( $\vec{E}_2$ ) — электрический вектор, созданный первым (вторым) диполем в месте нахождения второго (первого).

Равенство (12) и характеризует собой искомую теорему взаимности для случая электрических диполей.

Поступило  
24 VI 1943

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Sommerfeld, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph., 26, 93 (1925).<sup>2</sup> М. П. Свешникова, ЖРФХО (часть физич.), 59, № 5—6 (1937).<sup>3</sup> А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, 1937.

\* Вычисления эти мало отличаются от аналогичных вычислений, сделанных Свешниковой (2) для случая гармонических установившихся колебаний.

1944

## ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИФФРАКЦИИ

Я. Фелд

В статье дано полное решение первой граничной задачи электродинамики для гармонических колебаний. Полученные результаты использованы для приведения ряда задач электромагнитной дифракции к решению интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода.

### § 1. Первая граничная задача электродинамики

Значительное число задач электродинамики сводится к определению электромагнитного поля, создаваемого заданными источниками в пространстве, ограниченном (изнутри или снаружи) металлическими поверхностями. К таким задачам относятся: дифракция электромагнитных волн около металлических тел и экранов с отверстиями, возбуждение колебаний внутри металлических полых камер-эндовибраторов, излучение из эндовибраторов через отверстия и т. п.

Все задачи подобного типа фактически сводятся к следующей. Требуется найти в пространстве  $\mathcal{V}$ , ограниченном поверхностью  $s$ , поле с тангенциальной составляющей электрического вектора, обращаемой у поверхности  $s$  в нуль<sup>1</sup>.

Эта задача является по существу частным случаем первой граничной задачи электродинамики<sup>2</sup>, к формулировке и изучению которой мы и перейдем. При этом отметим, что в настоящей работе мы будем заниматься исключительно гармоническими колебаниями с угловой частотой  $\omega$ .

Будем называть первой граничной задачей электродинамики задачу, при которой требуется определить электромагнитное поле в пространстве  $\mathcal{V}$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $s$ , по заданным на ней тангенциальным составляющим электрического вектора. Если внутри рассматриваемой поверхности  $s$  имеются источники, то они должны считаться известными. Ниже будет доказано, что решение сформулированной задачи дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(q') &= \int_{(s)} \mathbf{E}''(q', q; \mathbf{A}) ds + \frac{1}{c} \int_{(\mathcal{V})} \mathbf{E}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}}) d\mathcal{V} - a(q') \mathbf{j}^{\text{ст}}(q'), \\ \mathbf{H}(q') &= \int_{(s)} \mathbf{H}''(q', q; \mathbf{A}) ds + \frac{1}{c} \int_{(\mathcal{V})} \mathbf{H}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}}) d\mathcal{V}, \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} [\bar{\mathbf{E}} \mathbf{n}], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где использованы следующие обозначения:

$\mathbf{E}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}})$ ,  $\mathbf{H}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}})$  — электрический и магнитный векторы, создаваемые в точке  $q'$  вспомогательным электрическим диполем, находящимся в точке  $q$  и обладающим электрической силой<sup>3</sup>, равной  $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ .

<sup>1</sup> Предполагается, что металлические поверхности обладают идеальной проводимостью.

<sup>2</sup> О граничных задачах электродинамики см. [1] и [2].

<sup>3</sup> Электрическая сила  $\mathbf{p}$  связана с электрическим моментом диполя  $\mathbf{p}'$  соотношением  $\mathbf{p} = \frac{k_1}{\epsilon} \mathbf{p}'$ . См. по этому поводу статью Свейшниковой [1].



$\mathbf{E}''(q', q; \mathbf{A}), \mathbf{H}''(q', q; \mathbf{A})$  — векторы поля, создаваемые в  $q'$  вспомогательным магнитным диполем, находящимся в  $q$  и обладающим магнитной силой <sup>4</sup>, равной  $\mathbf{A}$ .

При нахождении обоих вспомогательных полей  $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$  и  $\mathbf{E}'', \mathbf{H}''$  геометрическая поверхность  $s$  предполагается обладающей бесконечной электрической проводимостью.

$\mathbf{j}^{\text{ст}}$  — плотность сторонних токов (источников).

$\mathbf{n}$  — единичный вектор наружной (по отношению к  $v$ ) нормали к  $s$ .

$\bar{E}_t$  — тангенциальная составляющая электрического вектора, заданная на  $s$ , которую мы будем считать кусочнонепрерывной (хотя под знаком векторного умножения в выражении для  $\mathbf{A}$  стоит  $\bar{\mathbf{E}}$ , а не  $\bar{E}_t$ , легко сообразить, что  $\mathbf{A}$  зависит только от  $\bar{E}_t$ ).

$q'$  — точка наблюдения.

$q$  — переменная точка, по координатам которой производится интегрирование в формулах (1).

$$a(q') = \frac{4\pi}{3c} \frac{1}{k_1(q')}, \quad k_1 = \frac{4\pi\sigma + j\omega\varepsilon}{c}$$

$\varepsilon, \mu, \sigma$  — электромагнитные параметры среды, являющиеся кусочнопостоянными функциями координат.

$c$  — электродинамическая постоянная.

Наличие третьего члена в первой из формул (1) и отсутствие его во второй обусловлено отсутствием сторонних магнитных токов. Необходимо также отметить, что объемный интеграл в первой из формул (1) следует понимать в смысле „главного значения“ Коши.

Докажем прежде всего, что равенства (1) удовлетворяют в любой регулярной <sup>5</sup> точке  $q'$  внутри  $s$  неоднородным уравнениям Максвелла (неоднородность их обусловлена наличием в первом из них члена  $\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ст}}$ ).

Первые члены (поверхностные интегралы) формул (1) определяют собой некоторое электромагнитное поле, источники которого находятся на поверхности  $s$ , а потому эти члены удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла. Таким образом, остается показать, что остальные члены формул (1)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{c} \int_{(v)} \mathbf{E}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}}) d\mathbf{v} - a(q') \mathbf{j}^{\text{ст}}(q'), \\ \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \int_{(v)} \mathbf{H}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}}) d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

удовлетворяют неоднородным уравнениям Максвелла.

Действительно, подставив в первое уравнение Максвелла вместо вектора  $\mathbf{h}$  его значение из формул (2), а во второе уравнение Максвелла значение  $\mathbf{e}$  из тех же формул, получим

$$\left. \begin{aligned} k_1(q') \mathbf{e} &= \text{rot}' \frac{1}{c} \int_{(v)} \mathbf{H}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}}) d\mathbf{v} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ст}}(q'), \\ k_2(q') \mathbf{h} &= \text{rot}' \frac{1}{c} \int_{(v)} \mathbf{E}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{ст}}) d\mathbf{v} - \text{rot}' \{ a(q') \mathbf{j}^{\text{ст}}(q') \}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь  $k_2 = -j\omega \frac{\mu}{c}$ , а штрих у  $\text{rot}$  означает, что при взятии этой операции переменной считается точка  $q'$ . Теперь остается доказать, что уравнения (3)

<sup>4</sup> Магнитная сила  $\mathbf{m}$  связана с магнитным моментом диполя  $\mathbf{m}'$  соотношением  $\mathbf{m} = -j \frac{\omega}{c} \mathbf{m}'$ .

<sup>5</sup> Точка  $q'$  называется регулярной, если  $\varepsilon, \mu, \sigma$  и  $\mathbf{j}^{\text{ст}}$  в ней непрерывны, включая их первые производные.

тождественны формулам (2). Для этого построим бесконечно малую сферу  $s_0$  с центром в точке  $q'$ , ограничивающую объем  $v_0$ , и запишем первые члены правой части равенства (3) в виде <sup>6</sup>

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \frac{1}{c} \int_{(v_0)} \mathbf{H}' dv + \text{rot}' \frac{1}{c} \int_{(v_1)} \mathbf{H}' dv, \\ \text{rot}' \frac{1}{c} \int_{(v_0)} \mathbf{E}' dv + \text{rot}' \frac{1}{c} \int_{(v_1)} \mathbf{E}' dv, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $v = v_0 + v_1$ .

В окрестности  $q$  электромагнитные векторы вспомогательного поля могут быть представлены так <sup>7</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}' &= \text{rot}' \vec{\Pi} + O_1(1) = -\text{rot}(f \mathbf{j}^{\text{CT}}(q)) + O_1(r^{-1}), \\ \mathbf{E}' &= \frac{1}{k_1(q)} \text{rot}' \text{rot}' \vec{\Pi} + O_2(1) = \left( \frac{\mathbf{j}^{\text{CT}}(q)}{k_1(q)}, \vec{\nabla} \right) \text{grad} f + O_3(r^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь

$$\vec{\Pi} = f \mathbf{j}^{\text{CT}}, \quad f = \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad k = \sqrt{k_1 k_2}, \quad (5')$$

$r$  — радиус-вектор, соединяющий точки  $q'$  и  $q$ .

Используя формулы (5) и известные теоремы о преобразовании объемных интегралов в поверхностные, найдем, учитывая, что при  $q = q'$   $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$  обращаются в бесконечность:

$$\begin{aligned} \int_{(v_0)} \mathbf{H}' dv &= - \int_{(s_0)} f [d\mathbf{s} \mathbf{j}^{\text{CT}}] + \int_{(v_0)} O_1(r^{-1}) dv, \\ \int_{(v_0)} \mathbf{E}' dv &= \int_{s_0} (\mathbf{j}^{\text{CT}} d\mathbf{s} \frac{1}{k_1} \text{grad} f + \frac{4\pi}{3k_1(q')} \mathbf{j}^{\text{CT}}(q') + \int_{(v_0)} O_3(r^{-1}) dv. \end{aligned}$$

Подставив это в выражения (4), получим две суммы, в которых всюду можно поменять местами порядок операций  $\text{rot}'$  и интегрирования. Если учесть при этом, что  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$  удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла, и затем перейти к пределу, стягивая  $s_0$  (а значит и  $v_0$ ) к нулю, выражения (4) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1(q')}{c} \int_{(v)} \mathbf{E}' dv + \frac{8\pi}{3c} \mathbf{j}^{\text{CT}}(q'), \\ \frac{k_2(q')}{c} \int_{(v)} \mathbf{H}' dv + \frac{4\pi}{3c} \text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}^{\text{CT}}(q')}{k_1(q)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Заменяя в равенстве (3) первые члены правой части равными им выражениями (4'), получим формулы, тождественные равенствам (2), что и доказывает наше предложение.

Остается изучить поведение составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , определяемых формулами (1), у поверхности  $s$ .

Считая замкнутую поверхность  $s$  обладающей кусочнонепрерывно изменяющимися касательной плоскостью и кривизной, условимся называть регулярными те точки поверхности  $s$ , в которых: 1) непрерывна заданная тангенциальная составляющая электрического вектора  $\vec{E}_t$ ; 2) существуют непрерывно изменяющиеся касательная плоскость и кривизна; 3) непрерывны изнутри, включая

<sup>6</sup> Здесь и ниже мы будем опускать аргументы у функций в тех случаях, когда это не может вызвать путаницы.

<sup>7</sup> Здесь и ниже символом  $O(r^{-n})$  обозначены функции, удовлетворяющие условию  $\lim_{r \rightarrow 0} r^n O(r^{-n}) = \text{конечной величины}$ .

первые производные, электромагнитные параметры среды и плотность источников  $j^{ct}$ .

Покажем теперь, что при стремлении (изнутри) точки наблюдения  $q'$  к произвольной регулярной точке  $q_1$  поверхности  $s$  тангенциальная составляющая вектора  $E$ , определяемого первой формулой (1), стремится к заданному на  $s$  значению  $\bar{E}_t(q_1)$ . Переходя к доказательству, найдем прежде всего проекцию вектора  $E(q)$  на произвольное направление  $t_1$  ( $t_1 = 1$ ), лежащее в плоскости, касательной к  $s$  в точке  $q_1$ . Первое из равенств (1) дает для этой проекции выражение

$$E_{t_1}(q) = \int_{(s)} E''_{t_1} ds + \frac{1}{c} \int_{(v)} E'_t dv - a(q) j^{ct}_1(q'). \quad (6)$$

Рассмотрим поведение поверхностного интеграла

$$W(q') = \int_{(s)} E''_{t_1} ds. \quad (7)$$

Подинтегральное выражение формулы (7), очевидно, может быть представлено в форме

$$E''_{t_1}(q', q; A) = \text{rot}_{t_1}(2fA) + O(1). \quad (8)$$

Наличие двойки под знаком ротора в этом выражении обусловлено нахождением магнитного диполя с магнитной силой  $A$  непосредственно у поверхности  $s$  (при расчете вспомогательных полей  $s$  предполагается идеально проводящей). Подставляя в равенство (8) вместо  $A$  и  $f$  их значения из формул (1') и (5') и производя несложные преобразования, найдем

$$E''_{t_1}(q', q; A) = \frac{1}{2\pi r^3} \left\{ (rn) \bar{E}_t - (r\bar{E}) n_{t_1} \right\} + O_1(1). \quad (9)$$

Подставим полученное выражение в формулу (7)

$$W(q') = \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} \frac{(rn)}{r^3} \bar{E}_t ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} \frac{(r\bar{E})}{r^3} n_{t_1} ds + \int_{(s)} O_1(1) ds$$

и исследуем поведение  $W(q')$ , при стремлении  $q'$  к точке  $q_1$ , находящейся на  $s$ .

Второй и третий интегралы предыдущей формулы непрерывны в точке  $q_1$ . Второй — потому, что множитель  $n_{t_1}$ , стоящий под интегралом, обращается в нуль в точке  $q = q_1$ , третий — так как подинтегральное выражение  $O_1(1)$  непрерывно при  $r = 0$ . Что же касается первого интеграла, то он имеет характер потенциала двойного слоя и потому при стремлении  $q'$  к  $q_1$  испытывает скачок, равный  $\bar{E}_t(q_1)$ . Аналогичный скачок, очевидно, испытывает и  $W(q')$ . Таким образом,

$$\lim_{q' \rightarrow q_1} W(q') = W(q_1) + \bar{E}_t(q_1). \quad (10)$$

Легко показать, что  $W(q_1)$  равно нулю. Действительно, под интегралом в формуле (7) для  $W(q_1)$  при этом стоит величина  $E''_{t_1}(q_1, q; A)$ , равная нулю для всех точек  $q (\neq q_1)$  поверхности  $s$ . А отсюда немедленно следует по самому определению интеграла равенство  $W(q_1) = 0$ , после чего формула (10) принимает вид:

$$\lim_{q' \rightarrow q_1} W(q') = \bar{E}_t(q_1). \quad (11)$$

Перейдем теперь к рассмотрению объемного интеграла

$$W_1(q') = \frac{1}{c} \int_{(v)} E'_t dv, \quad (12)$$

входящего в формулу (6).

Используя теорему взаимности для электрических диполей [8], можно написать следующую цепь равенств

$$\begin{aligned} W_1(q') &\equiv \frac{1}{c} \int_{(v)} E'_k(q, q'; j^{ct}) dv = \frac{1}{c} \int_{(v)} j^{ct} E'(q, q'; t_1) dv = \\ &= \frac{1}{c} \int_{(v)} \frac{j^{ct}}{k_1} \operatorname{rot} H'(q, q'; t_1) dv = \\ &= \frac{1}{c} \int_{(v)} H'(q, q'; t_1) \operatorname{rot} \left( \frac{j^{ct}}{k_1} \right) dv - \frac{1}{c} \int_{(v)} \operatorname{div} \left[ \frac{j^{ct}}{k_1} H'(q, q'; t_1) \right] dv. \end{aligned}$$

Первый из последних двух интегралов непрерывен в точке  $q_1$ , так как его подынтегральное выражение имеет особенность типа  $r^{-2}$ ; что же касается последнего интеграла, то для анализа разобьем его на две части: на интеграл по достаточно малой<sup>8</sup> области  $v_1$ , примыкающей непосредственно к той части  $s$ , на которой находится  $q_1$ , и на интеграл по остальной части объема  $v$ . Последний интеграл, как легко сообразить, непрерывен в точке  $q_1$  и потому  $W_1(q')$  можно представить в форме

$$W_1(q') = - \frac{1}{c} \int_{(v_1)} \operatorname{div} \left[ \frac{j^{ct}}{k_1} H'(q, q'; t_1) \right] dv + W_0(q'), \quad (13)$$

где  $W_0(q')$  — функция, непрерывная в точке  $q_1$ .

Преобразовав при помощи теоремы Гаусса первый член предыдущей формулы с учетом того, что в точке  $q = q'$  подынтегральное выражение обращается в бесконечность, найдем для равенства (13) следующее выражение:

$$W_1(q') = W_0(q') - \frac{1}{c} \int_{(s_1)} \frac{1}{k_1} [j^{ct} H'(q, q'; t_1)]_n ds - \begin{cases} 2a(q') j^{ct}_1(q') & \text{для } q' \subset v_1 \\ 0 & \text{для } q' = q_1, \end{cases} \quad (14)$$

где  $s_1$  — поверхность, ограничивающая  $v_1$ .

При выводе формулы (14) мы пользовались равенствами

$$\begin{aligned} H'(q, q'; t_1) &= \operatorname{rot}(ft_1) + O(1), \quad (q' \subset v_1), \\ H'(q, q_1; t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько подробнее выражение, стоящее под знаком интеграла в формуле (14). Известная теорема взаимности для электрического и магнитного диполей [8] позволяет написать:

$$\frac{1}{k_1} [j^{ct} H'(q, q'; t_1)]_n = \frac{1}{k_1} [n j^{ct}] H'(q, q'; t_1) = E''_k(q', q; A_1), \quad (15)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{k_1} [n j^{ct}]. \quad (15')$$

Используя это преобразование, придадим равенству (14) вид

$$W_1(q') = W_0(q') - \frac{1}{c} \int_{(s_1)} E''_k(q', q; A_1) ds - \begin{cases} 2a(q') j^{ct}_1(q') & q' \subset v_1 \\ 0 & q' = q_1. \end{cases}$$

Входящий сюда интеграл отличается от подробно исследованного ранее интеграла  $W(q')$  [формула (7)] только тем, что в нем вектор  $A$  заменен вектором  $A_1$ . Это, в свою очередь, эквивалентно замене  $\bar{E}$  на  $-\frac{4\pi}{k_1} j^{ct}$  [см. формулы (1') и (15')]. А поэтому, учитывая формулу (10), непрерывность  $W_0(q')$

<sup>8</sup> Настолько малой, чтобы внутри ее все точки были регулярными в смысле сноски<sup>3</sup>.

в точке  $q_1$  и только что сказанное, легко определить предел, к которому стремится  $W_1(q')$  при  $q' \rightarrow q_1$ :

$$\lim_{q' \rightarrow q_1} W_1(q') = W_1(q_1) + a(q_1) j_1^{\text{ст}}(q_1). \quad (16)$$

Из равенства (12) немедленно следует, что  $W_1(q_1) = 0$ , ибо выражение  $E'_1(q', q, j^{\text{ст}})$ , стоящее под знаком интеграла в этой формуле, обращается в нуль при  $q' = q_1$  как тангенциальная составляющая электрического вектора у идеально проводящей поверхности. Таким образом равенство (16) принимает вид

$$\lim_{q' \rightarrow q_1} W_1(q') = a(q_1) j_1^{\text{ст}}(q_1). \quad (17)$$

Формула (6) может быть, благодаря равенствам (7) и (12), переписана так:

$$E_1(q') = W(q') + W_1(q') - a(q') j_1^{\text{ст}}(q').$$

Переходя в этом выражении к пределу при  $q' \rightarrow q_1$ , получим, используя формулы (11) и (17), искомый результат

$$\lim_{q' \rightarrow q_1} E_1(q') = \bar{E}_1(q_1). \quad (18)$$

Проделанный выше анализ показывает, что формулы (1) действительно решают первую граничную задачу электродинамики при достаточно общих предположениях. Формулы (1) решают также внешнюю граничную задачу электродинамики, если под областью  $v$  понимать наружное по отношению к поверхности  $s$  бесконечное пространство. При этом, однако, необходимо, чтобы вспомогательные поля  $E$ ,  $H'$  и  $E''$ ,  $H''$  удовлетворяли на бесконечности „принципу излучения“ Зоммерфельда. Очевидно, решение первой граничной задачи электродинамики возможно провести, пользуясь формулами (1), только для таких поверхностей  $s$ , для которых известны вспомогательные поля  $E$ ,  $H'$  и  $E''$ ,  $H''$ . Однако применяя метод, совершенно аналогичный альтернирующему методу Шварца [4] (в теории потенциала), можно значительно расширить класс поверхностей, для которых может быть решена рассматриваемая задача.

Наряду с первой граничной задачей можно говорить также о второй граничной задаче, когда на замкнутой поверхности  $s$  задана тангенциальная составляющая магнитного вектора, и, наконец, в общем случае, о смешанной граничной задаче [2]. Для последних двух задач легко могут быть написаны формулы, аналогичные формулам (1). Они получаются после несложных преобразований с использованием трех теорем взаимности [3] для электрических и магнитных диполей из формул, данных нами ранее<sup>9</sup>.

Следует подчеркнуть, что формулы типа (1) выгодно отличаются тем, что они очень просты по своей структуре и полностью определяют электрический и магнитный векторы (а не их проекции).

## § 2. Приведение задач электромагнитной диффракции к интегральным уравнениям

Результаты, полученные в предыдущем разделе, дают возможность привести целый ряд задач электромагнитной диффракции к решению интегральных уравнений. Идею этого приведения мы подробно разберем на ряде примеров, ограничившись (в целях простоты) диффракцией электромагнитных волн у бесконечной плоскости с отверстием.

Будем считать (как это обычно делается) плоскость бесконечно тонкой и обладающей идеальной проводимостью ( $\sigma = \infty$ ).

<sup>9</sup> Формулы (5) и (6) в статье [2]. Пользуясь случаем отметим, что в формуле (5) указанной статьи ошибочно опущен член  $-\frac{4\pi}{3c} \frac{1}{k_1} j_p^{\text{ст}}$ .

Затянув отверстие в плоскости геометрической плоской поверхностью  $s_0$ , ограниченной контуром  $l$ <sup>10</sup>, разобьем пространство на две части, разделенные плоскостью. Среда, заполняющие обе части пространства, условимся считать однородными, обладающими постоянными, но, вообще говоря, различными электромагнитными параметрами.

Если излучатели (источники поля), находящиеся с одной стороны плоскости, заданы, то поле во всем пространстве может быть определено через значение тангенциальной составляющей электрического вектора у поверхности отверстия  $s_0$ . Действительно, для этого достаточно решить, используя формулы (1), первую граничную задачу для обоих полупространств. Роль ограничивающей поверхности  $s$  будет при этом играть бесконечная плоскость, разделяющая оба полупространства. Но так как тангенциальная составляющая электрического вектора у идеально проводящей поверхности обращается в нуль, то поверхностные интегралы в формулах (1) фактически сведутся к интегралам по поверхности отверстия  $s_0$ . Искомое поле должно, очевидно, удовлетворять: 1) уравнениям Максвелла во всем пространстве и 2) принципу излучения на бесконечности.

Кроме этого, тангенциальная составляющая электрического вектора должна: 3) обращаться в нуль у обеих сторон идеально проводящей плоскости и 4) быть непрерывной при переходе через поверхность отверстия  $s_0$ ; 5) тангенциальная составляющая магнитного вектора должна быть непрерывной при переходе через  $s_0$ .

Используя произвольную непрерывную последовательность значений  $E_t$ , заданных на  $s_0$ , и решая при помощи формул типа (1) граничные задачи для обоих полупространств, получим поле, удовлетворяющее первым четырем из вышеперечисленных пяти требований. Пятому требованию, очевидно, можно удовлетворить, выбирая соответствующим образом значения  $E_t$  на  $s_0$ . Для этого необходимо только выразить пятое требование в математической форме, после чего оно сведется к уравнению, определяющему  $E_t$  на  $s_0$ .

Решим прежде всего задачу для „затемненного“ полупространства, в котором отсутствуют источники поля. Используя вторую из формул (1), найдем при этом следующее выражение для магнитного вектора:

$$\mathbf{H}(q') = \int_{(s_0)} \mathbf{H}''(q', q; \mathbf{A}) ds. \quad (19)$$

Так как среда, заполняющая полупространство, однородна, то  $\mathbf{H}''$  можно выразить через вектор Герца  $\vec{\Pi}$  при помощи формулы

$$\mathbf{H}''(q', q; \mathbf{A}) = \frac{1}{k_2} \text{grad}' \text{div}' \vec{\Pi} + k_1 \vec{\Pi}, \quad (20)$$

где

$$\vec{\Pi} = 2 \mathbf{A} \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E}n]. \quad (20')$$

Равенства (20) и (20') позволяют после несложных преобразований придать формуле (19) вид

$$\mathbf{H}(q') = 2k_1 \int_{(s_0)} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(s_0)} \text{grad} \frac{e^{-jkr}}{r} (\mathbf{H}ds) + \frac{1}{2\pi k_2} \oint_{(l)} \text{grad} \frac{e^{-jkr}}{r} (\mathbf{E}dl). \quad (21)$$

Рассматриваемые ниже примеры удовлетворяют двум условиям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}ds &= 0 \quad \text{на } s_0, \\ \mathbf{E}dl &= 0 \quad \text{на } l, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

<sup>10</sup> В общем случае, когда область  $s_0$  является многосвязной,  $l$  может состоять из нескольких замкнутых кривых.

<sup>11</sup> Но одну и ту же для обоих полупространств.

при которых выражение для  $\mathbf{H}$  принимает особенно простую форму

$$\mathbf{H}(q') = 2k_1 \int_{(s_0)} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A} ds. \quad (23)$$

Решая граничную задачу для „освещенного“ полупространства, в котором находятся источники, получим, аналогично предыдущему, формулу для магнитного вектора:

$$\mathbf{H}(q') = -2k_1' \int_{(s_0)} \frac{e^{-jk'r}}{r} \mathbf{A} ds + \frac{1}{c} \int_{(v_0)} \mathbf{H}(q', q; \mathbf{j}^{\text{CT}}) dv. \quad (24)$$

Здесь  $k_1'$  и  $k'$  снабжены штрихами, так как в общем случае параметры „освещенного“ полупространства отличны от параметров „неосвещенного“. Наличие минуса перед первым членом в формуле (24) обусловлено изменением на противоположное направления положительной нормали к  $s_0$ , входящей в выражение для  $\mathbf{A}$  [формула (20)]. И, наконец, объемный интеграл берется по пространству  $v_0$ , заполненному источниками  $\mathbf{j}^{\text{CT}}$ , которые предполагаются находящимися на некотором расстоянии от поверхности отверстия  $s_0$ .

Полученные формулы (23) и (24) позволяют выразить требование 5 (о непрерывности тангенциальной составляющей  $\mathbf{H}$  при переходе через  $s_0$ ) в следующей форме:

$$2k_1 \int_{(s_0)} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A} ds = -2k_1' \int_{(s_0)} \frac{e^{-jk'r}}{r} \mathbf{A} ds + \frac{1}{c} \int_{(v_0)} \mathbf{H}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{CT}}) dv \quad \text{при } q' \subset s_0. \quad (25)$$

При этом учтено, что на  $s_0$  нормальная составляющая  $\mathbf{H}$  равна нулю [см. (22)]. Вводя сокращающее запись обозначение

$$G(q', q) = k_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + k_1' \frac{e^{-jk'r}}{r} \quad (26)$$

и учитывая формулу (1'), получим искомое интегральное уравнение, определяющее  $E_t$  на  $s_0$ :

$$\int_{(s_0)} [\mathbf{E}n] G(q', q) ds = \frac{2\pi}{c} \int_{(v_0)} \mathbf{H}'(q', q; \mathbf{j}^{\text{CT}}) dv \quad (q' \subset s_0). \quad (27)$$

Это векторное интегральное уравнение может быть заменено двумя скалярными.

Действительно, вводя декартову систему координат  $x, y, z$  так, чтобы проводящая плоскость совпала с плоскостью  $z=0$ , а положительное направление  $z$  с направлением  $\mathbf{n}$ , найдем, проектируя уравнение (27) на оси  $y$  и  $x$

$$\left. \begin{aligned} \int_{(s_0)} E_x G(q', q) ds &= f(q'), \\ \int_{(s_0)} E_y G(q', q) ds &= F(q'), \end{aligned} \right\} \quad (q' \subset s_0) \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f(q') &= -\frac{2\pi}{c} \int_{(v_0)} H_y'(q', q; \mathbf{j}^{\text{CT}}) dv \\ F(q') &= \frac{2\pi}{c} \int_{(v_0)} H_x'(q', q; \mathbf{j}^{\text{CT}}) dv \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

— известные функции  $q'$ .

Равенства (28) являются независимыми одноподобными интегральными уравнениями Фредгольма 1-го рода с симметричным ядром  $Q(q', q)$  [см. (26)] и полностью определяют тангенциальные составляющие  $E_x$  и  $E_y$  в плоскости отверстия  $s_0$ .

Рассмотрим несколько конкретных примеров. Пусть отверстие  $s_0$  имеет форму кольца, ограниченного двумя концентрическими кругами, центр которых лежит в начале введенной выше системы координат. Если единственным источником поля является диполь, находящийся в точке  $z = a$ ,  $x = y = 0$ , с электрической силой  $\mathbf{p}$ , параллельной оси  $z$ , то, благодаря симметрии, условия (22) оказываются выполненными. Функции  $f$  и  $F$  (29) при этом принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} f &= -2\pi H'_y(q', q_a; \mathbf{p}), \\ F &= 2\pi H'_x(q', q_a; \mathbf{p}). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Здесь  $q_a$  — точка нахождения диполя.

Вводя цилиндрическую систему координат  $R, \varphi, z$ , можно заменить уравнения (20) одним интегральным уравнением, определяющим радиальную составляющую  $E_R$  электрического вектора ( $E_\varphi = 0$ ),

$$\int_{(s_0)} E_R \cos(\varphi - \varphi') G(q', q) ds = -2\pi H'_\varphi(q', q_a; \mathbf{p}), \quad (31)$$

где  $\varphi$  — азимут точки  $q$ ,  $\varphi'$  — азимут точки  $q'$ .

Составляющая  $E_R$  вследствие симметрии поля относительно оси  $z$ , очевидно, не зависит от  $\varphi$ . Что касается составляющих вектора  $\mathbf{H}'$ , входящих в формулы (30) и (31), то они у плоскости  $s$  равны удвоенному значению соответствующих составляющих поля электрического диполя, находящегося в однородной среде с параметрами „освещенного“ полупространства. Рассмотрим еще один пример, когда отверстие  $s_0$  имеет форму щели, параллельной оси  $x$ , на которую падает со стороны положительных  $z$  плоская волна с магнитным вектором, поляризованным параллельно оси  $x$ . Так как составляющая  $E_x$  в этом случае равна нулю, то уравнения (28) сводятся к одному:

$$\int_{(s_0)} E_y G(q', q) ds = 2\pi H'_x(q'), \quad (32)$$

где составляющая  $H'_x(q')$  ( $q' \subset s_0$ ) равна удвоенному значению магнитного вектора падающей волны

$$H'_x(q') = 2e^{ik'y' \sin \varphi_0}. \quad (33)$$

Здесь амплитуда падающей волны принята равной единице, а угол падения равен  $\varphi_0$ .

Поскольку  $E_y$  не зависит от  $x$ , уравнение (32) можно написать в форме

$$\int_{-a}^{+a} E_y \int_{-\infty}^{\infty} G(q', q) dx dy = 4\pi e^{ik'y' \sin \varphi_0} \quad (34)$$

где  $2a$  — ширина щели.

Используя известную формулу Зоммерфельда<sup>12</sup> и теорему Коши о вычетах, легко получить следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(q', q) dx = -j\pi \{k_1 H_0^{(2)}(k|y - y'|) + k'_1 H_0^{(2)}(k'|y - y'|)\}$$

( $H_0^{(2)}$  — функция Ганкеля), которое даст возможность придать уравнению (34) вид

$$\int_{-a}^{+a} E_y \{k_1 H_0^{(2)}(k|y - y'|) + k'_1 H_0^{(2)}(k'|y - y'|)\} dy = 4j e^{ik'y' \sin \varphi_0}. \quad (35)$$

<sup>12</sup> См. [3], стр. 924, формула (11).



Для случая, когда все пространство заполнено однородной средой ( $k = k'$ ,  $k_1 = k'_1$ ,  $k_2 = k'_2$ ), интегральное уравнение (35) особенно упрощается:

$$\int_{-a}^{+a} E_y H_0^{(2)}(k|y - y'|) dy = j \frac{2}{k_1} e^{jky' \sin \varphi_0}. \quad (36)$$

Наметим в общих чертах метод решения уравнения (36). Для этого рассмотрим прежде всего следующую функцию в плоскости  $x', y'$ :

$$\begin{aligned} \phi(x', y') &= \int_{-a}^{+a} E_y H_0^{(2)}(kR) dy, \\ R &= \sqrt{(y - y')^2 + (x')^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Функция  $\phi$  является волновым „потенциалом“, источники которого распределены с плотностью  $E_y$  на отрезке  $L(x' = 0, -a \leq y' \leq a)$  оси ординат, и удовлетворяет волновому уравнению.

Вблизи начала координат функция Ганкеля имеет вид

$$H_0^{(2)}(R) = \frac{2}{j\pi} \ln R + \mathfrak{F}(R),$$

где  $\mathfrak{F}(R)$  — непрерывная в точке  $R = 0$  функция. Поэтому для  $\phi$  справедливы вытекающие из теории логарифмического потенциала равенства:

$$\phi_i = \phi_e \text{ на } L, \quad (38')$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)_i - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)_e = -4jE_y \text{ на } L. \quad (38'')$$

Здесь индекс  $i$  ( $e$ ) обозначает предел соответствующего выражения, когда точка  $(x', y')$  стремится к точке  $x' = 0, y' = y$  отрезка  $L$  со стороны положительных (отрицательных) иксов. Таким образом, для того чтобы решить интегральное уравнение (36), достаточно найти функцию  $\phi$  [формулы (37)]. Из равенств (37) и (36) вытекает, что  $\phi$  удовлетворяет следующей плоской граничной задаче:

$$\left. \begin{aligned} 1) \nabla'^2 \phi + k^2 \phi &= 0, \\ 2) \phi_i = \phi_e &= j \frac{2}{k_1} e^{jky' \sin \varphi_0} \text{ на } L, \\ 3) \phi \text{ на бесконечности} &\text{ удовлетворяет принципу излучения.} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Как известно, этими условиями  $\phi$  однозначно определена. Обратное, используя теорему Грина, легко показать, что функция  $\phi$ , определяемая условиями (39), может быть истокообразно представлена в форме (37). Этим самым устанавливается полная эквивалентность интегрального уравнения (36) и граничной задачи (39), решив которую, определим  $E_y$  по формуле (38'').

Переходя к решению задачи (39), введем в плоскости  $x', y'$  эллиптическую систему координат  $\xi, \eta$ , связанную с  $x', y'$  равенствами

$$\left. \begin{aligned} x' &= a \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \\ y' &= a \operatorname{ch} \xi \cos \eta. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

В этих координатах волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{k^2 a^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \phi = 0. \quad (41)$$

Отрезок  $L(x' = 0, -a \leq y' \leq a)$  можно, очевидно, рассматривать как выродившийся эллипс с малой осью, равной нулю, совпадающий с координатной линией  $\xi = 0$ .

В новых координатах граничное условие нашей задачи [см. второе равенство (39)] переписется так:

$$\phi = j \frac{2}{k_1} e^{jka \cos \eta \sin \varphi_0} \text{ при } \xi = 0. \quad (42)$$

Из симметрии граничных условий относительно оси  $y'$  ясно, что  $\phi$  должно быть четной функцией  $\eta$ . Ищем частный интеграл уравнения (41) в виде произведения  $F_1(\eta)F_2(\xi)$ . Тогда, разделяя переменные, найдем, что функции  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют уравнениям типа Матье [5]

$$\frac{d^2 F_1}{a\eta^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2\eta) F_1 = 0, \quad (43)$$

$$\frac{d^2 F_2}{d\xi^2} + (-\lambda + 2h^2 \operatorname{ch} 2\xi) F_2 = 0. \quad (44)$$

Здесь  $h = ka/2$ , а  $\lambda$  — постоянная разделения. Так как нас интересуют только четные периодические (т. е. однозначные на плоскости) решения уравнения (43) и удовлетворяющие принципу излучения решения уравнения (44), то  $F_1$  выражается при помощи четных периодических функций Матье [5]

$$F_1(\eta) = \operatorname{ce}_n(\eta; h^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (45)$$

а  $F_2$  через соответствующие им функции Матье — Ганкеля [5]

$$F_2(\xi) = \operatorname{Ze}_n(\xi; h^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (45')$$

Наиболее общее решение уравнения (41), которое может быть сконструировано из функций (45) и (45'), имеет вид

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{ce}_n(\eta; h^2) \operatorname{Ze}_n(\xi; h^2), \quad (46)$$

где  $B_n$  — постоянные. Граничное условие (42) при этом напишется так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{ce}_n(\eta; h^2) \operatorname{Ze}_n(0; h^2) = j \frac{2}{k_1} e^{jka s_0}$$

Умножая это выражение на  $\operatorname{ce}_m(\eta; h^2)$  и интегрируя по интервалу  $-\pi \leq \eta \leq \pi$ , найдем, учитывая ортогональность функций Матье,

$$B_m = \frac{2j}{\pi k_1 \operatorname{Ze}_m(0; h^2)} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{jka \sin \varphi_0 \cos \eta} \operatorname{ce}_m(\eta; h^2) d\eta, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

При  $m=0$  в предыдущем выражении вместо  $\pi$  должно стоять  $2\pi$ . Формулы (46) и (47) решают граничную задачу (39). Формула (38'') может быть выражена в эллиптических координатах

$$E_y = \frac{j}{2h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0},$$

$h_\xi$  — коэффициент Ляме.

Подставляя сюда значение  $\phi$  из формулы (46), получим искомое решение интегрального уравнения (36):

$$E_y = \frac{j}{2h_{\xi(\xi=0)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{ce}_n(\eta; h^2) \cdot \operatorname{Ze}'_n(0; h^2). \quad (48)$$

Полученное выражение определяет  $E_y$  в плоскости отверстия  $s_0$ . Для того чтобы определить поле во всем пространстве, можно воспользоваться формулами (1), подставив в их правую часть значение  $E_y$  из формулы (48). Мы не будем заниматься более детальным анализом формулы (48) и выражений для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке пространства, так как данная задача уже рассматривалась Стреттом [6] иным методом.

Способ, примененный для решения интегрального уравнения (36), годится также для предыдущего примера [уравнения (28), (30)] при условии однород-

ности среды ( $k_1 = k'_1$ ,  $k_2 = k'_2$ ), особенно в том случае, когда кольцо  $s_0$  вырождается (внутренний радиус его обращается в нуль или наружный в бесконечность).

В заключение отметим, что сведение задач диффракции к интегральным уравнениям может быть проведено указанным методом не только для плоских экранов с отверстиями, но и для ряда задач при наличии сферических или иных экранов с отверстиями.

Поступило в редакцию  
14 апреля 1944 г.

#### Литература

- [1] Свешникова. ЖРФХО, **59**, 453, 1927. — [2] Я. Фельд. ЖЭТФ, **13**, 110, 1943. — [3] Frank u Mises. Die Differenzial- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, **2**, Braunschweig, 1935. — [4] Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. 1, стр. 177, 1933. — [5] Купралзе. Основные задачи математической теории диффракции, стр. 25 и 38, ОНТИ, 1935. — [6] Strutt. ZS. f. Phys., **69**, 597, 1931.
-

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ГРАНИЧНО-НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 4 IX 1944)

В настоящей работе мы займемся формулировкой и решением гранично-начальных задач электродинамики для любых неустановившихся колебаний.

Будем называть первой Г.-Н.З.Э. (Г.-Н.З.Э. — гранично-начальная задача электродинамики) задачу, при которой требуется определить для момента времени  $\tau = t^*$  электромагнитное поле в пространстве  $v$ , ограниченном замкнутой геометрической поверхностью  $s$ , по следующим данным:

1. На поверхности  $s$  задана тангенциальная составляющая электрического вектора для  $0 \leq \tau \leq t$ .

2. Внутри  $v$  заданы значения векторов поля для  $\tau = 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_0, \vec{H} = \vec{H}_0 \text{ при } \tau = 0. \quad (1)$$

3. Если внутри  $v$  имеются источники поля, то они считаются известными.

4. Если пространство  $v$  простирается на бесконечность, то необходимо потребовать, чтобы все источники находились на конечном расстоянии.

Аналогично формулируется также вторая Г.-Н.З.Э. с той только разницей, что в пункте 1 фигурирует не электрический, а магнитный вектор.

И, наконец, если на части  $s_1$  поверхности  $s$  задана тангенциальная составляющая электрического, а на остальной части  $s_2$  — магнитного вектора, то эту задачу мы будем называть смешанной Г.-Н.З.Э. Все эти задачи на основании теоремы единственности<sup>(1)</sup> имеют однозначное решение.

Для решения Г.-Н.З.Э. мы используем обобщенную лемму Лоренца, полученную нами ранее<sup>(2)</sup>, предварительно распространив ее на случай начальных условий типа (1). Применяя тот же метод, что и в<sup>(2)</sup>, получим, учитывая более общие начальные условия (1)\*\*<sup>\*</sup>, следующее выражение для обобщенной леммы Лоренца

$$\int_0^t \left\{ \operatorname{div} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}_1(\tau)] - \operatorname{div} [\vec{E}_1(\tau) \vec{H}(t-\tau)] \right\} d\tau = \\ = \frac{\mu}{c} \left\{ \vec{H}_0 \vec{H}_1(t) - \vec{H}_{1,0} \vec{H}(t) \right\} + \frac{\epsilon}{c} \left\{ \vec{E}_{1,0} \vec{E}(t) - \vec{E}_0 \vec{E}_1(t) \right\}. \quad (2)$$

\*  $\tau$  — текущая координата времени,  $t$  — произвольная фиксированная координата времени.

\*\* В<sup>(2)</sup> имели место нулевые начальные условия.

Здесь  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  — два произвольных поля, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, а  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  и  $\vec{E}_{1,0}, \vec{H}_{1,0}$  — их значения для  $\tau = 0$ .

Переходя к решению первой Г.-Н.З.Э., будем считать, что внутри  $v$  имеются точечные источники — электрические диполи с моментами  $\vec{p}_n$ , находящиеся в точках  $q_n$  ( $n = 1, 2, \dots, k$ ). Проводимость  $\sigma$  внутри  $v$  примем равной нулю.

Используем лемму (2), подразумевая под  $\vec{E}, \vec{H}$  искомое поле, а под  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  — поле вспомогательного электрического диполя, помещенного в точку наблюдения  $q'$ . Поле вспомогательного электрического диполя удовлетворяет условиям:

I. Тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}_1$  обращается в нуль у поверхности  $s$ .

II.  $\vec{E}_{1,0} = \vec{H}_{1,0} = 0$  внутри  $v$ .

III. Момент вспомогательного диполя  $\vec{p}$  постоянен по направлению и равен

$$p(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ \frac{1}{\lambda} \left( \tau - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \tau \right) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \lambda, \\ 1 & \text{при } \tau > \lambda. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\lambda$  — произвольный положительный параметр. Функция  $p(\tau)$  непрерывна до второй производной включительно. Учитывая все это, проинтегрируем равенство (2) по объему  $v$ , исключив из него предварительно при помощи бесконечно малых сфер точки нахождения источников  $q_n$  и вспомогательного диполя  $q'$ . После сравнительно несложных, но длинных преобразований найдем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^t \vec{p}'(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau - \frac{1}{3} \vec{p}(t) \vec{E}_0 \right\}_{q'} - \\ & - \sum_{n=1}^k \left\{ \int_0^t \vec{p}_n'(\tau) \vec{E}_1(t-\tau) d\tau + \frac{1}{3} \vec{p}_n(0) \vec{E}_1(t) \right\}_{q_n} = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \{ \mu \vec{H}_0 \vec{H}_1(t) - \varepsilon \vec{E}_0 \vec{E}_1(t) \} dv - \frac{c}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}_1(\tau)] \vec{ds}. \quad (4) \end{aligned}$$

Входящий сюда (и в последующие формулы (6), (7)) объемный интеграл следует понимать в смысле «главного значения» Коши. Индексы  $q'$  и  $q_n$ , стоящие у фигурных скобок в левой части (4), указывают, что значения величин, стоящих в этих скобках, берутся соответственно в точках  $q'$  и  $q_n$ . Векторы  $\vec{p}, \vec{p}'(\tau), \vec{E}_1, \vec{H}_1$  явно или неявно зависят от произвольного положительного параметра  $\lambda$  (см. формулу (3)). Поэтому, используя легко доказываемые при помощи (3) равенства

$$\left. \begin{aligned} E_p(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^t \vec{p}'(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} p(t) &= 1 \text{ при } t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
E_p(t, q') = & \frac{1}{3} E_p(0, q') - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}_1(\tau)] \vec{d}s + \\
& + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \{ \mu \vec{H}_0 \vec{H}_1(t) - \varepsilon \vec{E}_0 \vec{E}_1(t) \} dv + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^k \left\{ \int_0^t \vec{p}_n'(\tau) \vec{E}_1(t-\tau) d\tau + \frac{1}{3} \vec{p}_n(0) \vec{E}_1(t) \right\}_{q_n} \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Здесь  $E_p(t, q')$  означает проекцию искомого вектора  $\vec{E}$  на направление момента  $\vec{p}$  вспомогательного диполя, причем, в отличие от остального изложения, явно отмечена зависимость  $E_p$  не только от времени, но и от точки наблюдения  $q'$ .

Заменяв вспомогательный электрический диполь магнитным с моментом  $\vec{m}$  и векторами поля  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , удовлетворяющими тем же условиям I, II, III, что и в случае электрического диполя, найдем аналогично предыдущему

$$\begin{aligned}
H_m(t, q') = & \frac{1}{3} H_m(0, q') + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}_2(\tau)] \vec{d}s - \\
& - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \{ \mu \vec{H}_0 \vec{H}_2(t) - \varepsilon \vec{E}_0 \vec{E}_2(t) \} dv + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^k \left\{ \int_0^t \vec{p}_n'(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\tau + \frac{1}{3} \vec{p}_n(0) \vec{E}_2(t) \right\}_{q_n} \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Так как местонахождение вспомогательных диполей и направление их моментов произвольны, то формулы (6) и (7) решают нашу задачу, определяя поле по заданным граничным и начальным условиям. Пределы функции (3) и ее производной при  $\lambda \rightarrow 0$  представляют собой «единичный толчок» и импульсную функцию Дирака. Поэтому, понимая под векторами  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  поля, созданные диполями, моменты которых изменяются по закону «единичного толчка», можно было бы формально написать формулы (6), (7) без знаков  $\lim$ .

Метод решения второй и смешанной Г.-Н.З.Э. остается тем же с той только разницей, что в случае второй задачи в граничном условии I вектор  $\vec{E}_1$  заменяется вектором  $\vec{H}_1$ .

В случае смешанной задачи условие I формулируется так:

I. На части  $s_1$  поверхности  $s$  равна нулю тангенциальная составляющая  $\vec{E}_1$ , а на остальной части  $s_2$  — тангенциальная составляющая  $\vec{H}_1$ .

Различие в граничных условиях I приводит к само собой понятным (см. лемму (2)) видоизменениям поверхностного интеграла в формулах (6), (7).

В остальном они остаются без изменений.

В заключение отметим, что формулы (6), (7) выведены при условии непрерывности моментов источников  $p_n(\tau)$  и их производных  $p_n'(\tau)$ ,  $p_n''(\tau)$ . Однако, рассматривая всякое скачкообразное изменение при помощи формул, аналогичных формуле (3), как предел непрерывного, получим возможность использовать выражения (6), (7) для рассмотрения любых мгновенных включений и выключений источников.

Поступило  
1 VI 1944

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 1, ч. 2, гл. VII, М.—Л., 1934.  
<sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, XLI, № 7, 294 (1943).

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ В ТЕОРИИ  
ПРИЕМНО-ПЕРЕДАЮЩИХ АНТЕНН**

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 4 IX 1944)

Теорема взаимности для двух произвольных антенн при гармонических колебаниях одной и той же частоты  $f$  записывается следующим образом<sup>(1-3)</sup>:

$$I^{(1)}\mathcal{E}_1 = I^{(2)}\mathcal{E}_2, \quad (1)$$

где  $I^{(1)}$  и  $I^{(2)}$  — токи, протекающие через клеммы первой и второй антенн, когда они работают как приемные, а  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — полные эдс генераторов, присоединенных к клеммам антенн, когда последние работают как передающие. Причем, когда одна из антенн является передающей, другая работает приемной, и наоборот.

Теорема (1), однако, справедлива только при условии равенства внутренних (комплексных) сопротивлений генераторов  $z_1$  и  $z_2$  соответствующим сопротивлениям приемников  $z^{(1)}$  и  $z^{(2)}$ , подключаемых к клеммам антенн при работе их как приемные. В общем случае, когда указанные равенства не выполняются, теорема (1) должна быть заменена более общей, выводу которой посвящена настоящая заметка.

Остановимся прежде всего на методе учета генераторов и приемников, подключаемых к клеммам антенн. Проще всего это можно сделать, заменив реальную систему, состоящую из антенны с генератором или приемником, одной антенной, у которой на участке между клеммами приложена сторонняя эдс\*, подобранная так, чтобы распределение токов и зарядов в антенне не изменилось.

В случае передачи эта эдс должна быть равна напряжению, создаваемому генератором на клеммах антенны, т. е.

$$\mathcal{E}_1^{\text{ст}} = \mathcal{E}_1 - I_1 z_1 = I_1 z_{a1}, \quad \mathcal{E}_2^{\text{ст}} = \mathcal{E}_2 - I_2 z_2 = I_2 z_{a2}. \quad (2)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  — токи, текущие через клеммы первой и второй антенн при работе их передающими, а  $z_{a1}$  и  $z_{a2}$  — сопротивления антенн, отнесенные к их клеммам. Остальные обозначения те же, что и выше.

Для приемной антенны сторонняя эдс, очевидно, равна взятому с обратным знаком падению напряжения в приемнике

$$\mathcal{E}^{(1)\text{ст}} = -I^{(1)}z^{(1)}, \quad \mathcal{E}^{(2)\text{ст}} = -I^{(2)}z^{(2)}. \quad (3)$$

Таким образом, вводя в случае приема фиктивную стороннюю эдс, эквивалентную влиянию приемника, мы формально сводим приемную антенну к передающей.

\* Клеммы при этом следует представлять себе замкнутыми накоротко линейным идеальным проводником, вдоль которого и приложена сторонняя эдс.



Обозначим поле, создаваемое антеннами, когда к первой из них (передающей) приложена сторонняя эдс  $\mathcal{E}_1^{\text{ст}}$ , а к второй (приемной)  $\mathcal{E}^{(2)\text{ст}}$ , буквами  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$ . Поле, создаваемое антеннами при приложении к первой из них (приемной) сторонней эдс  $\mathcal{E}^{(1)\text{ст}}$ , а ко второй (передающей)  $\mathcal{E}_2^{\text{ст}}$ , обозначим буквами  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$ .

Оба введенных поля удовлетворяют всюду, за исключением точек приложения сторонних эдс \*, лемме Лоренца (4)

$$\operatorname{div} [\vec{E}' \vec{H}''] = \operatorname{div} [\vec{E}'' \vec{H}']. \quad (4)$$

В нашем случае сторонние эдс приложены к поверхностям  $s_1$  и  $s_2$  идеальных проводников, закорачивающих клеммы первой и второй антенн (см. сноску на стр. 503). Поэтому, интегрируя равенство (4) по всему бесконечному пространству, ограниченному изнутри поверхностями  $s_1$  и  $s_2$ , и применяя затем теорему Гаусса, получим

$$\int_{s_1+s_2} [\vec{E}' \vec{H}'' ] \vec{ds} = \int_{s_1+s_2} [\vec{E}'' \vec{H}' ] \vec{ds}. \quad (5)$$

Используем граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля у поверхности идеальных проводников при наличии приложенных к ним сторонних эдс. В нашем случае эти условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_t' &= -E_t^{\text{ст}}; & [\vec{n} \vec{H}'] &= \frac{4\pi}{c} \vec{i}'; \\ E_t'' &= -E_t^{\text{ст}}; & [\vec{n} \vec{H}'' ] &= \frac{4\pi}{c} \vec{i}''; \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{на} \\ s_1 \text{ и } s_2, \end{array} \quad (6)$$

где  $\vec{i}'$  и  $\vec{i}''$  — поверхностные плотности токов, соответствующие полям  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  и  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$ ;  $\vec{n}$  — единичный вектор, нормальный к соответствующей поверхности;  $\vec{E}^{\text{ст}}$  и  $\vec{E}''^{\text{ст}}$  — напряженности сторонних эдс (возбуждающих поля  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  и  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$ ), связанные с соответствующими сторонними эдс очевидными равенствами \*\*:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\text{ст}} &= \int_{(l_1)} \vec{E}'^{\text{ст}} \vec{dl}; & \mathcal{E}^{(2)\text{ст}} &= \int_{(l_2)} \vec{E}'^{\text{ст}} \vec{dl}; \\ \mathcal{E}^{(1)\text{ст}} &= \int_{(l_1)} \vec{E}''^{\text{ст}} \vec{dl}; & \mathcal{E}_2^{\text{ст}} &= \int_{(l_2)} \vec{E}''^{\text{ст}} \vec{dl}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Интегрирование в формулах (7) производится по длинам  $l_1$  и  $l_2$  линейных участков первой и второй антенн, к которым прикладываются сторонние эдс (см. сноску на стр. 503).

Подставляя значение  $E_t$  и  $H_t$  из формул (6) в равенство (5), найдем после элементарных преобразований

$$\int_{s_1} (\vec{i}'' \vec{E}'^{\text{ст}} - \vec{i}' \vec{E}''^{\text{ст}}) ds = \int_{s_2} (\vec{i}' \vec{E}''^{\text{ст}} - \vec{i}'' \vec{E}'^{\text{ст}}) ds. \quad (8)$$

Векторы  $\vec{i}'$ ,  $\vec{i}''$  не изменяются вдоль длины  $l_1$  и  $l_2$  линейных проводников \*\*\*, совпадают по направлению с их осями и связаны с пол-

\* А также поверхностей раздела двух сред, что, однако, не существенно для дальнейшего, так как на них остается непрерывной величина  $[EH]_n$ .

\*\* Закон распределения напряженностей сторонних эдс безразличен, так как они приложены вдоль неизмеримо малых по сравнению с длиной волны линейных проводников.

\*\*\* Так как  $l_1$  и  $l_2$  во много раз меньше длины волны.

ными токами, протекающими через клеммы антенн, очевидными равенствами:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \oint i' dl; & I^{(2)} &= \oint i' dl; \\ I^{(1)} \int_{(L_1)} i'' dl; & I_2 &= \int_{(L_2)} i'' dl. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь  $L_1$  и  $L_2$  — контуры сечения проводников, закорачивающих клеммы первой и второй антенн.

Учитывая формулы (7) и (9), можно придать уравнению (8) следующий вид:

$$I^{(1)} \mathcal{E}_1^{\text{ст}} - I_1 \mathcal{E}^{(1)} \text{ст} = I^{(2)} \mathcal{E}_2^{\text{ст}} - I_2 \mathcal{E}^{(2)} \text{ст}. \quad (10)$$

Полученное равенство и представляет собой общую теорему взаимности для приемно-передающих антенн. Входящие в нее стороны эдс определяются формулами (2), (3) и имеют простой физический смысл. Теорему (10) можно также записать, используя формулы (2), (3), в следующих двух эквивалентных формах:

$$I^{(1)} I_1 (z_{a1} + z^{(1)}) = I^{(2)} I_2 (z_{a2} + z^{(2)}) \quad (11)$$

и

$$I^{(1)} \mathcal{E}_1 \frac{z_{a1} + z^{(1)}}{z_{a1} + z_1} = I^{(2)} \mathcal{E}_2 \frac{z_{a2} + z^{(2)}}{z_{a2} + z_2}. \quad (12)$$

Из последнего выражения, между прочим, видно, что в частном случае, когда  $z_1 = z^{(1)}$  и  $z_2 = z^{(2)}$ , общая теорема взаимности переходит в известную теорему (1).

Если ввести, как это обычно делается в теории приемных антенн, понятие о полной эдс приемной антенны при помощи формул

$$\mathcal{E}^{(1)} = I^{(1)} (z_{a1} + z^{(1)}); \quad \mathcal{E}^{(2)} = I^{(2)} (z_{a2} + z^{(2)}),$$

то равенство (11) можно записать в особенно сжатом виде:

$$I_1 \mathcal{E}^{(1)} = I_2 \mathcal{E}^{(2)}. \quad (13)$$

Эта форма общей теоремы весьма сходна с теоремой (1), но, как видно из предыдущего, ей не эквивалентна.

Способом, аналогичным использованному здесь, может быть также обобщена теорема взаимности<sup>(5)</sup> для несинусоидальных колебаний.

Поступило  
25 VII 1944

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. П. Свешникова, ЖРФХО, часть физич., 59, № 5—6 (1927). <sup>2</sup> М. С. Нейман, Изв. электропром. слаб. ток., № 8, 1 (1935). <sup>3</sup> А. А. Пистолькорс, Приемные антенны, М., 1937. <sup>4</sup> А. Sommerfeld, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph., 26, 93 (1925). <sup>5</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, XLI, № 7, 294 (1943).

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

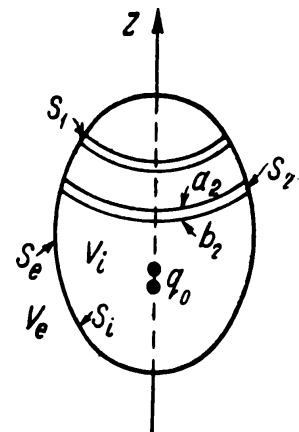
Я. Н. ФЕЛЬД

**ДИФРАКЦИОННЫЕ АНТЕННЫ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 25 IX 1945)

§ 1. Общая теория. В настоящей работе мы займемся изучением некоторых типов дифракционных антенн, получающихся после проведения соответствующих разрезов на поверхности эндовибраторов. Рассмотрим произвольный эндовибратор, являющийся телом вращения с осью симметрии  $z$ . Будем считать его поверхность бесконечно тонкой и идеально проводящей. Пусть в эндовибраторе возбуждается симметричное относительно оси  $z$  поле, электрические линии которого лежат в плоскостях, проходящих через ось  $z$ , а магнитные образуют систему кругов с центрами на этой же оси. Для определенности будем считать, что поле возбуждается гармонически колеблющимся, диполем, находящимся в точке  $q_0$  оси  $z$  с электрической силой  $\vec{p}^*$ , параллельной последней.

Чтобы превратить эндовибратор в излучающую дифракционную антенну, следует провести на нем разрезы, пересекающие линии тока. Поэтому вырежем из поверхности эндовибратора ряд узких поясков  $s_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) ширины  $d_\nu$ , каждый из которых ограничен двумя параллелями (см. рисунок). Обозначим внутреннюю и наружную стороны оставшейся металлической поверхности эндовибратора буквами  $s_i$  и  $s_e$ . Искомое поле разрезанного таким образом эндовибратора обозначим (внутри и снаружи) буквами  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Оба вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  остаются, очевидно, непрерывными при переходе через отверстия  $s_\nu$ , а тангенциальная составляющая  $\vec{E}$  обращается в нуль на  $s_i$  и  $s_e$ . Исключим при помощи бесконечно малой сферы  $s'$  возбуждающий диполь из внутреннего объема эндовибратора  $v_i$  и применим к нему лемму Лоренца <sup>(1)</sup>



$$\int_{(s_i + \Sigma s_\mu + s')} \{ [\vec{E} \vec{H}_\nu] - [\vec{E}_\nu \vec{H}] \} \vec{ds} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, m). \quad (1)$$

Здесь  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  — искомое поле, а  $\vec{E}_\nu$ ,  $\vec{H}_\nu$  — вспомогательные поля, заданные внутри  $v_i$  при помощи условий:

- 1)  $\vec{E}_\nu$ ,  $\vec{H}_\nu$  регулярны всюду внутри  $v_i$ ;

\*  $\vec{p} = \frac{4\pi\sigma - j\omega\epsilon}{c\epsilon} \vec{p}'$ , где  $\vec{p}'$  — момент диполя.

$$2 \left[ \vec{n} \left[ \vec{E}, \vec{n} \right] \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_i \\ \vec{e}_\nu \delta_{\nu\mu} & \text{на } s_\mu \end{cases} \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор наружной нормали к поверхностям,  $\delta_{\nu\mu}$  — единичный тензор, а  $\vec{e}_\nu$  — заданный на  $s_\nu$  вектор, касательный к  $s_\nu$ , который мы определим ниже.

Стягивая сферу  $s'$  к точке нахождения диполя  $q_0$  и учитывая граничные условия для  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_\nu$ , преобразуем равенства (1) к виду:

$$\int_{(\Sigma^{s_\mu})} \left\{ \left[ \vec{E}, \vec{H}_\nu \right] - \left[ \vec{e}_\nu, \vec{H} \right] \delta_{\nu\mu} \right\} d\vec{s} = 4\pi \vec{p} \vec{E}_\nu(q_0) \quad (\nu = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Применив лемму Лоренца к внешнему пространству  $v_e$ , ограниченному изнутри поверхностью  $(s_e + \sum_1^m s_\mu)$ , найдем

$$\int_{(s_e + \Sigma^{s_\mu})} \left\{ \left[ \vec{E}, \vec{\mathfrak{E}}_\nu \right] - \left[ \vec{\mathfrak{E}}, \vec{H} \right] \right\} d\vec{s} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Здесь  $\vec{\mathfrak{E}}_\nu$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}_\nu$  — новые вспомогательные поля, заданные внутри  $v_e$  при помощи условий:

1)  $\vec{\mathfrak{E}}_\nu$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}_\nu$  регулярны всюду внутри  $v_e$  и удовлетворяют на бесконечности «принципу излучения»;

$$2) \left[ \vec{n} \left[ \vec{\mathfrak{E}}, \vec{n} \right] \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_e \\ \vec{e}_\nu \delta_{\nu\mu} & \text{на } s_\mu \end{cases} \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Векторы  $\vec{e}_\nu$  те же, что и в формуле (2). Поля  $\vec{E}_\nu$ ,  $\vec{H}_\nu$  и  $\vec{\mathfrak{E}}_\nu$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}_\nu$ , определенные соответственно в областях  $v_i$  и  $v_e$ , не являются аналитическим продолжением друг друга через отверстие  $s_\nu$ , ибо  $\left[ \vec{n} \left[ \vec{H}_\nu, \vec{n} \right] \right] \neq \left[ \vec{n} \left[ \vec{\mathfrak{H}}_\nu, \vec{n} \right] \right]$  на  $s_\nu$ .

Граничные условия для  $\vec{E}_\nu$  и  $\vec{\mathfrak{E}}_\nu$  на поверхностях  $s_e$  и  $s_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, m$ ) позволяют придать формуле (4) следующее выражение:

$$\int_{(\Sigma^{s_\mu})} \left\{ \left[ \vec{E}, \vec{\mathfrak{E}}_\nu \right] - \left[ \vec{e}_\nu, \vec{H} \right] \delta_{\nu\mu} \right\} d\vec{s} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

Вычитая попарно полученные равенства из уравнений (3), получим важную для дальнейшего формулу

$$\int_{(\Sigma^{s_\mu})} \left[ \vec{E} \left( \vec{H}_\nu - \vec{\mathfrak{H}}_\nu \right) \right] d\vec{s} = 4\pi \vec{p} \vec{E}_\nu(q_0) \quad (\nu = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Введем криволинейную ортогональную систему координат  $\eta, \varphi$  на поверхности  $s_e + \Sigma s_\mu$  эндовибратора, где  $\varphi$  — угол поворота вокруг оси  $z$ . Искомое поле, очевидно, не зависит от  $\varphi$ , вспомогательные поля также не будут зависеть от  $\varphi$ , если векторы  $\vec{e}_\nu$  определить на  $s_\nu$  равенствами

$$e_\nu = (e_\nu)_\mu = f_\nu(\eta); \quad a_\nu \leq \eta \leq b_\nu; \quad \int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(\eta) h_\eta d\eta = 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, m); \quad (8)$$

$a_\nu$  и  $b_\nu$  — значения координаты  $\eta$  на границах пояса  $s_\nu$  (см. рисунок), а  $h_\eta$  — коэффициент Ляме ( $dl = h_\eta d\eta$ ).

Что касается  $f_\nu(\eta)$ , то они должны быть достаточно гладкими, удовлетворять второму из равенств (8), в остальном оставаясь произвольными.

Учитывая все сказанное и соотношение  $\vec{ds} = R h_\tau d\eta d\varphi \vec{n}$ , где  $R$  — расстояние от элемента  $ds$  до оси  $z$ , преобразуем формулу (7) к виду

$$\sum_{\mu=1}^m \int_{a_\mu}^{b_\mu} E_\tau (H_\nu - \mathfrak{H}_\nu) R h_\tau d\eta = 2\vec{p} \vec{E}_\nu(q_0) \quad (\nu=1, 2, \dots, m). \quad (9)$$

При этом было учтено, что  $E_\varphi = 0$ ,  $H_\nu = H_{\nu,\varphi}$  и  $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{H}_{\nu,\varphi}$ . Если ширина поясков  $d_\nu$  на много меньше длины волны  $\lambda$  ( $d_\nu \ll \lambda$ ), а размеры эндовибратора соизмеримы с  $\lambda$ , то величины  $H_\nu - \mathfrak{H}_\nu$  и  $R$  остаются, практически, постоянными на  $s_\mu$ , т. е. в пределах  $a_\mu \leq \eta \leq b_\mu$  ( $\mu=1, 2, \dots, m$ ).

Таким образом, эти величины могут быть вынесены за знаки интегралов в формулах (9). Введем предварительно следующие обозначения:

$$V_\nu = \int_{a_\nu}^{b_\nu} E_\nu h_\tau d\eta; \quad W_\nu = c\vec{p} \vec{E}_\nu(q_0); \quad (10)$$

$$I_{\nu\mu} = 0,5 cR_\mu (H_\nu(\eta_\mu) - \mathfrak{H}_\nu(\eta_\mu)) \quad (\nu, \mu=1, 2, \dots, m),$$

где  $R_\mu$  — средний радиус пояска  $s_\mu$ ,  $c=3 \cdot 10^{10}$  см/сек., а  $\eta_\mu$  лежит в интервале  $a_\mu \leq \eta_\mu \leq b_\mu$ . Величины  $V_\nu$  и  $I_{\nu\mu}$  имеют простой физический смысл.  $V_\nu$  представляет собой напряжение (искомого поля) между краями разреза  $s_\nu$ .  $I_{\nu\mu}$  — сумма токов, протекающих через параллель  $\eta = \eta_\mu$  по внутренней и внешней сторонам поверхности замкнутого эндовибратора, возбуждаемых соответственно полями  $\vec{E}_\nu$ ,  $\vec{H}_\nu$  и  $\vec{\mathfrak{E}}_\nu$ ,  $\vec{\mathfrak{H}}_\nu$ .

Используя обозначения (10), придадим равенствам (9) окончательный вид:

$$\sum_{\mu=1}^m I_{\nu\mu} V_\mu = W_\nu \quad (\nu=1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

Эта система уравнений позволяет легко подсчитать напряжения  $V_\mu$ , если известны коэффициенты  $I_{\nu\mu}$  и  $W_\nu$ , т. е. вспомогательные поля (см. формулу (10)).

Как легко сообразить, в нашем случае ( $d_\mu \ll \lambda$ ) знание величин  $V_\mu$  дает возможность определить искомое поле внутри и снаружи излучающего эндовибратора — дифракционной антенны. Для этого достаточно использовать само собой понятные формулы

$$\left( \vec{E}, \vec{H} \right) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^m V_\mu (\vec{E}_\mu, \vec{H}_\mu) + (\vec{E}_0, \vec{H}_0) & \text{внутри } v_i; \\ \sum_{\mu=1}^m V_\mu (\vec{\mathfrak{E}}_\mu, \vec{\mathfrak{H}}_\mu) & \text{внутри } v_e; \end{cases} \quad (12)$$

$\vec{E}_0, \vec{H}_0$  — поле, создаваемое введенным ранее диполем в замкнутом (неразрезанном) эндовибраторе.

Таким образом, расчет дифракционных антенн рассмотренного типа сводится к сравнительно простой задаче нахождения вспомогательных полей по условиям (2) и (5), т. е. к первой граничной задаче электродинамики (2). Для решения ее могут быть использованы формулы, данные нами ранее (2), или иные методы.

Метод, использованный нами для вывода уравнений (11), не является кратчайшим. Однако он сам по себе представляет интерес, так как позволяет получить интегральное уравнение, определяющее  $E_\tau$  между краями разрезов. Действительно, положив в (8)

$f_\nu \equiv \delta(\eta - \eta')$ ,  $a_\nu \leq \eta$ ,  $\eta' \leq b_\nu$ , где  $\delta(\eta)$  — импульсная функция Дирака, можно ввести обозначения  $H_\nu \equiv \mathfrak{H}_\nu \equiv G(\eta, \eta')$ ,  $\vec{E}_\nu(q_0) \equiv \vec{E}(q_0, \eta')$ ,  $a_\nu \leq \eta' \leq b_\nu$ . Равенства (9) перейдут при этом в интегральное уравнение для  $E_\eta$ :

$$\sum_{\mu=1}^m \int_{a_\mu}^{b_\mu} E_\eta G(\eta, \eta') Rh_\eta d\eta = 2\vec{p} \vec{E}(q_0, \eta'), \quad a_\nu \leq \eta' \leq b_\nu, \quad (\nu=1, 2, \dots, m). \quad (13)$$

§ 2. Сферическая дифракционная антенна. Применим изложенную выше теорию к случаю, когда дифракционная антенна имеет форму сферы радиуса  $r_0$ , из которой вырезан один ( $m=1$ ) узкий пояс, ограниченный параллелями  $\vartheta=a_1$  и  $\vartheta=b_1$ . Возбуждающий поле диполь поместим в центре сферы  $q_0=0$ . Система уравнений (11) приводится при этом к одному, определяющему напряжение  $V_1$ :

$$V_1 = \frac{W_1}{I_{11}} = \frac{2\vec{p} \vec{E}_1(q_0)}{[H_1(\vartheta_1, r_0) \mathfrak{H}_1(\vartheta_1, r_0)] r_0 \sin \vartheta_1} \quad (a_1 \leq \vartheta_1 \leq b_1).$$

Вводя сферическую систему координат  $r$ ,  $\vartheta (\equiv \eta)$ ,  $\varphi$ , можно получить для вспомогательных полей следующие выражения

$$\left\{ \begin{matrix} H_1 \\ \mathfrak{H}_1 \end{matrix} \right\} = \frac{jk}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_e \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} E_{1, \vartheta} \\ \mathfrak{E}_{1, \vartheta} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_e \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} E_{1, r} \\ \mathfrak{E}_{1, r} \end{matrix} \right\} = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_e \end{matrix} \right\},$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_e \end{matrix} \right\} = + A \frac{r_0}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} | P_n(\cos \vartheta) |_{a_1}^{b_1} P_n(\cos \vartheta) \left\{ \begin{matrix} \psi_n(kr) / \psi_n'(kr_0) \\ \zeta_n(kr) / \zeta_n'(kr_0) \end{matrix} \right\},$$

$$\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho); \quad \zeta_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

При выводе было положено

$$e_1(\vartheta) = \frac{A}{\sin \vartheta}; \quad A^{-1} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{r_0 d\vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Используя эти формулы, легко получить для  $V_1$  выражение

$$V_1 = \frac{kp(\cos b_1 - \cos a_1)}{\sin \vartheta_1 \psi_1(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{P_n'(\cos \vartheta_1)}{\psi_n'(kr_0) \zeta_n'(kr_0)} | P_n(\cos \vartheta) |_{a_1}^{b_1}}.$$

Подсчитав  $V_1$ , определим поле снаружи и внутри сферы по формулам (12), в которых суммы приводятся к одному члену.

Поступило  
25 IX 1945

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Frank u. Mises, Die Differenzial-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2, Braunschweig, 1935. <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ЖЭТФ, 14, № 9 (1945).

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИЗЛУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 25 X 1945)

Замкнутая металлическая поверхность, соизмеримая с длиной волны  $\lambda$ , при соответствующем возбуждении может в некоторых случаях весьма успешно конкурировать с обычными излучающими системами. Такую излучающую поверхность мы будем называть поверхностной антенной. Три из различных возможных способов возбуждения такой антенны изображены на рис. 1. При этом генератор помещен внутри. Линейные проводники (расположенные снаружи), связывающие поверхностную антенну с генератором, естественно назвать «элементами связи».

Рассчитав электромагнитное поле или распределение токов на поверхностной антенне, мы, очевидно, сумеем ответить на большинство вопросов теории и практики этих антенн. Поэтому в настоящей работе будет изложен метод, позволяющий находить распределение токов на антенне с учетом способа ее возбуждения.

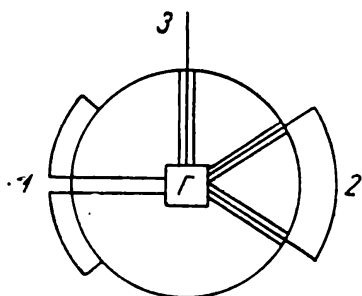


Рис. 1

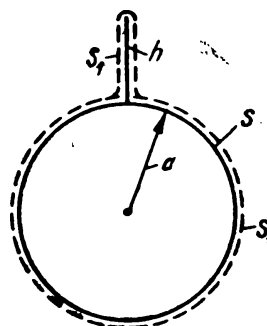


Рис. 2

Сущность предлагаемого метода мы разберем на примере сферической поверхности антенны  $s$  радиуса  $a$  с радиально расположенным элементом связи  $h$  (способ 3 на рис. 1). Закон распределения тока  $i$  вдоль линейного проводника (длины  $h$ ) элемента связи будем считать заданным. Эквивалентная схема, из которой мы будем исходить при расчете, изображена на рис. 2. При этом можно предположить, что вдоль элемента связи распределена некоторая сторонняя эдс, реализующая заданное на нем распределение тока  $i$ .

Обозначим векторы поля, создаваемого рассматриваемой антенной, буквами  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Введем также некоторое вспомогательное поле  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ , регулярное всюду вне сферы  $s^*$ , источники которого можно считать

\* При расчете этого поля линейный элемент связи  $h$  следует предполагать отсутствующим, а сферу  $s$  рассматривать как некоторую геометрическую поверхность.

находящимися внутри  $s$ . Окружив всю антенную систему геометрической поверхностью  $s_1$  (рис. 2) и применив к полям  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  лемму Лоренца, получим

$$\int_{(s_1)} \left\{ [\vec{E} \vec{\mathcal{H}}] - [\vec{\mathcal{E}} \vec{H}] \right\} \vec{ds} = 0. \quad (1)$$

Переходя в этом выражении к пределу, когда поверхность  $s_1$  совпадает с металлической поверхностью антенны и элемента связи, и учитывая, что: 1) тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  обращается в нуль на поверхности  $s$  (антенна практически идеально-проводящая); 2) линейный элемент связи  $h$  бесконечно тонок, и потому циркуляция магнитного вектора  $\vec{\mathcal{H}}$  вокруг него равна нулю (см. сноску на стр. 199); 3) циркуляция вектора  $\vec{H}$  вокруг элемента связи равна  $\frac{4\pi}{c} i$  ( $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек.), найдем

$$\int_{(s)} [\vec{\mathcal{E}} \vec{H}] \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(h)} i \vec{\mathcal{E}} dh. \quad (2)$$

Линейный интеграл в правой части берется вдоль оси элемента связи. Легко сообразить, что формула (2) справедлива для поверхностных антенн любой формы и произвольных конфигураций линейных элементов связи.

Введем сферическую систему координат  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  с главной осью, совпадающей с элементом связи. Вследствие симметричного возбуждения искомое поле будет иметь только составляющие  $E_r$ ,  $E_\vartheta$  и  $H_\varphi$ , не зависящие от азимута  $\varphi$ .

Вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  вне сферы  $s$  определим, задав на  $s$  значение тангенциальных составляющих вектора  $\vec{\mathcal{E}}$  при помощи формул

$$\mathcal{E}_\varphi = 0, \quad \mathcal{E}_\vartheta = \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta) \text{ на } s. \quad (3)$$

Здесь  $P_n$  — полином Лежандра произвольной степени  $n$ . Целесообразность такого выбора выяснится из дальнейшего.

Учитывая все это, придадим равенству (2) вид

$$\int_0^\pi I(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{a} \int_a^{a+h} i \mathcal{E}_r dr, \quad (4)$$

где  $I(\vartheta)$  — полный искомый ток, протекающий через параллель  $\vartheta$  по поверхности антенны, связанный с  $H_\varphi$  равенством

$$I(\vartheta) = \frac{c}{2} a \sin \vartheta H_\varphi(a, \vartheta). \quad (5)$$

Вводя сокращающее запись обозначение

$$b_n = \frac{2n+1}{2a} \int_a^{a+h} i \mathcal{E}_r dr, \quad (6)$$

перепишем равенство (4) так:

$$\frac{2n+1}{2} \int_0^\pi I(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = b_n. \quad (7)$$

Это основное равенство показывает, что коэффициенты  $b_n$  при  $n=0, 1, 2, \dots$  являются коэффициентами разложения тока  $I(\vartheta)$  в ряд



по полиному Лежандра. Таким образом, искомое распределение тока по поверхности антенны полностью определяется рядом

$$I(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(\cos \vartheta). \quad (8)$$

На основании известных теорем о разложении функций в ряд по полиномам Лежандра можно утверждать, что ряд (8) с коэффициентами (6) равномерно сходится в интервале  $0 < \vartheta < \pi^*$ , ибо из физических соображений ясно, что  $I(\vartheta)$  удовлетворяет всем требованиям этих теорем.

Для расчета коэффициентов  $b_n$  по формуле (6) необходимо на основании граничных условий (3) определить вспомогательное поле. Ищем решение этой задачи при помощи выражений

$$\mathfrak{E}_r = \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u; \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \vartheta}; \quad \mathfrak{H}_\varphi = \frac{jk}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta}; \quad (9)$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(\cos \vartheta) \zeta_m(kr); \quad \zeta_m(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

удовлетворяющих уравнениям Максвелла.

Для нахождения коэффициентов  $A_m$  используем условия (3). Первое из них удовлетворяется автоматически, так как  $\mathfrak{E}_\varphi \equiv 0$ , а второе принимает вид

$$-\frac{k}{a} \sum_1^{\infty} A_m P_m^{(1)}(\cos \vartheta) \zeta_m'(ka) = \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta) \equiv \frac{P_{n+1}^{(1)}(\cos \vartheta) - P_{n-1}^{(1)}(\cos \vartheta)}{2n+1},$$

где  $P_n^{(1)}$  — присоединенная функция Лежандра первого рода.

Приравнявая коэффициенты при  $P_m^{(1)}(\cos \vartheta)$  в обеих частях равенства, найдем

$$A_{n \pm 1} = \frac{(j)^{1 \pm 1} a}{(2n+1) k \zeta_{n \pm 1}'(ka)}; \quad A_m = 0 \text{ при } m \neq n+1 \text{ и } n-1.$$

Выражение для  $\mathfrak{E}_r$  после этого запишется так (см. формулу (9)):

$$\mathfrak{E}_r = \frac{a}{(2n+1)k} \left| \frac{\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \zeta_x(kr)}{\zeta_x'(ka)} P_x(\cos \vartheta) \right|_{x=n+1}^{x=n-1}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (6) для  $b_n$  и учитывая, что  $P_n(1) = 1$ , получим

$$b_n = \left| \frac{1}{2k \zeta_x'(ka)} \int_a^a + h \right. i \left. \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \zeta_x(kr) dr \right|_{x=n+1}^{x=n-1}.$$

Закон изменения тока  $i$  в линейном проводе элемента связи мы зададим при помощи обычной формулы

$$i = i_0 \sin k(d-r) \quad (d = a + h), \quad (10)$$

достаточно хорошо отображающей действительное распределение тока в тонком проводе, «открытом» на конце.

\* Ряд (8) сводится, как это следует из выражений (11) для  $b_n$ , также в точках  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ .

Используя формулу (10), придадим, после несложных преобразований, выражению для  $b_n$  окончательный вид

$$b_n = \frac{i_0}{2} \left| \frac{\zeta_\chi(kd) - \cos kh \zeta_\chi(ka)}{\zeta_\chi'(ka)} \right|_{\chi=n+1}^{\chi=n-1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

В частном случае, когда  $kh = \pi/2$ ,

$$b_n = \frac{i_0}{2} \left[ \frac{\zeta_{n-1}(kd)}{\zeta'_{n-1}(ka)} - \frac{\zeta_{n+1}(kd)}{\zeta'_{n+1}(ka)} \right].$$

Так как в этих формулах  $n$  — произвольное целое число  $\geq 0$ , то задача определения коэффициентов ряда (8) для искомого тока  $I(\vartheta)$  может считаться полностью решенной.

Очевидно, задача возбуждения металлической сферы несколькими радиально расположенными проводниками с заданными в них токами немедленно приводится к рассмотренной нами задаче при помощи принципа суперпозиции.

Изложенный метод легко обобщается на случай поверхностной антенны произвольной формы  $s$  с любым расположением элементов связи  $h$ .

Для этого на поверхности  $s$  вводится криволинейная, ортогональная система координат  $u, v$ .

Вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ , регулярное всюду вне  $s$ , определяется при помощи граничных условий

$$\mathcal{E}_v = 0; \quad \mathcal{E}_u = p(u, v) S_n(u, v) \text{ на } s, \quad (12)$$

где  $S_n(u, v)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — некоторое полное, ортогональное и нормированное на  $s$  множество функций с весом  $p(u, v)$ .

Формула (2), которая, как уже отмечалось, остается справедливой, принимает при этом вид

$$\int_{(s)} j_u S_n(u, v) p(u, v) ds = - \int_{(h)} i \vec{\mathcal{E}} d\vec{h} \equiv b_n, \quad (13)$$

где  $j_u$  ( $= -\frac{4\pi}{c} H_v$ ) — искомая составляющая поверхностной плотности тока на  $s$ . Из этого равенства следует, что  $b_n$  являются коэффициентами Фурье в разложении  $j_u$  по  $S_n$  и, следовательно,

$$j_u = \sum_0^{\infty} b_n S_n(u, v). \quad (14)$$

Для нахождения второй составляющей плотности тока —  $j_v$ , достаточно поменять местами  $\mathcal{E}_u$  и  $\mathcal{E}_v$  в равенствах (12). Тогда в формулах (13) и (14) вместо  $j_u$  будет, очевидно, фигурировать  $j_v$ .

Хотя ряды типа (14) сходятся только в среднем к функции, для которой они составлены, однако в большинстве физических задач ряд (14) будет сходиться равномерно.

Поступило  
25 X 1945

**Я. Н. ФЕЛЬД**

**J. N. FELD**

*кандидат технических наук*

## **ДИФФРАКЦИОННЫЕ АНТЕННЫ<sup>1)</sup>**

### **DIFFRACTIONAL ANTENNAE**

Излагается общий метод определения полей диффракционных антенн, применяемый затем к изучению антенн, обладающих осевой симметрией. Задача сводится при этом к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, аналогичных уравнениям Кирхгофа для связанных контуров.

Вводятся понятия взаимных внешней и внутренней комплексных проводимостей различных щелей и даются формулы для определения мощности излучения. Подробно разобран пример сферической щелевой антенны.

\* \* \*

A general method is presented for determining the fields of diffractive antennae, which is further employed for an investigation of antennae having axial symmetry. The problem in this case is reduced to a system of linear equations with constant coefficients, similar to the Kirchhoff equations for coupled circuits.

So-called mutual internal and external complex conductances for various slits are introduced and formulae are given for determining the power of radiation. A sphere slit antennae is analyzed in detail.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Задача об излучении электромагнитной энергии через отверстия впервые рассматривалась Релеем<sup>[1]</sup>. Однако, только в последнее время, в связи с развитием техники дециметровых и сантиметровых волн, этот вопрос стал по-настоящему актуальным. Об этом свидетельствует ряд появившихся, главным образом в советской литературе, работ [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], посвященных излучению энергии через отверстия. Из них необходимо особенно отметить работы А. А. Пистолькорса, значительно продвинувшего разработку теории таких излучателей, и М. С. Неймана, являющегося пионером в этой новой области антенной техники.

Мы будем в дальнейшем называть диффракционными антеннами<sup>2)</sup> системы, интенсивно излучающие через отверстия. Такие антенны можно получить, прорезая надлежащим образом отверстия в металлической поверхности объемных резонаторов, волноводов и т. п., возбуждаемых изнутри. Для получения значительного излучения необходимо прорезать отверстия так, чтобы сильно исказить распределение токов на внутренней поверхности объемных резонаторов или волноводов, в которых они прорезаются.

Поле снаружи или внутри произвольной замкнутой геометрической поверхности однозначно определяется [3, 4], как это вытекает из

<sup>1)</sup> Доложено на научной сессии ВНТОРиЭ 8 мая 1946 г.

<sup>2)</sup> Термин диффракционная антенна предложен М. С. Нейманом.

теоремы единственности, заданием тангенциальной составляющей электрического вектора на этой поверхности, а также источников, если они имеются внутри рассматриваемого объема. Поэтому поле снаружи и внутри любой дифракционной антенны может быть (принципиально) найдено по известным формулам<sup>1)</sup> после нахождения тангенциальной составляющей электрического вектора  $\vec{E}$  на (геометрической) поверхности отверстия. Тангенциальную составляющую  $\vec{E}$  на металлической поверхности антенны будем считать равной нулю, что равносильно пренебрежению потерями в металле.

Таким образом, задача фактически сводится к определению касательной составляющей  $\vec{E}$  на поверхности отверстия. Для решения её ниже развиваются методы, данные нами в работах<sup>4, 6)</sup>.

Проводимость среды, находящейся снаружи и внутри дифракционной антенны, будем считать равной нулю, а диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость равными единице, причём всюду, где это специально не оговаривается, применяется гауссова система единиц. Зависимость векторов поля от времени взята в форме  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  — угловая частота.

## 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЕКТОРА У ОТВЕРСТИЯ

Рассмотрим дифракционную антенну в виде бесконечно тонкого идеально проводящего объемного резонатора с отверстием, возбуждаемого изнутри источниками — диполями.

Обозначив внутреннюю и внешнюю стороны оболочки объемного резонатора буквами  $s_i$  и  $s_e$  и затянув отверстие геометрической поверхностью  $s$ , разобьем всё пространство на две части: внутреннюю  $v_i$  и внешнюю  $v_e$ , ограниченные соответственно поверхностями  $(s_i + s)$  и  $(s_e + s)$  (рис. 1).

Поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , создаваемое рассматриваемой дифракционной антенной и областях  $v_i$  и  $v_e$ , может быть определено, как уже указывалось, через значение касательной составляющей  $\vec{E}$  на поверхности отверстия  $s$ . Действительно, применяя формулы<sup>1)</sup>, решающие первую граничную задачу электродинамики<sup>2)</sup> и учитывая, что на идеально проводящих поверхностях  $s_i$  и  $s_e$  касательная слагающая  $\vec{E}$  равна нулю, найдём<sup>3)</sup>

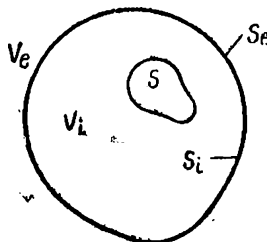


Рис. 1.

$$\vec{E}(g) = \int_{(s)} \vec{E}''(g, q; \vec{A}) ds + \sum_v \vec{E}'(g, a_v; \vec{p}_v), \quad g \in v_i, \quad (1)$$

$$\vec{H}(g) = \int_{(s)} \vec{H}''(g, q; \vec{A}) ds + \sum_v \vec{H}'(g, a_v; \vec{p}_v),$$

$$\vec{A} = \frac{i}{4\pi k} [\vec{E} \vec{n}], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1')$$

<sup>1)</sup> Формулы (1) в работе<sup>4)</sup>.

<sup>2)</sup> Т. е. задачу определения поля внутри некоторой области по заданной на её границе касательной составляющей электрического вектора.

<sup>3)</sup> В отличие от работы<sup>4)</sup> здесь рассмотрено дискретное распределение источников, а также частично изменены обозначения.

<sup>4)</sup> Значок  $v$  означает, что точка  $g$  находится внутри объема  $v_i$ .

Здесь  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$  ( $\vec{E}', \vec{H}'$ ) — вспомогательное поле, определённое внутри  $v_i$ , создаваемое вспомогательным магнитным (электрическим) диполем.

Первый аргумент, стоящий в скобках у  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$  ( $\vec{E}', \vec{H}'$ ), обозначает точку наблюдения, второй — точку нахождения диполя, создающего вспомогательное поле, а третий — магнитный (электрический) момент этого диполя. При нахождении полей  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$  и  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  поверхность  $(s_i + s)$ , ограничивающая  $v_i$ , предполагается идеально проводящей.

$a$ , — точки нахождения источников — электрических диполей, возбуждающих искомое поле  $\vec{E}, \vec{H}$  диффракционной антенны,  $\vec{p}$ , — их электрические моменты,  $\vec{n}$  — единичный вектор наружной (по отношению к  $v_i$ ) нормали к  $s$ ,  $\lambda$  — длина волны. Суммирование в ф-лах (1) производится по всем источникам, а интегрирование по координатам точки  $q$ .

Аналогичные выражения могут быть написаны также для внешнего пространства:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(g) &= - \int_{(s)} \mathfrak{E}''(g, q; \vec{A}) ds \\ \vec{H}(g) &= - \int_{(s)} \mathfrak{H}''(g, q; \vec{A}) ds \end{aligned} \right\} g \in v_e \quad (2)$$

Наличие минусов перед интегралами и отсутствие сумм объясняется изменением направления наружной нормали на противоположное и отсутствием источников внутри  $v_e$ . Вспомогательные поля обозначены готическими буквами, так как они теперь относятся к пространству  $v_e$ . В остальном обозначения остались прежними. Таким образом, искомое поле  $\vec{E}, \vec{H}$  определено во всём пространстве  $v_i + v_e$  через значение касательной составляющей  $\vec{E}$  на поверхности отверстия  $s$ , входящей в ф-лы (1), (2) при помощи вектора  $\vec{A}$  [ф-лы (1')].

Выражения (1) и (2) для  $\vec{E}, \vec{H}$  удовлетворяют граничным условиям на идеально проводящих поверхностях  $s_i$  и  $s_e$  и имеют требуемые особенности в точках нахождения источников<sup>1)</sup>. При переходе через  $s$  остаётся непрерывной касательная слагающая  $\vec{E}$ , так как вектор  $\vec{A}$ , фигурирующий в ф-лах (1), (2), один и тот же. Поэтому для того, чтобы ф-лы (1), (2) действительно решали задачу об излучении диффракционной антенны, остаётся, очевидно, выполнить требование о непрерывности касательной составляющей  $\vec{H}$  при переходе через поверхность отверстия  $s$ . Обозначая буквой  $g_0$  произвольную точку на  $s$ , а буквой  $\vec{n}_0$  — единичный вектор наружной (по отношению к  $v_i$ )

<sup>1)</sup> Всё это следует из того, что ф-лы (1) и (2) решают 1-ю граничную задачу электродинамики для пространств  $v_i$  и  $v_e$ .

нормали к  $s$  в точке  $g_0$  (в отличие от нормали  $\vec{n}$  в точке  $q$ ), придадим этому требованию следующий вид

$$\int_{(s)} \left[ \vec{n}_0 [\vec{n}_0 \vec{H}''(g_0, q; \vec{A})] \right] ds + \sum_{\nu} \left[ \vec{n}_0 [\vec{n}_0 \vec{H}'(g_0, a_{\nu}; \vec{p}_{\nu})] \right] = \\ = - \int_{(s)} \left[ \vec{n}_0 [\vec{n}_0 \vec{\mathfrak{H}}''(g_0, q; \vec{A})] \right] ds. \quad g_0 \in s. \quad (3)$$

При получении равенства (3) мы совершили переход к пределу под знаком интеграла в выражениях типа

$$\lim_{g \rightarrow g_0} \int_{(s)} \left[ \vec{n}_0 [\vec{n}_0 \vec{H}''(g, q; \vec{A})] \right] ds.$$

Справедливость этого может быть строго доказана. Отметим ещё, что интегралы, входящие в ф-лу (3) и нижеследующие, нужно понимать в смысле „главного значения“ Коши, если они не существуют в обычном смысле.

Обозначение

$$\vec{G}(g_0, q; \vec{A}) \equiv \vec{H}''(g_0, q; \vec{A}) + \vec{\mathfrak{H}}''(g_0, q; \vec{A}), \quad (4)$$

позволяет придать выражению (3) следующую форму

$$\int_{(s)} \left[ \vec{n}_0 [\vec{n}_0 \vec{G}(g_0, q; \vec{A})] \right] ds = \sum_{\nu} \left[ [\vec{n}_0 \vec{H}'(g_0, a_{\nu}; \vec{p}_{\nu})] \vec{n}_0 \right], \quad g_0 \in s. \quad (5)$$

Это равенство можно, очевидно, рассматривать как интегральное уравнение, определяющее  $\vec{A}$  [см. (1')], т. е. касательную составляющую электрического вектора  $\vec{E}$  на  $s$ . Решив уравнение (5) и подставив найденное значение  $\vec{A}$  в ф-лы (1) и (2), можно определить искомое поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в любой точке пространства.

Векторное интегральное уравнение (5) эквивалентно двум скалярным уравнениям Фредгольма первого рода. Для того, чтобы показать это, введём на поверхности  $s$  криволинейную ортогональную систему координат  $\eta$ ,  $\theta$  и обозначим буквами  $\vec{t}_{\eta 0}$  и  $\vec{t}_{\theta 0}$  единичные векторы, касательные к линиям  $\eta$  и  $\theta$  в точке  $g_0$ .

Тогда ф-ле (5) легко придать вид

$$\vec{t}_{\eta 0} \int_{(s)} \vec{t}_{\eta 0} \vec{G}(g_0, q; \vec{A}) ds + \vec{t}_{\theta 0} \int_{(s)} \vec{t}_{\theta 0} \vec{G}(g_0, q; \vec{A}) ds = \\ = - \vec{t}_{\eta 0} \sum_{\nu} \vec{t}_{\eta 0} \vec{H}'(g_0, a_{\nu}; \vec{p}_{\nu}) - \vec{t}_{\theta 0} \sum_{\nu} \vec{t}_{\theta 0} \vec{H}'(g_0, a_{\nu}; \vec{p}_{\nu}).$$

Если учесть ещё, что на основании теоремы взаимности для магнитных диполей <sup>1)</sup> и ф-л (1') и (4)

$$\vec{t} \vec{G}(g_0, q; \vec{A}) = \vec{A} \vec{G}(q, g_0; \vec{t}) = \frac{i}{4\pi k} [\vec{G}(q, g_0; \vec{t}) \vec{E}(q)]_n,$$

то предыдущее векторное равенство можно заменить двумя скалярными:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(s)} [\vec{E}(q) \vec{G}(q, g_0; \vec{t}_{\eta 0})] \vec{d}s &= -4\pi i k \sum_{\nu} \vec{t}_{\eta 0} \vec{H}'(g_0, a_{\nu}; \vec{p}_{\nu}) \\ \int_{(s)} [\vec{E}(q) \vec{G}(q, g_0; \vec{t}_{\theta 0})] \vec{d}s &= -4\pi i k \sum_{\nu} \vec{t}_{\theta 0} \vec{H}'(g_0, a_{\nu}; \vec{p}_{\nu}) \end{aligned} \right\} g_0 \in s, \quad (6)$$

определяющими обе касательные составляющие электрического вектора <sup>1)</sup>  $E_{\eta}$  и  $E_{\theta}$  на поверхности  $s$ .

## 2. ВТОРОЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод, применённый в предыдущем параграфе, привёл к получению интегральных уравнений (6). Однако, эта форма записи основных уравнений, весьма удобная в общем случае, приводит к излишне сложным выкладкам при рассмотрении отдельных частных задач. Чтобы избежать их, ниже излагается другой вывод, приводящий к более гибкой форме основных интегральных уравнений.

Вывод этот базируется на использовании леммы Лоренца, которая для произвольных полей  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$ , удовлетворяющих уравнениям Максвелла, может быть записана в следующем виде

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}^1] - \operatorname{div} [\vec{E}^1 \vec{H}] = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}^{cm} \vec{E}^1 - \vec{j}_i^{cm} \vec{E}), \quad (7)$$

где  $\vec{j}^{cm}$  и  $\vec{j}_i^{cm}$  — плотности сторонних токов (источников), возбуждающих поля  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$ , а  $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ . Будем подразумевать под  $\vec{E}, \vec{H}$  искомое поле, возбуждаемое линейным проводником  $h$  с (сторонним) током  $I$ , расположенным внутри  $v_i$ , а под  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  — вспомогательное поле, заданное внутри  $v_i$  при помощи условий:

$$1) [\vec{n} [\vec{E}^1 \vec{n}]] = \begin{cases} 0 \text{ на } s_i \\ \vec{e}^1 \text{ на } s. \end{cases} \quad (8)$$

2) Внутри  $v_i$  отсутствуют источники поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$ .

Здесь  $\vec{n}$  — единичный вектор наружной нормали, а  $\vec{e}^1$  — касательный к  $s$  вектор, который пока оставляем неопределённым.

<sup>1)</sup> Так как  $[\vec{E} \vec{G}] \vec{d}s = (E_{\eta} G_{\theta} - E_{\theta} G_{\eta}) ds$ .

Интегрируя равенство (7) по внутреннему объёму  $v_i$ , ограниченному поверхностью  $s + s_i$ , и учитывая условия (8), а также равенство нулю касательной составляющей  $\vec{E}$  на  $s$ , найдём, при помощи теоремы Гаусса:

$$\int_{(s)} \left\{ [\vec{E} \vec{H}^1] - [\vec{e}^1 \vec{H}] \right\} \vec{d}s = \frac{4\pi}{c} \int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{d}h. \quad (9)$$

Интегрирование в правой части производится по оси линейного провода  $h$ , возбуждающего антенну.

Введём ещё новое вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$ , заданное во внешнем пространстве  $v_e$ , ограниченном (изнутри) поверхностью  $s + s_e$ , при помощи условий:

$$1) [\vec{n} [\vec{\mathcal{E}}^1 \vec{n}]] = \begin{cases} 0 \text{ на } s_e \\ \vec{e}^1 \text{ на } s. \end{cases} \quad (10)$$

3) Поле  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$  не имеет источников внутри  $v_e$  и удовлетворяет на бесконечности „принципу излучения“. Вектор  $\vec{e}^1$  тот же, что и в ф-ле (8). Поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$ , определённые соответственно в областях  $v_i$  и  $v_e$ , не являются аналитическим продолжением друг друга через отверстие  $s$ , так как  $[\vec{n} [\vec{H}^1 \vec{n}]] \neq [\vec{n} [\vec{\mathcal{H}}^1 \vec{n}]]$  на  $s$ . В противном случае эти поля не имели бы источников и должны были быть тождественно равными нулю, что противоречит условиям (8, 10).

Применяя к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$  лемму Лоренца (7), получим для внешнего пространства  $v_e$  равенство, аналогичное (9)

$$\int_{(s)} \left\{ [\vec{E} \vec{\mathcal{H}}^1] - [\vec{e}^1 \vec{H}] \right\} \vec{d}s = 0. \quad (11)$$

При этом были учтены граничные условия для  $\vec{E}$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1$  на  $s + s_e$  и отсутствие сторонних токов в пространстве  $v_e$ . Вычитая полученное равенство (11) из уравнения (9), найдём важный для дальнейшего результат

$$\int_{(s)} [\vec{E} (\vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1)] \vec{d}s = \frac{4\pi}{c} \int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{d}h. \quad (12)$$

Если источники (сторонние токи) распределены не линейно, а дискретно, в виде электрических диполей с моментами  $\vec{p}_v$ , находящихся в точках  $a_v$  пространства  $v_i$ , то

$$\int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{d}h = i\omega \sum_v \vec{p}_v \vec{E}^1(a_v),$$

где суммирование производится по всем диполям.

Равенство (12) при этом принимает вид

$$\int_{(s)} [\vec{E} (\vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1)] \vec{d}s = 4\pi ik \sum_v \vec{p}_v \vec{E}^1(a_v). \quad (12')$$



Вектор  $\vec{e}^1$ , окончательно определяющий вспомогательные поля  $\vec{H}^1$  и  $\vec{\mathcal{H}}^1$ , может быть выбран произвольно. Рациональный выбор  $\vec{e}^1$  для различных частных задач позволяет сразу получить при помощи ф-л (12), (12') интегральные уравнения для касательных составляющих  $\vec{E}$  на  $s$  в наиболее простой и удобной форме.

Рассмотрим сначала общий случай, когда обе касательные составляющие электрического вектора  $E_\eta$  и  $E_\theta$  на поверхности  $s$  отличны от нуля и зависят от обеих криволинейных координат  $\eta$  и  $\theta$ .

Определим прежде всего вектор  $\vec{e}^1$  при помощи следующих двух различных выражений

$$\text{и } \left. \begin{array}{l} 1) \vec{e}^1 = \vec{t}_\eta \delta(R) \\ 2) \vec{e}^1 = \vec{t}_\theta \delta(R) \end{array} \right\} \quad (13)$$

где  $\delta(R)$  — импульсная функция Дирака,  $R$  — расстояние между точкой  $q$  [по координатам которой производится интегрирование в ф-ле (12)] и произвольной точкой  $g_0$  поверхности  $s$ , а  $\vec{t}_\eta$  и  $\vec{t}_\theta$  — введённые ранее орты к координатным линиям в точке  $q$ .

Если ввести обозначения, соответствующие двум способам определения  $\vec{e}^1$  [ф-лы (13)]

$$\text{и } \left. \begin{array}{l} 1) \vec{K}(q, g_0; \vec{t}_{\eta_0}) = \vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1, \vec{E}^1(a_v, g_0; \vec{t}_{\eta_0}) = \vec{E}^1(a_v) \\ 2) \vec{K}(q, g_0; \vec{t}_{\theta_0}) = \vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1, \vec{E}^1(a_v, g_0; \vec{t}_{\theta_0}) = \vec{E}^1(a_v) \end{array} \right\} \quad (14)$$

то ф-ла (12') позволяет написать два интегральных скалярных уравнения, определяющих  $E_\eta$  и  $E_\theta$  на  $s$  и полностью эквивалентных уравнениям (6):

$$\left. \begin{array}{l} \int_{(s)} [\vec{E}(q) \vec{K}(q, g_0; \vec{t}_{\eta_0})] \vec{ds} = 4\pi ik \sum_v \vec{p}_v \vec{E}^1(a_v, g_0; \vec{t}_{\eta_0}) \\ \int_{(s)} [\vec{E}(q) \vec{K}(q, g_0; \vec{t}_{\theta_0})] \vec{ds} = 4\pi ik \sum_{(g_0 \in s)} \sum_v \vec{p}_v \vec{E}^1(a_v, g_0; \vec{t}_{\theta_0}) \end{array} \right\} \quad (15)$$

Когда источники, возбуждающие диффракционную антенну, распределены непрерывно по некоторым линиям или поверхностям, то суммы, стоящие в правых частях равенств (15) и (6), должны быть заменены соответствующими интегралами.

### 3. ДИФФРАКЦИОННЫЕ АНТЕННЫ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В настоящем параграфе мы рассмотрим диффракционные антенны, обладающие осевой симметрией.

Пусть в объёмном резонаторе, являющемся телом вращения с осью симметрии  $z$ , возбуждается симметричное относительно оси  $z$  поле, электрические линии которого лежат в плоскостях, проходящих через

ось  $z$ , а магнитные образуют систему кругов с центрами на этой оси. Для определённости будем считать, что поле создаётся одним или несколькими диполями, расположенными вдоль оси  $z$  с моментами, параллельными последней. Чтобы превратить объёмный резонатор в излучающую систему, следует провести на нём разрезы, пересекающие линии тока.

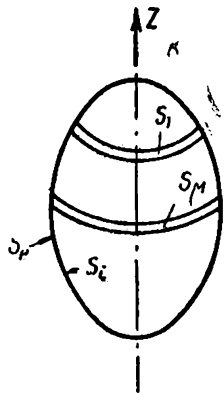


Рис. 2.

Для этого вырежем из поверхности резонатора ряд поясков  $s_\mu$  ( $\mu=1, 2 \dots m$ ) ширины  $d_\mu$ , каждый из которых ограничен двумя параллелями (рис. 2). Симметрия поля при этом не нарушится. Общую поверхность вырезанных поясков обозначим буквой  $s$

$$\left( s = \sum_{\mu=1}^m s_\mu \right).$$

Введём ортогональную систему координат  $\eta, \varphi$  на поверхности  $s$ , где  $\varphi$  — угол поворота вокруг оси  $z$ . Поле дифракционной антенны, очевидно, не зависит от  $\varphi$  и имеет у поверхности  $s$  только одну касательную составляющую  $\vec{E}_\eta$  ( $E_\varphi=0$ ). Для получения интегрального уравнения, определяющего  $E_\eta$  на  $s$ , проще всего воспользоваться ур-нием (12'), задав  $\vec{e}^1$  при помощи формулы 1)

$$\vec{e}^1 = \vec{t}_\eta \delta(\eta - \eta_0) \text{ на } s. \quad (16)$$

Вспомогательные поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$ , соответствующие заданному, таким образом, вектору  $\vec{e}^1$ , также обладают осевой симметрией и имеют равными нулю составляющие  $\vec{E}_\varphi^1, \vec{\mathcal{E}}_\varphi^1$ . Учитывая всё сказанное и соотношения  $H^1 = H_\varphi^1, \mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_\varphi^1, ds = h_\varphi h_\eta d\eta d\varphi$ , где  $h_\eta$  и  $h_\varphi$  — коэффициенты Ляме, приведём равенство (12) к виду

$$\int_{(L)} E_\eta (H^1 - \mathcal{H}^1) h_\varphi h_\eta d\eta = 2ik \sum_{\nu} \vec{p}_\nu \vec{E}^1(a_\nu). \quad (17)$$

Интегрирование производится по всем интервалам, которые пробегает  $\eta$  на  $s = \sum_1^m s_\mu$ , т. е.  $L = \sum_1^m L_\mu$ , где  $L_\mu$  — интервал, соответствующий пояску  $s_\mu$ .

Введём обозначения

$$I(\eta, \eta_0) = \frac{ch_\varphi}{2} (H^1 - \mathcal{H}^1), \quad W(\eta_0) = ick \sum_{\nu} \vec{p}_\nu \vec{E}^1(a_\nu). \quad (18)$$

Величина  $I(\eta, \eta_0)$  имеет простой физический смысл — она равна сумме токов, протекающих через параллель  $\eta$  по внутренней и внешней сторонам поверхности замкнутого (неразрезанного) объёмного резонатора,

1)  $\delta(\eta) = 0$  при  $\eta \neq 0$  и  $\int \delta(\eta) h_\eta d\eta = 1$ .

возбуждаемых полями  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$ . Уравнение (17) в новых обозначениях записывается следующим образом

$$\int_L E_\eta(\eta) I(\eta, \eta_0) h_\eta d\eta = W(\eta_0), \quad \eta_0 \in L. \quad (19)$$

Это интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром  $I(\eta, \eta_0)$ , заданной правой частью  $W(\eta_0)$  и неизвестной функцией  $E_\eta(\eta)$ . Займёмся прежде всего анализом ядра или, вернее, его главной части, имеющей при  $\eta = \eta_0$  особенность логарифмического типа.

Для этого рассмотрим подробнее вспомогательные поля, определяющие ядро [см. ф-лу (18)]. Определение их сводится к первой граничной задаче, решение которой даётся формулами типа (1). Учитывая условия (8), напишем для  $\vec{H}^1$  выражение<sup>1)</sup>

$$\vec{H}^1(g) = \int_{(s)} \vec{H}''(g, q'; \vec{A}) ds', \quad \vec{A} = \frac{i}{4\pi k} [\vec{e}^1, \vec{n}]. \quad (20)$$

Подынтегральное выражение может быть представлено в форме

$$\vec{H}''(g, q'; \vec{A}) = 2 (\text{grad div} + k^2) \vec{A} \frac{e^{-ikR'}}{R'} + \vec{O}(1), \quad (20')$$

где  $\vec{O}(1)$  — регулярная внутри  $v_i$  и на  $s + s_i$  функция, а  $R'$  — расстояние между точками  $g$  и  $q'$ . При взятии  $\text{grad div}$  переменной считается точка  $g$ . Первый член написанной формулы представляет собой магнитный вектор магнитного диполя, обладающего моментом  $\vec{A}$  и находящегося в точке  $q'$  идеально проводящей плоскости, касательной к  $s$  в точке  $q'$ . Наличие же  $\vec{O}(1)$  обусловлено отличием поверхности  $s + s_i$  от бесконечной плоскости.

Подставляя последнее выражение в уравнение (20), найдём после несложных выкладок с учётом ф-лы (16) для  $\vec{e}^1, \vec{e}^2$

$$\vec{H}^1(g) = 2k^2 \int_{(s)} \vec{A} \frac{e^{-ikR'}}{R'} ds' + \vec{O}_1(1). \quad (21)$$

Так как

$$\vec{A} = \frac{i}{4\pi k} [\vec{e}^1, \vec{n}] = \frac{i}{4\pi k} [\vec{t}_\eta, \vec{n}] \delta(\eta' - \eta_0),$$

где  $\eta', \varphi'$  — координаты точки  $q'$ , то, производя в равенстве (21) интегрирование по  $\eta'$ , получим:

$$\vec{H}^1(g) = -\frac{ik}{2\pi} \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_\varphi' d\varphi' + \vec{O}_1(1)$$

и

$$H^1(g) = -\frac{ik}{2\pi} \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' + O_1(1), \quad (22)$$

1) Здесь в отличие от ф-лы (1) над  $q$  поставлен штрих.

2) Здесь и ниже  $O_n(1)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) обозначают регулярные функции.

где  $R$  — расстояние между точкой  $g$  ( $\eta, \varphi$ ) и точкой  $\eta_0, \varphi'$ , лежащими на  $s$ , а  $\rho_0 \equiv h_\varphi(\eta_0)$ .

Аналогично рассуждая, получаем для  $\mathfrak{S}^1$  выражение, главный член которого отличается от предыдущего только знаком

$$\mathfrak{S}^1(g) = \frac{ik}{2\pi} \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' + O_2(1). \quad (23)$$

Формулы (18), (22) и (23) позволяют написать для ядра следующее выражение

$$I(\eta, \eta_0) = -\frac{ikc}{2\pi} \rho \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' + O_3(1) \quad (24)$$

или, так как  $\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{1}{R} + O(1)$ ,

$$I(\eta, \eta_0) = -\frac{ikc}{2\pi} \rho \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{R} d\varphi' + O_4(1), \quad (24')$$

где

$$\rho = h_\varphi(\eta).$$

Таким образом, задача выделения главной части ядра может считаться решённой.

Проделанный анализ позволяет указать сравнительно простой, приближённый метод определения поля дифракционной антенны при условии, что ширина поясков  $d_\mu$  намного меньше длины волны ( $d_\mu \ll \lambda$ ), расстояния между ними велики по сравнению с их шириной, а длина поясков соизмерима с  $\lambda$ . Антенны, удовлетворяющие этим условиям, в дальнейшем будем называть щелевыми.

Так как  $L = \sum_1^m L_\mu$ , то уравнение (19) можно записать так

$$\sum_{\mu=1}^m \int_{(L_\mu)} E_\eta(\eta) I(\eta, \eta_0) h_\eta d\eta = W(\eta_0).$$

Введём некоторую систему функций  $f_\alpha(\eta)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, m$ ), заданных соответственно на  $L_\alpha$ . Умножая предыдущее уравнение на  $f_\alpha(\eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0$  и интегрируя по  $L_\alpha$ , получим систему уравнений

$$\sum_{\mu=1}^m \int_{(L_\mu)} E_\eta(\eta) I_\alpha(\eta) h_\eta d\eta = W_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (25)$$

Здесь применены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} I_\alpha(\eta) &= - \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) I(\eta, \eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 \\ W_\alpha &= - \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) W(\eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

При достаточно регулярных  $f_\alpha(\eta)$  функция  $I_\alpha(\eta)$  непрерывна на  $L$ , причём в пределах интервалов  $L_\mu$  ( $\mu \neq \alpha$ ),  $I_\alpha(\eta)$  изменяется очень мало, так как  $kd_\mu \ll 1$ ; что касается  $L_\alpha$ , то на нём, вообще говоря (при произвольной  $f_\alpha$ ), степень изменения  $I_\alpha(\eta)$  оказывается значительно большей, так как ядро  $I(\eta, \eta_0)$  обращается внутри  $L_\alpha$  в бесконечность. Все эти соображения вытекают также из физической сущности величины  $I_\alpha(\eta)$ . Действительно  $I_\alpha(\eta)$  равна сумме токов, протекающих через параллель  $\eta$  по внутренней и наружной сторонам поверхности неразрезанного объёмного резонатора, когда к соответствующим сторонам пояса  $s_\alpha$  приложены сторонние эдс, распределённые по закону  $f_\alpha(\eta) t_\eta$  ( $\eta \in L_\alpha$ ). Поэтому на интервалах, малых по сравнению с  $\lambda$ , величина  $I_\alpha(\eta)$  почти не изменяется, за исключением места приложения сторонних эдс, где вследствие ёмкостных эффектов относительное изменение  $I_\alpha(\eta)$  на  $L_\alpha$  будет значительнее, например, при  $f_\alpha = \text{const}$ , порядка  $\ln 2 / \ln \frac{kd_\alpha}{4}$ . Однако, подбирая соответствующим образом имеющиеся в нашем распоряжении функции  $f_\alpha(\eta)$ , можно добиться существенного сглаживания  $I_\alpha(\eta)$  на интервале  $L_\alpha$ .

Действительно, подставим выражение для ядра из ф-лы (24) в ф-лу (26) для  $I_\alpha(\eta)$

$$I_\alpha(\eta) = \frac{ikc}{2\pi} \rho \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{R} d\varphi' h_{\eta_0} d\eta_0 + \dots \quad (27)$$

Здесь не выписаны медленно изменяющиеся на интервале  $L_\alpha$  члены. Нетрудно показать (см. например [10]), что при  $\eta \in L_\alpha$  и

$$\int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta) h_\eta d\eta = 1, \quad (28)$$

двойной интеграл, входящий в предыдущее выражение с точностью до членов порядка  $d_\alpha/2\rho$  равен

$$\int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) h_{\eta_0} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \varphi - \varphi')}{R} \rho_0 d\varphi' d\eta_0 = -2 \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) \ln R(\eta, \eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 + 2 \ln 4\rho - 4, \quad (29)$$

где  $R(\eta, \eta_0)$  — расстояние между точками с координатами  $\eta$  и  $\eta_0$ , лежащими на одном меридиане  $\varphi = \text{const}$ .

Таким образом, быстро меняющаяся часть  $I_\alpha(\eta)$  имеет вид

$$I_\alpha(\eta) = -\frac{ikc}{\pi} \rho \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) \ln R(\eta, \eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 + \dots \quad (30)$$

Для того, чтобы сделать величину  $I_\alpha(\eta)$  на  $L_\alpha$  практически постоянной, достаточно определить  $f_\alpha$  из условий

$$-2 \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) \ln R(\eta, \eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 = c_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m), \quad (31)$$

которые вместе с ур-нием (28) полностью определяют  $f_\alpha$ . В рассматриваемом случае, когда  $d_\alpha \ll \lambda$ , а размеры объёмного резонатора соизмеримы с  $\lambda$ , часть дуги меридиана, по которой происходит интегрирование в ур-ниях (31), можно считать прямой. Уравнения (31) при этом ничем не отличаются от уравнений для распределения заряда  $f_\alpha$  на бесконечно длинной и бесконечно тонкой проводящей пластинке ширины  $d_\alpha$ , заряженной до потенциала  $c_\alpha$ .

Потенциал  $\phi$ , создаваемый такой пластинкой, можно написать в форме (31)

$$\phi = -2 \int_{-\frac{d_\alpha}{2}}^{+\frac{d_\alpha}{2}} f_\alpha \ln R dx,$$

а также в эллиптических координатах

$$\phi = a\xi + b, \quad (31')$$

где  $\xi$  связана с декартовыми координатами  $x, y$  соотношением

$$\frac{x^2}{\text{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{\text{sh}^2 \xi} = \left(\frac{d_\alpha}{2}\right)^2, \quad \xi \geq 0.$$

На пластинке, очевидно,  $\xi = 0$ .

Сравнивая поведение обоих выражений для  $\phi$  при  $R \rightarrow \infty$  и учитывая ур-ние (28), получим значение постоянных

$$a = -2, \quad b = -2 \ln \frac{d_\alpha}{4}.$$

И, наконец, воспользовавшись известным соотношением между зарядом на пластинке  $f_\alpha$  и потенциалом, найдём при помощи ур-ния (31')

$$f_\alpha = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{d_\alpha^2}{4} - x^2}}, \quad -\frac{d_\alpha}{2} < x < \frac{d_\alpha}{2} \quad (\alpha = 1, 2 \dots m). \quad (32)$$

Из ф-лы (31') также следует, что значение потенциала на пластинке  $c_\alpha$  равно

$$c_\alpha = b = -2 \ln \frac{d_\alpha}{4}. \quad (31'')$$

Определяя  $f_\alpha$  при помощи выражений (32), можно на основании сказанного выше, считать  $I_\alpha(\eta)$  постоянными внутри отдельных интервалов  $L_\mu$  ( $\mu = 1, 2 \dots m$ ) и выносить за знаки интегралов в ур-ниях (25).

Вводя предварительно обозначения

$$\left. \begin{aligned} U_\mu &= \int_{L_\mu} E_\eta(\eta) h_\eta d\eta \\ Y_{\alpha\mu} &= I_\alpha(\eta_\mu), \quad \eta_\mu \in L_\mu \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и

придадим ур-ниям (25) окончательный вид

$$\sum_{\mu=1}^m Y_{\alpha\mu} U_\mu = W_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2 \dots m). \quad (34)$$

Величины  $U_\mu$  представляют собой напряжение (искомого поля) между краями щелей (поясков)  $s_\mu$ .

Что касается величин  $Y_{\alpha\mu}$ , то, естественно, будет называть их взаимными проводимостями  $\alpha$ -й и  $\mu$ -й щели. Численно  $Y_{\alpha\mu}$  равны сумме токов, протекающих через пояс  $s_\mu$  по внутренней и наружной сторонам поверхности неразрезанного (замкнутого) объёмного резонатора, когда к обеим сторонам пояса  $s_\alpha$  приложены единичные сторонние эдс [см. ф-лу (28)], направленные по  $\eta$ .

$Y_{\alpha\mu}$  симметричны относительно своих значков.

Система ур-ний (34) аналогична уравнениям Кирхгофа для связанных контуров и даёт возможность легко подсчитать напряжения  $U_\mu$ , если известны постоянные коэффициенты  $W_\alpha$  и  $Y_{\alpha\mu}$ , т. е. вспомогательные поля<sup>1)</sup>.

Формулы (18), (26) и (33) позволяют написать для  $W_\alpha$  и  $Y_{\alpha\mu}$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} W_\alpha &= -ick \sum_{\nu} \int_{(L_\alpha)}^{\rightarrow} p_\nu f_\alpha(\eta_0) \vec{E}^1(\alpha, \eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 \\ Y_{\alpha\mu} &= - \int_{(L_\alpha)} f_\alpha(\eta_0) I(\eta_\mu, \eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0, \eta_\mu \in L_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (34')$$

где

$$I(\eta, \eta_0) = \frac{\text{ch}\varphi}{2} (H^1 - \mathfrak{G}^1).$$

В рассматриваемом случае ( $d_\mu \ll \lambda$ ), зная величины  $U_\mu$ , можно определить искомое поле внутри и снаружи разрезанного объёмного резонатора—щелевой антенны.

Для этого нужно использовать формулы, вытекающие непосредственно из принципа суперпозиции с учётом выражений (16) и (28)

$$(\vec{E}, \vec{H}) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^m U_\mu \int_{(L_\mu)} (\vec{E}^1, \vec{H}^1) f_\mu(\eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 + (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \text{ внутри } v_i, \\ \sum_{\mu=1}^m U_\mu \int_{(L_\mu)} (\vec{\mathfrak{G}}^1, \vec{\mathfrak{H}}^1) f_\mu(\eta_0) h_{\eta_0} d\eta_0 \text{ внутри } v_e. \end{cases} \quad (35)$$

Суммы, из которых состоит написанное выражение, характеризуют электромагнитные поля, создаваемые соответственно внутри и снаружи идеально проводящих поверхностей ( $s_i + s$ ) и ( $s_e + s$ ) при приложении к поясам  $s_\mu$ , ( $s = \sum s_\mu$ ) сторонних эдс, равных  $-U_\mu f_\mu(\eta) \vec{t}_\eta$  на  $s_\mu$ .  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ —поле, создаваемое источниками с моментами  $\vec{p}_\nu$  внутри замкнутого объёмного резонатора.

Если бы распределение касательной составляющей  $E_\eta$  искомого поля на поверхности щелей  $s_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, m$ ) в точности совпадало с величинами  $U_\mu f_\mu(\eta)$  на  $s_\mu$ , то ф-лы (35) давали бы строгое решение задачи об излучении щелевой антенны. В нашем же случае совпадают только напряжения между краями щелей, соответствующие распределениям  $E_\eta$  и  $U_\mu f_\mu(\eta)$  [см. ф-лы (28) и (33)]. Поэтому ф-лы (35) дают приближённое решение, которое, однако, для узких щелей ( $d_\mu \ll \lambda$ ) вполне достаточно для определения поля во всех точках простран-

<sup>1)</sup> Решения ур-ний (34) сохраняют смысл также в предельных случаях, когда  $\omega$  совпадает с одной из собственных частот замкнутого резонатора ( $s + s_i$ ).

ства, за исключением области, лежащей в непосредственной близости к щелям  $s_\mu$ . Следует, однако, отметить, что при  $d_\mu \ll \lambda$  распределение  $E_\eta$  между краями щели достаточно хорошо аппроксимируется электростатическим решением, совпадающим для плоской щели с  $f_\mu(\eta)$  [ф-ла (33)]. Сделанное замечание позволяет распространить полученное решение (35) также на точки, лежащие вблизи щели.

Вместо расчёта  $\vec{E}, \vec{H}$  по ф-лам (35) можно пользоваться также общими ф-лами (1), (2), полагая в них, что

$$\vec{A} = \frac{i}{4\pi k} U_\mu f_\mu(\eta) \left[ \vec{t}_\eta \vec{n} \right] \text{ на } s_\mu (\mu = 1, 2 \dots m).$$

Соответственно представлению ядра в виде суммы [ф-ла (34')]

$$I(\eta, \eta_0) = \frac{\text{ch}_\varphi}{2} H^1 + \frac{-\text{ch}_\varphi}{2} \zeta^1$$

проводимость  $Y_{a\mu}$  также можно разбить на две—внутреннюю  $Y_{a\mu}^i$  и внешнюю  $Y_{a\mu}^e$

$$Y_{a\mu} = Y_{a\mu}^i + Y_{a\mu}^e.$$

В случае отсутствия внутри антенны потребителей энергии и потерь, внутренняя проводимость  $Y_{a\mu}^i$  будет чисто реактивной.

Нетрудно также сообразить, что мощность, излучаемая рассматриваемой щелевой антенной, равна

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{\alpha, \mu}^{1-m} U_\alpha^* U_\mu Y_{\alpha\mu}^e,$$

где  $U_\alpha^*$ —величина, комплексно сопряжённая с  $U_\alpha$ .

При чисто реактивных  $Y_{a\mu}^i, Y_{a\mu}^e$  в ф-ле (36) можно заменить полными проводимостями

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{\alpha, \mu}^{1-m} U_\alpha^* U_\mu Y_{\alpha\mu}. \quad (36')$$

#### 4. СФЕРИЧЕСКАЯ ЩЕЛЕВАЯ АНТЕННА С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Применим изложенную выше теорию к случаю, когда щелевая антенна представляет бесконечно тонкую идеально проводящую сферу радиуса  $r_0$ , из которой вырезан один ( $m=1$ ) узкий поясок, ограниченный двумя параллелями. Возбуждающий антенну электрический диполь поместим в центре сферы.

Система ур-ний (34) приводится при этом к одному уравнению, определяющему напряжение  $U_1$  между краями щели

$$U_1 = \frac{W_1}{Y_{11}}. \quad (37)$$



Взяв сферическую систему координат  $r$ ,  $\vartheta (= \eta)$ ,  $\varphi$  и ф-лы (34'), найдём для  $W_1$  и  $Y_{11}$  выражения:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= -ickr_0 \rho_1 \int_a^b f_1(\vartheta_0) \vec{E}^1(0) d\vartheta_0 \\ Y_{11} &= -r_0 \int_a^b f_1(\vartheta_0) I(\vartheta_1, \vartheta_0) d\vartheta_0 \\ I(\vartheta, \vartheta_0) &= \frac{cr_0}{2} \sin \vartheta (H^1 - \mathfrak{G}^1)_{r=r_0} \end{aligned} \right\} \quad (37')$$

Здесь  $\vartheta = a$  и  $\vartheta = b$  параллели, ограничивающие щель. Вспомогательные поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{\mathfrak{G}}^1, \vec{\mathfrak{H}}^1$ , определяемые условиями (8) и (11), найдём, выражая их через „потенциалы“ Дебая:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} H^1 \\ \mathfrak{G}^1 \end{matrix} \right\} &= -ik \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_e \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} E^1 \\ \mathfrak{H}^1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left\{ \begin{matrix} ru_i \\ ru_e \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} E_r^1 \\ \mathfrak{G}_r^1 \end{matrix} \right\} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \left\{ \begin{matrix} ru_i \\ ru_e \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_e \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \left\{ \begin{matrix} A_n \psi_n(kr) \\ B_n \zeta_n(kr) \end{matrix} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \quad \zeta_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho)$$

$J_{n+\frac{1}{2}}$  и  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$  — бesselева и ханкелева функции, а  $P_n(\cos \vartheta)$  — полином Лежандра.

Для нахождения постоянных коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  используем граничные условия (8), (11), а также ф-лу (16). В рассматриваемом случае они принимают вид

$$-\frac{k}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^1(\cos \vartheta) \left\{ \begin{matrix} A_n \psi'_n(kr_0) \\ B_n \zeta'_n(kr_0) \end{matrix} \right\} = \delta(\vartheta - \vartheta_0) \text{ при } 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Умножая это равенство на  $r_0 P_n^1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$  и интегрируя от 0 до  $\pi$ , найдём, учитывая ортогональность присоединённых функций Лежандра  $P_n^1(\cos \vartheta)$ ,

$$\left\{ \begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix} \right\} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{\sin \vartheta_0}{k} P_n^1(\cos \vartheta_0) \left\{ \begin{matrix} \psi'_n(kr_0) \\ \zeta'_n(kr_0) \end{matrix} \right\}. \quad (39)$$

Таким образом, вспомогательные поля полностью определены и можно перейти к расчёту  $U_1$ .

Подставим в выражения (37') значение величин  $H^1$ ,  $\mathfrak{S}^1$  и  $\vec{E}^1(0)$  из ф-л (38). После несложных преобразований найдём:

$$W_1 = -\frac{ick^2 r_0}{2\psi'_1(kr_0)} p_1 \int_a^b f_1(\vartheta_0) \sin^2 \vartheta_0 d\vartheta_0, \quad (40)$$

$$I(\vartheta, \vartheta_0) = -\frac{c \sin \vartheta \sin \vartheta_0}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{P_n^1(\cos \vartheta) P_n^1(\cos \vartheta_0)}{\psi'_n(kr_0) \zeta'_n(kr_0)}. \quad (40')$$

Так как ядро  $I(\vartheta, \vartheta_0)$  имеет логарифмическую особенность в точке  $\vartheta = \vartheta_0$ , то непосредственная подстановка выражения (40') в ф-лу (37') с последующим интегрированием приводит к весьма медленно сходящемуся ряду, практически не пригодному для расчётов.

Однако, можно значительно улучшить сходимость, выделяя главную часть ядра, содержащую логарифмическую особенность.

Обозначим главную часть ядра [ф-ла (24')] буквой  $I_2$

$$I_2(\vartheta, \vartheta_0) = -\frac{ikc}{2\pi} r_0^2 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{R} d\varphi'. \quad (41)$$

Её можно выразить при помощи ряда, аналогичного выражению (40'). Используя известное разложение

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n, \quad r < r_0,$$

где

$$R_1 = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \theta},$$

$$\cos \theta = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi')$$

и теорему сложения

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m(\varphi - \varphi'),$$

легко найдём

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{R_1} d\varphi' = \frac{2\pi}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n^1(\cos \vartheta) P_n^1(\cos \vartheta_0).$$

Переходя в этом выражении к пределу при  $r \rightarrow r_0$  и учитывая, что  $R_1 = R$  при  $r = r_0$ , получим искомый ряд для  $I_2$

$$I_2(\vartheta, \vartheta_0) = -ikc r_0 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\cos \vartheta) P_n^1(\cos \vartheta_0). \quad (42)$$

Вычитая из ур-ния (40') ряд (42), придадим ядру следующее выражение

$$I(\vartheta, \vartheta_0) = I_p(\vartheta, \vartheta_0) + I_2(\vartheta, \vartheta_0), \quad (43)$$

где

$$I_p(\vartheta, \vartheta_0) = c \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ ikr_0 - \frac{2n+1}{4\psi'_n(kr_0) \zeta'_n(kr_0)} \right\} \frac{P_n^1(\cos \vartheta) P_n^1(\cos \vartheta_0)}{n(n+1)}. \quad (44)$$

Ряд (44) сходится достаточно быстро и является непрерывной функцией, очень мало меняющейся внутри интервала  $a \leq \vartheta \leq b$ .

Перейдём теперь к расчёту  $Y_{11}$  [ф-ла (37')]. Используя ур-ние (43) можно написать

$$Y_{11} = -r_0 \int_a^b f_1(\vartheta_0) I_p(\vartheta_1, \vartheta_0) d\vartheta_0 - r_0 \int_a^b f_1(\vartheta_0) I_z(\vartheta_1, \vartheta_0) d\vartheta_0. \quad (45)$$

Второй из интегралов правой части на основании ф-л (41) и (29) равен с точностью до членов порядка  $d_1/2r_0 \sin \vartheta_1$

$$\int_a^b f_1(\vartheta_0) I_z(\vartheta_1, \vartheta_0) d\vartheta_0 = \frac{ikc}{\pi} \sin \vartheta_1 \int_a^b f_1(\vartheta_0) \ln R(\vartheta_1, \vartheta_0) r_0 d\vartheta_0 - \\ - \frac{ikc}{\pi} \sin \vartheta_1 \{ \ln(4r_0 \sin \vartheta_1) - 2 \}.$$

Если  $f_1(\vartheta_0)$  определена при помощи ф-лы (32), имеющей в сферических координатах вид

$$f_1(\vartheta_0) = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{d_1^2}{4} - r_0^2 (\vartheta^x - \vartheta_0)^2}}, \quad a < \vartheta_0 < b \\ & d_1 = r_0(b-a), \quad \vartheta^x = \frac{a+b}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

то первый интеграл правой части равен при  $a < \vartheta_1 < b$  постоянной величине  $\ln \frac{d_1}{4}$  [см. ф-лы (31) и (31'')].

Таким образом,

$$\int_a^b f_1(\vartheta_0) I_z(\vartheta_1, \vartheta_0) d\vartheta_0 = \frac{ikc}{\pi} \sin \vartheta_1 \left\{ \ln \frac{d_1}{16 r_0 \sin \vartheta_1} + 2 \right\}. \quad (47)$$

Регулярная, медленно меняющаяся внутри интервала  $d_1$  функция  $I_p(\vartheta_1, \vartheta_0)$  может быть вынесена за знак интеграла в выражении (45), следовательно,

$$Y_{11} = -I_p(\vartheta_1, \vartheta_1) - \frac{ikc}{\pi} r_0 \sin \vartheta_1 \left\{ \ln \frac{d_1}{16 r_0 \sin \vartheta_1} + 2 \right\}. \quad (48)$$

Подставляя найденные значения для  $W_1$  и  $Y_{11}$  в ф-лу (37) и вынося в числителе  $\sin^2 \vartheta_0$  за знак интеграла, найдём, учитывая ур-ние (28)

$$U_1 = \frac{ik^2 p_1}{2\psi'_1(kr_0) \left\{ \frac{I_p(\vartheta_1, \vartheta_1)}{c \sin^2 \vartheta_1} + \frac{ikr_0}{\pi \sin \vartheta_1} \left( \ln \frac{d_1}{16 r_0 \sin \vartheta_1} + 2 \right) \right\}}, \quad (49)$$

где [см. ф-лу (44)]

$$\frac{I_p(\vartheta_1, \vartheta_1)}{c \sin^2 \vartheta_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ ikr_0 - \frac{2n+1}{4\psi'_n(kr_0) \zeta'_n(kr_0)} \right\} \frac{[P_n^1(\cos \vartheta_1)]^2}{n(n+1)} \quad (49')$$

сравнительно быстро сходящийся ряд.

Общая ф-ла (36') для мощности излучения принимает в этом случае вид

$$W_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_1 U_1^* Y_{11}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(W_1 U_1^*). \quad (50)$$

Так как

$$W_1 = -\frac{ick^2 \sin^2 \vartheta_1}{2 \phi_1'(kr_0)} P_1, \quad (51)$$

то расчёт  $W_z$  сводится, фактически, к вычислению  $U_1$ .

Представляет также интерес несколько иное, чем данное выше,

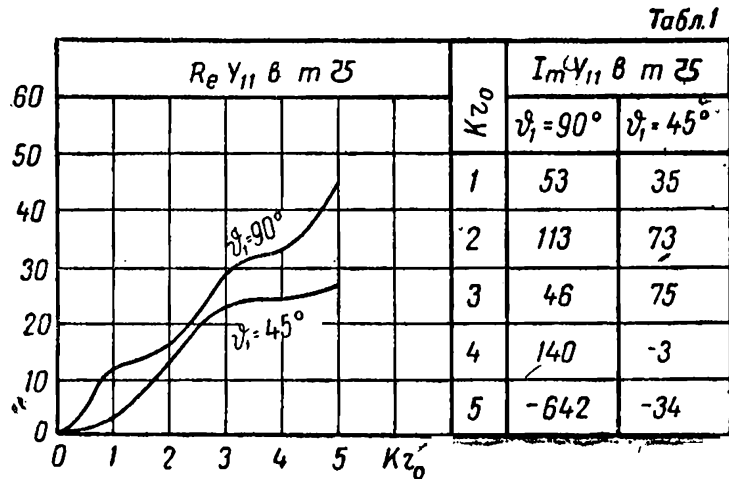


Рис. 3.

разложение проводимости на две части, соответствующее выделению главной части ядра согласно выражению (43).

Это разложение фактически дано в ф-ле (48) и в несколько иных обозначениях имеет вид

$$Y_{11} = Y_{11}^z + Y_{11}^p, \quad (53)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Y_{11}^z &= -\frac{ickr_0 \sin \vartheta_1}{\pi} \left( \ln \frac{d_1}{16r_0 \sin \vartheta_1} + 2 \right) \\ Y_{11}^p &= -I_p(\vartheta_1, \vartheta_1) \end{aligned} \right\} \quad (53')$$

Проводимость  $Y_{11}^z$  обусловлена наличием статической ёмкости между краями щели. Величина этой ёмкости очевидно равна

$$\frac{Y_{11}^z}{ick} \approx \frac{l}{2\pi^2} \ln \left( \frac{l}{2,9d_1} \right),$$

где  $l = 2\pi r_0 \sin \vartheta_1$  — длина щели.

Половину этой ёмкости можно отнести к внутренней проводимости, а половину — к внешней.

Разложение, аналогичное указанному в выражении (53), может быть приведено также в общем случае для проводимостей  $Y_{aa}$ .

При помощи ф-л (53), (53') и (49') рассчитаны активные (рис. 3) и реактивные (табл. 1) составляющие проводимости, для щели, прорезанной по экватору сферы  $\vartheta_1 = 90^\circ$  и для  $\vartheta_1 = 45^\circ$ . Отношение ширины щели к радиусу сферы принято при этом равным  $\frac{1}{50}$ .

В табл. 2 дано отношение мощности, излучаемой рассматриваемой щелевой антенной  $W_{\Sigma}$ , к мощности излучения диполя  $W_{\Sigma 0}$ , помещённого в пустое пространство при условии, что момент  $e_1 r_0$  равен моменту диполя, возбуждающего щелевую антенну. Данные приведены для вышеуказанных двух случаев.

Таблица 2

$kr_0$	$W_{\Sigma}/W_{\Sigma 0}$	
	$\vartheta_1 = 90^\circ$	$\vartheta_1 = 45^\circ$
1	0,18	0,030
2	0,07	0,035
3	2,91	0,284
4	0,026	0,168
5	0,002	0,001

Статья поступила в редакцию 25 июля 1946 г.

#### Литература

1. Rayleigh. Sci. Pap. 4, 282 and 305.
2. М. С. Нейман. ИЭСТ № 6, 1, 1940.
3. Я. Н. Фельд. ЖЭТФ № 3-4, 1943.
4. Я. Н. Фельд. ЖЭТФ № 9, XIV, 1944.
5. А. А. Пистолькорс. ЖТФ № 12, XIV, 1944.
6. Я. Н. Фельд. ДАН, LI. № 2, 1946.
7. А. А. Пистолькорс. ДАН, LI, № 2, 1946.
8. А. А. Пистолькорс. Научно-технический бюллетень НИИ СКА № 1, 1946.
9. А. Sommerfeld. Jahrb. d. drahtl. Telegr. und Teleph., 26, 93 (1925).
10. М. Л. Левин. Сборник научных трудов НКЭП, в. I, 1946.

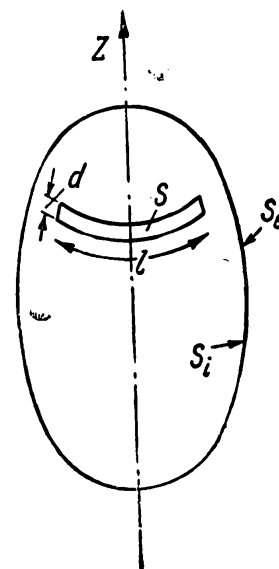
ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ЩЕЛЕВЫЕ ИЗЛУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ**

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 27 V 1946)

В нашей работе <sup>(1)</sup> мы рассмотрели задачу об излучении через узкие щели в системах, обладающих осевой симметрией. При этом излучаемое поле определяется напряжением  $V$  между краями щели, не меняющимся вдоль нее. Значительно больший практический интерес представляют несимметричные щелевые излучатели, у которых напряжение  $V$  изменяется вдоль щели. Предлагаемый здесь метод расчета таких систем принципиально применим к узким щелям, прорезанным на поверхности эндовибраторов или волноводов произвольной формы. Однако для простоты и сжатости изложения мы рассмотрим одну несимметричную щель на поверхности бесконечно тонкого идеально проводящего эндовибратора, являющегося телом вращения с осью  $z$ . Вырежем на поверхности эндовибратора щель  $s$  ширины  $d$ , длины  $l$  (см. рисунок) и обозначим внутреннюю и наружную стороны оставшейся металлической поверхности буквами  $s_i$  и  $s_e$ . Будем считать, что поле возбуждается находящимся внутри линейным проводником  $h$  с заданным вдоль него током  $I$ . Форма и расположение проводника  $h$  должны быть таковы, чтобы возбуждаемые им на поверхности не разрезанного эндовибратора токи пересекли линию, вдоль которой прорезается щель, под углами, близкими к  $90^\circ$ , ибо только при этом условии будет иметь место интенсивное излучение через щель. Обозначим искомое поле рассматриваемой щелевой антенны буквами  $\vec{E}, \vec{H}$  и введем два вспомогательных регулярных поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{G}^1, \vec{F}^1$ , заданных соответственно внутри и снаружи эндовибратора при помощи граничных условий



$$\vec{n} [\vec{E}^1 \vec{n}] = \begin{cases} 0 \text{ на } s_e, \\ \vec{e}^1 \text{ на } s, \end{cases} \quad [\vec{n} [\vec{G}^1 \vec{n}]] = \begin{cases} 0 \text{ на } s_e, \\ \vec{e}^1 \text{ на } s, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор наружной нормали к поверхностям, а  $\vec{e}^1$  некоторый вектор, касательный к  $s$ .

Методом, аналогичным данному нами в <sup>(1)</sup>, легко получить равенство

$$\int_{(s)} [\vec{E} (\vec{H}^1 - \vec{F}^1)] \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{dh}. \quad (2)$$

Введем на поверхности  $(s_e + s)$  ортогональную систему координат  $\eta, \varphi$ , где  $\varphi$  — угол поворота вокруг оси  $z$ , и определим границы щели равенствами  $\varphi = \pm \varphi_1$ ,  $\eta = a$ ,  $\eta = b$ . Вектор  $\vec{e}^1$ , введенный выше, зададим при помощи формул

$$e^1 = (e^1)_\eta = f(\eta) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \int_a^b f(\eta) h_\eta d\eta = 1. \quad (3)$$

Здесь  $\delta(\varphi)$  — функция Дирака, а  $h_\eta$  — коэффициент Ляме. Используя с оставляющие векторов поля по  $\eta$  и  $\varphi$ , придадим равенству (2) вид

$$\int_{(s)} \{E_\eta (H_\varphi^1 - \mathfrak{H}_\varphi^1) - E_\varphi (H_\eta^1 - \mathfrak{H}_\eta^1)\} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{d}h. \quad (2')$$

Будем предполагать, что для щели выполняются неравенства  $d \ll l$ ,  $d \ll \lambda$  ( $\lambda$  — длина волны). В этом случае уравнение (2') значительно упрощается. Действительно, так как  $E_\varphi = 0$  на  $s$  при  $\eta = a$  и  $\eta = b$ , то вследствие узости щели ( $d \ll l, \lambda$ ) и непрерывности  $E_\varphi$  можно утверждать, что  $|E_\eta| \gg |E_\varphi|$  на  $s$  всюду, за исключением незначительного участка у концов  $\varphi = \pm \varphi_1$  где,  $E_\eta = 0$ . Что касается величин  $|H_\varphi^1 - \mathfrak{H}_\varphi^1|$  и  $|H_\eta^1 - \mathfrak{H}_\eta^1|$ , то при выбранном нами  $\vec{e}^1$  (формула (3)) первая из них значительно превосходит на  $s$  вторую. Таким образом, второй член, стоящий под интегралом в равенстве (2'), может быть отброшен, и оно сведется к уравнению, определяющему  $E_\eta$  на  $s$ .

$$\int_{(s)} E_\eta (H_\varphi^1 - \mathfrak{H}_\varphi^1) ds = \frac{4\pi}{c} \int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{d}h. \quad (4)$$

$E_\varphi$  в этом приближении равно нулю на щели. Выделим главную часть ядра  $(H_\varphi^1 - \mathfrak{H}_\varphi^1)$ . Формулы (1), (20) и (20') нашей работы (2) позволяют написать

$$\begin{cases} \vec{H}^1(q) \\ \vec{\mathfrak{H}}^1(q) \end{cases} = \begin{cases} + \\ - \end{cases} \frac{1}{2\pi} (\text{grad div} + k^2) \int_{(s)} [\vec{e}^1 \vec{n}] \frac{e^{-ikR'}}{-ikR'} ds' + \begin{cases} \vec{\mathcal{O}}_1^{(1)} \\ \vec{\mathcal{O}}_2^{(1)} \end{cases}, \quad (5)$$

где  $R'$  — расстояние между точкой наблюдения  $q(\eta, \varphi)$  и точкой  $q'(\eta', \varphi')$ , по которой производится интегрирование,  $k = 2\pi/\lambda$ . Зависимость от времени взята в форме  $e^{i\omega t}$ .

Используя формулу (3) для  $\vec{e}^1$  и свойства  $\delta$ -функции, нетрудно получить при помощи (5) выражение для ядра, в котором выделен главный член

$$H_\varphi^1 - \mathfrak{H}_\varphi^1 = \frac{1}{\pi} L_0 \int_a^b f(\eta') \frac{e^{-ikR}}{ikR} \cos \psi \rho_0 h_{\eta'} d\eta' + F. \quad (6)$$

Здесь

$$L_0 \equiv \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^2} + k^2, \quad \psi = \varphi - \varphi_0, \quad (6')$$

$\rho_0$  — расстояние между осью  $z$  и точкой на  $s$  ( $\rho_0 \cong \text{const}$  на  $s$ ),  $R$  — расстояние между  $q(\eta, \varphi)$  и  $q_0(\eta', \varphi_0)$ , а  $F$  — регулярная функция, которую можно считать на  $s$  не зависящей от  $\eta$ , т. е.  $F = F(\varphi, \varphi_0)$ . Подставляя выражение (6) в (4), найдем

$$L_0 \int_a^b f(\eta') h_{\eta'} \int_s E_\eta \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \psi ds d\eta' = \frac{4\pi^2 ik}{c \rho_0} \int_{(h)} I \vec{E}^1 \vec{d}h - \frac{i\pi k}{\rho_0} \int_{(s)} E_\eta F ds. \quad (7)$$

Для решения полученного уравнения мы используем метод, аналогичный развитому М. А. Леонтовичем и М. Л. Левиным в ряде работ (3-5) по теории проволочных антенн.

Так, не представляет труда получить с точностью до членов порядка  $d/2l$  следующие выражения

$$\int_{(s)} E_{\eta} \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \psi ds = -2 \int_a^b E_{\eta}(\varphi_0, \eta) \ln[kR(\eta, \eta')] h_{\eta} d\eta + K[V, \varphi_0], \quad (8)$$

$$\int_{(s)} E_{\eta} F ds = \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} V(\varphi) F(\varphi, \varphi_0) \rho_0 d\varphi,$$

где  $R(\eta, \eta')$  — расстояние между точками  $(\eta, \varphi_0)$  и  $(\eta', \varphi_0)$ ,

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E_{\eta}(\varphi, \eta) h_{\eta} d\eta, \quad K[V, \varphi_0] = \\ &= \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} V(\varphi) \frac{e^{-ikR^*}}{R^*} \left(1 - \cos \frac{\psi}{2}\right) \cos \psi \rho_0 d\varphi - \left( \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} + \int_{\varphi_0}^{-\varphi_1} \right) \ln k R^* e^{-ikR^*} \times \\ &\times \left\{ \cos \psi \left[ V'(\varphi) \mp ik\rho_0 V(\varphi) \cos \frac{\psi}{2} \right] - V(\varphi) \sin \psi \right\} d\varphi, \quad R^* = 2\rho_0 \sin \left| \frac{\psi}{2} \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь верхний знак относится к первому интегралу, а нижний — ко второму.

Подставляя выражения (8) в уравнение (7), получим

$$\begin{aligned} L_0 \int_a^b E_{\eta}(\varphi_0, \eta) h_{\eta} \int_a^b 2f(\eta') \ln kR(\eta, \eta') h_{\eta'} d\eta' d\eta = \\ = G[V, \varphi_0] + \frac{4\pi^2 k}{ic\rho_0} \int_{(h)} \vec{I} \vec{E}^1 d\vec{h}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$G[V, \varphi_0] = L_0 K[V, \varphi_0] + i\pi k \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} V(\varphi) F(\varphi, \varphi_0) d\varphi. \quad (11)$$

Неопределенную пока функцию  $f(\eta')$  мы найдем, потребовав, чтобы

$$2 \int_a^b f(\eta') \ln kR(\eta', \eta) h_{\eta'} d\eta' = \frac{1}{\alpha} \equiv \text{const} \quad \text{при } a \leq \eta \leq b. \quad (12)$$

Учитывая введенную выше нормировку  $f(\eta')$ , легко показать, что при  $d \ll l^*$

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi \sqrt{(d/2)^2 - x^2}}, \quad x = \int_{\eta_0}^{\eta} h_{\eta} d\eta \quad \left( \eta_0 = \frac{a+b}{2} \right), \quad \alpha = \frac{1}{2 \ln \frac{kd}{4}}. \quad (13)$$

При таком выборе  $f$  равенство (10) переходит в интегро-дифференциальное уравнение для  $V(\varphi_0)$

$$L_0 V(\varphi_0) = \alpha \left\{ G[V, \varphi_0] + \frac{4\pi^2 k}{ic\rho_0} \int_{(h)} \vec{I} \vec{E}^1 d\vec{h} \right\}, \quad -\varphi_1 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1, \quad (14)$$

\* Отметим, что такой выбор  $f$  является наилучшим также для функций  $f_{\nu}(\eta)$ , фигурирующих в работе (1).



к которому необходимо добавить еще граничные условия на концах щели  $V(\pm\varphi_1) = 0$ .  $\alpha$  играет здесь роль малого параметра, так как  $kd/4 \ll 1$ . Решая это уравнение методом разложения в ряд по малому параметру  $\alpha$

$$V = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \dots, \quad (15)$$

получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов ряда

$$L_0 V_0 = 0, \quad L_0 V_1 = G[V_0, \varphi_0] + \frac{4\pi^2 k}{ic\rho_0} \int_{(h)} \vec{I} \vec{E}^1 d\vec{h}, \quad L_0 V_2 = G[V_1, \varphi_0], \dots$$

$$V_0(\pm\varphi_1) = 0, \quad V_1(\pm\varphi_1) = 0, \quad V_2(\pm\varphi_1) = 0, \dots \quad (16)$$

Если длина щели  $l (= 2\rho_0\varphi_1)$  кратна  $\lambda/2$ , то  $V_0 = B \cos k\rho_0\varphi_0$  при  $l = (2n+1)\lambda/2$  и  $V_0 = B \sin k\rho_0\varphi_0$  при  $l = 2n\lambda/2$ .

Амплитуда  $B$  определится, очевидно, из условия ортогональности полученного решения к правой части уравнения для  $V_1$ . Таким образом, в нулевом приближении закон распределения напряжения вдоль щели тождествен с законом изменения тока в эквивалентной металлической антенне, совпадающей по форме со щелью.

При произвольной длине щели  $V_0 = 0$  и необходимо учитывать следующие приближения. Основное уравнение (14) формально совпадает (по внешнему виду) с соответствующим уравнением для распределения тока (<sup>3-5</sup>) к эквивалентной проволочной антенне. Более того, достаточно положить в формуле (11)  $F = 0$ , чтобы и операторы  $G$  совпали для этих двух случаев. Эта аналогия позволяет говорить о справедливости «принципа двойственности» в указанном широком смысле для любых щелевых антенн\*.

Для расчета функции  $F$  следует пользоваться формулой (6). Применение изложенной теории к различным примерам будет дано нами в другом месте.

В заключение отметим, что получение основного уравнения (14) позволяет считать теорию любых щелевых антенн принципиально доведенной до уровня теории проволочных антенн.

Поступило  
3 V 1946

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, **51**, № 2 (1946). <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ЖЭТФ, **14**, № 9 (1944).  
<sup>3</sup> М. А. Леонтович и М. Л. Левин, ЖТФ, **14**, № 9 (1944). <sup>4</sup> М. А. Леонтович, Сб. научных трудов НКЭП, № 1 (1945). <sup>5</sup> М. Л. Левин, Сб. научных трудов НКЭП, № 1 (1945). <sup>6</sup> А. А. Пистолькорс, ЖТФ, **14**, № 12 (1944).

\* Для плоских дифракционных антенн «принцип двойственности» формулировал А. А. Пистолькорсом (<sup>6</sup>).

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЩЕЛЕЙ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 27 IX 1946)

Закон распределения напряжения вдоль узкой излучающей щели\*, прорезанной в поверхности эндовибратора (или волновода), возбуждаемого изнутри некоторыми источниками (диполями, витками и т. п.), определяется интегро-дифференциальным уравнением \*\*:

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} + k^2V = \alpha \left\{ G[V, \tau] + \frac{i\omega}{c} \pi \mu H_{\tau}^0(\tau) \right\} \quad (1)$$

с граничными условиями\*\*\*

$$V = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l. \quad (2)$$

Здесь  $V_{\tau}$  — напряжение между краями щели,  $\tau$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль щели от одного из ее концов,  $l$  — длина щели,  $\alpha \equiv \frac{1}{2 \ln(kd/4)}$  — малый параметр,  $d$  — ширина щели,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\omega$  — угловая частота,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек.,  $G[V, \tau]$  — линейный относительно  $V$  оператор, зависящий от формы щели и эндовибратора (но не от источников),  $\vec{H}^0$  — магнитный вектор поля, создаваемого внутри эндовибратора теми же источниками при отсутствии щели, а  $H_{\tau}^0(\tau)$  — составляющая этого вектора, параллельная щели, в точке  $\tau$  щели\*\*\*\*.

В такой форме уравнение (1) справедливо для любых узких щелей ( $d \ll l, \lambda$ ), прорезанных в произвольных замкнутых металлических

\* Узкая щель может интенсивно излучать в том случае, когда она пересекает линии тока, текущие по внутренней поверхности замкнутого эндовибратора, под углами, близкими к  $90^\circ$ . Только такие щели представляют интерес для целей излучения или приема и к ним относятся излагаемые здесь результаты.

\*\* Это уравнение в основном совпадает с уравнением (14), данным нами в работе (1). Отличие заключается только в том, что здесь магнитная проницаемость  $\mu \neq 1$  и использовано равенство

$$H_{\tau}^0(\tau) = -\frac{4\pi}{c\rho_0} \int_{(h)} \vec{E}^1 \vec{dh},$$

немедленно следующее из леммы Лоренца, примененной к полям  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  (см. (1)) и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  (см. текст).

\*\*\* Если щель замкнутая, то условия (2) должны быть заменены требованием периодичности.

\*\*\*\* Или, точнее, в точке  $\tau$  на внутренней поверхности эндовибратора, где будет прорезана щель, так как при расчете  $H^0$  щель предполагается отсутствующей.

поверхностях\*. Необходимо только, чтобы радиусы кривизны линий, совпадающих с краями щели, были велики по сравнению с ее шириной. При выполнении этих условий вывод уравнения (1) в общем случае мало отличается от данного в работе (1).

Уравнение (1) совпадает по своей внешней форме с аналогичным уравнением для распределения тока в тонких проводах (2), последнее же является обобщением известного «телеграфного уравнения» для тока, которым радиотехника так успешно пользуется более полувека. Представляет поэтому интерес, особенно для инженерной практики, получить уравнение распределения напряжения вдоль щели, аналогичное «телеграфному». Для этого поступим следующим образом.

Ищем решение уравнения (1) в виде суммы

$$V = V_1 + U, \quad (3)$$

где  $V_1$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 V_1}{d\tau^2} + p^2 V_1 = \alpha \frac{i\pi\omega\mu}{c} H'_\tau(\tau), \quad p^2 = k^2 - i\alpha\beta, \quad (4)$$

с граничными условиями  $V_1 = 0$  при  $\tau = 0, l$ .

Входящий сюда параметр  $\beta$  мы определим ниже. Вычитая из уравнения (1) равенство (4), получим

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + k^2 U = \alpha \{ G[V, \tau] - i\beta V_1 \}; \quad U = 0 \text{ при } \tau = 0, l. \quad (5)$$

Отсюда следует

$$U = -\frac{\alpha}{k} \frac{\sin k\tau}{\sin kl} \int_0^l \{ G[V, x] - i\beta V_1 \} \sin k(l-x) dx + \\ + \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{ G[V, x] - i\beta V_1 \} \sin k(\tau-x) dx.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений, положив сначала в правой части  $U = 0$ , т. е.  $V = V_1$ . Для того, чтобы полученное при этом решение имело смысл для любых значений  $kl$  (включая  $kl = n\pi$ ), необходимо выполнение равенства

$$-\int_0^l \{ G[V_1, x] - i\beta V_1 \} \sin k(l-x) dx = 0, \quad (6)$$

которое и определяет, в рассматриваемом приближении, введенный выше параметр  $\beta$ . Таким образом, в первом приближении

$$U = \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{ G[V_1, x] - i\beta V_1 \} \sin k(\tau-x) dx.$$

Продолжая этот процесс далее, можно получить для  $U$  и  $\beta$  следующие приближения в виде степенных рядов по малому параметру  $\alpha$ . Из последних формул следует, что

$$U = V_1 O(\alpha), \quad V = V_1 (1 + O(\alpha)).$$

\* Когда  $\omega$  не совпадает с одной из собственных частот замкнутого эндометра.

Для узких щелей, когда  $\alpha \ll 1$ ,  $V \approx V_1$ , и искомое «телеграфное» уравнение для  $V$  совпадает с уравнением (4):

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + p^2 V = \alpha \frac{i\pi\omega\mu}{c} H_\tau^0(\tau). \quad (7)$$

Решение этого уравнения при нулевых граничных условиях имеет вид:

$$V = A \sin p\tau + \frac{\alpha}{p} \int_0^\tau F(x) \sin p(\tau - x) dx. \quad (8)$$

Здесь

$$A = -\frac{\alpha}{p \sin pl} \int_0^l F(x) \sin p(l - x) dx, \quad F(\tau) \equiv \frac{i\pi\omega\mu}{c} H_\tau^0(\tau). \quad (8')$$

Легко сообразить, что величина  $p \cong k - i\alpha \frac{\beta}{2k}$  (или, точнее,  $ip$ ) представляет собой постоянную распространения, а  $\frac{\alpha \operatorname{Re} \beta}{2k}$  — «затухание» щели. Так как для узких щелей величина  $\alpha\beta/2k$  весьма мала, то в формуле (8) можно положить  $p = k$ . Что касается постоянной  $A$ , то при ее расчете из (8') можно полагать  $k = p$  только при достаточно «расстроенной» щели —  $|\sin kl| \gg \left| \frac{\alpha\beta}{2k} l \right|$ , в противном случае необходимо сохранить  $p$  (большой частью только в  $\sin pl$ , стоящем в знаменателе (8')). Для «настроенной» щели ( $l \cong \lambda/2$ ) выражение (8) превращается в синусоиду

$$V = A \sin k\tau + O(\alpha), \quad A = \frac{2i}{\operatorname{Re} \beta l} \int_0^l F(x) \sin k(l - x) dx. \quad (9)$$

Равенство (7) и его решение (8) показывают, что в рассматриваемом приближении распределение напряжения вдоль щели совпадает с распределением тока вдоль эквивалентной металлической приемной антенны, если отождествить  $H_\tau^0$  с составляющей электрического вектора невозмущенной падающей волны. Величина  $H_\tau^0$ , являющаяся составляющей магнитного вектора поля эндовибратора (или волновода), невозмущенного щелью, для большинства практических случаев известна из соответствующей литературы. Оператор  $G$ , нахождение которого связано с расчетом полей (1), нужен только для расчета величины  $\beta$  (6), характеризующей «затухание щели»\*.

С другой стороны, в силу сказанного ранее, знание  $\beta$  необходимо только для настроенных (или слабо расстроенных) щелей, где оно определяет масштаб кривой  $V$  (9). Таким образом, построенная теория в смысле простоты ничем не уступает теории обычных проволочных антенн. Основное уравнение (7) получено для узких щелей ( $\alpha \ll 1$ ), но можно ожидать, что оно останется применимым для инженерных расчетов и в случае, когда неравенство  $\alpha \ll 1$  не выполняется, как это имеет место в теории проволочных антенн. Если среда, заполняющая внутренность эндовибратора или волновода, имеет  $\epsilon$ , отличное от наружной среды, то необходимо во всех формулах заменить  $k$  на  $k_{\text{эКВ}}$ :

$$k_{\text{эКВ}}^2 = \frac{k^2 + k'^2}{2},$$

\* Впрочем, затухание может быть также найдено из энергетических соображений.

где  $k = 2\pi/\lambda$  и  $k' = 2\pi/\lambda'$ , соответственно, волновые числа для наружной и внутренней сред. Отсюда, например, следует, что, заполняя эндовибратор (или волновод) диэлектриком, можно значительно сократить длину «полуволновой» щели, прорезанной в нем.

Пример 1. Рассмотрим прямоугольный волновод со сторонами  $a$  и  $b$  и волной типа  $H_{10}$ . Если прорезать в стороне  $a$  узкую щель длины  $a$ , перпендикулярно оси волновода, то <sup>(3)</sup>

$$H_{\tau}^0 = ik \frac{\pi}{a} e^{-i\gamma z} \sin\left(\frac{\pi}{a} \tau\right), \quad 0 \leq \tau \leq a.$$

Подставляя это в формулы (8) и (8'), легко найдем закон распределения напряжения вдоль щели ( $\mu = 1$ ):

$$V = \frac{e^{-i\gamma z}}{a} \frac{\alpha \pi^2 k^2}{(\pi/a)^2 - p^2} \sin \frac{\pi}{a} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq a.$$

Совпадение законов изменения  $V$  и  $H_{\tau}^0$  по  $\tau$ , вообще говоря, случайно.

Пример 2. Прорежем узкую щель (длины  $l$ ) вдоль части параллели сферического эндовибратора, в котором возбуждается электрическая волна с осевой симметрией. Так как магнитные линии образуют при этом систему концентрических кругов с центрами на главной оси, то  $H_{\tau}^0 = \text{const}$  на щели. Считая эту константу равной единице, найдем при помощи (8) закон распределения напряжения вдоль щели:

$$V = \frac{i\pi\alpha}{k} \left\{ 1 - \sec\left(\frac{pl}{2}\right) \cos k\left(\tau - \frac{l}{2}\right) \right\}, \quad 0 \leq \tau \leq l.$$

Поступило  
27 IX 1946

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 53, 7 (1946). <sup>2</sup> М. А. Леонтович и М. Л. Левин, ЖТФ, 14, 9 (1944). <sup>3</sup> Б. В. Введенский и А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, 1946, стр. 52.

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ИЗЛУЧАЮЩИЕ ЩЕЛИ В НАСТРОЕННЫХ ЭНДОВИБРАТОРАХ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 16 XII 1946)

В работах (1, 2) было получено и исследовано уравнение, определяющее закон распределения напряжения  $V$  вдоль узкой щели, прорезанной на поверхности эндовибратора (или волновода), возбуждаемого изнутри линейным проводом  $l_i$  с током  $J$ . Уравнение это имеет вид (2)

$$L[V] = \alpha G[V] + \alpha \frac{i\pi\omega\mu}{c} H_{\tau}^0(\tau); \quad V=0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, l. \quad (1)$$

Здесь

$$L[V] = \left( \frac{d}{d\tau^2} + k^2 \right) V, \quad (2)$$

$G[V]$  — линейный относительно  $V$  оператор,  $\alpha = \frac{1}{2 \ln(kd/4)}$  — малый параметр, где  $d$  — ширина щели,  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\lambda$  — длина волны,  $\omega$  — угловая частота,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $c = 3 \cdot 10^{10}$ ,  $\tau$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль щели от одного из ее концов до переменной точки на щели  $q_0(\tau)$ ,  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$  — поле, создаваемое током  $J$  внутри эндовибратора при отсутствии щели, а  $H_{\tau}^0$  — проекция  $\vec{H}^0$  на направление возрастания  $\tau$  в точке  $q_0(\tau)$ .

Если  $\omega_1$  — одна из собственных (резонансных) частот неразрезанного, замкнутого эндовибратора, то при  $\omega \rightarrow \omega_1$  левая, а следовательно, и правая части (1) сохраняют смысл, оставаясь конечными. Таким образом, и при  $\omega \rightarrow \omega_1$  уравнение (1) определяет  $V$  на щели. Однако методы решения (1), данные в (1, 2), использующие малость параметра  $\alpha$ , становятся абсолютно не применимыми, так как  $H_{\tau}^0$  и  $G[V]$  обращаются при этом в отдельности в бесконечность. Последнее вытекает из самого определения  $H_{\tau}^0$  (а также  $G$ ), ибо при его расчете эндовибратор считается замкнутым и идеально проводящим. Поэтому мы займемся получением такого уравнения для  $V$ , все члены которого остаются конечными и регулярными при  $\omega \rightarrow \omega_1$  и решение которого можно довести до конца, используя малость  $\alpha$ .

Условимся для определенности считать  $\omega_1$   $m$ -кратной собственной частотой неразрезанного эндовибратора, которой соответствуют свободные колебания, характеризуемые полями  $\vec{e}^{(\nu)}$ ,  $\vec{h}^{(\nu)}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ).

Введем прежде всего некоторую систему функций  $a_n(\tau)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, m$ ). Дифференцируя уравнение (1)  $n$  раз по  $\tau$  и умножая затем на  $a_n(\tau)$ , найдем, суммируя, результат по  $n$  от 0 до  $m$ ,

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V] = \alpha \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} G[V] + \alpha \frac{i\pi\omega\mu}{c} \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_{\tau}^0. \quad (3)$$

Постараемся выбрать функции  $a_n(\tau)$  так, чтобы каждая сумма в отдельности оставалась конечной и определенной также при  $\omega \rightarrow \omega_1$ . Чтобы выполнить это, преобразуем последнюю сумму уравнения (3).

Для этого введем регулярное внутри эндовибратора вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ , определенное там при помощи граничных условий

$$\vec{n} [\vec{\mathcal{E}}(q) \vec{n}] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_i \\ \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(R) \vec{t}(q) & \text{на } s. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $s$  — геометрическая поверхность щели;  $s_i$  — внутренняя сторона поверхности эндовибратора за вычетом  $s$ ;  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности в точке  $q$  (не путать с целым числом  $n$ );  $\delta$  — функция Дирака;  $R$  — расстояние между точкой наблюдения  $q$  и точкой  $q_0(\tau)$ , находящейся на поверхности щели  $s$ , в сечении ее, характеризуемом дугой  $\tau$ ,  $\vec{t}(q)$  — единичный вектор, касательный к  $s$  в точке  $q$ , направленный поперек щели.

Применяя к полям  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  и  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  лемму Лоренца, найдем

$$\int_{(s+s_i)} \{ [\vec{E}^0 \vec{\mathcal{H}}] - [\vec{\mathcal{E}} \vec{H}^0] \} \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} \vec{j} \vec{\mathcal{E}} \vec{dl}_i.$$

Отсюда, учитывая нулевые граничные условия для касательной составляющей  $\vec{E}^0$  на  $s+s_i$  и формулу (4), получим, используя свойства  $\delta$ -функции,

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0 = -\frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} \vec{j} \vec{\mathcal{E}} \vec{dl}_i. \quad (5)$$

Таким образом, каждая сумма основного уравнения (3) останется конечной при  $\omega = \omega_1$ , если этому условию будет удовлетворять вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  (см. (5)).

Отличие касательной составляющей  $\vec{\mathcal{E}}$  на  $s$  от нуля позволяет считать, что поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  создается сторонней эдс  $\vec{E}^{ст}$  частоты  $\omega$ , приложенной к  $s$ -части замкнутой идеально проводящей поверхности  $s+s_i$  и равной

$$\vec{E}^{ст} = -[\vec{n} [\vec{\mathcal{E}} \vec{n}]] \quad \text{на } s. \quad (6)$$

При резонансе  $\omega = \omega_1$  поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  будет конечным только при условии равенства нулю работы сторонней эдс над полями  $\vec{e}^{(\nu)}, \vec{h}^{(\nu)}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) свободных колебаний частоты  $\omega_1$ . Это условие равносильно равенствам

$$\int_{(s)} [\vec{E}^{ст} \vec{h}^{(\nu)}] \vec{ds} = 0, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

или, учитывая формулы (6) и (4),

$$\sum_{n=1}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} h_\tau^{(\nu)} = -a_0(\tau) h_\tau^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где  $h_\tau^{(\nu)}$  — проекция вектора  $\vec{h}^{(\nu)}$  на направление возрастания  $\tau$  (т. е. вдоль щели) в точке  $q_0(\tau)$ .

Разрешая эту систему уравнений относительно  $a_n(\tau)$ , найдем искомые значения этих функций, при которых поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ , а значит и от-

дельные суммы в уравнении (3) остаются конечными для  $\omega \rightarrow \omega_1$ . Так как неизвестных  $a_n(\tau)$  ( $n=0, 1, \dots, m$ ) больше, чем уравнений, то одно из них, например  $a_0(\tau)$ , остается произвольным. Выбирая его наиболее рациональным, с нашей точки зрения, образом, найдем

$$a_0(\tau) = |d^\mu h_\tau^{(\nu)} / d\tau^\mu|, \quad a_n(\tau) = -\Delta_n, \quad n=1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где  $|d^\mu h_\tau^{(\nu)} / d\tau^\mu|$  — определитель  $m$ -го порядка, у которого на пересечении  $\nu$ -й строки и  $\mu$ -го столбца стоит член  $d^\mu h_\tau^{(\nu)} / d\tau^\mu$ , а  $\Delta_n$  — определитель, получаемый из него заменой  $n$ -го столбца столбцом с общим членом  $h_\tau^{(\nu)}$  ( $\nu=1, 2, \dots, m$ ).

В дальнейшем будем считать функции  $a_n(\tau)$  заданными при помощи формул (8). Уравнение (3) мы при этом запишем в виде

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V] = \alpha Q[V] + \alpha \Phi(\tau), \quad (9)$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{i\pi\omega_1}{c} \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0, \quad (9')$$

а  $Q[V]$  — линейный относительно  $V$  оператор, равный первой сумме правой части равенства (3).

Уравнение (9) совместно с граничными условиями  $V=0$  при  $\tau=0, l$  определяет напряжение на щели для интервала частот, содержащих  $\omega = \omega_1$ , причем каждый член уравнения (9) остается конечным и регулярным (в отличие от уравнения (1)) также для резонансной частоты  $\omega = \omega_1$ . Поэтому для решения уравнения (9) может быть применен метод разложения по малому параметру  $\alpha$ . Остановимся подробнее на случае простого не кратного собственного значения  $\omega_1$ , когда  $m=1$ . Формулы (8) дают при этом следующие значения для  $a_n(\tau)$ :  $a_0(\tau) = dh_\tau / d\tau$ ,  $a_1(\tau) = -h_\tau$ , и уравнение (9) принимает вид

$$\frac{dh_\tau}{d\tau} L[V] - h_\tau \frac{d}{d\tau} L[V] = \alpha Q[V] + \alpha \Phi(\tau), \quad V=0 \text{ при } \tau=0, l. \quad (10)$$

Полагая  $\omega = \omega_1$ , будем искать решение при помощи ряда

$$V = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \dots \quad (11)$$

Подставляя его в (10), получим следующую систему уравнений, определяющих коэффициенты ряда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_\tau}{d\tau} L[V_0] - h_\tau \frac{d}{d\tau} L[V_0] &= 0, \quad V_0 = 0 \text{ при } \tau=0, l \\ \frac{dh_\tau}{d\tau} L[V_1] - h_\tau \frac{d}{d\tau} L[V_1] &= Q[V_0] + \Phi(\tau), \quad V_1 = 0 \text{ при } \tau=0, l \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При длине щели  $l \neq n\lambda/2$  ( $n=1, 2, \dots$ ) уравнение для  $V_0$  (см. также (2)) имеет следующее общее решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} L[V_0] = Ah_\tau, \quad V_0 = & -\frac{A \sin(k\tau)}{k \sin(kl)} \int_0^l h_\tau(x) \sin k(l-x) dx + \\ & + \frac{A}{k} \int_0^\tau h_\tau(x) \sin k(\tau-x) dx, \end{aligned} \quad (13)$$



где  $A$  — постоянная интегрирования, которую можно определить из условия ортогональности  $V_0$  к правой части уравнения для  $V_1$ . Однако при этом приходится оперировать с довольно сложным оператором  $Q$ , чего можно избежать. Действительно, применяя к полю  $\vec{E}, \vec{H}$  (возбуждаемому внутри эндовибратора со щелью током  $J$ ) и полю свободного колебания  $\vec{e}, \vec{h}$  частоты  $\omega_1$  лемму Лоренца, немедленно найдем следующее интересное соотношение\*:

$$\int_0^l V h_\tau d\tau = \frac{4\pi}{c} \int_{l_i} J \vec{e} d\vec{l}_i. \quad (14)$$

Здесь слева интегрирование идет вдоль щели. Подставляя в (14) значение  $V \cong V_0$  формулы (13), получим простое выражение для постоянной  $A$ :

$$A = \frac{4\pi}{c} \frac{\int_{l_i} J \vec{e} d\vec{l}_i}{\int_0^l (V_0/A) h_\tau d\tau} \quad (15)$$

( $V_0/A$  не зависит от  $A$ ).

Для практических целей чаще всего достаточно ограничиться первым отличным от нуля членом ряда (11). Таким образом, при  $l \neq n\lambda/2$   $V = V_0 + O(\alpha)$ , где  $V_0 = O(1)$  (формулы (13), (15)).

Переходя к случаю  $l = n\lambda/2$ , легко видеть, что единственным, удовлетворяющим граничным условиям, решением первого уравнения системы (12) является

$$V_0 = M \sin k\tau. \quad (16)$$

Что касается постоянной  $M$ , то ее также можно найти, подставив  $V \cong V_0$  в уравнение (14) и разрешая его относительно  $M$ :

$$M = \frac{4\pi}{c} \frac{\int_{(l_i)} J \vec{e} d\vec{l}_i}{\int_0^l h_\tau \sin k\tau d\tau}$$

Следовательно, при  $l = n\lambda/2$

$$V = M \sin k\tau + O(\alpha). \quad (17)$$

Таким образом, при резонансном эндовибраторе  $\omega = \omega_1$  напряжение  $V$  будет порядка  $O(1)$  при любых длинах щели  $l$ , в отличие от случая  $\omega \neq \omega_1$ , когда при  $l \neq n\lambda/2$ ,  $V = O(\alpha)$  (см. (2)). Что касается самого характера изменения напряжения вдоль щели, то он (при  $m=1$ ) остается тем же, что и в случае  $\omega \neq \omega_1$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $m > 1$ .

Поступило  
16 XII 1946

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 53, № 7 (1946).    <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 55, № 5 (1947).

\* Необходимо подчеркнуть, что соотношение (14) справедливо только при  $\omega = \omega_1$ , т. е. когда частота обоих полей одинакова.

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ И КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ  
ИЗЛУЧЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ АНТЕНН**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 16 XII 1946)

Рассмотрим дифракционную антенну в виде ограниченной замкнутой металлической поверхности с произвольным отверстием  $s$ , возбуждаемую изнутри линейным проводником  $l_i$  с током  $J$  (см. рисунок). Мощность излучения  $W_\Sigma$  такой антенны может быть найдена при помощи потока вектора Пойнтинга через геометрическую поверхность отверстия  $s$ :

$$W_\Sigma = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^*] \vec{d}s, \quad (1)$$

где  $\vec{E}, \vec{H}$  — поле дифракционной антенны\*. С другой стороны,  $W_\Sigma$  выражается посредством известной формулы

$$W_\Sigma = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(l_i)} J^* \vec{E} \vec{d}l. \quad (2)$$

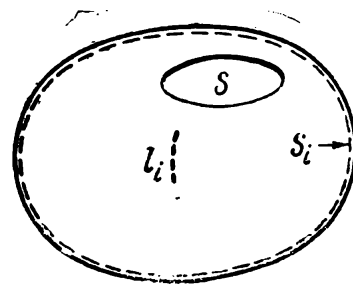


Рис. 1

Преобразуем эти формулы к более удобному, в нашем случае, виду. Для этого используем лемму, аналогичную лемме Лоренца. В применении к двум произвольным полям  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , заданным внутри замкнутой поверхности  $s_0$  и возбуждаемым находящимися там линейными проводниками  $l_1$  и  $l_2$  с токами  $J_1$  и  $J_2$ , лемма эта имеет вид\*\*

$$\int_{(s_0)} \{ [\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] + [\vec{E}_2^* \vec{H}_1] \} \vec{d}s = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \int_{(l_1)} J_1 \vec{E}_2^* \vec{d}l + \int_{(l_2)} J_2^* \vec{E}_1 \vec{d}l \right\}. \quad (3)$$

Доказательство ее так незначительно отличается от доказательства обычной леммы Лоренца, что мы позволим себе его не приводить. Обозначим внутреннюю сторону металлической поверхности антенны буквой  $s$ , и введем вспомогательное поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , возбуждаемое током  $J$  (см. выше) внутри замкнутой поверхности  $(s + s_i)$ .

При расчете  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  поверхность  $(s + s_i)$  мы будем считать идеально проводящей.

\* Звездочка у  $H^*$ , как обычно, обозначает величину, комплексно-сопряженную с  $H$ .

\*\* Проводимость среды, находящейся внутри  $s_0$ , принята равной нулю.

$$(\vec{E}_1, \vec{H}_1) = (\vec{E}, \vec{H}), \quad (\vec{E}_2, \vec{H}_2) = (\vec{E}^0, \vec{H}^0) \quad \text{и} \quad J_1 = J_2 = J, \quad l_1 = l_2 = l,$$

то, учитывая граничные условия\* для  $\vec{E}$  и  $\vec{E}^0$ , получим вместо (3) следующее равенство

$$\int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^{0*}] \vec{ds} = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \int_{(l)} J \vec{E}^{0*} \vec{dl} + \int_{(l)} J^* \vec{E} \vec{dl} \right\}. \quad (4)$$

Член  $-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(l)} \vec{E}^{0*} \vec{dl}$ , выражающий активную мощность, расходуе-

мую на поддержание поля  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , очевидно, равен нулю. Следовательно, беря вещественную часть от обеих частей равенства (4), найдем

$$\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^{0*}] \vec{ds} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(l)} J^* E \vec{dl},$$

или, учитывая формулу (2):

$$W_{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^{0*}] \vec{ds} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}. \quad (5)$$

Этот весьма важный результат мы сформулируем в виде следующей общей теоремы.

При расчете мощности, излучаемой через любое отверстие, прорезанное в замкнутой металлической поверхности, можно в формулу (1) подставлять вместо истинного  $\vec{H}$  вектор  $\vec{H}^0$ , создаваемый теми же источниками, но при отсутствии отверстия (т. е. при металлизации геометрической поверхности  $s$ ).

Эта теорема справедлива при любом выборе геометрической поверхности  $s$ , затягивающей отверстие.

Если отверстие имеет форму узкой щели длины  $l$ , то  $W_{\Sigma}$  можно выразить через напряжение  $V$  между краями щели

$$W_{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^l V(\tau) H_{\tau}^{0*}(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где  $\tau$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль линии щели от одного из ее концов до переменной точки интегрирования, а  $H_{\tau}^{0*}(\tau)$  — составляющая вектора  $\vec{H}^{0*}$ , параллельная линии щели, в точке  $\tau$ . В практических единицах — ваттах, вольтах и эрстедах

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{0,8\pi} \operatorname{Re} \int_0^l V(\tau) H_{\tau}^{0*}(\tau) d\tau \text{ Watt}. \quad (6')$$

Перейдем теперь к расчету комплексного сопротивления излучения  $Z_{\Sigma}$ , причем это сопротивление мы будем относить к току  $J_0$  в

\* Потери в металле мы пренебрегаем.

некоторой точке провода  $l_i$ , возбуждающего антенну. Хорошо известная формула для  $Z_\Sigma$  имеет вид

$$Z_\Sigma = -\frac{1}{2 J_0 J_0^*} \int_{(l_i)} J^* \vec{E} \vec{dl}. \quad (7)$$

Используя полученное выше равенство (4), формуле (7) можно придать вид

$$Z_\Sigma = \frac{c}{8 \pi J_0 J_0^*} \int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^{0*}] \vec{ds} - \frac{1}{2 J_0 J_0^*} \int_{(l_i)} J^* \vec{E}^0 \vec{dl}. \quad (8)$$

При этом мы изменили знак у второго интеграла и взяли его комплексно-сопряженное значение, что, очевидно, не изменило его значения, так как он чисто мнимый.

Вводя обозначение

$$Z_0 = -\frac{1}{2 J_0 J_0^*} \int_{(l_i)} J^* \vec{E}^0 \vec{dl}, \quad (9)$$

придадим выражению (8) следующую весьма удобную форму

$$Z_\Sigma = Z_0 + \frac{c}{8 \pi J_0 J_0^*} \int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^{0*}] \vec{ds}. \quad (10)$$

Здесь сопротивление излучения представлено в виде суммы двух членов. Первый из них  $Z_0$  равен сопротивлению излучения при отсутствии отверстия, т. е. сопротивлению провода  $l_i$ , возбуждающего замкнутую металлическую поверхность  $(s+s_i)$ , второй же представляет ту часть сопротивления  $Z_\Sigma$ , которая появляется вследствие наличия отверстия  $s$ .

Для щелевой антенны формула (10) может быть преобразована так же, как и формула (5), после чего она принимает вид (ср. (6)):

$$Z_\Sigma = Z_0 + \frac{c}{8 \pi J_0 J_0^*} \int_0^l V(\tau) H_\tau^{0*}(\tau) d\tau, \quad (11)$$

или, в практических единицах,

$$Z_\Sigma = Z_0 + \frac{1}{0,8 \pi J_0 J_0^*} \int_{(s)} V(\tau) H_\tau^{0*}(\tau) d\tau \text{ ом}. \quad (11')$$

Формулы (6') и (11'), определяющие мощность и сопротивление излучения, удобны тем, что для пользования ими достаточно знать распределение напряжения  $V$  вдоль щели и величину  $\vec{H}^0$  на  $s$  (а не истинное  $\vec{H}$ ).

Методика расчета  $V$  изложена в работах (1, 2); что же касается  $\vec{H}^0$ , то его значение можно взять из соответствующей литературы или сравнительно легко подсчитать.

Изложенное здесь относится к системам, представляющим собой ограниченные замкнутые металлические поверхности с отверстием. Для бесконечных поверхностей, например бесконечных волноводов с отверстием в боковой стенке, полученные формулы не применимы.

Действительно, формула (2) уже не равна мощности, излученной через отверстие  $s$ , ибо в нее входит также мощность, распространяющаяся вдоль оси волновода. Остальные равенства также нарушаются. Практически, однако, в волноводах, играющих роль щелевых антенн, в конце обычно ставится металлическая перегородка. Поэтому приведенные здесь формулы остаются применимыми ко всем имеющим практический интерес случаям.

Следует особо подчеркнуть, что формулы (5), (6), (10) и (11) сохраняют свой смысл также в том предельном случае, когда частота колебаний  $\omega$  совпадает с одной из собственных частот замкнутого эндовибратора ( $s \rightarrow s_i$ ), несмотря на то, что  $\vec{H}^0$  обращается при этом в бесконечность.

Поступило  
16 XII 1946

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 53, № 7 (1946).    <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 55, № 5 (1947).

Я. Н. ФЕЛЬД

J. N. FELD

кандидат технических наук

**ИЗЛУЧАЮЩИЕ ЩЕЛИ В КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДАХ<sup>1)</sup>****RADIATING SLITS IN CIRCULAR WAVE GUIDES****1. БЕСКОНЕЧНЫЙ ВОЛНОВОД С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЮ**

Рассматриваются волноводы с продольными излучающими щелями. Выведены выражения для поля в волноводе, возмущённого щелью. Даются расчётные формулы для напряжения на щели, коэффициента отражения в волноводе, вызванного щелью, и т. д.

Показано, что при наличии металлической перегородки позади щели можно, меняя расстояние от неё до щели, добиться чисто бегущей волны в волноводе.

\* \* \*

Wave guides with longitudinal radiating slits are dealt with. Equations for the field within a wave guide perturbed by a slit are deduced. Computational formulae for the voltage across the slit and for reflection coefficient in wave guide due to slit, and so on are given. It is shown here that if a metallic partition is installed beyond the slit, it is possible by altering the distance from the slit, to achieve completely travelling waves in the wave guide.

Рассмотрим круглый волновод, в котором распространяется магнитная волна типа  $H_{11}$ , имеющая наибольшую критическую волну  $\lambda_{kp}$ . Если ввести цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , где ось  $z$  совпадает с осью волновода, то соответствующие векторы поля этой волны напишутся в виде [1]:

$$\left. \begin{aligned} H_z^0 &= \frac{\mu^2}{r_0^2} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{-\gamma z} \\ H_r^0 &= -\frac{i\gamma \mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{-\gamma z} \\ H_\varphi^0 &= \frac{i\gamma}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi e^{-\gamma z} \\ E_r^0 &= \frac{ik_0}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi e^{-\gamma z} \\ E_\varphi^0 &= \frac{ik_0 \mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{-\gamma z} \\ E_z^0 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

При этом зависимость от времени взята в форме  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  — угловая частота и, следовательно, волна распространяется в направ-

<sup>1)</sup> Доложено 23 января 1947 г. на коллоквиуме секции радиотехники ОТН АН СССР.

лении положительных  $z$ . Потерями в металле пренебрегаем, считая его идеально-проводящим. Входящие в (1) постоянные имеют смысл:

$r_0$  — внутренний радиус волновода,  
 $J_1(x)$  и  $J_1'(x)$  — бесселева функция первого порядка и её производная по  $x$ ,  
 $\mu = 1,841$  — первый корень  $J_1'(x)$ ,

$\gamma = + \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\mu}{r}\right)^2}$  — постоянная распространения,

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где  $\lambda$  — длина волны в воздухе.

Прорежем в поверхности волновода узкую щель длиной  $l$ , параллельную оси  $z$  (рис. 1). Для того, чтобы имело место интенсивное излучение через щель, необходимо прорезать её вдоль линии, на которой  $H_z^0$  принимает максимальное значение, т. е. там, где  $\cos \varphi = 1$ .

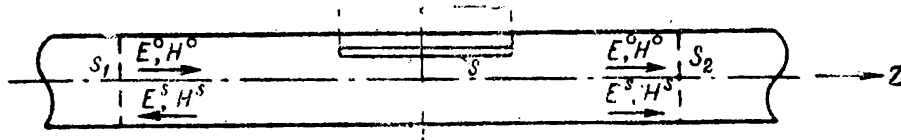


Рис. 1.

Для определённости будем считать, что на щели  $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$  и  $-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$ , где  $d = 2r_0 \varphi_1$  — ширина щели. В дальнейшем предполагается, что щель «резонансная» (т. е. длина её  $l = \frac{\lambda}{2}$ ) и узкая, т. е.  $d \ll l$ .

Как было показано нами ранее, напряжение  $U$  между краями такой щели распределяется по косинусоидальному закону [см. <sup>[2]</sup> ф-ла (9)].

$$U = U_0 \cos k_0 z, \quad -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}, \quad (2)$$

где амплитуда

$$U_0 = -\frac{2\pi k_0}{\beta l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} H_z^0(z) \cos(k_0 z) dz. \quad (2')$$

Вещественный параметр  $\beta$ , входящий в последнюю формулу и характеризующий затухание щели, надлежит ещё определить.

Поле в волноводе, возмущённое щелью, можно представить в виде суммы двух полей

$$(\vec{E}, \vec{H}) = (\vec{E}^0, \vec{H}^0) + (\vec{E}^s, \vec{H}^s) \quad (3)$$

первичного  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  [ф-лы (1)] и поля  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$ , появляющегося вследствие прорезания щели.

Касательные составляющие вектора  $\vec{E}^0$  обращаются в нуль на всей поверхности  $r = r_0$ , поэтому, учитывая ф-лу (2) и то, что в узкой щели электрические линии направлены поперёк её, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} E_z = E_z^s = 0 \text{ при } r = r_0, \\ E_\varphi = E_\varphi^s = \begin{cases} 0 \text{ на } s_i \\ U_0 f(\varphi) \cos k_0 z \text{ на } s \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь  $s$  — геометрическая поверхность щели ( $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$ ,  $-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ,  $r=r_0$ ),  $s_i$  — внутренняя сторона поверхности волновода за вычетом  $s$  (рис. 1).

Функция  $f(\varphi)$  характеризует распределение  $E_\varphi$  и  $E^s_\varphi$  поперёк щели и, как легко сообразить, удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} f(\varphi) r_0 d\varphi = 1. \quad (4')$$

Более детальное определение  $f(\varphi)$  нам не потребуется, вследствие узости щели. Таким образом, нахождение поля  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  эквивалентно внутренней граничной задаче, в которой требуется найти регулярное, не имеющее источников внутри волновода, поле, удовлетворяющее граничным условиям (4) и принципу излучения при  $z \rightarrow \mp \infty$ .

Для решения этой задачи используем метод, близкий к данному автором в работе [3]. Условимся прежде всего считать среду, заполняющую волновод, обладающей некоторой весьма малой проводимостью  $\sigma$ ; это значительно упростит рассуждения, в конце которых мы опять перейдём к  $\sigma \rightarrow 0$ .

Введём вспомогательное поле  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  — регулярное внутри волновода и заданное там при помощи граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_\varphi &= \cos n\varphi e^{i\gamma z} \\ \mathfrak{E}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{на } s + s_i \\ &(r=r_0) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $n$  — любое целое число, а  $\gamma$  — некоторая произвольная вещественная величина. Это поле можно найти при помощи магнитного вектора Герца заданного выражением

$$\Pi = \Pi_z = A J_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r) \cos n\varphi e^{i\gamma z}, \quad (6)$$

удовлетворяющим волновому уравнению.

Здесь  $J_n$  — Бесселева функция,

$$k = \sqrt{k_0^2 - i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (6')$$

а  $A$  — постоянная, которую следует определить из условий (5).

На основании известных формул, выражающих поле через магнитный вектор Герца, найдём

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_\varphi &= -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -A \sqrt{k^2 - \gamma^2} J'_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r) \cos n\varphi e^{i\gamma z} \\ \mathfrak{H}_z &= \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi, \quad \mathfrak{E}_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Остальных составляющих мы не выписываем. Очевидно, условия (5) будут выполнены, если положить

$$A = \frac{-1}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} J'_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)} \quad (7')$$

В дальнейшем нам понадобится только составляющая  $\mathfrak{H}_z$ , для которой можно получить при помощи ф-л (6), (7) и (7'), выражение

$$\mathfrak{H}_z = \frac{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}{ik_0} \frac{J_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r)}{J'_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)} \cos n\varphi e^{i\gamma z}. \quad (8)$$



Применим к искомому полю  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  и вспомогательному  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  лемму Лоренца. Тогда, учитывая, что оба поля внутри волновода не имеют источников, найдём

$$\int_{(s+s_i)} \{[\vec{E}^s \vec{\mathcal{H}}] - [\vec{\mathcal{E}} \vec{H}^s]\} \vec{ds} = 0.$$

Интегралы по сечениям волновода обратились в нуль, так как при стремлении сечений соответственно к  $z = +\infty$  и  $z = -\infty$ , поле  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  убывает по экспоненте ( $\sigma \neq 0$ ).

Применяя цилиндрическую систему координат и граничные условия (4) и (5) для  $\vec{E}^s$  и  $\vec{\mathcal{E}}$ , перепишем лемму Лоренца в виде

$$\int_{(s+s_i)} \mathcal{E}_\varphi H_z^s ds = \int_{(s)} E_\varphi^s \mathcal{H}_z ds, \tag{9}$$

или, подставляя вместо  $\mathcal{E}_\varphi$  её значение на  $s + s_i$ ,

$$\int_{(s+s_i)} H_z^s \cos n\varphi e^{i\gamma z} ds = \sqrt{2\pi r_0} a_n(\gamma), \tag{10}$$

где

$$a_n(\gamma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \int_{(s)} E_\varphi^s \mathcal{H}_z ds. \tag{11}$$

Формула (10) является основной в применяемом методе, ибо из неё непосредственно следует, что  $a_n(\gamma)$  является коэффициентом Фурье в разложении  $H_z^s$  на поверхности  $s + s_i$  по функциям  $\cos n\varphi e^{-i\gamma z}$  ( $n=0, 1, 2, \dots, -\infty < \gamma < +\infty$ ). Семейство  $\cos n\varphi e^{-i\gamma z}, \sin n\varphi e^{-i\gamma z}$  представляет собою полную ортогональную систему функций на поверхности цилиндра.

Однако, в нашем случае, вследствие чётности  $H_z^s$  и  $E_\varphi^s$  относительно  $\varphi$ , члены с синусами<sup>1)</sup> будут в разложении отсутствовать.

Таким образом, можно утверждать, что

$$H_z^s = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(\gamma) e^{-i\gamma z} d\gamma, \text{ на } s + s_i. \tag{12}$$

Штрих у суммы указывает на то, что член, соответствующий  $n=0$ , должен быть умножен на 1/2.

Коэффициенты  $a_n(\gamma)$  найдём, подставив в ф-лу (11) значение  $\mathcal{H}_z$  из выражения (8)

$$a_n(\gamma) = \frac{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}{ik_0 \sqrt{2\pi r}} \frac{J_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)}{J'_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)} \int_{(s)} E_\varphi^s \cos n\varphi e^{i\gamma z} dz.$$

Так как по ф-ле (4)

$$E_\varphi^s = U_0 f(\varphi) \cos k_0 z, \text{ на } s, \tag{13}$$

то

$$a_n(\gamma) = \frac{\sqrt{2(k^2 - \gamma^2)}}{i\pi r_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{l\gamma}{2}\right)}{k_0^2 - \gamma^2} \frac{J_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)}{J'_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} U_0 f(\varphi) \cos n\varphi r_0 d\varphi. \tag{14}$$

<sup>1)</sup> Коэффициенты при  $\sin n\varphi e^{-i\gamma z}$  могли бы быть получены путём замены в ф-лах (5)  $\cos n\varphi$  на  $\sin n\varphi$ .

Подставляя это выражение в ф-лу (12), найдём

$$H_z^s = \frac{1}{i\pi^2 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}{k_0^2 - \gamma^2} \frac{J_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)}{J_n'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)} \cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right) e^{-i\gamma z} d\gamma, \text{ на } s + s_1, \quad (15)$$

где

$$b_n = \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} U_0 f(\varphi) \cos(n\varphi) r_0 d\varphi. \quad (15')$$

Формула для  $H_z^s$ , справедливая в любой точке внутри волновода, получится после замены в числителе выражения (15)  $r_0$  на  $r$ .

$$H_z^s = \frac{1}{i\pi^2 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}{k_0^2 - \gamma^2} \frac{J_n(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r)}{J_n'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0)} \cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right) e^{-i\gamma z} d\gamma \quad (16)$$

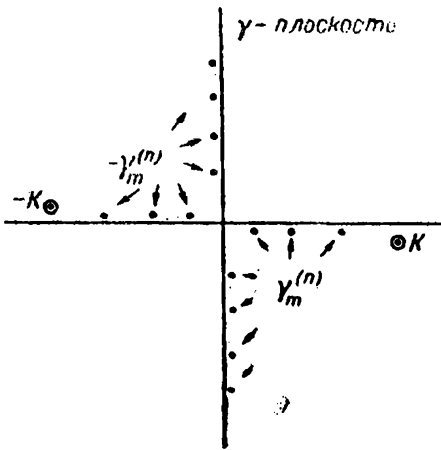


Рис. 2.

Действительно, это выражение удовлетворяет волновому уравнению и при  $r=r_0$  совпадает с ф-лой (15), что и доказывает наше утверждение.

Подинтегральное выражение в ф-ле (16) является мероморфной<sup>1)</sup> функцией на всей плоскости комплексного переменного  $\gamma$ , единственными полюсами которой служат корни уравнения

$$J_n'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r_0) = 0.$$

Обозначая  $m$ -ый нуль функций  $J_n'(x)$  буквой  $\mu_m^{(n)}$ , получим для аффиксов полюсов следующие значения:

$$\pm \gamma_m^{(n)} = \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_m^{(n)} > 0. \quad (17)$$

Так как  $\mu_m^{(n)}$  — вещественные числа, возрастающие вместе с  $m$ , а  $k$  обладает весьма малой отрицательной мнимой частью (ф-ла б'), то вблизи вещественной оси на плоскости  $\gamma$  лежит только конечное число полюсов, а именно те, для которых  $\operatorname{Re} k^2 \geq (\mu_m^{(n)}/r_0)^2$ . Остальные полюса находятся у мнимой оси (см. рис. 2, где полюса изображены точками).

С другой стороны, подинтегральное выражение в ф-ле (16) обращается в нуль по экспоненциальному закону, когда  $\gamma$  стремится к бесконечности, оставаясь в нижней (верхней) полуплоскости, если при этом  $z > l/2$  ( $z < -l/2$ ).

Поэтому, применяя теорему Коши, можно заменить интеграл в ф-ле (16) суммой вычетов вокруг полюсов, находящихся в нижней (верхней) полуплоскости, если  $z > \frac{l}{2}$  ( $z < -\frac{l}{2}$ )

$$H_z^s = \frac{2}{\pi r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\mu_m^{(n)}/r_0)^2}{k_0^2 - \gamma_m^{(n)2}} \frac{J_n(\mu_m^{(n)} \frac{r}{r_0})}{\gamma_m^{(n)} J_n'(\mu_m^{(n)})} \cos\left(\frac{l\gamma_m^{(n)}}{2}\right) \begin{cases} e^{-i\gamma_m^{(n)} z} & z > \frac{l}{2} \\ e^{+i\gamma_m^{(n)} z} & z < -\frac{l}{2} \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Точка  $\gamma = k$  не является точкой ветвления, вследствие чётности функции относительно  $\sqrt{k^2 - \gamma^2}$ .

Полученное решение, как легко видеть, остаётся справедливым также при  $\sigma \rightarrow 0$ , когда  $k=k_0$  [ф-ла (6')] и принимает при этом вид

$$H_z^s = \frac{2}{\pi r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n\left(\mu_m^{(n)} \frac{r}{r_0}\right)}{\gamma_m^{(n)} J'_n\left(\mu_m^{(n)}\right)} \cos\left(\frac{\gamma_m^{(n)} l}{2}\right) e^{\pm i\gamma_m^{(n)} z}, z < -\frac{l}{2} \quad (18)$$

Таким образом, поле  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  при  $z > \frac{l}{2}$  ( $z < -\frac{l}{2}$ ) представляет собой суперпозицию магнитных волн различных типов, распространяющихся в направлении положительных (отрицательных)  $z$ . На участке  $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$  очевидно, имеют место волны обоих направлений.

На практике наибольший интерес представляет случай, когда размеры волновода выбраны таким образом, что при данной частоте  $\omega$  в нём может распространиться только один тип колебаний, т. е. в данном случае  $H_{11}$ . Это означает, что только один корень  $\mu_1^{(1)} = 1,841$  удовлетворяет неравенству  $k=k_0 > \mu_1^{(1)}/r_0$  и, следовательно, все  $\gamma_m^{(n)}$  за исключением  $\gamma_1^{(1)}$ , чисто мнимы [см. ф-лу (17)].

Поэтому в выражении (16) все члены, кроме одного, убывают по экспоненциальному закону и при достаточно больших  $z$  могут быть отброшены, после чего  $H_z^s$  принимает вид

$$H_z^s = \frac{2U_0}{\pi r_0^2} \frac{J_1\left(\mu_1^{(1)} \frac{r}{r_0}\right)}{\gamma_1^{(1)} J'_1\left(\mu_1^{(1)}\right)} \cos\left(\frac{\gamma_1^{(1)} l}{2}\right) \cos \varphi e^{i\gamma_1^{(1)} z}, |z| \gg \frac{l}{2} \quad (19)$$

Здесь положено  $b_1 = U_0$ , как это следует из ф-лы (15'), вследствие узости щели ( $\varphi_1 \ll \pi$ ).

Не представляет труда написать при помощи ф-лы (19) и уравнений Максвелла выражения для остальных составляющих поля:

$$\begin{aligned} E_r^s &= B \frac{ik}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi e^{\mp i\gamma z} \\ E_\varphi^s &= B \frac{ik}{r_0} \mu J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{\mp i\gamma z} \\ H_r^s &= \mp B \frac{i\gamma \mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{\mp i\gamma z} \\ H_\varphi^s &= \pm B \frac{i\gamma}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi e^{\mp i\gamma z} \\ E_z^s &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$B = \frac{2U_0}{\pi \gamma} \frac{\cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}{\mu^2 J'_1(\mu)} \quad (20')$$

Верхний знак в формулах относится к случаю  $z > \frac{l}{2}$ , нижний — к  $z < -\frac{l}{2}$  и вместо  $\gamma_1^{(1)}$  и  $\mu_1^{(1)}$  для краткости написаны  $\gamma$  и  $\mu$ .

Таким образом, возмущающее поле  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  полностью определено и для нахождения полного поля  $\vec{E}, \vec{H}$ , имеющего место внутри волновода со щелью, достаточно сложить поля  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  и  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  [см. ф-лу (3)].

Перейдём теперь к расчёту мощностей  $W_1$  и  $W_2$ , пронесимых полным полем  $\vec{E}, \vec{H}$  соответственно через сечения волновода  $s_1$  и  $s_2$  (рис. 1) в направлении положительных  $z$ . Предположим, что сечения  $s_1$  и  $s_2$  находятся на таком расстоянии от щели, где уже применимы ф-лы (19) и (20) для  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$ .

Мощность  $W_2$ , очевидно, равна <sup>1)</sup>

$$W_2 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{(s_2)} [\vec{E}, \vec{H}^*]_z ds.$$

Подставляя сюда значение составляющих  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  и  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  [см. ф-лы (1), (19) и (20)], найдём после несложных выкладок

$$\begin{aligned} W &= |(B+1)|^2 \frac{\omega\gamma}{8} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{J_1(\mu x)}{x} \right]^2 + [\mu J_1'(\mu x)]^2 \right\} x dx = \\ &= |(B+1)|^2 \frac{\omega\gamma}{16} (\mu^2 - 1) J_1^2(\mu). \end{aligned} \quad (21)$$

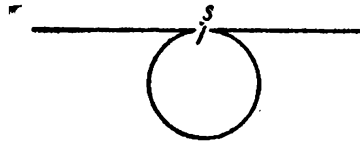


Рис. 3.

Аналогично рассчитывается также  $W_1$ ; необходимо только учесть при этом, что у поверхности  $s_1$  волны  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  и  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  движутся в противоположных направлениях (рис. 1). Следовательно,  $W_1$  равна разности мощностей, пронесимых через  $s_1$  полями  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  и  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$

$$W_1 = (1 - |B|^2) \frac{\omega\gamma}{16} (\mu^2 - 1) J_1^2(\mu). \quad (22)$$

Подсчитаем ещё мощность  $W_z$ , излучаемую через щель наружу. Её можно найти при помощи формулы

$$W_z = \frac{1}{2} |U_0|^2 g_z, \quad (23)$$

где  $g_z$  — активная (внешняя) проводимость излучения щели, отнесённая к пучности напряжения на щели.

Для расчёта  $g_z$  следовало бы решить наружную граничную задачу для бесконечного цилиндра (волновода), на части  $s$  которого имеется отличная от нуля касательная составляющая электрического вектора, заданная при помощи ф-лы (13). Решение этой задачи можно провести тем же методом, который был применён для внутренней граничной задачи<sup>2)</sup>, т. е. для определения поля  $\vec{E}^s, \vec{H}^s$  внутри волновода. Однако, здесь мы не пойдём таким путём, и в целях сокращения расчёта  $g_z$  будем считать, что сна-

<sup>1)</sup> Звёздочка означает комплексно-сопряжённую величину.

<sup>2)</sup> Совершенно иной способ решения наружной граничной задачи для цилиндра дан А. А. Пистолькорсом [4], но, к сожалению, работа не доведена до расчёта  $g_z$ .

ружи волновода имеется бесконечная металлическая плоскость, касательная к щели  $s$ , в которой также прорезана щель, совпадающая с  $s$  (рис. 3).

При таком предположении можно на основании принципа двойственности [5] утверждать, что

$$g_{\Sigma} = \frac{c^2}{8\pi^2} R_{\Sigma}, \quad (24)$$

где  $R_{\Sigma}$  — сопротивление излучения полуволнового вибратора, в cgs  $\epsilon$ , отнесенное к пучности тока и равное

$$R_{\Sigma} = 73,1/9 \cdot 10^{11} \quad (24')$$

Из соображений баланса энергии в волноводе вытекает очевидное равенство

$$W_{\Sigma} = W_1 - W_2. \quad (25)$$

Подставляя сюда значения  $W$  из ф-л (21), (22) и (23), найдём

$$\frac{1}{2} |U_0|^2 |g_{\Sigma}| = \frac{\omega \gamma}{16} (\mu^2 - 1) J_1^2(\mu) \{1 - |B|^2 - |(B+1)^2|\}$$

или, подставляя значение  $B$  [ф-ла (18')] и производя элементарные преобразования, получаем

$$\left\{ g_{\Sigma} + \frac{\cos^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}{\pi^2 \gamma (\mu^2 - 1)} \right\} |U_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot J_1(\mu) \cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \operatorname{Re} U_0 \quad (26)$$

Подставляя в ф-лу (2') для  $U_0$  значение  $H_z^0$  из равенств (1), получим, учитывая, что  $k = k_0$ ,

$$U_0 = -\frac{4\pi k^2}{\beta l} \cdot J_1(\mu) \cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right). \quad (27)$$

Найденное выражение для  $U_0$  позволяет переписать равенство (26) в следующем виде

$$\beta l = -8\pi^2 k^2 \left\{ \frac{g_{\Sigma}}{\omega} + \frac{\cos^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}{\pi^2 \gamma (\mu^2 - 1)} \right\} \quad (28)$$

Таким образом, из энергетических соображений мы определили величину  $\beta$ , характеризующую затухание щели, и можем при помощи ф-лы (27) найти амплитуду напряжения на щели

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot J_1(\mu) \cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \left\{ \frac{g_{\Sigma}}{\omega} + \frac{\cos^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}{\pi \gamma (\mu^2 - 1)} \right\}^{-1} \quad (29)$$

Величина  $B$ , характеризующая амплитуду отражённой в направлении  $-z$  (благодаря наличию щели) волны, численно равна коэффициенту отражения, ибо

$$B = \frac{H_z^s e^{-i\gamma z}}{H_z^0 e^{i\gamma z}}, \quad \text{при } z \ll -\frac{l}{2}.$$

Аналогичное равенство справедливо также для остальных составляющих.

Расчётную формулу для  $B$  получим, подставив в выражение (20) значение  $U_0$  из равенства (29)

$$B = - \left\{ 1 + \pi^2 \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{g_{\Sigma}}{c} \cdot \frac{\mu^2 - 1}{\cos^2\left(\frac{\pi\gamma}{2k}\right)} \right\}^{-1}$$

так как

$$l = \frac{\pi}{k} \text{ и } \omega = ck.$$

Коэффициент отражения  $B$  полностью характеризует влияние щели на режим работы генератора, возбуждающего волновод. Однако, этого недостаточно, необходимо также знать, какая часть мощности, отдаваемой генератором в волновод, излучается через щель. Для этого введём соответствующий параметр

$$\eta = \frac{W_{\Sigma}}{W_1} = 1 - \frac{W_2}{W_1}, \quad (30)$$

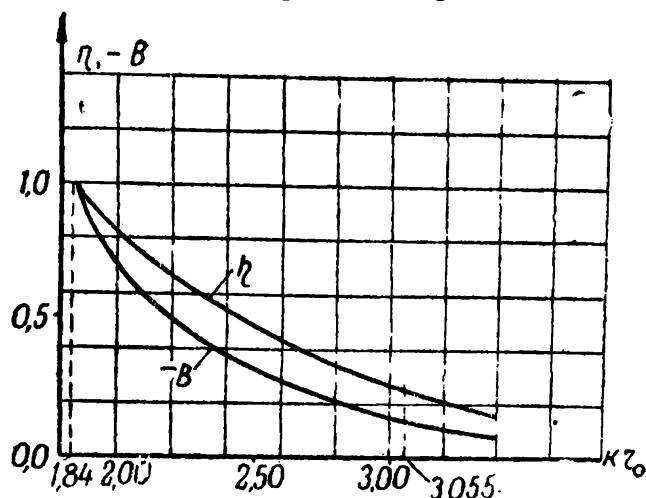


Рис. 4.

являющийся коэффициентом полезного действия щели. Формулы (21) и (22) позволяют написать

$$\eta = \frac{2B}{B-1}. \quad (31)$$

Из выражения (30) следует, что коэффициент отражения (а значит и  $\eta$ ) зависит только от параметра  $(kr_0)$ , так как  $1/k = +\sqrt{1 - (\mu/kr_0)^2}$ .

Остальные величины, входящие в ф-лу (30), имеют фиксированные значения

$$\mu \equiv \mu_1^{(1)} = 1,841;$$

$$\frac{g_{\Sigma}}{c} = \frac{73,1}{240\pi^2}. \quad (\text{см. ф-лу 24})$$

На рис. 4 даны кривые зависимости коэффициентов  $B$  и  $\eta$  от параметра  $kr_0$  для тех значений последнего, при которых в волноводе возможно распространение только одного типа волн  $H_{11}$ . При этом предполагалось, что длина щели равна  $\lambda/2$ , т. е. если изменение  $(kr_0)$  происходит за счёт  $\lambda$ , а не  $r_0$ , то соответственно изменяется и длина щели  $l$ .

Из кривых следует, что большим значением  $\eta$  соответствует большее отражение  $B$ . Последнее, очевидно, затрудняет согласование генератора с

волноводом и приводит к увеличению потерь в стенках волновода. Поэтому мы в следующем параграфе рассмотрим волновод со стенкой, в котором этот недостаток отсутствует.

## 2. ВОЛНОВОД СО ЩЕЛЮЮ, ЗАКАНЧИВАЮЩИЙСЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СТЕНКОЙ

Если в волноводе, рассмотренном в предыдущем параграфе, позади щели поставить металлическую перегородку на расстоянии  $l_1$  от середины щели, то, меняя  $l_1$ , можно получить настраивающуюся систему (рис. 5). Настройку, очевидно, необходимо вести на минимум коэффициента отраже-

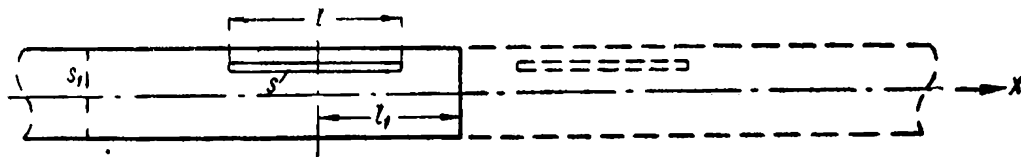


Рис. 5.

ния  $B$ , или, другими словами, на максимум коэффициента бегущей волны в волноводе между генератором и щелью. При этом будут созданы наивыгоднейшие условия для отдачи мощности генератором и снижены потери в стенках волновода.

Коэффициент полезного действия щели  $\eta$  при наличии стенки равен единице, так как вся мощность, отдаваемая генератором, излучается через щель.

Задача о полубесконечном волноводе со щелью может быть сведена при помощи метода зеркальных изображений к бесконечному волноводу с

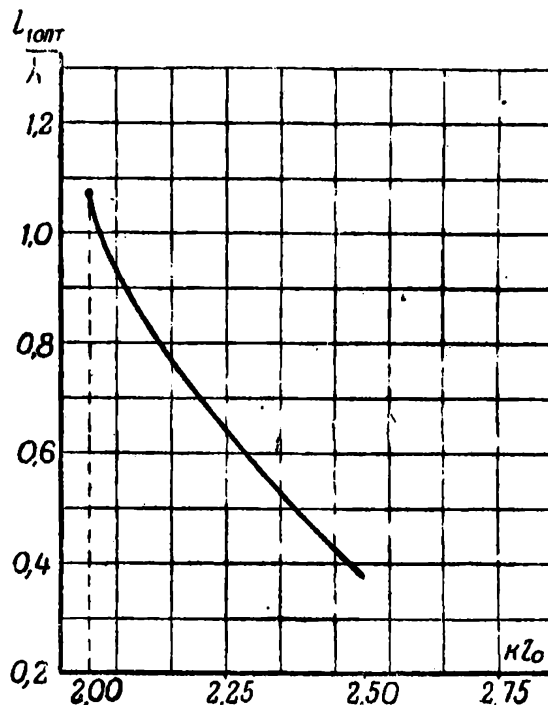


Рис. 6.

двумя щелями (рис. 5) и решается методами, применёнными выше. Введём для симметрии вместо  $z$  новую переменную  $x$ , отсчитываемую от перегородки

$$x = z - l_1. \tag{32}$$

Благодаря зеркальному отображению мы теперь будем иметь наряду с волной, идущей из  $x = -\infty$ , волну, движущуюся в противоположном направлении из  $x = +\infty$ . Поэтому невозмущенное щелью поле будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} H_x^0 &= \frac{2\mu^2}{r_0^2} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi \sin \gamma x \\ H_r^0 &= \frac{2\gamma\mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi \cos \gamma x \\ H_\varphi^0 &= -\frac{2\gamma}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi \cos \gamma x \\ E_r^0 &= \frac{2ik}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi \sin \gamma x \\ E_\varphi^0 &= \frac{2ik}{r_0} \mu J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi \sin \gamma x \\ E_x^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Закон изменения напряжения вдоль узкой полуволновой щели сохраняет косинусоидальный вид [ф-ла (2)] и при наличии перегородки в волноводе. Что же касается зеркального изображения щели, то закон изменения напряжения вдоль неё отличается только знаком.

Возмущающее поле  $\vec{E}^s$ ,  $\vec{H}^s$ , добавляющееся благодаря наличию щели и её зеркального изображения, легко подсчитать на основании принципа суперпозиции.

Действительно, ф-лы (19), (20) определяют возмущающее поле, вызванное одной щелью в бесконечном волноводе. Аналогичные формулы, очевидно, имеют место и для поля, вызванного зеркальным изображением щели. При этом необходимо только учесть, что напряжение на зеркальном изображении щели отличается знаком и начало координат ( $x=0$ ) не совпадает с серединой щели, как это имело место в ф-лах (19) и (20).

Учитывая всё сказанное, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} H_x^s &= i N \frac{\mu^2}{r_0^2} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{i\gamma x} \\ H_r^s &= -N \frac{\gamma\mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{i\gamma x} \\ H_\varphi^s &= N \frac{\gamma}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi e^{i\gamma x} \\ E_r^s &= N \frac{k}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi e^{i\gamma x} \\ E_\varphi^s &= -N \frac{k\mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi e^{i\gamma x} \\ E_x^s &= 0 \end{aligned} \right\} x \ll -\left(\frac{l}{2} + l_1\right)^1 \quad (34)$$

где

$$N = \frac{4U_0}{\pi\gamma} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \sin \gamma l_1}{\mu^2 J_1''(\mu)} \quad (34')$$

<sup>1)</sup> Формулы (34) справедливы для таких отрицательных  $x$ , где уже успели затухнуть побочные волны, вызванные щелью, в этом смысле и следует понимать знак  $\ll$ .



Таким образом, остаётся только найти амплитуду напряжения  $U_0$  для того, чтобы  $\vec{E}^s$ ,  $\vec{H}^s$ , а также полное поле внутри волновода, равное  $\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^s$ ,  $\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^s$ , были однозначно определены.

Складывая выражения (33) и (34), получим

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{i\mu}{r_0^2} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi [(N-1) e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}] \\ H_r &= -\frac{\gamma\mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi [(N-1) e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}] \\ H_\varphi &= \frac{\gamma}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi [(N-1) e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}] \\ E_r &= -\frac{k}{r} J_1\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \sin \varphi [(N-1) e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}] \\ E_\varphi &= -\frac{k\mu}{r_0} J_1'\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \cos \varphi [(N-1) e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}] \\ E_x &= 0. \end{aligned} \right\} x \ll -\left(\frac{l}{2} + l_1\right) \quad (35)$$

Подсчитаем теперь мощность  $W_1$ , проносимую этим полем через некоторое сечение волновода  $s_1$  (рис. 5), т. е. мощность, отдаваемую генератором, возбуждающим волновод

$$W_1 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{(s_1)} [\vec{E}, \vec{H}^1]_x ds = \frac{ck\gamma}{8} (2N - N^2) \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{J_1(\mu x)}{x} \right]^2 + [\mu J_1'(\mu x)]^2 \right\} x dx. \quad (36)$$

При получении ф-лы (36) было учтено, что  $N$  вещественно. Последнее вытекает из рассмотрения ф-л (34), (2') и (33) для  $N$ ,  $U_0$  и  $H_z^0 \equiv H_x^0$ .

Производя интегрирование, найдём окончательно

$$W_1 = \frac{\omega\gamma}{16} (2N - N^2) (\mu^2 - 1) J_1^2(\mu). \quad (37)$$

Мощность  $W_\Sigma$ , излучаемую через щель наружу, можно опять определить при помощи ф-л (23). Так как в рассматриваемом случае вся мощность, отдаваемая генератором, излучается через щель ( $W_1 = W_\Sigma$ ), то с помощью ф-л (37) и (24) можно написать следующее энергетическое равенство

$$\frac{\omega\gamma}{16} (2N - N^2) (\mu^2 - 1) J_1^2(\mu) = \frac{U_0^2}{2} g_\Sigma.$$

Подставим в него выражение для  $N$  [ф-ла (34')] и решим относительно  $U_0$

$$U_0 = - \frac{\omega \cos\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \sin(\gamma l_1) J_1(\mu)}{\pi g_\Sigma + \frac{2\omega \cos^2\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \sin^2 \gamma l_1}{\pi \gamma (\mu^2 - 1)}}. \quad (38)$$

<sup>1)</sup> Из ф-л (2) и (33) следует, что  $U_0$  вещественно.

Определив напряжение  $U_0$ , легко подсчитать коэффициент  $(N-1)$ , фигурирующий в ф-лах (35)

$$N-1 = \frac{2 \omega \cos^2 \left( \frac{\gamma l}{2} \right) \sin^2 (\gamma l_1) - \pi^2 \gamma g_{\Sigma} (\mu^2 - 1)}{2 \omega \cos^2 \left( \frac{\gamma l}{2} \right) \sin^2 (\gamma l_1) + \pi^2 \gamma g_{\Sigma} (\mu^2 - 1)}. \quad (39)$$

Из рассмотрения ф-л (35) следует, что  $(N-1)$  является коэффициентом отражения, вызванного наличием на конце волновода металлической стенки и щели. Оптимальному режиму работы, очевидно, соответствует равенство нулю коэффициента отражения, т. е.  $(N_{\text{opt}}=1)$ . Последнее эквивалентно требованию

$$2 \omega \cos^2 \left( \frac{\gamma l}{2} \right) \sin^2 (\gamma l_1) - \pi^2 \gamma g_{\Sigma} (\mu^2 - 1) = 0,$$

определяющему оптимальное значение расстояния  $l_1$ , между стенкой и серединой щели (рис. 5), при котором отсутствует отражение

$$\sin \gamma l_{1\text{opt}} = \mp \sqrt{\frac{\pi^2 g_{\Sigma} (\mu^2 - 1)}{2c}} \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \sec \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma}{k} \right) \quad (40)$$

или, если опять определить  $g_{\Sigma}$  по ф-ле (24).

$$\sin \gamma l_{1\text{opt}} = \mp 0,603 \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \sec \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma}{k} \right), \quad (40')$$

где  $\frac{\gamma}{k} = \sqrt{1 - (\mu/k r_0)^2}$ ,  $\mu = 1,841$ .

На рис. 6 изображена кривая зависимости  $l_{1\text{opt}}$  (в долях  $\lambda$ ) от  $k r_0$ , подсчитанная по ф-ле (40'). При этом был взят наименьший корень ур-ния (40'), удовлетворяющий условию  $l_{1\text{opt}} > \frac{l}{2} \equiv \frac{\lambda}{4}$ . Корень  $l_{1\text{opt}} < \frac{l}{2}$  соответствует режущей щель перегородке (рис. 5) и поэтому не интересен.

Кривая рис. 6 построена для тех значений  $k r_0$ , для которых правая часть ур-ния (40') меньше или равна единице, ибо только при этом условии  $l_{1\text{opt}}$  имеет вещественное значение. Как видно из кривой, настройка волновода со щелью при помощи перегородки на бегущую волну ( $N-1=0$ ) возможна в нашем случае не для всех значений  $k r_0$ , при которых в волноводе распространяется только один тип волны  $H_{11}$ .

Методом, тождественным изложенному здесь, могут быть рассмотрены также прямоугольные волноводы как с продольными, так и с поперечными излучающими щелями.

В случае возбуждения волновода произвольным заданным распределением сторонних токов (источников) методика расчёта остаётся той же. Изменяется только выражение для коэффициента Фурье [ф-ла (11)], вследствие появления в лемме Лоренца добавочного члена.

### Литература

1. Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг. Радиоволноводы. Гостехиздат, 1946.
2. Я. Н. Фельд. ДАН LV, № 5, 1947.
3. Я. Н. Фельд. ДАН LI, № 3, 1946.
4. А. А. Пистолькорс. ДАН LII, № 2, 1946.
5. А. А. Пистолькорс. ЖТФ XIV, №12, 1944.

ЩЕЛЕВЫЕ АНТЕННЫ <sup>1</sup>

Я. Н. Фельд

В работе излагается общая теория щелевых антенн, применимая к узким щелям, прорезанным в металлической поверхности любых эндовибраторов или волноводов. Получено интегро-дифференциальное уравнение, определяющее закон распределения напряжения вдоль щелей при работе щелевой антенны на передачу или прием и дано его решение. Показано, что общее интегро-дифференциальное уравнение для достаточно узких щелей может быть заменено дифференциальным уравнением, аналогичным телеграфному.

## Введение

В работе [1] мы рассмотрели задачу об излучении через щели в системах, обладающих осевой симметрией. При этом излучаемое поле определяется напряжением  $V$  между краями щели, не меняющимся вдоль нее. Значительно больший практический интерес представляют несимметричные щелевые излучатели, у которых напряжение изменяется вдоль щели.

Поэтому в настоящей главе мы займемся вопросами излучения через любые узкие щели, прорезанные в поверхности произвольных полых металлических тел эндовибраторов, волноводов и т. п., которые мы будем называть щелевыми антеннами.

Основной задачей здесь является нахождение законов распределения напряжения вдоль щели в зависимости от способов ее возбуждения.

Определение поля снаружи и внутри щелевой антенны сведется после этого соответственно к внешней и внутренней граничной задачам электродинамики, решение которых не встречает принципиальных трудностей. Знание этих полей позволит ответить, очевидно, на большинство вопросов теории и практики щелевых антенн.

Дадим прежде всего определение щели постоянной ширины  $d$  и длины  $l$ , прорезанной вдоль некоторой гладкой линии  $[L]$  на криволинейной поверхности, обладающей непрерывно меняющейся касательной плоскостью. Для этого проведем на рассматриваемой поверхности линию  $[L]$  длины  $l$  и построим на поверхности семейство геодезических линий, ортогональных к  $[L]$ . Если теперь провести второе семейство линий, ортогональных к первому, то одна из них совпадет с  $[L]$  (рис. 1).

Из известной теоремы теории поверхностей [2] следует, что две любые линии второго семейства отсекают на геодезических линиях дуги равной длины.

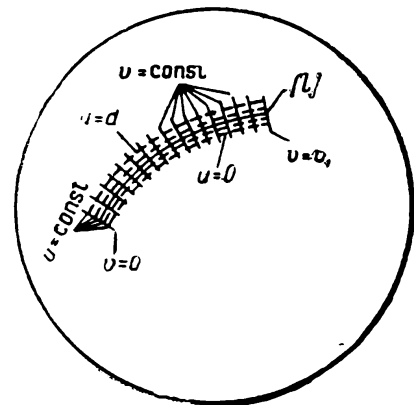


Рис. 1.

<sup>1</sup> Краткое изложение результатов опубликовано в Докладах АН СССР [6-7].

Таким образом, вырезав часть поверхности, ограниченную с одной стороны двумя соответствующими траекториями второго семейства, находящимися по разные стороны линии  $[L]$ , и двумя геодезическими, проходящими через концы  $[L]$ , получим щель длины  $l$  и постоянной ширины  $d$ , если последнюю измерять вдоль геодезических линий (рис. 1).

Приняв семейство геодезических линий за координатные линии  $v = \text{const}$ , а ортогональные к ним траектории за кривые  $u = \text{const}$ , получим систему координат на поверхности щели  $s$ , которой мы будем в дальнейшем пользоваться. При соответствующем выборе  $u$  элемент дуги на поверхности  $s$  может быть представлен выражением

$$dl^2 = du^2 + \sigma^2 dv^2, \quad (1)$$

где коэффициент Ляме при  $du$  равен единице.

Границы щели при этом определяются равенствами

$$u=0, \quad u=d, \quad v=0, \quad v=v_1, \quad (2)$$

а линия  $[L]$  уравнением  $u = d/2$ .

Щель, следовательно, полностью определяется заданием линии  $[L]$ , вдоль которой она прорезается, и числом  $d$ , равным ее ширине.

Из всех возможных щелей в настоящей работе будут рассматриваться узкие щели, удовлетворяющие следующим требованиям: 1) ширина щели  $d$  намного меньше ее длины  $l$  и длины волны  $\lambda$  ( $d \ll l, \lambda$ ); 2) радиусы кривизны  $\rho$  линии  $[L]$  намного больше  $d$  ( $\rho \gg d$ ).

Учитывая только что сказанное, мы в последующих расчетах всюду будем отбрасывать члены порядка  $\frac{d}{\lambda}$ ,  $\frac{d}{l}$  и  $\frac{d}{\rho}$ .

При расчете полей будем также пренебрегать потерями в металле и пользоваться гауссовой системой единиц. Зависимость от времени взята в форме  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  — угловая частота.

### § 1. Основное интегро-дифференциальное уравнение для распределения напряжения вдоль щели

Вырежем на поверхности полого металлического тела, вдоль некоторой линии  $[L]$  узкую щель ширины  $d$ , длины  $l$  (см. „Введение“) и обозначим внутреннюю и наружную стороны оставшейся металлической поверхности буквами  $s_i$  и  $s_e$ . Полученная таким образом щелевая антенна (рис. 2) возбуждается в случае передачи источниками, находящимися внутри антенны, а при приеме — источниками, находящимися снаружи.

Для того чтобы охватить оба эти случая, будем считать, что поле возбуждается линейными проводниками  $l_i$  и  $l_e$ , находящимися соответственно внутри и снаружи антенны, с заданными вдоль них токами  $I$ .

Форма и расположение проводников должны быть таковы, чтобы токи, возбуждаемые ими на внутренней и внешней поверхностях антенны, в отсутствие щели, пересекали линию  $[L]$ , вдоль которой прорезается щель под углами, близкими к  $90^\circ$ .

Если обозначить буквами  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$  и  $\vec{\mathcal{E}}^0$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^0$  поля, возбуждаемые проводниками  $l_i$  и  $l_e$  внутри и снаружи антенны, когда щель отсутствует, то предыдущее требование можно записать так:

$$|H_v^0| > |H_u^0| \quad \text{и} \quad |\mathcal{E}_v^0| > |\mathcal{E}_u^0| \quad (3)$$

на поверхности  $s$ , где будет прорезана щель.

Здесь  $H_v^0, H_u^0, \dots$  составляющие векторов в криволинейных координатах  $u, v$ . При этих условиях будет иметь место интенсивное излучение или прием через щель. Очевидно, только те системы, для которых выполнены неравенства (3), представляют интерес для антенной техники.

Если до прорезания щели полое металлическое тело представляло собой эндовибратор (а не, например, волновод) с собственными частотами  $\omega_n$  ( $n=1,2,\dots$ ), то мы будем считать, что вынужденная частота  $\omega \neq \omega_n$ . При этом условии поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , а также поля, вводимые ниже, будут ограничены, несмотря на пренебрежение потерями в металле.

Обозначим искомое поле (внутри и снаружи) рассматриваемой щелевой антенны буквами  $\vec{E}, \vec{H}$  и введем, как и в работе [1], два вспомогательных регулярных (в областях, где они определены) поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$ , заданных соответственно внутри и снаружи антенны при помощи граничных условий

$$\left[ \vec{n} \left[ \vec{E}^1 \vec{n} \right] \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_i \\ \vec{e}^1 & \text{на } s, \end{cases} \quad \left[ \vec{n} \left[ \vec{\mathcal{E}}^1 \vec{n} \right] \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_e \\ \vec{e}^1 & \text{на } s, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор наружной нормали к поверхностям, а  $\vec{e}^1$  — некоторый вектор, касательный к поверхности щели  $s$ , который мы определим ниже. Методом, аналогичным данному нами в [1], легко получить, учитывая наличие двух проводников  $l_i$  и  $l_e$ , равенство

$$\int_{(s)} \left[ \vec{E} \left( \vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1 \right) \right] \vec{d}s = \frac{4\pi}{c} \left( \int_{(l_i)} I \vec{E}^1 \vec{d}l_i + \int_{(l_e)} I \vec{\mathcal{E}}^1 \vec{d}l_e \right). \quad (5)$$

Действительно, применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  в пространстве, ограниченном снаружи поверхностью  $s+s_i$ , найдем, используя теорему Гаусса,

$$\int_{(s+s_i)} \left\{ \left[ \vec{E} \vec{H}^1 \right] - \left[ \vec{E}^1 \vec{H} \right] \right\} \vec{d}s = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{E}^1 \vec{d}l_i.$$

Соответственно, для полей  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$ , применяя лемму Лоренца к внешнему пространству, ограниченному изнутри поверхностью  $s+s_e$ , получим

$$\int_{(s+s_e)} \left\{ \left[ \vec{E} \vec{\mathcal{H}}^1 \right] - \left[ \vec{\mathcal{E}}^1 \vec{H} \right] \right\} \vec{d}s = -\frac{4\pi}{c} \int_{(l_e)} I \vec{\mathcal{E}}^1 \vec{d}l_e.$$

Вычитая последнее уравнение из предыдущего, учитывая при этом граничные условия (4), немедленно приходим к равенству (5).

Правой части формулы (5) может быть придано более удобное выражение. Для получения его применим лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , определенным выше. Прилагая лемму Лоренца к внутрен-

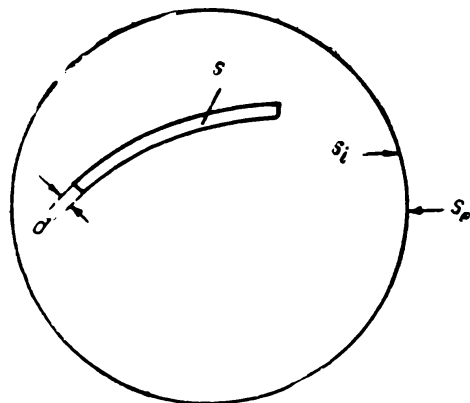


Рис. 2.

нему пространству щелевой антенны (рис. 2) и используя теорему Гаусса, получим

$$\int_{(s+s_i)} \left\{ \left[ \vec{E}^0 \vec{H}^1 \right] - \left[ \vec{E}^1 \vec{H}^0 \right] \right\} \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{E}^1 \vec{dl}_i,$$

или, учитывая граничные условия для  $\vec{E}^1$  и  $\vec{E}^0$ ,

$$- \int_{(s)} \left[ \vec{e}^1 \vec{H}^0 \right] \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{E}^1 \vec{dl}_i. \quad (6)$$

Аналогично этому, применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{\mathcal{E}}^1$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^1$  и  $\vec{\mathcal{E}}^0$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^0$  во внешнем пространстве, найдем

$$\int_{(s)} \left[ \vec{e}^1 \vec{\mathcal{H}}^0 \right] \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_e)} I \vec{\mathcal{E}}^1 \vec{dl}_e. \quad (6')$$

Полученные формулы (6) и (6') позволяют придать уравнению (5) следующий вид

$$\int_{(s)} \left[ \vec{E} \left( \vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1 \right) \right] \vec{ds} = \int_{(s)} \left[ \vec{e}^1 \left( \vec{\mathcal{H}}^0 - \vec{H}^0 \right) \right] \vec{ds}. \quad (7)$$

Используя введенные выше [см. формулу (1)] на поверхности щели  $s$  координаты  $u$ ,  $v$ , зададим вектор  $\vec{e}^1$ , определяющий вспомогательные поля [формулы (4)] при помощи формулы<sup>2</sup>

$$\vec{e}^1(q) = \delta(R) \vec{t}_u. \quad (8)$$

Здесь  $\vec{t}_u$  — единичный вектор, касательный к координатной линии  $u$  в точке  $q(u, v)$  поверхности  $s$ ,  $R$  — расстояние между точкой  $q(u, v)$  и произвольной точкой  $q_0(u_0, v_0)$  поверхности  $s$  и, наконец,  $\delta(R)$  — импульсная функция Дирака, удовлетворяющая условиям:  $\delta(R) = 0$  при  $R \neq 0$ , и  $\int f(q) \delta(R) ds = f(q_0)$ .

Подставив выражение для  $\vec{e}^1$  в правую часть равенства (7) и используя свойства  $\delta$ -функции, получим

$$\int_{(s)} \left[ \vec{E} \left( \vec{H}^1 - \vec{\mathcal{H}}^1 \right) \right] \vec{ds} = \vec{\mathcal{H}}^0(q_0) - H_v^0(q_0), \quad (9)$$

или в координатной записи

$$\int_{(s)} \left\{ E_u (H_v^1 - \mathcal{H}_v^1) - E_v (H_u^1 - \mathcal{H}_u^1) \right\} ds = \mathcal{H}_v^0(q_0) - H_v^0(q_0). \quad (9')$$

<sup>2</sup> Необходимо, однако, помнить, что при оперировании с  $\delta$ -функцией, ее следует рассматривать как предел некоторой непрерывной функции, обладающей достаточным количеством производных, т. е., строго говоря, следовало бы положить  $\vec{e}^1 = \delta_\epsilon(R)$ , где  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(R) = \delta(R)$ , и переход к пределу производить только в окончательных выражениях  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Напоминаем, что интегрирование в этих формулах производится по координатам точки  $q(u, v)$ . Для узких щелей, когда  $d \ll l, \lambda$ , уравнение (9') значительно упрощается. Действительно, так как  $E_v = 0$  на  $s$  при  $u = 0$  и  $u = d$  (т. е. на краях щели), то вследствие узости щели ( $d \ll l, \lambda$ ) и непрерывности  $E_v$  можно утверждать, что на щели  $|E_v| \ll |E_u|$  всюду, за исключением незначительных участков у концов,  $v = 0$  и  $v = v_1$ , где  $E_u = 0$  (рис. 3). Длина этих участков порядка  $d$ , и их влиянием на величину интеграла в формуле (9') можно пренебречь (как  $\frac{d}{l}$  по сравнению с 1).

Что касается величин  $|H_v^1 - \xi_v^1|$  и  $|H_u^1 - \xi_u^1|$ , то при выбранном нами  $\vec{e}^1$  [формула (8)] первая из них превосходит на  $s$  вторую. Таким образом, второй член, стоящий под интегралом в равенстве (9'), может быть отброшен, и оно сведется к уравнению, определяющему  $E_u$  на  $s$  (т. е. на щели)

$$\int_{(s)} E_u (H_v^1 - \xi_v^1) ds = \xi_v^0(q_0) - H_v^0(q_0), \quad (10)$$

$E_v$  в этом приближении равно нулю на щели.

Аналогичная картина имеет место в случае тонких проводов, где обычно пренебрегают поперечными составляющими тока по сравнению с продольными, несмотря на то, что на концах последние обращаются в нуль. Роль продольной составляющей плотности тока в нашем случае играет  $E_u$ .

Переходя к анализу основного интегрального уравнения (10), выделим прежде всего главную часть ядра  $(H_v^1 - \xi_v^1)$ , обращаящуюся при  $q = q_0$  в бесконечность.

Формулы (20) и (20') нашей работы [1] позволяют написать<sup>3</sup>

$$\vec{H}^1(q) = \frac{1}{2\pi k_2} (\text{grad } dw + k^2) \int_{(s)} [\vec{e}^1 \vec{n}]' \frac{e^{-ikR'}}{R'} ds' + \vec{O}(1). \quad (11)$$

Здесь  $R'$  — расстояние между точкой наблюдения  $q$  и точкой  $q'(u', v')$ , по которой производится интегрирование,

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{и} \quad k_2 = -i\mu \frac{\omega}{c}. \quad (12)$$

Штрих у векторного произведения указывает на то, что оно относится к точке  $q'$ .

Главная часть вектора  $\vec{\xi}^1$  отличается от вышенанписанной только знаком, вследствие изменения направления положительной нормали на обратное.

Таким образом, для ядра может быть написано выражение

$$H_v^1 - \xi_v^1 = \frac{\vec{i}_v}{\pi k_2} (\text{grad div} + k^2) \int_{(s)} [\vec{e}^1 \vec{n}]' \frac{e^{-ikR'}}{R'} ds' + O(1),$$

<sup>3</sup> Отличие заключается только в том, что однородная среда, заполняющая пространство снаружи и внутри антенны, предполагается здесь имеющей  $\epsilon$  и  $\mu$  отличными от единицы.

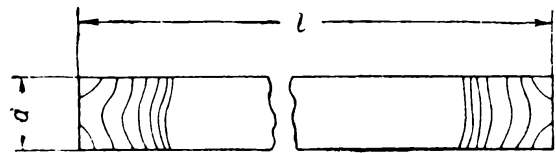


Рис. 3.

или, учитывая формулу (8) и свойства  $\delta$ -функции,

$$H_v^1 - \mathfrak{H}_v^1 = - \frac{\vec{t}_v}{\pi k_2} (\text{grad div} + k^2) \vec{t}_{v_0} \frac{e^{-ikR}}{R} + O(1), \quad (13)$$

где  $\vec{t}_v$  и  $\vec{t}_{v_0}$  — единичные векторы, касательные к линии  $v$  соответственно в точках  $q(u, v)$  и  $q_0(u_0, v_0)$  поверхности  $s$ .

Несколько преобразуем полученное выражение. Для этого напомним очевидные равенства

$$\text{div} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_{v_0} \right) = \vec{t}_{v_0} \text{grad} \frac{e^{-ikR}}{R} = - \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \frac{e^{-ikR}}{R}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{t}_v \text{grad div} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_{v_0} \right) &= - \frac{1}{\sigma \sigma_0} \frac{\partial^2}{\partial v_0 \partial v} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \left( \vec{t}_v \text{grad}_0 \frac{e^{-ikR}}{R} \right) = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \text{div}_0 \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_v \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  и  $\sigma_0$  — коэффициенты Ляме, относящиеся соответственно к точкам  $q$  и  $q_0$ , а индекс нуль у  $\text{grad}_0$  и  $\text{div}_0$  показывает, что эти операции производятся по координатам точки  $q_0$ . Так как

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_v = \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_{v_0} + \vec{O}(1),$$

где  $\vec{O}(1)$  остается ограниченным, когда  $R \rightarrow 0$ , то

$$\begin{aligned} \vec{t}_v \text{grad div} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_{v_0} \right) &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \text{div}_0 \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{t}_{v_0} \right) + O(1) = \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) + O(1). \end{aligned}$$

При этом было учтено, что коэффициент Ляме при  $du$  равен единице. Подставляя полученное выражение в формулу (13) и учитывая соотношение  $\vec{t}_v \vec{t}_{v_0} = 1 + O(R^2)$ , найдем следующее выражение для ядра с выделенным главным членом

$$H_v^1 - \mathfrak{H}_v^1 = - \frac{1}{\pi k_2} L_0 \frac{e^{-ikR}}{R} + F, \quad (14)$$

где  $F$  — регулярная на  $s$  функция, которую можно считать в пределах щели зависящей только от  $v$  и  $v_0$ , т. е.  $F = F(v, v_0)$ , а  $L_0$  — оператор, равный

$$L_0 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0} + k^2. \quad (15)$$



Внося найденное значение для ядра в основное уравнение (10), придадим ему вид<sup>4</sup>

$$-\frac{1}{\pi k_2} \int_{(s)} E_u L_0 \frac{e^{-ikR}}{R} ds + \int_{(s)} E_u F ds = \Phi_v^0(q_0) - H_r^0(q_0), \quad (16)$$

или, меняя местами порядок операций интегрирования и дифференцирования (справедливость чего может быть легко доказана), получаем

$$\frac{1}{\pi k_2} L_0 \int_{(s)} E_u \frac{e^{-ikR}}{R} ds = \int_{(s)} E_u F ds + H_r^0(q_0) - \Phi_v^0(q_0). \quad (16')$$

Для решения полученного уравнения мы используем метод, который во многом аналогичен развитому Леонтовичем и Левиным [3], но учитывает, однако, при этом специфические особенности настоящей задачи. Введем прежде всего понятие напряжения  $V$  между краями щели при помощи равенства

$$V = \int_0^d E_u(u, v) du \quad (17)$$

и рассмотрим поверхностный интеграл

$$\int_{(s)} E_u(q) \frac{e^{-ikR}}{R} ds = \int_0^d du \int_0^{v_1} E_u(u, v) \frac{e^{-ikR}}{R} \sigma dv.$$

Выделяя логарифмический член во внутреннем интеграле правой части, не представляет труда получить, с точностью до членов порядка  $d/l$ , следующее выражение

$$\int_{(s)} E_u \frac{e^{-ikR}}{R} ds = -2 \int_0^d E_u(u, v_0) \ln(kR_1) du + K[V, v_0], \quad (18)$$

где  $R_1$  — расстояние между точками  $u, v_0$  и  $u_0, v_0$  поверхности  $s$ , а  $K[V, v_0]$  — интегральный оператор, линейный относительно  $V$  и равный<sup>5</sup>

$$K[V, v_0] = \int_0^{v_1} V(v) \frac{e^{-ikR^*}}{R^*} \left(1 - \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\partial R^*}{\partial v} \right| \right) \sigma dv - \\ - \left( \int_{v_0}^{v_1} + \int_{v_0}^0 \right) \ln(kR^*) e^{-ikR^*} \left\{ V'(v) - ikV(v) \frac{\partial R^*}{\partial v} \right\} dv. \quad (18')$$

<sup>4</sup> Строго говоря, следовало бы подставить в (10) значение ядра, в котором  $e^1 = \delta_v$ , а затем перейти к пределу, когда  $\lim_{v \rightarrow 0} \delta_v = \delta$  (см. сноску 2). Мы же совершили переход к пределу в выражении для ядра и, таким образом, поменяли местами порядок операций перехода к пределу и интегрирования в равенстве (16).

Законность этого легко доказывается при условии, что первый интеграл в (16) понимается в смысле „главного значения“.

<sup>5</sup> При получении формулы (18') мы предполагали, что  $R^*(v_0, v)$  — функция, монотонно изменяющаяся вместе с  $v$  на интервалах  $(v_0 - v_1)$  и  $(0 - v_0)$ , в противном случае необходимо добавить еще один член. Подробное рассмотрение преобразований, аналогичных (18), можно найти в работах [3].

Здесь интегрирование происходит вдоль линии  $[l]$  (т. е.  $u = d/2$ ),  $R^*$  — расстояние между точками  $(\frac{d}{2}, v_0)$  и  $(\frac{d}{2}, v)$  линии  $[l]$ .

С той же точностью можно написать, что

$$\int_{(s)} E_u F ds = \int_0^{v_1} V(v) F(v, v_0) \sigma dv, \quad (19)$$

ибо, как уже говорилось выше,  $F$  можно считать независимой от  $u$  на щели. Используя сокращающее запись обозначение

$$G[V, v_0] \equiv L_0 K[V, v_0] - \pi k_2 \int_0^{v_1} V(v) F(v, v_0) \sigma dv \quad (20)$$

и подставляя соотношения (18) и (19) в уравнение (16'), немедленно найдем

$$2L_0 \int_0^d E_u(u, v_0) \ln(kR_1) du = G[V, v_0] - \pi k_2 \{H_v^0(q_0) - \Phi_v^0(q_0)\}.$$

Для того чтобы получить отсюда интегро-дифференциальное уравнение для напряжения  $V$ , умножим написанное равенство на  $f(u_0) du_0$  и проинтегрируем по интервалу  $0 \leq u_0 \leq d$ .

$$\int_0^d f(u_0) L_0 \int_0^d 2E_u(u, v_0) \ln kR_1 du du_0 = G[V, v_0] \int_0^d f(u_0) du_0 - \pi k_2 \int_0^d f(u_0) \{H_v^0(q_0) - \Phi_v^0(q_0)\} du_0. \quad (21)$$

Введенную только что функцию  $f(u_0)$  мы определим из условий

$$\left. \begin{aligned} 2 \int_0^d f(u_0) \ln(kR_1) du_0 &= 1/\alpha \equiv \text{const при } 0 \leq u \leq d \\ \int_0^d f(u_0) du_0 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

которые определяют как функцию  $f$ , так и параметр  $\alpha$ . Решение этой системы уравнений с нужной точностью дано в нашей работе [1] [формулы (32) и (31'')] и в обозначениях настоящего параграфа имеет вид

$$f(u_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{u_0(d-u_0)}}, \quad \alpha = \frac{1}{2 \ln \frac{kd}{4}}. \quad (22')$$

Так как  $H_v^0(q_0)$  и  $\Phi_v^0(q_0)$  — составляющие поля регулярного на  $s$ , то можно считать их на  $s$  зависящими только от  $v_0$  и вынести за знак интеграла в равенстве (21). Ошибка при этом, вследствие узости щели  $s$ , будет, очевидно, порядка  $d/\lambda$ .

Это замечание и второе из равенств (22) позволяют переписать уравнение (21) в следующем виде

$$\int_0^d f(u_0) L_0 \int_0^d 2E_u(u, v_0) \ln kR_1 du du_0 = G[V, v_0] - \pi k_2 \{H_v^0(v_0) - \Phi_v^0(v_0)\}. \quad (21')$$

Чтобы поменять здесь местами порядок операций  $L_0$  и интегрирования по  $u_0$ , необходимо показать, что величина  $1/\sigma_0$ , фигурирующая в выражении для  $L_0$  (15), может считаться на  $s$  независимой от  $u_0$ .

Легко получить следующую оценку для относительного изменения  $1/\sigma_0$  в интервале  $0 \leq u_0 \leq d$  при  $v_0 = \text{const}$

$$\left| \sigma \frac{\partial(1/\sigma_0)}{\partial u_0} d \right| = \left| \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial u_0} \right| d = \left| \frac{d}{\rho_g} \right| \leq \left| \frac{d}{\rho} \right|, \quad (23)$$

где  $\rho_g$  и  $\rho$  — радиусы геодезической и обычной кривизны координатной линии  $v$  в точке  $u_0, v_0$ .

Таким образом, с точностью до членов порядка  $\left| \frac{d}{\rho} \right|$  величину  $1/\sigma_0$  можно на  $s$  считать независимой от  $u_0$ . Аналогичное предложение может быть доказано также для  $\frac{\partial}{\partial v_0} \left( \frac{1}{\sigma_0} \right)$ .

Учитывая это, вынесем в уравнении (21') оператор  $L_0$  за знак интеграла и поменяем местами порядок интегрирования по  $u$  и  $u_0$  (что вполне законно),

$$L_0 \int_0^d E_u(u, v_0) \int_0^d 2f(u_0) \ln kR_1 du_0 du = G[V, v_0] - \pi k_2 \{H_v^0(v_0) - \Phi_v^0(v_0)\}.$$

Внутренний интеграл равен  $1/\alpha$  [первая из формул (22)], поэтому используя выражение (17) для напряжения  $V$ , получим искомое интегро-дифференциальное уравнение, определяющее распределение напряжения вдоль щели

$$L_0 V(v_0) = \alpha G[V, v_0] - \pi k_2 \alpha \{H_v^0(v_0) - \Phi_v^0(v_0)\}. \quad (24)$$

В дальнейшем удобнее характеризовать сечение на щели не координатой  $v_0$ , а длиной дуги  $\tau$ , отсчитываемой, например, вдоль линии  $[L]$  от одного из ее концов

$$\tau = \int_0^{v_0} \sigma dv, \quad d\tau = \sigma_0 dv_0. \quad (25)$$

Основное уравнение (24) при этом принимает [учитывая (15)] вид

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + k^2 V = \alpha G[V, \tau] - \pi k_2 \alpha \{H_\tau^0(\tau) - \Phi_\tau^0(\tau)\}. \quad (26)$$

К нему необходимо прибавить еще граничные условия на концах щели<sup>6</sup>

$$V = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l. \quad (26')$$

<sup>6</sup> Если щель замкнутая, то условия (26') должны быть заменены требованием периодичности.

Для передающих щелевых антенн, когда снаружи антенны источников нет,  $\xi^0 = 0$ , и уравнение (26) несколько упрощается

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + k^2 V = \alpha G[V, \tau] - \pi k_2 \alpha H_z^0(\tau), \quad (27)$$

$$V = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l.$$

Напомним, что  $G$  — линейный относительно  $V$  оператор (20), зависящий от формы щели и металлического тела антенны (но не от источников),  $\vec{H}^0(\xi^0)$  — магнитный вектор поля, создаваемого внутри (снаружи) антенны теми же источниками при отсутствии щели, а  $H_z^0(\tau)$  ( $\mathcal{H}_\tau^0(\tau)$ ) — составляющая этого вектора, параллельная линии  $[l]$  в точке  $\tau$  (на  $s$ ).

Следует также подчеркнуть, что основные уравнения (26) и (27) выведены при условии выполнения неравенств

$$\frac{d}{l} \ll 1, \quad \frac{d}{\lambda} \ll 1, \quad \frac{d}{\rho} \ll 1. \quad (28)$$

Уравнение (27) формально совпадает (по внешнему виду) с соответствующим уравнением для распределения тока [3] в эквивалентной металлической антенне, совпадающей по форме со щелью.

Эта аналогия позволяет говорить об эквивалентности, в вышеуказанном смысле, любой щелевой антенны и ей соответствующей металлической.

Для случая щелей, прорезанных в бесконечно тонком, бесконечно плоском экране, на такую эквивалентность впервые указали Пистолькорс [4] и Леонтович [5], которые пришли к этому совершенно другим путем, исходя из симметрии граничных условий для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в случае плоского экрана со щелью и эквивалентной металлической антенны.

В разобранном ими случае эта эквивалентность была полной, чему соответствует, с нашей точки зрения, тождественность операторов  $G$  для обеих задач. В нашем же общем случае<sup>7</sup> можно лишь говорить о формальном внешнем совпадении уравнения для распределения  $V$  вдоль щели и уравнения для тока вдоль эквивалентной металлической антенны, так как операторы  $G$  в общем случае не совпадают. К этому вопросу мы еще вернемся в одном из следующих параграфов.

Получение основных уравнений (26), (27) позволяет считать теорию любых щелевых антенн принципиально доведенной до уровня теории проволочных антенн.

## § 2. Методы решения основного интегро-дифференциального уравнения

В основные уравнения (26), (27) входит некоторый параметр  $\alpha$ , который является естественным параметром малости нашей задачи. Действительно, из формул (22') следует, что  $\alpha \ll 1$ , если отношение  $d/\lambda$  достаточно мало, так как

$$\frac{kd}{4} \equiv \frac{\pi}{2} \frac{d}{\lambda}.$$

<sup>7</sup> Методы А. Я. Пистолькорса и М. А. Леонтовича для общего случая щелей в неплоских экранах принципиально неприменимы, так как при этом нарушается симметрия в граничных условиях для  $E$  и  $H$ .

Этот параметр эквивалентен декременту затухания теории проволочных антенн, и излагаемая ниже методика во многом аналогична используемой в теории тонких вибраторов. Так как уравнения (26) и (27) отличаются только видом известной функции, то мы ниже разовьем все методы решения на примере уравнения (27).

Полученные результаты легко перенесутся на случай уравнения (26), если в них заменить  $H_\tau^0$  на  $\{H_\tau^0 - \mathcal{N}_\tau^0\}$ .

Наиболее простым и естественным методом является, очевидно, разложение решения в ряд по малому параметру  $\alpha$

$$V = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \dots \quad (29)$$

Подставляя этот ряд в (27) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$ , получим следующую систему уравнений для определения  $V_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_0}{d\tau^2} + k^2 V_0 &= 0, \\ \frac{d^2 V_1}{d\tau^2} + k^2 V_1 &= G[V_0, \tau] - \pi k_2 H_\tau^0(\tau), \\ \frac{d^2 V_2}{d\tau^2} + k^2 V_2 &= G[V_1, \tau], \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (29')$$

с граничными условиями

$$V_n = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (29'')$$

для „настроенных“ щелей, когда длина щели  $l$  кратна  $\frac{\lambda}{2}$

$$V_0 = A \sin k\tau. \quad (30)$$

Амплитуда  $A$  определяется, как обычно, из условия ортогональности полученного решения к правой части уравнения для  $V_1$ , т. е.

$$A = \pi k_2 \frac{\int_0^l H_\tau^0(\tau) \sin k\tau \, d\tau}{\int_0^l G[\sin k\tau, \tau] \sin k\tau \, d\tau}. \quad (30')$$

При длине щели  $l$ , не кратной  $\lambda/2$  („расстроенная“ щель),  $V$  тождественно равно нулю, и необходимо учитывать следующие члены ряда (29). Уравнение для  $V_1$  при этом принимает вид

$$\frac{d^2 V_1}{d\tau^2} + k^2 V_1 = -\pi k_2 H_\tau^0(\tau). \quad (31)$$

Решая его при граничных условиях (29''), найдем

$$V_1 = B \sin k\tau - \frac{k_2}{k} \int_0^\tau \Phi(x) \sin k(\tau - x) dx, \quad (31')$$

где

$$B = \frac{k_2}{k \sin kl} \int_0^l \Phi(x) \sin k(l - x) dx, \quad \Phi(\tau) = \pi H_\tau^0(\tau).$$

Для практических целей в большинстве случаев достаточно ограничиться первым отличным от нуля членом ряда (29).<sup>8</sup> При этом распределение напряжения вдоль щели будет определяться выражением типа (30) или (31').

Существенным недостатком этого способа решения является, с точки зрения инженерной практики, то обстоятельство, что даже в первом приближении, в зависимости от того, „настроена“ ли, „сильно расстроена“ или „слабо расстроена“ щель, приходится пользоваться различными уравнениями и различными формами решения.

Желательно поэтому получить единое решение, годное при любых соотношениях  $l$  и  $\lambda$ .

Как уже отмечалось выше, уравнение (27) совпадает по внешнему виду с аналогичным уравнением для распределения тока в тонких проводах, последнее же является обобщением известного „телеграфного“ уравнения для тока, которым радиотехника так успешно пользуется более полувека.

Учитывая сказанное, постараемся найти уравнение распределения напряжения вдоль щели, аналогичное „телеграфному“. При этом мы идем по пути прямо противоположному тому, который использовался в теории проволочных антенн.

Ищем решение уравнения (27) в виде суммы

$$V = V^1 + U, \quad (32)$$

где  $V^1$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 V^1}{d\tau^2} + p^2 V^1 = -\pi k_2 \alpha H_\tau^0(\tau); \quad p^2 = k^2 - i\alpha\beta, \quad (33)$$

с граничными условиями

$$V^1 = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l. \quad (33')$$

Входящий сюда параметр  $\beta$  мы определим ниже.

Вычитая из уравнения (27) равенство (33), получим

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + k^2 U = \alpha \{G[V, \tau] - i\beta V^1\} \quad (34)$$

с

$$U = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l.$$

<sup>8</sup> За исключением случая, когда  $l$  близко к  $\frac{n\lambda}{2}$  („слабо расстроенная“ щель). В этом случае следует разлагать  $V$  в ряд по степеням расстройки.

Интегрируя эти уравнения относительно  $U$ , полагая правую часть заданной, найдем следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$U = -\frac{\alpha}{k} \frac{\sin k\tau}{\sin kl} \int_0^l \{G[V, x] - i\beta V^1\} \sin k(l-x) dx + \\ + \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{G[V, x] - i\beta V^1\} \sin k(\tau-x) dx. \quad (34')$$

Для решения его методом последовательных приближений положим сначала в правой части  $U=0$  и, следовательно,  $V=V^1$ . Чтобы полученное при этом решение имело смысл для любых значений  $kl$  (включая  $kl=n\pi$ ), достаточно выполнения равенства<sup>9</sup>

$$\int_0^l \{G[V^1, x] - i\beta V^1\} \sin k(l-x) dx = 0, \quad (35)$$

которое и определяет в рассматриваемом приближении параметр  $\beta$

$$\beta = \frac{\int_0^l G[V^1, x] \sin k(l-x) dx}{i \int_0^l V^1 \sin k(l-x) dx}. \quad (35')$$

Таким образом, в первом приближении

$$U = \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{G[V^1, x] - i\beta V^1\} \sin k(\tau-x) dx.$$

Продолжая этот процесс далее, можно получить для  $U$  и  $\beta$  следующие приближения в виде степенных рядов по малому параметру  $\alpha$ .

Из полученных формул следует, что

$$U = V^1 O(\alpha)$$

и

$$V = V^1 [1 + O(\alpha)].$$

Для узких щелей, когда  $\alpha \ll 1$ ,  $V \approx V^1$  и искомое „телеграфное“ уравнение для  $V$  совпадает с уравнением (33), т. е.

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + p^2 V = -\pi k_2 \alpha H_\tau^0(\tau), \quad (36) \\ V = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l.$$

Это уравнение, как и соответствующее ему в теории проволочных антенн, имеет решение, годное при любых соотношениях между  $l$  и  $\lambda$ .

$$V = \frac{\alpha}{\sin pl} \psi(l) \sin p\tau - \alpha \psi(\tau). \quad (37)$$

<sup>9</sup> В противном случае первый член в (34') обратится при  $kl=n\pi$  в бесконечность.

Здесь

$$\psi(\tau) = \frac{\pi k_2}{p} \int_0^\tau H_x^0(x) \sin p(\tau - x) dx. \quad (37')$$

Легко сообразить, что фигурирующая в предыдущих формулах величина

$$p = \sqrt{k^2 - i\alpha\beta} \cong k - i\frac{\alpha\beta}{2k} \quad (38)$$

(или, точнее,  $ip$ ) играет роль постоянной распространения.

Вводя обозначение

$$\beta = \beta' + i\beta'', \quad (39)$$

где  $\beta'$  и  $\beta''$  — вещественны, придадим величине  $p$  вид

$$p = \left(k + \alpha\frac{\beta''}{2k}\right) - i\alpha\frac{\beta'}{2k}. \quad (38')$$

Отсюда следует, что величина  $\alpha\beta'/2k$  представляет собой „затухание щели“, а  $\alpha\beta''/2k$  — поправку на укорочение волны в щели.

Действительно, укорочение волны, очевидно, равно

$$\Delta\lambda = \frac{\pi\beta''}{k^2} \alpha. \quad (40)$$

Таким образом, излагаемый метод уже в первом приближении определяет не только затухание, но и поправку на укорочение волны.

Для узких щелей величина  $\left(\frac{\alpha\beta}{2k}\right)$  весьма мала, поэтому в формулах (37), (37') можно, большей частью, полагать  $p = k$ , за исключением случая настроенных  $\left(l = \frac{\lambda - \Delta\lambda}{2}\right)$  или слабо расстроенных щелей, когда параметр  $p$  должен быть сохранен в  $\sin pl$ , стоящем в знаменателе (37). Для настроенной щели  $\left(l = \frac{\lambda - \Delta\lambda}{2}\right)$  выражение (37), практически, превращается в синусоиду

$$V = \frac{2k}{i\beta' l} \psi(l) \sin k\tau + O(\alpha). \quad (41)$$

Вычисление входящего сюда вещественного параметра  $\beta'$ , в большинстве случаев, можно произвести из соображений энергетического баланса, не прибегая к расчету по формулам (39), (35').

Уравнение (36) и его решение (37) показывают, что в рассматриваемом приближении распределение напряжения вдоль щели совпадает с распределением тока вдоль эквивалентной металлической приемной антенны,<sup>10</sup> если отождествить  $H_\tau^0$  с составляющей электрического вектора невозмущенной падающей волны, возбуждающей эквивалентную антенну. Величина  $H_\tau^0$ , входящая в наши формулы, является составляющей магнитного вектора поля эндовибратора или волновода, не возмущенных щелью, и для большинства практических случаев известна из соответствующей литературы. Что касается оператора  $G[V, \tau]$ , нахождение которого связано

<sup>10</sup> Строго говоря, для этого также необходимо равенство „затуханий“ (т. е.  $\text{Im } p$ ) и укорочения волны для обеих антенн, что, вообще говоря, не имеет места [см. (35') и замечания, сделанные в конце § 1].



с расчетом вспомогательных полей [см. формулы (14), (18') и (20)], то знание его необходимо только для расчета коэффициента  $\beta$  (35), характеризующего „затухание щели“ и укорочение волны.

Таким образом, построенная теория в смысле простоты ничем не уступает теории обычных проволочных антенн. Уравнение (36) получено при условии выполнения неравенства  $\alpha \ll 1$  (узкие щели), но можно ожидать, что оно останется применимым для инженерных расчетов и в случае, когда неравенство  $\alpha \ll 1$  не выполняется,<sup>11</sup> как это имеет место в теории проволочных антенн.

Если среда, заполняющая внутренность эндовибратора или волновода, имеет  $\epsilon$ , отличное от наружной среды, то необходимо во всех формулах заменить  $k$  на  $k_{\text{вв.}}$ .

$$k_{\text{вв.}}^2 = \frac{k^2 + k'^2}{2},$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  и  $k' = 2\pi/\lambda'$ , соответственно, волновые числа для наружной и внутренней сред.

Отсюда, например, следует, что, заполняя эндовибратор (или волновод) диэлектриком, можно значительно сократить длину „полуволновой“ щели, прорезанной в нем.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность академику М. А. Леонтовичу за ценную дискуссию и интерес к настоящей работе.

#### Литература

- [1] Я. Н. Фельд. Радиотехника, 6, 1946.— [2] Бляшке. Дифференциальная геометрия. М—Л., 1935.— [3] М. А. Леонтович и М. Л. Левин. ЖТФ, XIV, 481, 1944.— [4] Я. Н. Фельд. ДАН СССР, 53, 7, 619, 1946.— [5] Я. Н. Фельд. ДАН СССР, 55, 5, 411, 1947.

Поступило в Редакцию  
25 мая 1947

<sup>11</sup> А выполнены, например, только условия (28).

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ, ЭКЗО- И ЭНДОВИБРАТОРОВ<sup>1</sup>

Я. Н. Фельд

Излагается новый метод решения задач о возбуждении замкнутых металлических поверхностей, используемый для расчета возбуждения волноводов, эндовибраторов и экзовибраторов (поверхностных антенн) при любом распределении источников.

### § 1. Изложение метода. Возбуждение эндовибраторов

Задачи, связанные с возбуждением волноводов, эндовибраторов и экзовибраторов (поверхностных излучателей), сводятся в общем случае к расчету электромагнитных полей внутри или вне металлических поверхностей, при заданных источниках (сторонних токах), возбуждающих систему.

Для эффективного построения этих полей ниже развивается довольно общий метод, применимый для большого числа практически важных случаев.

Сущность предлагаемого метода мы разберем на примере эндовибратора, возбуждаемого распределенными внутри него сторонними токами  $\vec{j}^{ст.}$ . Внутренний объем и поверхность эндовибратора мы обозначим буквами  $v_i$  и  $s_i$ , а наружную (по отношению к  $v_i$ ) нормаль к  $s_i$  буквой  $\vec{n}$  (рис. 1).

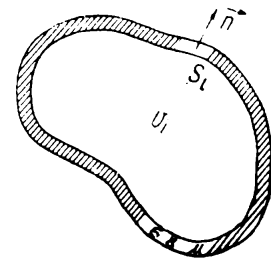


Рис. 1.

Для двух произвольных полей  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ , возбуждаемых соответственно сторонними токами  $\vec{j}^{ст.}$  и  $\vec{j}_1^{ст.}$ , справедлива лемма Лоренца

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{\mathcal{H}}] - \operatorname{div} [\vec{\mathcal{E}} \vec{H}] = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}^{ст.} \vec{\mathcal{E}} - \vec{j}_1^{ст.} \vec{E}).$$

Будем под  $\vec{E}, \vec{H}$  подразумевать искомое поле внутри эндовибратора, а под  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  некоторое вспомогательное поле, источники которого —  $\vec{j}_1^{ст.}$ , находятся вне  $v_i$ .<sup>2</sup> Тогда, интегрируя написанное равенство по  $v_i$  и применяя теорему Гаусса, найдем

$$\int_{(s_i)} \{ [\vec{E} \vec{\mathcal{H}}] - [\vec{\mathcal{E}} \vec{H}] \} \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(v_i)} \vec{j}^{ст.} \vec{\mathcal{E}} dv_i, \quad (1)$$

где  $\vec{ds} = ds \vec{n}$ .

<sup>1</sup> Настоящая работа является развитием метода, краткое изложение которого опубликовано нами в Докладах АН СССР [1].

<sup>2</sup> При расчете этого поля металлическая оболочка эндовибратора предполагается отсутствующей, а  $s_i$  рассматривается как некоторая геометрическая поверхность.

Введем на поверхности  $s_i$  криволинейную ортогональную систему координат  $u, v$ , ориентированную таким образом, чтобы нормаль  $\vec{n}$  составляла с направлением возрастания  $u$  и  $v$  правовинтовую систему. В координатной записи уравнение (1) принимает вид

$$\int_{(s_i)} \{ (E_u \mathfrak{H}_v - E_v \mathfrak{H}_u) - (\mathfrak{E}_u H_v - \mathfrak{E}_v H_u) \} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{(v_i)} \vec{j}^{\text{ст.}} \cdot \vec{\mathfrak{E}} dv_i. \quad (2)$$

На металлических поверхностях выполняются с большой точностью граничные условия М. А. Леонтовича

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \alpha H_v \\ E_v &= -\alpha H_u \end{aligned} \right\} \text{ на } s_i, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - i 4\pi\sigma}}, \quad (3)$$

$\epsilon, \mu, \sigma$  — электромагнитные параметры металла,  $\omega$  — угловая частота. Используя эти условия, придадим равенству (2) следующее выражение

$$\int_{(s_i)} \{ H_u (\mathfrak{E}_v + \alpha \mathfrak{H}_u) - H_v (\mathfrak{E}_u - \alpha \mathfrak{H}_v) \} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{(v_i)} \vec{j}^{\text{ст.}} \cdot \vec{\mathfrak{E}} dv_i. \quad (4)$$

Вспомогательное поле  $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$ , источники которого находятся вне  $v_i$ , мы определим внутри  $v_i$ , задав на поверхности  $s_i$  уравнения, связывающие между собой составляющие векторов  $\vec{\mathfrak{E}}$  и  $\vec{\mathfrak{H}}$ .

Введем прежде всего две полных и ортонормальных на  $s_i$ <sup>3</sup> системы функций  $f_n(u, v)$  и  $F_n(u, v)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) с весами  $p(u, v)$  и  $P(u, v)$  определим поле  $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$  при помощи условий

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_u - \alpha \mathfrak{H}_v &= p(u, v) A_n f_n^*(u, v), \\ \mathfrak{E}_v + \alpha \mathfrak{H}_u &= P(u, v) B_n F_n^*(u, v), \end{aligned} \right\} \text{ на } s_i. \quad (5)$$

Здесь  $n$  — произвольное фиксированное целое число,  $f_n^*$  и  $F_n^*$  — величины комплексно-сопряженные с  $f_n$  и  $F_n$ , а  $A_n$  и  $B_n$  — некоторые заданные числа.

Не представляет труда показать, что условия (5) однозначно определяют  $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$  внутри  $v_i$ .

Подставляя (5) в уравнение (4), получим важный для дальнейшего результат

$$\begin{aligned} A_n \int_{(s_i)} H_v f_n^*(u, v) p(u, v) ds - B_n \int_{(s_i)} H_u F_n^*(u, v) P(u, v) ds = \\ = -\frac{4\pi}{c} \int_{(v_i)} \vec{j}^{\text{ст.}} \cdot \vec{\mathfrak{E}} dv_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко видеть, что интегралы, стоящие в левой части уравнения (6), представляют собой коэффициенты Фурье в разложении  $H_v$  и  $H_u$  по функциям  $f_n$  и  $F_n$  на поверхности  $s_i$ .

<sup>3</sup> Можно было бы ввести полные и ортонормальные на части поверхности  $s_i$  системы функций  $f_n$  и  $F_n$ , равные на остальной части поверхности тождественно нулю. При этом все нижеследующее полностью сохранится с той только разницей, что ряды (12) и (17) будут справедливы только для части  $s_i$ .

Используя обычные обозначения для коэффициентов Фурье

$$(H_v f_n) = \int_{(s_i)} H_v f_n^* p ds, \quad (H_u F_n) = \int_{(s_i)} H_u F_n^* P ds, \quad (7)$$

придадим уравнению (6) следующий вид

$$A_n (H_v f_n) - B_n (H_u F_n) = b_n. \quad (8)$$

Здесь  $b_n$  обозначает

$$b_n = -\frac{4\pi}{c} \int_{(v_i)} \vec{j}^{\text{ст.}} \cdot \vec{\mathcal{E}} dv_i, \quad (8')$$

поскольку поле  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  зависит от  $n$  [условия (5)]. Для определения коэффициентов Фурье  $(H_u F_n)$ ,  $(H_v f_n)$  недостаточно одного уравнения (8), поэтому мы введем новое вспомогательное поле внутри  $v_i$  —  $\vec{\mathcal{E}}^1$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^1$  при помощи граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_n^1 - \alpha \mathcal{H}_v^1 &= p(u, v) C_n f_n^*(u, v) \\ \mathcal{E}_v^1 + \alpha \mathcal{H}_u^1 &= P(u, v) D_n F_n^*(u, v) \end{aligned} \right\} \text{ на } s_i, \quad (9)$$

где  $C_n$ ,  $D_n$  — некоторые новые заданные числа.

Заменяя в равенстве (4)  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  на  $\vec{\mathcal{E}}^1$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^1$  и используя затем условия (9), получим аналогично предыдущему

$$C_n (H_v f_n) - D_n (H_u F_n) = a_n. \quad (10)$$

Здесь

$$a_n = -\frac{4\pi}{c} \int_{(v_i)} \vec{j}^{\text{ст.}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^1 dv_i. \quad (10')$$

Уравнения (8) и (10) однозначно определяют коэффициенты Фурье  $(H_u F_n)$ ,  $(H_v f_n)$  при условии, что заданные числа  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  удовлетворяют неравенству

$$A_n D_n - C_n B_n \neq 0, \quad (11)$$

которое мы будем считать выполненным. Зная коэффициенты Фурье, легко написать выражения для  $H_u$  и  $H_v$  на  $s_i$  в виде рядов типа Фурье

$$H_u = \sum_{n=0}^{\infty} (H_u F_n) F_n(u, v), \quad H_v = \sum_{n=0}^{\infty} (H_v f_n) f_n(u, v) \text{ на } s_i. \quad (12)$$

Таким образом, касательные составляющие магнитного, а значит и электрического [формула (3)] векторов на поверхности  $s_i$  найдены, после чего поле в произвольной точке, находящейся внутри эндовибратора, может быть определено при помощи квадратур. Изложенный здесь метод сводит фактически задачу определения поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , удовлетворяющего неоднородным<sup>4</sup> уравнениям Максвелла с однородными граничными условиями (3), к нахождению вспомогательных полей, удовлетворяющих однородным<sup>5</sup> уравнениям Максвелла и неоднородным граничным

<sup>4</sup> Неоднородным из-за наличия внутри  $v_i$  источников  $\vec{j}^{\text{ст.}}$ .

<sup>5</sup> Так как внутри  $v_i$  отсутствуют источники вспомогательных полей.

условиям (5) и (9). Последняя задача во многих случаях предпочтительнее и легче, как это следует из разбираемых ниже примеров.

В практических задачах чаще всего задается не объемное распределение источников  $\vec{j}^{\text{ст.}}$ , а линейное, или точечное в виде электрических диполей с заданными моментами. В этом случае коэффициенты  $b_n$  [формула (8')] принимают вид

$$b_n = -\frac{4\pi}{c} \int_{(h)} I^{\text{ст.}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{h}, \quad (13)$$

где  $I^{\text{ст.}}$  — заданный сторонний ток, текущий вдоль линейного провода  $h$ . Интегрирование производится вдоль его оси. При наличии диполей с моментами  $\vec{p}_\nu$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) в точках  $q_\nu$ ,

$$b_n = -4\pi ik \sum_\nu \vec{p}_\nu \vec{\mathcal{E}}(q_\nu). \quad (13')$$

Аналогичные выражения имеют место для  $a_n$  (с заменой  $\vec{\mathcal{E}}$  на  $\vec{\mathcal{E}}^1$ ).

Граничные условия (5) и (9), определяющие вспомогательные поля, особенно упрощаются в том случае, когда можно пренебречь влиянием потерь в металле на структуру поля и положить  $\sigma = \infty$ , т. е.  $\alpha = 0$ . При этом граничные условия (5) и (9) перейдут в следующие

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_u &= A_n p f_n^*(u, v), \\ \mathcal{E}_v &= B_n P F_n^*(u, v), \end{aligned} \right\} \text{ на } s_i \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_u^1 &= C_n p f_n^*(u, v), \\ \mathcal{E}_v^1 &= D_n P F_n^*(u, v), \end{aligned} \right\} \text{ на } s_i. \quad (15)$$

Так как поверхностный ток  $\vec{i}$ , индуцированный полем  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  на идеально-проводящей поверхности  $s_i$ , связан с  $\vec{H}$  равенствами

$$i_u = \frac{c}{4\pi} H_v \text{ на } s_i \text{ и } i_v = -\frac{c}{4\pi} H_u \text{ на } s_i, \quad (16)$$

то ряды (12) определяют в этом случае непосредственно токи, текущие по внутренней стороне эндовибратора

$$i_u = \frac{c}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (H_v f_n) f_n(u, v), \quad i_v = -\frac{c}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (H_u F_n) F_n(u, v). \quad (17)$$

$E_u$  и  $E_v$  на  $s_i$ , очевидно, равны нулю [см. условия (3)]. Хотя ряды типа (17) сходятся только в среднем к функциям, для которых они составлены, однако в большинстве физических задач они будут сходиться также равномерно.

До сих пор мы рассматривали возбуждение объемов, ограниченных замкнутыми металлическими поверхностями конечной величины (рис. 1). В случае бесконечных ограничивающих поверхностей, как, например, в волноводах, ряды (12) и (17) перейдут, очевидно, в интегралы типа Фурье по одному переменному и в ряды Фурье по другому.

Все вышеизложенное полностью сохраняется при возбуждении бесконечного объема  $v_0$ , ограниченного изнутри замкнутой металлической поверхностью. Необходимо только потребовать, чтобы искомые и вспомогательные поля удовлетворяли на бесконечности „принципу излучения“. Если наружная (по отношению к  $v_0$ ) нормаль образует с координатными линиями  $u, v$  правовинтовую систему, то все выведенные выше формулы остаются при этом справедливыми.

Выбор  $f_n, F_n$ , а также постоянных  $A_n, B_n, C_n, D_n$ , должен производиться исключительно из соображений упрощения задачи нахождения вспомогательных полей  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$  [условия (14) и (15)]. Чем элементарнее получаются выражения для этих полей, тем соответственно проще будут выглядеть величины  $b_n$  и  $a_n$  [формулы (8') и (10')], а следовательно, и коэффициенты Фурье, определяемые из уравнений (8) и (10). Таким образом, величины  $f_n, F_n$  и  $A_n, B_n, C_n, D_n$  должны выбираться в каждом отдельном случае с учетом специфических особенностей задачи.

Детальнее этот вопрос разбирается в отдельных примерах, приводимых ниже.

Следует отметить, что метод решения граничных задач, изложенный в настоящем параграфе, легко обобщается на случай, когда взамен (3) ставятся неоднородные граничные условия

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \varphi(u, v), \\ E_v &= \psi(u, v), \end{aligned} \right\} \text{ на } s_i, \quad (18)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  заданные на  $s_i$  функции. При этом несколько усложняются выражения для  $a_n$  и  $b_n$  [формулы (8') и (10')], а все остальные формулы остаются без изменения. Такой метод решения граничной задачи (18) мы использовали в работе [2].

## § 2. Сферический экзовибратор

Замкнутая металлическая поверхность, соизмеримая с длиной волны  $\lambda$ , при соответствующем возбуждении ее наружной поверхности может в некоторых случаях успешно конкурировать с обычными антеннами. Такую излучающую поверхность мы будем называть экзовибратором. Может быть предложено большое число способов возбуждения экзовибраторов. Три достаточно простых способа возбуждения изображены на рис. 2. При этом генератор  $G$  помещен внутри. Линейные проводники, расположенные снаружи и связывающие (электромагнитной связью) экзовибратор с генератором, естественно называть „элементами связи“. Рассчитав распределение тока на поверхности экзовибратора при заданном расположении элементов связи, мы сумеем ответить на большинство вопросов теории и практики таких систем. В настоящем параграфе мы будем предполагать экзовибратор идеальнопроводящим  $\alpha = 0$ ,<sup>6</sup> так как потери в металле при достаточно высоких частотах практически не сказываются на структуре поля. Что касается КПД, то его можно вычислить затем, пользуясь методом, изложенным, например, в работе [3].

Рассмотрим сферический экзовибратор радиуса  $a$  с радиально расположенным элементом связи  $h$  (способ 3 на рис. 2). Закон распределения тока  $I^{ст}$  вдоль линейного элемента связи (длины  $h$ ) будем считать заданным. Эквивалентная схема, из которой мы будем исходить при расчете, изображена на рис. 3. При этом можно предположить, что вдоль элемента связи  $h$  распределена некоторая сторонняя эдс, реализующая заданное

<sup>6</sup> Не представляет никакого труда провести все рассуждения этого параграфа при  $\alpha \neq 0$ .

на нем распределение тока  $I^{\text{ст}}$ . Введем сферическую систему координат  $r, \vartheta, \varphi$  с главной осью, совпадающей с элементом связи. Вследствие симметричного возбуждения искомое поле будет иметь только составляющие  $E_r, E_\vartheta$  и  $H_\varphi$ , не зависящие от азимута  $\varphi$ . Для того чтобы воспользоваться выведенными выше формулами, необходимо положить в них  $u = \vartheta, v = -\varphi$ .<sup>7</sup> Что касается функций  $f_n, F_n, \rho$  и постоянных  $A_n$ , то в нашем случае их естественно положить равными

$$A_n = 1, \quad \rho = 1, \quad F_n = 0, \quad f_n = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi a^2 n(n+1)}} P_n^{(1)}(\cos \vartheta), \quad (19)$$

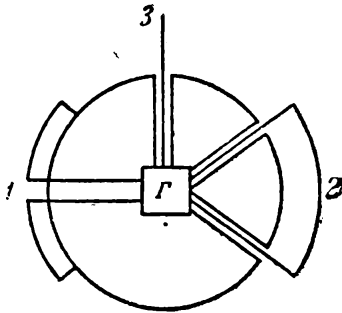


Рис. 2.

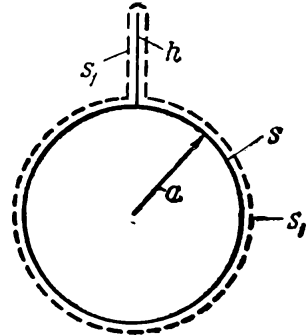


Рис. 3.

где  $P_n^{(1)}$  — присоединенная функция Лежандра. Так как поле рассматриваемого экзовибратора обладает осевой симметрией, то формулы (17) принимают вид

$$i_\vartheta = \frac{c}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} b_n P_n^{(1)}(\cos \vartheta), \quad i_\varphi = 0,$$

ибо из уравнения (8) немедленно следует, что  $b_n = -(H_\varphi f_n)$ .

Обозначая буквой  $I(\vartheta)$  полный ток, протекающий через параллель  $\vartheta$  по поверхности экзовибратора в направлении убывания  $\vartheta$ , найдем, умножая  $(-i_\vartheta)$  на длину параллели,

$$I(\vartheta) = -\frac{c}{4\sqrt{\pi}} \sin \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}} b_n P_n^{(1)}(\cos \vartheta). \quad (20)$$

Для расчета коэффициентов  $b_n$  по формуле (13) необходимо на основании граничных условий (14) определить вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ . Ищем решение этой задачи при помощи выражений

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u, & \mathcal{E}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \vartheta}, & \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{ik}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \\ \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_\vartheta = 0 & k &= 2\pi/\lambda. \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m P_m(\cos \vartheta) \zeta_m(kr), \quad \zeta_m(\rho) \equiv \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho)$$

удовлетворяющих уравнениям Максвелла.

<sup>7</sup> Знак минус поставлен здесь потому, что внешняя (по отношению к  $v_e$ ) нормаль образует с  $\vartheta$  и  $\varphi$  левовинтовую систему.

Для нахождения коэффициентов  $\beta_m$  используем условия (14). Второе из них удовлетворяется автоматически, так как  $\mathcal{E}_\varphi = 0$  и  $F_n = 0$ , а первое принимает вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m P_m^{(1)}(\cos \vartheta) \zeta_m'(ka) = - \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}} P_n^{(1)}(\cos \vartheta).$$

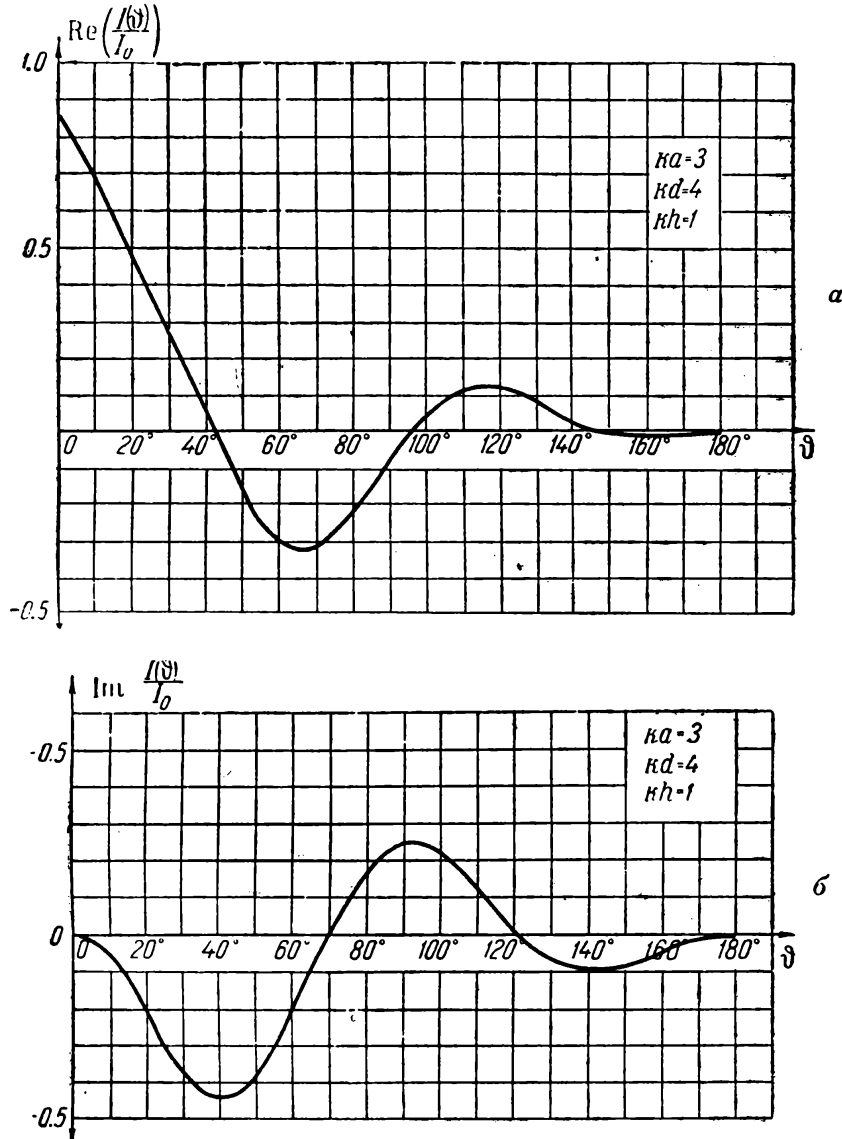


Рис. 4.

Приравнявая коэффициенты при  $P_m^{(1)}$  в обеих частях равенства, найдем

$$\beta_n = - \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}} \frac{1}{\zeta_n'(ka)}; \quad A_m = 0 \text{ при } m \neq n. \quad (22)$$

Выражение для  $\mathcal{E}_r$  после этого запишется так [см. (21)].

$$\mathcal{E}_r = \beta_n P_n(\cos \vartheta) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \zeta_n(kr). \quad (23)$$

Так как линейный элемент связи расположен радиально и на нем  $\vartheta = 0$ , то, подставив выражение (23) в формулу (13) для  $b_n$ , получим

$$b_n = - \frac{4\pi}{c} \beta_n \int_a^{a+h} I^{ст.} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \zeta_n(kr) dr.$$



Закон изменения тока  $I^{от.}$  в линейном проводе элемента связи мы зададим при помощи обычной формулы

$$I^{от.} = I_0 \sin k(d-r), \quad d = a + h,$$

достаточно хорошо отображающей действительное распределение тока в тонком проводе, „открытом“ на конце. Используя эту формулу и производя интегрирование, придадим выражению для  $b_n$  следующий вид

$$b_n = -\frac{4\pi k}{c} I_0 \beta_n \{ \zeta_n(kd) - \cos kh \zeta_n(ka) - \sin kh \zeta_n'(ka) \}. \quad (24)$$

Формулы (20), (22) и (24) полностью определяют распределение тока на поверхности сферического экзовибратора.

Используя известные рекуррентные формулы для полиномов Лежандра, не представляет труда получить

$$\sin \vartheta P_n^{(1)}(\cos \vartheta) = \frac{n(n+1)}{2n+1} \{ P_{n-1}(\cos \vartheta) - P_{n+1}(\cos \vartheta) \},$$

после чего ряд (20) легко преобразуется в ряд по полиномам Лежандра

$$I(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n' P_n(\cos \vartheta), \quad (25)$$

где

$$b_n' = \frac{I_0}{2} \frac{\zeta_n(kd) - \cos kh \zeta_n(ka)}{\zeta_n'(ka)} \Big|_{x=n+1}^{x=n-1} \quad (25')$$

В частном случае, когда  $kh = \pi/2$ ,

$$b_n' = \frac{I_0}{2} \left\{ \frac{\zeta_{n-1}(kd)}{\zeta_{n-1}'(ka)} - \frac{\zeta_{n+1}(kd)}{\zeta_{n+1}'(ka)} \right\}. \quad (26)$$

Очевидно, задача возбуждения металлической сферы несколькими радиально расположенными проводниками с заданными в них токами немедленно приводится к рассмотренной нами задаче при помощи принципа суперпозиции. На рис. 4,а и 4,б дано распределение тока на сфере, рассчитанное по формулам (25), (25').

### § 3. Возбуждение волноводов

Разобранный в двух предыдущих параграфах метод непосредственно применим к различным задачам о возбуждении волноводов. Причем, как нам кажется, он ведет к цели значительно проще и быстрее, нежели другие известные методы. Рассмотрим, например, прямоугольный полубесконечный волновод, возбуждаемый линейным вибратором, расположенным так, как это указано на рис. 5. Введем прямоугольную систему координат с осью  $z$ , совпадающей с одним из ребер волновода (рис. 6). Вибратор при этом совпадает с отрезком:  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ ,  $0 \leq z \leq h$ , где  $h$  — длина вибратора.

Поскольку волновод полубесконечный и у основания вибратора имеется металлическая перегородка, то для расчета поля в нем можно применить принцип зеркального изображения. Таким образом, при расчете мы будем считать волновод бесконечным, а вибратор — имеющим длину  $2h$  с симметричным распределением тока  $I$  в обеих половинках.

Введем на внутренней боковой поверхности  $s$ , бесконечного волновода функции  $f_n, F_n$ , при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} f_n = F_n = 0 \quad \text{при} \quad x = a \\ f_n = F_n = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \\ f_n = F_n = 0 \quad \text{при} \quad y = b \\ f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\gamma s}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\gamma s} \quad \text{при} \quad x = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Здесь  $n$  — произвольное целое число, а  $\gamma$  — произвольное вещественное число. Таким образом,  $f_n$  и  $F_n$  отличны от нуля только на боковой

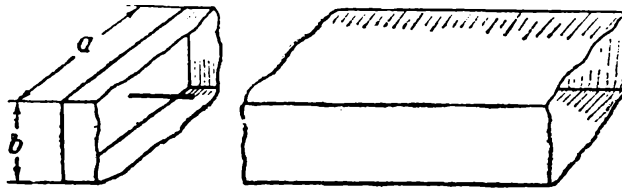


Рис. 5.

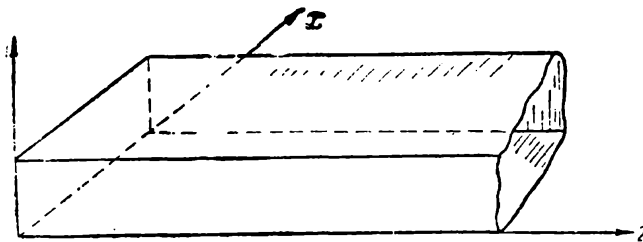


Рис. 6.

стенке  $x=0$ . Семейства  $f_n, F_n$  ( $0 \leq n \leq \infty, -\infty \leq \gamma \leq \infty$ ) являются полными ортонормальными системами на боковой стенке  $x=0$ . Что касается постоянных  $A_n, B_n, C_n, D_n$ , то положим их равными

$$A_n = D_n = 1, \quad B_n = C_n = 0. \quad (27')$$

Функции  $p$  и  $P$ , очевидно, равны единице.

Положив  $u=z$  и  $v=y$ , перепишем основные уравнения (8), (10), с учетом (27'),

$$(H_y f_n) = b_n, \quad (H_z F_n) = -a_n.$$

Формулы (12) при этом принимают вид

$$H_z = - \sum_{n, \gamma} a_n F_n(y, z), \quad H_y = \sum_{n, \gamma} b_n f_n(y, z) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Знак суммы означает суммирование по  $n$  от 0 до  $\infty$  и интегрирование по  $\gamma$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Поэтому предыдущие выражения можно записать так

$$\left. \begin{aligned} H_z &= - \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(\gamma) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\gamma s} d\gamma \\ H_y &= \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(\gamma) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\gamma s} d\gamma \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (28)$$

Здесь мы явно отметили зависимость  $a_n$  и  $b_n$  от  $\gamma$  [см. формулы (8'), (10'), (14), (15) и (27)].

Таким образом, мы получили разложение  $H_x$  и  $H_y$  по  $F_n$  и  $f_n$  на стенке  $x=0$ , а не на всей боковой поверхности  $s_i$ , благодаря особому выбору  $F_n$  и  $f_n$  (см. также сноску<sup>3</sup>). Для нахождения коэффициентов  $b_n$  и  $a_n$ , фигурирующих в выражениях (28), необходимо прежде всего определить вспомогательные поля, при помощи граничных условий (14), (15). Эти условия в нашем примере принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_z = f_n^* \\ \mathfrak{E}_y = 0 \end{aligned} \right\} \text{ на стенке } x=0, \quad \left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_z^1 = 0 \\ \mathfrak{E}_y^1 = F_n^* \end{aligned} \right\} \text{ на стенке } x=0. \quad (29)$$

На остальных трех стенках волновода касательные составляющие  $\vec{\mathfrak{E}}$  и  $\vec{\mathfrak{E}}^1$  должны обращаться в нуль (27). Этим граничным условиям удовлетворяют, как легко убедиться, следующие решения уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\frac{i\gamma}{\xi_n \sqrt{\pi b}} \frac{\cos \xi_n (a-x)}{\sin \xi_n a} \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{i\gamma z} \\ \mathfrak{E}_y &= 0, \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\sin \xi_n (a-x)}{\sqrt{\pi b} \sin \xi_n a} \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{i\gamma z} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x^1 &= \frac{\pi n \cos \xi_n (a-x)}{\xi_n b \sqrt{\pi b} \sin \xi_n a} \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{i\gamma z} \\ \mathfrak{E}_y^1 &= \frac{\sin \xi_n (a-x)}{\sqrt{\pi b} \sin \xi_n a} \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{i\gamma z} \\ \mathfrak{E}_z^1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

где

$$\xi_n = \sqrt{k^2 - \gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (30')$$

Составляющих магнитного вектора мы не выписываем. Используя формулы типа (13) для коэффициентов  $b_n$  и  $a_n$ , найдем, учитывая выражения (30)

$$b_n = -\frac{4\pi}{c} \int_{-h}^{+h} I \mathfrak{E}_z dz, \quad a_n = -\frac{4\pi}{c} \int_{-h}^{+h} I \mathfrak{E}_z^1 dz = 0.$$

Интегрирование здесь идет вдоль линейного вибратора, возбуждающего волновод. В общем случае, когда вибратор ориентирован под некоторым углом к оси „z“, проекции  $\vec{\mathfrak{E}}^1$  на ось вибратора, а следовательно, и  $a_n$ , будут отличны от нуля. Используя выражения для  $\mathfrak{E}_z$  [формула (30)] получим

$$\left. \begin{aligned} b_n(\gamma) &= -\frac{2\pi}{c} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\sqrt{\pi b} \cos(\xi_n a/2)} \int_{-h}^{+h} I(z') e^{i\gamma z'} dz' \\ a_n(\gamma) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

Подставляя эти значения в формулы (28), найдем

$$\left. \begin{aligned} H_y &= -\frac{2}{cb} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{b} y\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-h}^{+h} I(z') e^{i\gamma z'} dz'}{\cos(\xi_n a/2)} e^{-i\gamma z} d\gamma, \\ H_x &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ при } x=0. \quad (32)$$

Подинтегральное выражение является мероморфной функцией в плоскости комплексного переменного  $\gamma$ . Единственными полюсами ее являются корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\xi_n a}{2}\right) = 0 \quad \left(\frac{\xi_n a}{2} = m \frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 3, 5, 7, \dots\right).$$

Учитывая формулу (30'), получим следующие корни предыдущего уравнения

$$\mp \gamma_m^{(n)} = \mp \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (33)$$

Конечное число корней  $\mp \gamma_m^{(n)}$  лежит на действительной оси плоскости  $\gamma$ , остальные на мнимой (рис. 7). При интегрировании по  $d\gamma$  вдоль действительной оси в выражении (32), корни  $\mp \gamma_m^{(n)}$  должны быть обойдены так, как это показано на рис. 7. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно на мгновение предположить, что  $k^2$  имеет небольшую мнимую часть, вызванную проводимостью среды, заполняющей волновод. При  $z > h$  подинтегральное выражение в формуле (32) стремится к нулю (по экспоненте), когда  $\gamma$  удаляется в бесконечность, оставаясь в нижней полуплоскости. Поэтому интеграл по  $d\gamma$  в формуле (32) может быть заменен, по теореме Коши, суммой вычетов относительно полюсов (т. е.  $\gamma_m^{(n)}$ ), лежащих в нижней полуплоскости

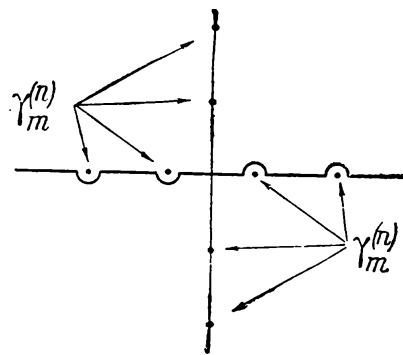


Рис. 7.

$$\left. \begin{aligned} H_y &= \frac{8\pi^2}{cba^2} \sum_{n, m} \frac{mi^{(m+n-1)}}{\gamma_m^{(n)}} \left\{ \int_{-h}^{+h} I(z') e^{i\gamma_m^{(n)} z'} dz' \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-i\gamma_m^{(n)} z} \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0, \\ z &> h. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь при суммировании  $m$  и  $n$  пробегают только нечетные значения. Для того чтобы определить поле в любой точке внутри волновода, представим его в виде суперпозиции „электрических“ волн, ибо магнитные в нашем случае отсутствуют.<sup>8</sup> Вводя электрический вектор Герца  $\Pi = \Pi_z$ , можно написать

$$\Pi = \sum_{n, m}^{0-\infty} M_{n, m} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-i\gamma_m^{(n)} z}, \quad z > h,$$

а отсюда

$$H_y = \text{rot}_y \vec{\Pi} = - \sum_{n, m}^{0-\infty} \frac{m\pi}{a} M_{n, m} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-i\gamma_m^{(n)} z}, \quad z > h$$

и т. д.

<sup>8</sup> Так как  $H_z$  на стенке  $x = 0$  равно нулю, то  $H_z \equiv 0$  всюду.

Так как при  $x=0$  написанное выражение для  $H_y$  должно совпадать с формулой (34), то из этого немедленно следует, что

$$M_{n,m} = - \frac{8\pi i^{(m+n-1)}}{cba \gamma_m^{(n)}} \int_{-h}^{+h} I(z') e^{i\gamma_m^{(n)} z'} dz' \quad \text{при } n, m = 1, 3, 5, \dots$$

$$M_{n,m} = 0 \quad \text{при } n, m = 0, 2, 4, \dots$$

Таким образом, вектор Герца, а значит и поле внутри волновода однозначно определены. Если вибратор представляет собой диполь с моментом  $p = \frac{Ih}{i\omega}$ , то

$$M_{n,m} = \frac{16\pi i^{m+n} \cdot k}{ba \gamma_m^{(n)}} p \quad \text{при } n, m = 1, 3, 5, \dots$$

$$M_{n,m} = 0 \quad \text{при } n, m = 0, 2, 4, \dots$$

Отсутствие четных типов волн объясняется, как легко сообразить, расположением вибратора в центре волновода (т. е. на пересечении диагоналей).

При любом другом расположении и ориентировке вибратора вся методика расчета остается той же, с той только разницей, что коэффициенты  $a_n(\gamma)$  при этом, вообще говоря, будут отличны от нуля и, следовательно, будут иметь место также магнитные волны.

Выбор функций  $f_n$  и  $F_n$ , произведенный нами (27), является не единственно возможным. Можно было бы положить их отличными от нуля на другой стенке или даже сделать их неравными нулю на всех стенках.

Приведенные в двух последних параграфах примеры, как нам кажется, достаточно хорошо иллюстрируют гибкость предложенного метода для решения задач о возбуждении волноводов, экзовибраторов, эндовибраторов и т. п. как с учетом потерь в стенках, так и без них.

#### Литература

- [1] Я. Н. Фельд. ДАН, LI, 199, 1946. — [2] Я. Н. Фельд. Радиотехника. 5, 42, 1947. — [3] Я. Н. Фельд. ЖТФ, X, 706, 1940.

Поступило в Редакцию  
9 сентября 1947 г.

ЩЕЛЕВЫЕ АНТЕННЫ.<sup>1</sup> II

Я. Н. Фельд

Рассматриваются щелевые антенны, полученные в результате прорезания щелей в эндовибраторах для случая, когда частота возбуждения совпадает (или близка) с одной из собственных частот неразрезанного эндовибратора. Найдены формулы, определяющие законы распределения напряжения вдоль щели и позволяющие, следовательно, найти поле внутри и вне антенны. В частности, показано, что напряжение на щели в этом случае будет нулевого порядка относительно параметра малости  $\alpha$ , вне зависимости от длины щели.

## § 1. Излучающие щели в резонансных эндовибраторах

Настоящая работа является продолжением статьи [1], в которой было получено и исследовано основное уравнение<sup>2</sup> I (27)

$$L[V] = \alpha G[V] - \pi k_2 \alpha H_\tau^0(\tau), \quad \left( L \equiv \frac{d^2}{d\tau^2} + k^2 \right), \quad (1)$$

определяющее закон распределения напряжения  $V$  вдоль узкой щели. Здесь и ниже сохранены обозначения работы [1].

Ограничиваясь случаем щели, прорезанной на поверхности эндовибратора (а не волновода), обозначим буквой  $\omega_1$  одну из собственных (резонансных) частот замкнутого неразрезанного эндовибратора. При стремлении вынужденной частоты  $\omega$  сторонних токов (возбуждающих щелевую антенну) к  $\omega_1$  вспомогательные поля  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  обращаются в бесконечность. Последнее вытекает из самого определения этих полей, ибо при их расчете эндовибратор считается замкнутым и идеально проводящим. Несмотря на это, как легко видеть, при  $\omega \rightarrow \omega_1$ , левая, а следовательно, и правая части уравнения (1) сохраняют смысл, оставаясь конечными.<sup>3</sup>

Таким образом, и при  $\omega \rightarrow \omega_1$  уравнение (1) определяет  $V$  на щели. Однако методы решения (1), развитые в работе [1], использующие малость параметра  $\alpha$ , становятся абсолютно неприменимыми, так как величины  $H_\tau^0$  и  $G[V]^4$  обращаются при этом в отдельности в бесконечность.

Поэтому мы займемся получением такого уравнения для  $V$ , все члены которого остаются конечными и регулярными при  $\omega \rightarrow \omega_1$ , и решение которого можно довести до конца, используя малость  $\alpha$ .

Условимся для определенности считать  $\omega_1$   $m$ -кратной собственной частотой неразрезанного эндовибратора, которой соответствуют свободные колебания, характеризуемые полями  $\vec{e}^{(\nu)}, \vec{h}^{(\nu)}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ).

<sup>1</sup> Краткое изложение работы опубликовано в Докладах АН СССР [2].

<sup>2</sup> При ссылке на формулы работы [1] впереди номера формулы мы будем ставить римскую цифру I.

<sup>3</sup> Уравнение (1) справедливо с точностью до членов порядка  $d/\lambda$ , так как при выводе его мы пренебрегали относительным изменением регулярной части ядра ( $H^1 - \mathcal{H}^1$ ) и величины  $H^0$  на длине  $d$ , равной ширине щели. Однако это не существенно, ибо при  $\omega \rightarrow \omega_1$  порядок относительного изменения этих величин сохраняется тем же и в пределе уравнение (1) выполняется также с точностью до членов порядка  $d/\lambda$ .

<sup>4</sup>  $G[V] \equiv G[V, \tau]$ .

Введем прежде всего некоторую систему функций

$$a_n(\tau) \quad (n=0, 1, 2, \dots, m).$$

Дифференцируя уравнение (1)  $n$ -раз по  $\tau$  и умножая затем на  $a_n(\tau)$ , найдем, суммируя результат по  $n$  от 0 до  $m$ ,

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V] = \alpha \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} G[V] - \pi k_2 \alpha \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0. \quad (2)$$

Постараемся так выбрать имеющиеся в нашем распоряжении функции  $a_n(\tau)$ , чтобы каждая сумма [фигурирующая в (2)] в отдельности, оставалась конечной и определенной также при  $\omega \rightarrow \omega_1$ . Чтобы выполнить это, преобразуем последнюю сумму уравнения (2).

Для этого введем регулярное внутри эндовибратора вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$ , определенное там при помощи граничных условий

$$[\vec{n}[\vec{\mathcal{E}}^i(q)\vec{n}]] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_i \\ \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(R) \vec{t}_u & \text{на } s. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\delta$  — функция Дирака;  $R$  — расстояние между точкой наблюдения  $q$  и точкой  $q_{10}(\tau) [= q_0(u_0, v_0)]$ , находящейся на поверхности (щели)  $s$ , в сечении, характеризуемом дугой  $\tau$ ;  $\vec{t}_u$  — единичный орт, касательный к координатной линии  $u$  в точке  $q$  поверхности  $s$  (т. е. направленный поперек щели);  $\vec{n}$  — единичная нормаль к поверхностям, которую не следует путать с целым числом  $n$ .

Применяя к полям  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  и  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$ , определенным внутри эндовибратора, лемму Лоренца, найдем

$$\int_{(s+s_i)} \{[\vec{E}^0 \vec{\mathcal{H}}^i] - [\vec{\mathcal{E}}^i \vec{H}^0]\} \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{\mathcal{E}}^i \vec{dl}_i.$$

Отсюда, учитывая нулевые граничные условия для касательной составляющей  $\vec{E}^0$  на  $s+s_i$  и формулу (3), получим, используя свойства  $\delta$ -функции,<sup>6</sup>

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0 = -\frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{\mathcal{E}}^i \vec{dl}_i. \quad (4)$$

Это и есть искомое преобразование последней суммы уравнения (2). Таким образом, написанная сумма [а значит и остальные суммы уравнения (2)] останется конечной при  $\omega = \omega_1$ , если этому условию будет удовлетворять вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$  [см. (4)].

<sup>5</sup> Точнее в точке  $\tau$  координатной линии  $u = u_0$ , вдоль которой отсчитывается дуга  $\tau$ .

<sup>6</sup>  $\int_{(s)} \delta(R) f(q) ds = f(q_0)$ .

Отличие касательной составляющей  $\vec{\mathcal{E}}^i$  на  $s$  от нуля позволяет считать, что поле  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$  возбуждается сторонней эдс  $\vec{E}^{ст}$ -частоты  $\omega$ , приложенной к  $s$ -части замкнутой идеально проводящей поверхности  $s+s_1$  и равной

$$\vec{E}^{ст.} = - [\vec{n} [\vec{\mathcal{E}}^i \vec{n}]] \quad \text{на } s. \quad (5)$$

Как известно, поле  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$ , возбуждаемое внутри идеально проводящего эндовибратора, останется конечным при резонансе ( $\omega = \omega_1$ ) только при условии равенства нулю работы сторонней эдс над полями  $\vec{e}^{(v)}, \vec{h}^{(v)}$  ( $v = 1, 2, \dots, m$ ) свободных колебаний — частоты  $\omega_1$ .

Это условие равносильно равенствам

$$\int_{(s)} [\vec{E}^{ст.} \vec{h}^{(v)}] \vec{ds} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, m,$$

или, учитывая формулы (5), (3) и свойства  $\delta$ -функции

$$\sum_{n=1}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} h_\tau^{(v)} = -a_0(\tau) h_\tau^{(v)}, \quad v = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где  $h_\tau^{(v)}$  — проекция вектора  $\vec{h}^{(v)}$  на направление возрастания  $\tau$  (т. е. вдоль щели по касательной к координатной линии  $u = u_0$ ) в точке  $q_0(\tau)$ . Решая эту систему уравнений относительно  $a_n(\tau)$ , найдем искомые значения этих функций, при которых поле  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$ , а значит и отдельные суммы в равенстве (2), остаются конечными и регулярными для  $\omega = \omega_1$ . Так как неизвестных  $a_n(\tau)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, m$ ) больше, чем уравнений (6), то одно из них, например  $a_0(\tau)$ , остается произвольным. Выбирая его наиболее рациональным, с нашей точки зрения, образом, найдем

$$a_0(\tau) = \left| \frac{d^\mu h_\tau^{(v)}}{d\tau^\mu} \right|, \quad a_n(\tau) = -\Delta_n, \quad n = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где  $\left| \frac{d^\mu h_\tau^{(v)}}{d\tau^\mu} \right|$  — определитель  $m$ -го порядка, у которого на пересечении  $v$ -й строки и  $\mu$ -го столбца стоит член  $\frac{d^\mu h_\tau^{(v)}}{d\tau^\mu}$ , а  $\Delta_n$  — определитель, получаемый из него заменой  $n$ -го столбца, столбцом с общим членом  $h_\tau^{(v)}$  ( $v = 1, 2, \dots, m$ ). В дальнейшем будем считать функции  $a_n(\tau)$  заданными при помощи формул (7).

Уравнение (2) мы при этом запишем в виде

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V] = \alpha Q[V] + \alpha \Phi(\tau), \quad (8)$$

где

$$\Phi(\tau) = -\pi k_2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0, \quad (8')$$

а  $Q[V]$  — линейный относительно  $V$  оператор, равный

$$Q[V] = \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} G[V]. \quad (8'')$$



Уравнение (8) совместно с граничными условиями

$$V=0 \text{ при } \tau=0 \text{ и } \tau=l, \quad (9)$$

определяет напряжение на щели для интервала частот, содержащих  $\omega = \omega_1$ . Причем каждый член уравнения (8) остается конечным и регулярным [в отличие от (1)], также для резонансной частоты  $\omega = \omega_1$ . Поэтому для решения уравнения (8) может быть применен метод разложения по малому параметру  $\alpha$ .

Ввиду большого значения уравнения (8), мы позволим себе, весьма сжато, наметить еще один прямой вывод его, аналогичный примененному нами ранее, [1] для получения уравнения (1).

Переходя к нему, введем, наряду с полем  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$ , определенным внутри эндовибратора условиями (3), еще одно вспомогательное поле  $\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e$ , не имеющее источников во внешнем к эндовибратору пространстве и заданное там граничными условиями типа (3)

$$[\vec{n} [\vec{\mathcal{E}}^e(q) \vec{n}]] = \begin{cases} 0 & \text{на } s_e \\ \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(R) \vec{t}_n & \text{на } s. \end{cases} \quad (3')$$

Напомним, что вместо переменной  $\tau$ , равной длине дуги, отсчитываемой вдоль линии  $u = u_0$  от одного из концов щели до точки  $q_0(u_0, v_0)$ , можно использовать координаты  $u_0, v_0$ . Действительно, (7)

$$a_n(\tau) = a_n(q_0) \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial v_0}.$$

Сравнивая условия (3) и (3') с условиями I(4), убеждаемся, что теперь роль вспомогательных полей  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  и  $\vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$  играют соответственно  $\vec{\mathcal{E}}^i, \vec{\mathcal{H}}^i$  и  $\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e$ . Разница в их определении заключается только в том, что вектор  $\vec{e}^1$  [I(4) и I(8)] задан несколько более сложной суммой (3). Так как для полей  $\vec{E}^1, \vec{H}^1, \vec{\mathcal{E}}^1, \vec{\mathcal{H}}^1$  и искомого поля щелевой антенны  $\vec{E}, \vec{H}$  справедливо равенство I(5), вне зависимости от вида вектора  $\vec{e}^1$ , то и для вновь введенных полей можно написать<sup>7</sup>

$$\int_{(s)} [\vec{E}(\vec{\mathcal{H}}^i - \vec{\mathcal{H}}^e)] \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(i)} I \vec{\mathcal{E}}^i \vec{dl}_i. \quad (10)$$

Это интегральное уравнение для  $\vec{E}$  отличается от равенства I(5) тем, что в нем все величины остаются конечными также для резонанса  $\omega = \omega_1$ .

Для того чтобы получить из (10) интегродифференциальное уравнение для напряжения  $V$  на щели, следует выделить главную часть ядра  $(\vec{\mathcal{H}}^i - \vec{\mathcal{H}}^e)$ . В уравнении I(5) эта главная часть, вызванная наличием в выражении для  $\vec{e}^1$  [I(4), I(8)] функции  $\delta(R)$ , приводила к появлению в интегродифференциальном уравнении (1) члена вида

$$L(V) \equiv \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + k^2 \right) V.$$

<sup>7</sup> Справа в формуле (10) стоит только один интеграл, так как мы рассматриваем передающую щелевую антенну, и снаружи источников нет.

Теперь же вместо  $\delta(R)$  у нас фигурирует сумма [см. (3)].

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(R),$$

где  $\tau$  следует рассматривать как параметр, не зависящий от координат точки интегрирования  $q(u, v)$ . Поэтому вместо  $L[V]$  в новом интегрально-дифференциальном уравнении будет, очевидно, стоять сумма  $\sum_{n=0}^m a_n \frac{d^n}{d\tau^n} L[V]$ ,

в остальном никаких изменений не будет.

Таким образом, мы найдем

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V] = \alpha Q[V] + \pi k_2 \alpha \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I_{\mathcal{E}^i} \vec{dl}_i.$$

Полученное уравнение для  $V$ , благодаря формуле (4), тождественно совпадает с полученным уже другим способом уравнением (8).

Перейдем к интегрированию уравнения (8). Будем искать его решение при помощи ряда

$$V = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \dots \tag{11}$$

Подставляя его в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$ , получим следующую систему уравнений, определяющих коэффициенты ряда (11)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V_0] &= 0; \quad V_0 = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad l, \\ \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V_1] &= Q[V_0] + \Phi(\tau); \quad V_1 = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad l; \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{12}$$

Общий интеграл первого уравнения имеет вид

$$L[V_0] = \sum_{v=1}^m A_v h_{\tau}^{(v)}, \tag{13}$$

где  $A_v$  — постоянные.

Для того чтобы доказать это, подставим (13) в первое уравнение (12)

$$\sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \sum_{v=1}^m A_v h_{\tau}^{(v)} = \sum_{v=1}^m A_v \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} h_{\tau}^{(v)} = 0.$$

Это равенство тождественно удовлетворяется при любых  $A_v (v=1, 2, \dots, m)$ , благодаря уравнениям (6), определяющим  $a_n(\tau)$ , и, следовательно, наше

утверждение доказано. Уравнение (13), как легко видеть, имеет следующий общий интеграл

$$V_0 = M \sin k\tau + N \cos k\tau + \frac{1}{k} \int_0^\tau \sum_{\nu=1}^m A_\nu h_\tau^{(\nu)}(x) \sin k(\tau - x) dx. \quad (13')$$

При длине щели  $l \neq n \frac{\lambda}{2}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) постоянные  $M$  и  $N$  могут быть найдены из граничных условий для  $V_0$  (12), после чего выражение (13') принимает вид

$$V_0 = -\frac{\sin k\tau}{k \sin kl} \int_0^l \sum_{\nu=1}^m A_\nu h_\tau^{(\nu)}(x) \sin k(l-x) dx + \\ + \frac{1}{k} \int_0^\tau \sum_{\nu=1}^m A_\nu h_\tau^{(\nu)}(x) \sin k(\tau - x) dx. \quad (14)$$

Что касается постоянных  $A_\nu$ , то их можно определить из условия ортогональности линейно независимых решений первой граничной задачи (12) к правой части уравнения для  $V_1$ . Однако при этом придется иметь дело с довольно сложным оператором  $Q$ , чего можно избежать, ограничившись интересующим нас случаем  $\omega = \omega_1$ .

Действительно, применим к полю  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  (возбуждаемому внутри эндовибратора со щелью током  $I$ ) и полю  $\vec{e}^{(\nu)}$ ,  $\vec{h}^{(\nu)}$  свободного колебания частоты  $\omega_1$  лемму Лоренца

$$\int_{(s+st)} \left\{ \left[ \vec{E} \vec{h}^{(\nu)} \right] - \left[ \vec{e}^{(\nu)} \vec{H} \right] \right\} \vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int_{(i)} I \vec{e}^{(\nu)} \vec{dl}_i.$$

Учитывая граничные условия для  $\vec{E}$  и  $\vec{e}^{(\nu)}$  и переходя от напряженности  $\vec{E}$  на щели  $s$  к напряжению  $V$  I (17), немедленно найдем следующие интересные соотношения<sup>8</sup>

$$\int_0^l V h_\tau^{(\nu)} d\tau = \frac{4\pi}{c} \int_{(i)} I \vec{e}^{(\nu)} \vec{dl}_i, \quad \nu = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Слева интегрирование идет вдоль щели.

Необходимо подчеркнуть, что при получении равенств (15) мы выносили  $h_\tau^{(\nu)}$  за знак интеграла при интегрировании поперек щели, пренебрегая относительным изменением  $h_\tau^{(\nu)}$  на интервалах порядка ширины щели  $d$ , т. е. считали, что

$$\left| \frac{\partial h_\tau^{(\nu)}}{\partial u} d \right| \ll |h_\tau^{(\nu)}|. \quad (15')$$

Так как  $d \ll \lambda$ , то неравенство (15') почти всегда выполняется. Исключением является случай, когда на щели  $h_\tau^{(\nu)}$  обращается в нуль.

<sup>8</sup> Необходимо подчеркнуть, что соотношения (15) справедливы только при  $\omega = \omega_1$ , т. е. когда частота обоих полей одинакова. В случае осевой симметрии, когда  $V = \text{const}$  вдоль щели, (15) непосредственно определяют  $V$ .

Подставляя в (15) значение  $V \cong V_0$  из формулы (14), получим систему линейных уравнений для определения постоянных  $A_n$

$$\sum_{n=1}^m a^{nv} A_n = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{e}^{(v)} \vec{dl}_i, \quad v = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

где  $a^{nv}$  — известные коэффициенты, заданные равенствами

$$\begin{aligned} a^{nv} = & -\frac{1}{k \sin kl} \int_0^l \sin k\tau h_\tau^{(v)}(\tau) d\tau \int_0^l h_\tau^{(m)}(x) \sin k(l-x) dx + \\ & + \frac{1}{k} \int_0^l \int_0^\tau h_\tau^{(v)}(\tau) h_\tau^{(m)}(x) \sin k(\tau-x) dx d\tau. \end{aligned} \quad (16')$$

Следовательно, величина  $V_0$  (14) однозначно определена.

Для практических целей чаще всего достаточно ограничиться первым, отличным от нуля, членом ряда (11). Таким образом, при  $l \neq n \frac{\lambda}{2}$   $V = V_0 + O(\alpha)$ , где  $V_0 = O(1)$  [формулы (14) и (16)].

Переходя к случаю  $l = n \frac{\lambda}{2}$ , легко видеть, что постоянная  $M$  в выражении (13') не может быть определена из граничных условий, так как для их выполнения достаточно следующих двух равенств

$$N = 0$$

и

$$\sum_{v=1}^m A_v \int_0^l h_\tau^{(v)}(x) \sin k(l-x) dx = 0. \quad (17)$$

Решение (13') при этом принимает вид

$$V_0 = M \sin k\tau + \frac{1}{k} \int_0^\tau \sum_{v=1}^m A_v h_\tau^{(v)}(x) \sin k(\tau-x) dx. \quad (18)$$

Для определения  $m+1$  постоянных  $A_v$  ( $v = 1, 2, \dots, m$ ) и  $M$  мы имеем только одно уравнение (17). Недостающие  $m$  уравнений можно получить (как и выше), подставив в (15) значение  $V \cong V_0$  из формулы (18). Уравнения (15) при этом принимают вид

$$M b_v + \sum_{n=1}^m a_{nv} A_n = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{e}^{(v)} \vec{dl}_i, \quad v = 1, 2, \dots, m, \quad (17')$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_v &= \int_0^l h_\tau^{(v)}(\tau) \sin k\tau d\tau \\ a_{nv} &= \frac{1}{k} \int_0^l \int_0^\tau h_\tau^{(v)}(\tau) h_\tau^{(m)}(x) \sin k(\tau-x) dx d\tau \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Так как  $\sin k(l-x) = \mp \sin kx$  ( $l = n\lambda/2$ ), то коэффициент при  $A_v$  в равенстве (17), очевидно, равен  $\mp b_v$ . Поэтому, поменяв в (17) „немой“

значок  $\nu$  на  $n$ , получим  $m+1$  линейных уравнений [(17) и (17')], определяющих постоянные  $M$  и  $A_n$  ( $n=1, 2 \dots m$ )

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^m b_n A_n &= 0, \\ Mb_\nu + \sum_{n=1}^m a_{n\nu} A_n &= \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{e}^{(\nu)} d\vec{l}_i, \quad \nu=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таким образом, величина  $V_0$  [см. (18)] однозначно определена, и напряжение  $V$  на щели имеет вид

$$V = V_0 + O(\alpha), \quad V_0 = O(1). \quad (21)$$

Следовательно, при резонансном эндовибраторе ( $\omega = \omega_1$ ) напряжение  $V$  будет порядка  $O(1)$  при любых длинах щели  $l$ . В отличие от случая  $\omega \neq \omega_1$ , когда при  $l \neq n \frac{\lambda}{2}$ ,  $V = O(\alpha)$  [(37)]. В случае простого не кратного собственного значения  $\omega_1$ , когда  $m=1$ , уравнения (20) сводятся к следующим

$$b_1 A_1 = 0, \quad Mb_1 + a_{11} A_1 = \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{e}^{(1)} d\vec{l}_i \quad (20')$$

или

$$A_1 = 0, \quad M = \frac{4\pi}{cb_1} \int_{(l_i)} I \vec{e}^{(1)} d\vec{l}_i.$$

Напряжение (21) при этом обращается в синусоиду (18)

$$V = M \sin k\tau + O(\alpha). \quad (21')$$

При определении постоянных в общем интеграле (13') для  $V_0$  мы отдельно рассматривали случай  $l \neq n\lambda/2$  и  $l = n\lambda/2$  и пришли соответственно к решениям типа (14), (16) и (18), (20). Однако необходимо подчеркнуть, что первое решение непрерывно переходит во второе.

Действительно, легко показать, что при  $l \rightarrow \frac{n\lambda}{2}$  формула (14) переходит в (18), а система линейных уравнений (16) для коэффициентов в систему (20). Таким образом, решение (14), (16) является общим, годным для любых длин щели.

Очевидно, учет потерь в металлических стенках не окажет существенного влияния на напряжение  $V$ , до тех пор, пока КПД щелевой антенны достаточно высок, т. е. мощность потерь значительно меньше мощности, излучаемой через щель.

## § 2. Резонансный цилиндрический эндовибратор с излучающей щелью

Применим развитую в § 1 теорию к цилиндрическому эндовибратору радиуса  $R$ , высоты  $a$ , изображенному на рис. 1. Вводя цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , можно написать для собственных „электрических“ колебаний  $\vec{e}, \vec{h}$  эндовибратора следующие выражения [3]

$$\left. \begin{aligned}
 e_r &= -\frac{\pi\sigma\beta_{nv}}{aR} J_n' \left( \beta_{nv} \frac{r}{R} \right) \sin \left( \frac{\pi\sigma}{a} z \right) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \\
 e_\varphi &= -\frac{\pi\sigma n}{ar} J_n \left( \beta_{nv} \frac{r}{R} \right) \sin \left( \frac{\pi\sigma}{a} z \right) \frac{-\sin n\varphi}{\cos n\varphi} \\
 e_z &= \left( \frac{\beta_{nv}}{R} \right)^2 J_n \left( \beta_{nv} \frac{r}{R} \right) \cos \left( \frac{\pi\sigma}{a} z \right) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \\
 h_r &= \frac{in\omega_{\sigma nv}}{cr} J_n \left( \beta_{nv} \frac{r}{R} \right) \cos \left( \frac{\pi\sigma}{a} z \right) \frac{-\sin n\varphi}{\cos n\varphi} \\
 h_\varphi &= -\frac{i\beta_{nv}\omega_{\sigma nv}}{cR} J_n' \left( \beta_{nv} \frac{r}{R} \right) \cos \left( \frac{\pi\sigma}{a} z \right) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \\
 h_z &= 0
 \end{aligned} \right\} (22)$$

Здесь  $\beta_{nv}$  —  $\nu$ -й корень бесселевой функции  $J_n(x)$ ,  $\omega_{\sigma nv}$  — собственная угловая частота, равная

$$\omega_{\sigma nv} = c \sqrt{\left( \frac{\sigma\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\beta_{nv}}{R} \right)^2}, \quad (22')$$

а  $n$ ,  $\sigma$  и  $\nu$  — любые целые числа.

Из формул (22) следует, что в общем случае, когда  $n \neq 0$ , каждому собственному числу  $\omega_{\sigma nv}$  соответствует два ( $m=2$ ) линейно независимых типа колебаний  $\vec{e}^{(1)}$ ,  $\vec{h}^{(1)}$  и  $\vec{e}^{(2)}$ ,  $\vec{h}^{(2)}$ , отличающихся только азимутальной зависимостью.

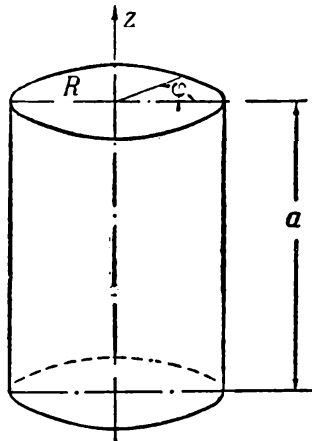


Рис. 1.

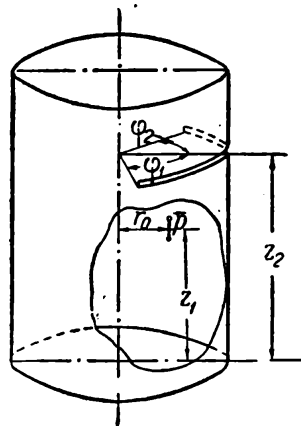


Рис. 2.

Поместим внутри эндовибратора в точке  $r=r_0$ ,  $\varphi=0$ ,  $z=z_1$  электрический диполь с моментом  $\vec{p}$ , параллельным оси  $z$ . Частоту колебаний диполя  $\omega$  примем равной одной из собственных частот  $\omega_{\sigma nv}$  (22'). Прорежем на боковой поверхности эндовибратора узкую щель вдоль линии  $[L]$ , определяемой равенствами:  $z=z_2$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  (рис. 2). При расположении линии  $[L]$  параллельно оси  $z$  щель, очевидно, не излучала бы, так как токи на боковой поверхности текут параллельно оси  $z$  [формулы (22)].

Напряжение на щели определяется формулой (14), где коэффициенты  $A$ , удовлетворяют системе уравнений (16). При этом в рассматриваемом случае необходимо положить  $m=2$ . Из формул (22) следует что

$$\left. \begin{aligned}
 h_\varphi^{(1)} &= A \cos n \left( \frac{\tau}{R} + \varphi_1 \right), & \frac{1}{c} \int_{(L)} \vec{I} \vec{e}^{(1)} \cdot d\vec{l}_i &= ikBp \\
 h_\varphi^{(2)} &= A \sin n \left( \frac{\tau}{R} + \varphi_1 \right), & \frac{1}{c} \int_{(L)} \vec{I} \vec{e}^{(2)} \cdot d\vec{l}_i &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{i\beta_{nv}k}{R} J_n'(\beta_{nv}) \cos\left(\frac{\pi\sigma}{a} z_2\right), & \tau &= R(\varphi - \varphi_1) \\ B &= \left(\frac{\beta_{nv}}{R}\right)^2 J_n\left(\beta_{nv} \frac{r_0}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi\sigma}{a} z_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (23')$$

Подставляя эти величины в формулу (14) и производя все выкладки, найдем

$$V \cong V_0 = -\frac{\psi(l)}{\sin kl} \sin k\tau + \psi(\tau), \quad (24)$$

$$\psi(\tau) = \frac{A}{2k} \left\{ \frac{A_1 \left[ \cos n\left(\frac{\tau}{R} + \varphi_1\right) - \cos(n\varphi_1 + k\tau) \right] + A_2 \left[ \sin n\left(\frac{\tau}{R} + \varphi_1\right) - \sin(n\varphi_1 + k\tau) \right]}{k - n/R} + \frac{A_1 \left[ \cos n\left(\frac{\tau}{R} + \varphi_1\right) - \cos(n\varphi_1 - k\tau) \right] + A_2 \left[ \sin n\left(\frac{\tau}{R} + \varphi_1\right) - \sin(n\varphi_1 - k\tau) \right]}{k + n/R} \right\}.$$

Постоянные коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  элементарно определяются из линейной системы уравнений (16). Однако мы не будем выписывать выражений для  $A_1$  и  $A_2$  в общем случае и перейдем к рассмотрению отдельных примеров.

Пусть  $n=0$ , т. е.  $\omega = \omega_{\text{сов}}$ . Тогда  $h_\tau^{(2)} = 0$ ,  $h_\tau^{(1)} = A$  и  $V$  принимает вид

$$V = \frac{AA_1}{k^2 \cos \frac{kl}{2}} \left\{ \cos \frac{kl}{2} - \cos k\left(\tau - \frac{l}{2}\right) \right\}. \quad (25)$$

Система (16) сводится к единственному уравнению

$$a^{11} A_1 = \frac{c}{4\pi} \int_{(i)} I \vec{e}^{(1)} d\vec{l}_i,$$

откуда немедленно находим, учитывая (16') и (23)

$$A_1 = 4\pi i k^4 \frac{B}{A^2} \frac{p}{kl - 2 \operatorname{tg} \frac{kl}{2}}.$$

Подставляя это значение в (25), найдем окончательное выражение для напряжения

$$V = \frac{2\pi i k^2 p \frac{B}{A}}{\frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2}} \left\{ \cos \frac{kl}{2} - \cos k\left(\tau - \frac{l}{2}\right) \right\}, \quad (26)$$

где [формула (23')]

$$\frac{B}{A} = \frac{i\beta_{0v} J_0\left(\beta_{0v} \frac{r_0}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi\sigma}{a} z_1\right)}{kR J_0'(\beta_{0v}) \cos\left(\frac{\pi\sigma}{a} z_2\right)}. \quad (26')$$

Величина  $\left| \frac{B}{A} \right|$ , очевидно, характеризует масштаб кривой  $|V|$ . Для получения, при заданном  $\vec{p}$  и  $l$ , максимального напряжения на щели, необходимо выбрать параметры  $r_0$ ,  $z_1$  и  $z_2$  так, чтобы модуль отношения  $B/A$  был максимальным. Что касается  $r_0$  и  $z_1$ , определяющих положение диполя, то, как легко видеть из (26'), они должны быть выбраны так

$$r_0 = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi\sigma}{a} z_1\right) = \mp 1, \quad (27)$$

при этом

$$\frac{B}{A} = \frac{\mp i \beta_{0y}}{k R} \frac{1}{J_0'(\beta_{0y}) \cos\left(\frac{\pi \sigma}{a} z_2\right)}. \quad (26'')$$

Гораздо сложнее выбор величины  $z_2$ , определяющей положение щели. Действительно, выбрав  $z_2$  из условия  $\cos\left(\frac{\pi \sigma}{a} z_2\right) = 0$ , мы приходим к абсурдному результату  $\frac{B}{A} = \infty$ , т. е. напряжение на щели бесконечно велико. Парадокс этот легко разъясняется, если вспомнить, что все формулы выведены нами в предположении, что относительным изменением  $h_\tau^{(v)}$  на ширине щели можно пренебречь. В случае же, когда  $\cos\left(\frac{\pi \sigma}{a} z_2\right) = 0$ , составляющая  $h_\tau^{(1)}$  меняет знак при движении поперек щели, обращаясь в нуль [см. формулы (23) и (23')]. Таким образом, основное предположение о постоянстве  $h_\tau^{(v)}$  на ширине щели полностью нарушается, и формулы (26) перестают быть справедливыми.

Наоборот, легко сообразить, что при щели, прорезанной вдоль параллели  $\cos\left(\frac{\pi \sigma}{a} z\right) = 0$ , т. е. вдоль линии, на которой токи свободного колебания меняют направление, обращаясь в нуль, края щели оказываются под одинаковым „потенциалом“, и напряжение между ними равно нулю (а не бесконечности).

Для каких же значений  $z_2$  справедливы формулы (26)? Очевидно, для тех, для которых  $\cos\left(\frac{\pi \sigma}{a} z\right)$  можно считать постоянным на щели, и, следовательно, выполняется неравенство

$$\left| \frac{d\left(\cos \frac{\pi \sigma}{a} z_2\right)}{dz} d \right| \ll \left| \cos \frac{\pi \sigma}{a} z_2 \right|, \quad (28)$$

$d$  — ширина щели.

При  $\sigma = 0$  это неравенство всегда выполнено, и формула (26'') принимает вид

$$\frac{B}{A} = \frac{i \beta_{0y}}{k R J_0'(\beta_{0y})}. \quad (29)$$

Для  $\sigma = 1$  условие (28) нарушается в окрестности значения  $z_2 = \frac{a}{2}$ .

На рис. 3 изображена зависимость  $\left| \frac{B}{A} \right|$  от  $z_2$  (при  $\sigma = 1$ ). Сплошной линией изображена часть кривой [для которой выполнено условие (28)], подсчитанная по формуле (26''),<sup>9</sup> пунктиром изображен примерный ход кривой в окрестности  $z_2 = \frac{a}{2}$ , где формула (26'') не верна.

Из кривой рис. 3 следует, что максимальное напряжение на щели, а значит и наибольшее излучение будет тогда, когда щель прорезана

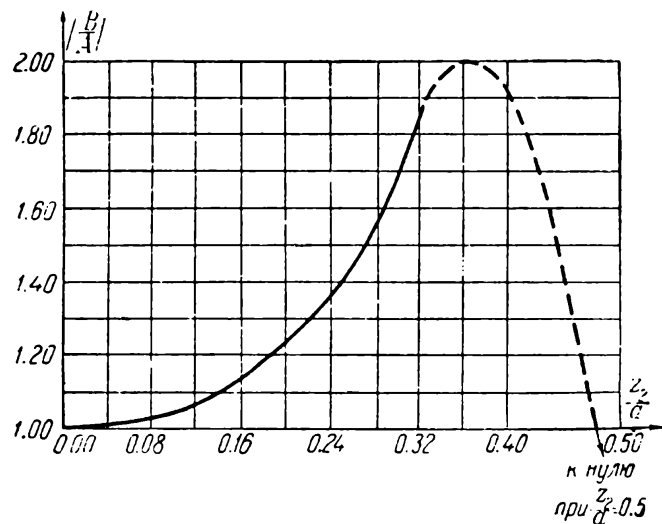


Рис. 3.

<sup>9</sup> Постоянный множитель в формуле (26'') при этом положении равен единице.



вблизи узловой линии ( $z_2 = \frac{a}{2}$ ) тока свободного колебания, а не вдоль линии пучности ( $z_2 = 0, a$ ) тока, как это имеет место при ненастроенном эндовибраторе или волноводе.

Этот результат обусловлен следующим обстоятельством. Прорезая щель вдоль линии пучности тока свободного колебания, мы резко изменяем картину распределения тока на внутренней поверхности эндовибратора, нарушаем экранировку и создаем условия для интенсивного излучения через щель. Однако этим самым мы сильно расстраиваем эндовибратор, и амплитуда колебаний в нем резко уменьшается (при заданном  $\vec{p}$ ). Передвигая щель к узловой линии мы не так резко нарушаем экранировку, но при этом значительно меньше расстраиваем эндовибратор. Влияние этих двух факторов, оказывающих противоположное влияние на интенсивность излучения, приводит к тому, что максимум кривой рис. 3 смещается к узловой линии.

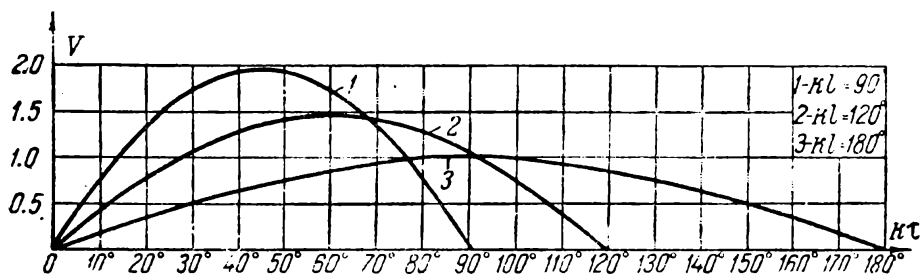


Рис. 4.

Кривую рис. 3 легко снять экспериментально. Действительно, мощность излучения пропорциональна квадрату напряжения на щели, т. е.  $\left| \frac{B}{A} \right|^2$ , следовательно, при неизменном моменте  $\vec{p}$  активное сопротивление  $R_{\Sigma}$  диполя, возбуждающего систему также пропорционально  $\left| \frac{B}{A} \right|^2$ . Поэтому кривая  $\sqrt{R_{\Sigma}} = f(z_2)$  с точностью до постоянного множителя совпадает с кривой, изображенной на рис. 3.<sup>10</sup> Экспериментальное снятие кривой  $R_{\Sigma}$  в функции  $z_2$ , очевидно, не представляет затруднений (см. Дополнение I).

Из того, что при заданном моменте  $\vec{p}$  максимум излучения получается при прорезании щели вблизи узловой линии тока свободного колебания, еще не следует, что щель необходимо располагать вблизи этого места. Действительно, практически задается мощность излучения, а не момент диполя, поэтому щель следует располагать так, чтобы получить сопротивление диполя, при котором легче всего согласовать генератор с нагрузкой.

Формула (26) для  $V$  остается справедливой также при  $kl = \pi$ , обращаясь при этом в синусоиду. На рис. 4 изображены кривые распределения напряжения вдоль щели для различных длин  $l$ , рассчитанные по формуле (26). Множитель  $i \cdot 2\pi k^2 p \frac{B}{A}$  при этом принят равным единице.

Рассмотрим еще пример, когда  $n=1$ ,  $\sigma=\nu=1$ ,  $\varphi_1=0$ ,  $R=0.5a$  и, следовательно [см. (22)],  $kR=1.141$ . Напряжение на щели определяется

<sup>10</sup> При этом мы считаем, что мощность излучения зависит от  $z_2$  только через напряжение на щели, т. е. внешняя проводимость щели не зависит от  $z_2$ , чего можно добиться соответствующей конструкцией эндовибратора.

формулами (24), где постоянные  $A_1$  и  $A_2$  удовлетворяют системе уравнений (16), принимающей в нашем случае вид

$$\left. \begin{aligned} a^{11} A_1 + a^{21} A_2 &= \frac{4\pi}{c} \int_{(l_i)} I \vec{e}^{(1)} d\vec{l}_i \\ a^{12} A_1 + a^{22} A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Коэффициенты  $a^{11}$ ,  $a^{21}$ , ... можно легко подсчитать благодаря формулам (16) и (23)

$$\left. \begin{aligned} a^{21} = a^{12} &= \frac{A^2 R^3}{2(k^2 R^2 - 1) \sin kl} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2l}{k} \right) \sin kl - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{l}{R} \left[ \frac{1 - \cos \left( kl + \frac{l}{R} \right)}{kR + 1} + \frac{1 - \cos \left( kl - \frac{l}{R} \right)}{kR - 1} \right] \right\} \\ a^{22} &= \frac{A^2 R^3}{2(k^2 R^2 - 1) \sin kl} \left\{ \left( \frac{l}{R} - \frac{1}{2} \sin 2 \frac{l}{R} \right) \sin kl + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{l}{R} \left[ \frac{\sin \left( kl + \frac{l}{R} \right)}{kR + 1} - \frac{\sin \left( kl - \frac{l}{R} \right)}{kR - 1} \right] \right\} \\ a^{11} = a^{22} + \frac{A^2 R^3}{2(k^2 R^2 - 1) \sin kl} &2 \cos \frac{l}{R} \left[ \sin \frac{l}{R} \sin kl - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \cos \left( kl + \frac{l}{R} \right)}{kR + 1} - \frac{1 - \cos \left( kl - \frac{l}{R} \right)}{kR - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Решая уравнение (30) относительно  $A_1$  и  $A_2$  и подставляя результат в выражение (24), найдем  $V$  на щели. Опуская элементарные выкладки,

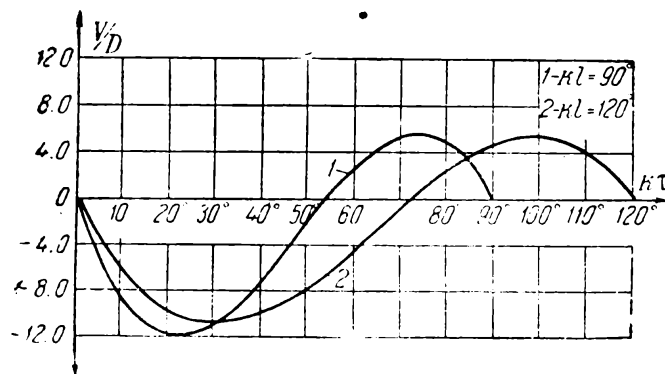


Рис. 5.

ограничимся тем, что приведем кривые распределения напряжения<sup>11</sup> вдоль щели для двух длин щели:  $kl = 90^\circ$  и  $kl = 120^\circ$  (рис. 5). При расчете кривых  $\varphi_1$  положено равным нулю, т. е. предполагается, что

<sup>11</sup> На рис. 5 изображены кривые зависимости  $V/D$  и  $kt$ , где  $D$  постоянная, равная  $D \cong 40.6 \frac{B_p}{iR^2 A} \sin kl$ .

диполь, возбуждающий эндовибратор, и начало щели лежат в одной плоскости  $\varphi = 0$ .

### Дополнение I

На рис. 6 приведена экспериментально снятая кривая зависимости  $R_{\Sigma}$  от  $z_2$ .

Измерения производились с цилиндрическим эндовибратором. Эндовибратор возбуждался тонким четверть-волновым штырем, расположенным так, как это показано на рис. 7. Длина волны, равная  $\lambda = 71.5$  см, устанавливалась в соответствии с собственной частотой  $\omega_{101}$  свободного колебания типа  $E_{101}$  [см. формулы (22) при  $\sigma = \nu = 1$ ,  $n = 0$ ].

Часть боковой поверхности эндовибратора сделана выдвигной и выходящей за пределы оснований (рис. 7). На этой части поверхности про-

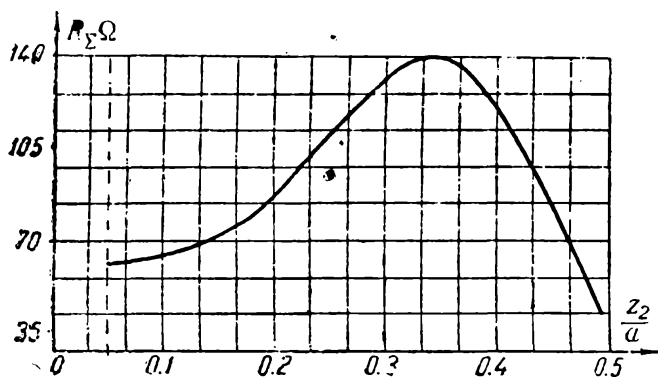


Рис. 6.

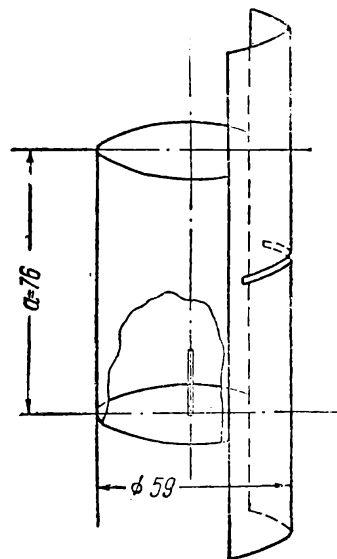


Рис. 7.

резана узкая щель ( $d = 1$  мм) длиной в полволны ( $l \cong 35$  см). Выдвигая эту часть поверхности, можно было плавно менять положение щели относительно оснований эндовибратора, т. е.  $z_2$ .

Независимость внешней проводимости щели от положения  $z_2$  обеспечивалась благодаря большой длине подвижной части боковой поверхности, значительно превосходящей высоту эндовибратора. С другой стороны, благодаря тому, что штырь, возбуждающий эндовибратор, имел длину, равную четверти волны и был достаточно тонок, закон изменения тока вдоль него оставался практически независимым от положения щели  $z_2$ . Кривая зависимости активной части сопротивления штыря  $R_{\Sigma}$  от положения щели снималась при помощи концентрической измерительной линии типа „Лотос-А“. Полученная кривая (рис. 6) полностью подтверждает сказанное в § 2.

### Литература

- [1] Я. Н. Фельд. ЖТФ, XVII, 1051, 1947. — [2] Я. Н. Фельд. ДАН, LVI, 371, 1947. — [3] L. de Broglie. Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. Paris, 1941.

Поступило в Редакцию  
19 сентября 1947 г.

## МНОГОЩЕЛЕВЫЕ АНТЕННЫ

Я. Н. Фельд

Излучающие системы из нескольких щелей, обладающих осевой симметрией, были исследованы нами в работе [2].

Здесь мы рассмотрим антенны, состоящие из ряда любых (несимметричных) узких щелей, прорезанных в замкнутой металлической поверхности (волноводе и т. п.), возбуждаемой изнутри или снаружи. Пусть каждая из этих щелей удовлетворяет требованиям, указанным в § 1 работы [1] ( $d \leq \lambda$ ,  $l$  и т. д.) и, кроме того, наименьшее расстояние между отдельными щелями намного больше ширины щели.

При выполнении этих условий, можно получить систему интегродифференциальных уравнений, определяющих законы распределения напряжений вдоль отдельных щелей при любом способе их возбуждения.

Переходя к их выводу, обозначим длину и ширину щелей буквами  $l_\nu$  и  $d_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ), где  $m$  число щелей. Затянув отверстие каждой щели геометрической поверхностью  $s_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ), введем на  $s_\nu$  криволинейную ортогональную систему координат  $u_\nu, v_\nu$  с метрикой  $dl^2 = du_\nu^2 + \sigma_\nu^2 dv_\nu^2$  так, как это указано в § 1 работы [1]. Суммарную

поверхность отверстий обозначим буквой  $s$  ( $s = \sum_{\nu=1}^m s_\nu$ ).

Формула<sup>2</sup> I (10)

$$\int_{(s)} E_n (H_n^1 - \xi_n^1) ds = \xi_n^0(q_0) - H_n^0(q_0), \quad (1)$$

как следует из ее вывода, остается справедливой и в рассматриваемом случае, если интегрирование идет по поверхностям всех щелей  $s = \sum_{\nu} s_\nu$ ,

а под  $u, v$  понимается заданная на  $s$  система координат, совпадающая на  $s_\nu$  с  $u_\nu, v_\nu$ . Повторяя рассуждения § 1 [1], перейдем от формулы (1) к равенству I (16')

$$L_0 \int_{(s)} E_n(q) \frac{e^{-ikR}}{R} ds = \pi k_2 \int_{(s)} E_n(q) F(q, q_0) ds + \pi k_2 \{H_n^0(q_0) - \xi_n^0(q_0)\},$$

<sup>1</sup> В настоящей статье сохранены обозначения работы [1].

<sup>2</sup> При ссылке на формулы работы [1] мы впереди номера формулы будем ставить римскую цифру I.

которое, в нашем случае, можно записать так

$$L_0 \sum_{\nu=1}^m \int_{(s_\nu)} E_\nu(q) \frac{e^{-ikR}}{R} ds =$$

$$= \pi k_2 \sum_{\nu=1}^m \int_{(s_\nu)} E_\nu(q) F(q, q_0) ds + \pi k_2 \{H_\nu^0(q_0) - \mathfrak{H}_\nu^0(q_0)\}. \quad (2)$$

Положим для определенности, что точка  $q_0$  находится на поверхности  $s_x$ . Координаты ее обозначим буквами  $u_x^0, v_x^0$ . Так же, как и в случае одиночной щели [см. I (18) и I (19)], не представляет труда получить с точностью до членов порядка  $3 \frac{d}{l}$  следующие равенства

$$\int_{(s_\nu)} E_\nu(q) \frac{e^{-ikR}}{R} ds = \left\{ \begin{array}{l} -2 \int_0^{d_x} E_\nu(u_x, v_x^0) \ln(kR_x) du_x + K_{xx} [V_\nu, v_x^0] \text{ при } \nu = x \\ \int_0^{b_\nu} V_\nu \frac{e^{-ikl}}{R} \sigma_\nu dv_\nu \equiv K_{\nu x} [V_\nu, v_x^0] \text{ при } \nu \neq x \end{array} \right\}, \quad (3)$$

$$\int_{(s_\nu)} E_\nu(q) F(q, q_0) ds = \int_0^{b_\nu} V_\nu F(q, q_0) \sigma_\nu dv_\nu \equiv G_{\nu x} [V_\nu, v_x^0].$$

Здесь  $V_\nu$  — напряжение между краями  $\nu$ -й щели, равное

$$V_\nu = \int_0^{d_\nu} E_\nu(u_\nu, v_\nu) du_\nu, \quad (3')$$

$0 \leq v_\nu \leq b_\nu$  — интервал, в пределах которого изменяется координата  $v_\nu$  на  $s_\nu$ ,  $R_x$  — расстояние между точками  $(u_x, v_x^0)$  и  $(u_x^0, v_x^0)$  поверхности  $s_x$ , а  $K_{\nu x} [V_\nu, v_x^0]$  и  $G_{\nu x} [V_\nu, v_x^0]$  линейные относительно  $V_\nu$  интегральные операторы.

Так как вследствие неравенств  $d_\nu \ll \lambda$  функции  $H_\nu^0$  и  $\mathfrak{H}_\nu^0$  можно считать на  $s_\nu$  зависящими только от одной координаты  $v_\nu$ ,<sup>4</sup> удобно ввести следующие обозначения

$$\pi k_2 \{H_\nu^0(q_0) - \mathfrak{H}_\nu^0(q_0)\} \equiv \Phi_x(v_x^0) \text{ при } q_0 \in s_x. \quad (4)$$

Подставляя формулы (3) и (4) в уравнение (2), получим

$$2L_0 \int_0^{d_x} E_\nu(u_x, v_x^0) \ln(kR_x) du_x = \sum_{\nu=1}^m Q_{\nu x} [V_\nu, v_x^0] - \Phi_x(v_x^0), \quad (5)$$

где  $Q_{\nu x} [V_\nu, v_x^0]$  — линейный относительно  $V_\nu$  оператор, равный

$$Q_{\nu x} [V_\nu, v_x^0] \equiv L_0 K_{\nu x} [V_\nu, v_x^0] - \pi k_2 G_{\nu x} [V_\nu, v_x^0].$$

<sup>3</sup>  $d$  — величина порядка ширины щелей, а  $l$  — величина порядка длины щелей.

<sup>4</sup> Расстояние от источников (возбуждающих антенну) до щелей, как всегда, считаем намного большим  $d_\nu$ .

Напомним [см. I (15)], что

$$L_0 \equiv \frac{1}{\sigma_x^0} \frac{\partial}{\partial v_x^0} \frac{1}{\sigma_x^0} \frac{\partial}{\partial v_x^0} + k^2 \quad \text{при } q_0 \in s_x.$$

Введем систему функций  $f_x(u_x)$ , заданных соответственно на поверхностях  $s_x$  при помощи условий, аналогичных I (22)

$$\left. \begin{aligned} 2 \int_0^{d_x} f_x(u_x^0) \ln(kR_x) du_x^0 &= \frac{1}{\alpha_x} \equiv \text{const}, & 0 \leq u_x \leq d \\ \int_0^{d_x} f_x(u_x^0) du_x^0 &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Решая эту систему относительно  $f_x$  и  $\alpha_x$ , найдем [см. I (22')]

$$f_x(u_x^0) = \frac{1}{\pi \sqrt{u_x^0(d_x - u_x^0)}} \quad \text{и} \quad \alpha_x = \frac{1}{2 \ln\left(\frac{kd_x}{4}\right)}. \quad (6')$$

Если помножить уравнение (5) на  $f_x(u_x^0) du_x^0$  и проинтегрировать по интервалу  $0 \leq u_x^0 \leq d_x$ , то оно примет следующий вид

$$\int_0^{d_x} f_x(u_x^0) L_0 \int_0^{d_x} 2E_u(u_x, v_x^0) \ln(kR_x) du_x du_x^0 = \sum_{v=1}^m Q_{vx} [V_v, v_x^0] - \Phi_x(v_x^0).$$

Меняя здесь местами порядок операций  $L_0$  и интегрирования по  $u_0$ , что законно вследствие выполнения неравенства I (23), получим, учитывая (6) и (3'),

$$L_0 V_x = \alpha_x \sum_{v=1}^m Q_{vx} [V_v, v_x^0] - \alpha_x \Phi_x(v_x^0).$$

Сечение на щели  $s_v$  удобнее, как и в § 1 [1], характеризовать не координатой  $v_v^0$ , а длиной дуги  $\tau_v$ , отсчитываемой вдоль щели от одного из ее концов

$$\tau_v = \int_0^{v_v^0} \sigma_v dv_v, \quad d\tau_v = \sigma_v^0 dv_v^0, \quad v = 1, 2, \dots, m.$$

Заменяя в предыдущем уравнении  $v_x^0$  на  $\tau_x$  и учитывая, что  $\chi$  произвольное целое число, лежащее в интервале  $0 \leq \chi \leq m$ , получим систему интегродифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{d\tau_x^2} + k^2\right) V_x(\tau_x) = \alpha_x \sum_{v=1}^m Q_{vx} [V_v, \tau_x] - \alpha_x \Phi_x(\tau_x), \quad \chi = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

определяющих закон распределения напряжений  $V_x$  вдоль щелей.

Само собой разумеется, что к уравнениям (7) необходимо также прибавить граничные условия на концах щелей

$$V_x(\tau_x) = 0 \quad \text{при } \tau_x = 0, l_x, \quad \chi = 1, 2, \dots, m. \quad (7')$$

Весьма интересно отметить, что уравнение (5) позволяет найти не только законы распределения напряжения  $V_x$  вдоль щелей [см. (7)], но дает также возможность определить распределение  $E_u$  на  $s_x$ , т. е. на щелях.

Действительно, сопоставляя (5) с равенствами (6), нетрудно убедиться, что выражение

$$E_u(q) = V_x(v_x) f_x(u_x) \quad \text{при } q \in s_x \quad (8)$$

удовлетворяет уравнению (5) и, таким образом, определяет, с рассматриваемой нами точностью, распределение касательной составляющей электрического вектора<sup>5</sup> на щели  $s_x$  ( $\chi = 1, 2, \dots, m$ ). Таким образом, в отношении распределения поля поперек щели (по координате  $u_x$ ) наше приближение [см. (6')] совпадает с электростатическим.

При достаточно узких щелях постоянные  $\alpha_x$  [см. (6')], удовлетворяют неравенствам  $\alpha_x \ll 1$  ( $\chi = 1, 2, \dots, m$ ) и играют роль параметров малости.<sup>6</sup> Поэтому для решения основной системы интегродифференциальных уравнений (7) могут быть применены все методы, развитые в [1] для решения уравнения I (27), использующие малость параметров  $\alpha_x$ .

Так, например, представляя решения уравнений (7) в виде рядов по степеням параметров  $\alpha_x$

$$V_x = V_x^{(0)} + \alpha_x V_x^{(1)} + \alpha_x^2 V_x^{(2)} + \dots, \quad \chi = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

получим, подставляя (9) в уравнения (7), следующую систему независимых дифференциальных уравнений для  $V_x^{(0)}$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau_x^2} + k^2\right) V_x^{(0)} = 0, \quad \chi = 1, 2, \dots, m, \quad (10)$$

с граничными условиями  $V_x^{(0)} = 0$  при  $\tau_x = 0, l_x$ .

Аналогично имеем для  $V_x^{(1)}$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau_x^2} + k^2\right) V_x^{(1)} = \sum_{\nu=1}^m Q_{\nu x}[V_\nu^{(0)}, \tau_x] - \Phi_x[\tau_x]; \quad V_x^{(1)} = 0 \quad \text{при } \tau_x = 0, l_x \quad \chi = 1, \dots, m$$

и т. д.

Ограничиваясь наиболее важным для практики случаем „настроенных“<sup>7</sup> щелей, когда  $l_x = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), найдем решения уравнений (10), удовлетворяющие граничным условиям,

$$V_x^{(0)} = U_x \sin k\tau_x, \quad \chi = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Таким образом [см. (9)],

$$V_x = U_x \sin k\tau_x + O_x(\alpha_x), \quad \chi = 1, \dots, m, \quad (11')$$

где для практических расчетов можно пренебречь членами  $O_x(\alpha_x)$ .

<sup>5</sup> Напомним, что в нашем приближении  $E_v = 0$  на щели.

<sup>6</sup> Так как  $d_x$  ( $\chi = 1, \dots, m$ ) соизмеримы, то и параметры  $\alpha_x$  ( $\chi = 1, \dots, m$ ) имеют один и тот же порядок малости.

<sup>7</sup> Строго говоря, настроенные щели отличаются по длине от  $l_x = n \frac{\lambda}{2}$  на величину порядка  $\alpha_x$ .

Для нахождения постоянных  $U_x$  мы не воспользуемся методами, связанными с расчетом сложных операторов  $Q_{vx}$ , а постараемся получить линейные уравнения для  $U_x$ , исходя из концепции взаимных комплексных проводимостей щелей, как это было сделано в работе [2].

Рассмотрим прежде всего равенство (1), которое в нашем случае, когда  $s = \sum_{v=1}^m s_v$ , можно записать так

$$\sum_{v=1}^m \int_{(s_v)} E_v (H_v^1 - \xi_v^1) ds = -H_v^0(q_0) + \xi_v^0(q_0), \quad q_0 \in s.$$

Подставляя в написанное равенство значение  $E_v$  из формулы (8), получим

$$\sum_{v=1}^m \int_{(s_v)} f_v(u_v) V_v(v_v) (H_v^1 - \xi_v^1) ds = -H_v^0(q_0) + \xi_v^0(q_0),$$

или, используя формулы (11')<sup>8</sup>,

$$\sum_{v=1}^m U_v \int_{(s_v)} f_v(u_v) \sin(k\tau_v) (H_v^1 - \xi_v^1) ds = -H_v^0(q_0) + \xi_v^0(q_0). \quad (12)$$

Пусть точка  $q_0(u_x^0, v_x^0)$  находится на  $s_x$ , в сечении, характеризуемом дугой  $\tau_x^0$ . Тогда, умножая уравнение (12) на  $\frac{c}{4\pi} \sin(k\tau_x^0) d\tau_x^0$  и интегрируя вдоль щели  $s_x$  по линии  $u_x^0 = \text{const}$  от 0 до  $l_x$ , найдем

$$\sum_{v=1}^m U_v Y_{xv} = \frac{c}{4\pi} F_x. \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} Y_{xv} &= -\frac{c}{4\pi} \int_0^{l_x} \sin(k\tau_x^0) \int_{(s_v)} f_v(u_v) \sin(k\tau_v) (H_v^1 - \xi_v^1) ds d\tau_x^0 \\ \text{и} \\ F_x &= \int_0^{l_x} (H_v^0(q_0) - \xi_v^0(q_0)) \sin(k\tau_x^0) d\tau_x^0 \end{aligned} \right\}, \quad (13')$$

имеющие простой физический смысл. Для того чтобы разобраться в нем, представим  $Y_{xv}$  и  $F_x$  в виде суммы двух величин

$$Y_{xv} = Y_{xv}^i + Y_{xv}^e, \quad F_x = F_x^i + F_x^e, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} Y_{xv}^i \\ Y_{xv}^e \end{array} \right\} &= - \int_0^{l_x} \sin k\tau_x^0 \int_{(s_v)} \frac{c}{4\pi} f_v(u_v) \sin(k\tau_v) \left\{ \begin{array}{l} H_v^1 \\ -\xi_v^1 \end{array} \right\} ds d\tau_x^0 \\ \left\{ \begin{array}{l} F_x^i \\ F_x^e \end{array} \right\} &= \int_0^{l_x} \left\{ \begin{array}{l} H_v^0(q_0) \\ -\xi_v^0(q_0) \end{array} \right\} \sin(k\tau_x^0) d\tau_x^0 \end{aligned} \right\}. \quad (14')$$

<sup>8</sup> Членами порядка  $O(\alpha)$  при этом следует пренебречь, так как мы ищем коэффициенты  $U_v$ , имеющие порядок  $O(1)$ .



Из последней формулы непосредственно видно, что  $F_x^i$  и  $F_x^e$  являются соответственно внутренней и внешней магнитодвижущимися силами, приложенными к щели  $s_x$ , приведенными к пучности напряжения щели (ср. с аналогичными выражениями для электродвижущей силы в теории проволочных приемных антенн). При нахождении всех источников, возбуждающих щелевую антенну внутри (снаружи), ее внешняя (внутренняя) магнитодвижущая сила будет, очевидно, равна нулю. Что касается  $Y_{xv}^i$  и  $Y_{xv}^e$ , то они представляют собой взаимные внутреннюю и внешнюю проводимости  $\chi$ -й и  $\nu$ -й щели, приведенные к пучности напряжения, и являются естественными обобщениями (на случай несимметричного распределения напряжения) аналогичных параметров, введенных в § 3 работы [2].

Когда  $\chi \neq \nu$ , первая из формул (14') для  $Y_{xv}^i$  и  $Y_{xv}^e$  может быть значительно упрощена, если учесть, что  $H_v^1$  и  $\mathfrak{H}_v^1$  при  $\nu \neq \chi$  практически не зависят от  $u_\nu$  на  $s_\nu$ .

Используя это обстоятельство и вторую из формул (6), немедленно найдем

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{xv}^i \\ Y_{xv}^e \end{array} \right\} = -\frac{c}{4\pi} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \sin(k\tau_x^0) \sin(k\tau_\nu) \left\{ -\frac{H_v^1}{\mathfrak{H}_v^1} \right\} d\tau_\nu d\tau_x^0, \quad \text{при } \chi \neq \nu. \quad (14'')$$

Напомним, что величина  $H_v^1 \equiv H_v^1(q, q_0)$ ;  $(\mathfrak{H}_v^1)$ , входящая в выражение для  $Y_{xv}^i$  ( $Y_{xv}^e$ ), является магнитной составляющей вспомогательного поля в точке  $q(u_\nu, \tau_\nu)$ , создаваемого источником, находящимся в точке  $q_0(u_x^0, \tau_x^0)$  [см. I (4) и I (8)].

Однако не представляет труда показать, используя теорему взаимности, что

$$\text{и} \quad \left. \begin{array}{l} H_v^1(q, q_0) = H_{v_0}^1(q_0, q) \\ \mathfrak{H}_v^1(q, q_0) = \mathfrak{H}_{v_0}^1(q_0, q) \end{array} \right\} \quad (15)$$

Написанные равенства позволяют утверждать, что внутренний интеграл в выражении для  $Y_{xv}^i$  ( $Y_{xv}^e$ ) [см. (14'')] численно равен  $u_x$ -й составляющей поверхностной плотности тока, протекающего по внутренней (внешней) поверхности антенны в точке  $q_0 \in s_x$  при отсутствии щелей, когда к соответствующей стороне поверхности  $s_\nu$  приложена изнутри (снаружи) сторонняя эдс, распределенная по закону

$$\vec{E}^{\text{ст.}} = f_\nu(u_\nu) \sin(k\tau_\nu) \vec{t}_{u_\nu}.$$

Последнее замечание показывает, что введенные здесь взаимные проводимости аналогичны понятиям взаимных сопротивлений в теории линейных вибраторов. Необходимо отметить, что величины  $Y_{xv}^i$  и  $Y_{xv}^e$  отличны от нуля, вне зависимости от того, где расположены источники — снаружи или внутри антенны.

Заставляя индекс  $\chi$  в равенстве (13) принимать значения  $1, 2, \dots, m$ , получим систему линейных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^m U_\nu Y_{x\nu} = \frac{c}{4\pi} F_x, \quad \chi = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

однозначно определяющих амплитуды напряжений  $U_\nu$  в различных щелях.

Уравнения (34) работы [2] являются частным случаем общих уравнений (16).

Переходя к рационализированной системе практических единиц, в которых  $F_x$  измеряется в амперах,  $U_v$  в вольтах и  $Y_{xv}$  в мо, придадим равенствам (16) вид

$$\sum_{v=1}^m U_v Y_{xv} = F_x, \quad x = 1, 2, \dots, m. \quad (16')$$

Эта система уравнений полностью эквивалентна уравнениям Картера, определяющим амплитуды токов в линейных вибраторах.

Если щели прорезаны в бесконечной металлической плоскости, то, как следует из формул (14''), проводимости  $Y_{xv}$  с точностью до постоянного множителя совпадают с взаимными сопротивлениями эквивалентных проволочных антенн, как это и должно быть, исходя из принципа двойственности [3].

При  $m=1$ , равенства (16) сводятся к одному уравнению, определяющему амплитуду напряжения в пучности

$$U_1 = \frac{c}{4\pi} \frac{F_1}{Y_{11}}.$$

Напряжение в произвольном сечении щели при этом имеет вид (11')

$$V_1 = \frac{c}{4\pi} \frac{F_1}{Y_{11}} \sin k\tau + O(a_1). \quad (17)$$

Сравнивая это выражение с формулой I (41), полученной для настроенной щели ( $l = \frac{\lambda - \Delta\lambda}{2}$ ), можно написать

$$\frac{c}{4\pi} \frac{F_1}{\operatorname{Re} Y_{11}} = \frac{2k}{i\beta' l} \psi(l). \quad (18)$$

Действительно, в формуле (17), выведенной для  $l = \lambda/2$ , при укорочении щели до резонансной длины  $l = \frac{\lambda - \Delta\lambda}{2}$ , превратится в нуль мнимая часть проводимости  $Y_{11}$ .

Вещественная часть  $Y_{11}$  и магнитодвижущая сила  $F_1$  практически останутся без изменения.

Подставляя в равенство (18) значения  $\psi(l)$  и  $F_1$  из формул I (37')<sup>9</sup> и (14) найдем связь между  $\beta'$  и  $\operatorname{Re} Y_{11}$

$$\beta' l = - \frac{8\pi^2}{c^2} \mu \omega \operatorname{Re} Y_{11}. \quad (19)$$

Затухание полуволновой щели [см. I (38')] при этом равно

$$\frac{\alpha\beta'}{2k} = - \alpha \frac{4\pi}{c^2} \mu \omega \operatorname{Re} Y_{11}, \quad (20)$$

или, если  $\operatorname{Re} Y_{11}$  выражать в мо,

$$\frac{\alpha\beta'}{2k} = - \alpha 120\pi \mu k_0 \operatorname{Re} Y_{11}, \quad (20')$$

<sup>9</sup> Напомним, что в формуле I (37') в общем случае, при наличии источников также снаружи антенны, вместо  $H^0$  должна фигурировать разность ( $H^0 - \mathfrak{H}^0$ ).

$$k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Для щели в бесконечном плоском экране, когда  $\varepsilon = \mu = 1$  и

$$\operatorname{Re} Y_{11} \cong \frac{1}{10^2 \pi^2} \text{МО},$$

имеем

$$\frac{\alpha\beta'}{2k} \cong -\frac{1.22}{\pi} k_0 \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\alpha\beta'}{2k} l \cong -1.22\alpha.$$

Если антенна передающая и снаружи источника нет, то излучаемая мощность может быть выражена при помощи формул, аналогичных (36) и (36') работы [2].

Действительно,

$$W_{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\vec{E}^* \vec{H}] d\vec{s} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sum_{v=1}^m \int_{(s_v)} E_u^* H_v ds.$$

На основании принципа суперпозиции и выражений (8) и (11') для  $E_u$

$$E_u(q) = U_v f_v(u_v) \sin k\tau_v, \quad q \in s_v,$$

легко написать следующее выражение для  $H_v$

$$H_v(q) = \sum_{n=1}^m \int_{(s_n)} U_n f_n(u_n) \xi_v^1(q, q_0) \sin k\tau_n ds.$$

Интегрирование идет по координатам точки  $q_0(u_n, v_n)$ .

Подставляя написанные два выражения в формулу для мощности, найдем

$$W_{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sum_{v,n}^{1-m} U_v^* U_n \int_{(s_v)} \int_{(s_n)} f_v(u_v) f_n(u_n) \sin k\tau_v \sin k\tau_n \xi_v^1 ds_n ds_v.$$

Так как двойной интеграл (с рассматриваемой точностью) [см. (14')]  $\frac{4\pi}{c} Y_{nv}^e$ , то

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{v,n}^{1-m} U_v^* U_n Y_{nv}^e. \quad (21)$$

Если внутри антенны нет потребителей энергии и  $Y_{nv}^i$  чисто мнимые, то в формуле (21) можно вместо  $Y_{nv}^e$  поставить  $Y_{nv}$ .

#### Литература

[1] Я. Н. Фельд, ЖТФ, XVII, 1051, 1947. — [2] Я. Н. Фельд. Радиотехника, вып. 6, 1946. — [3] А. А. Пистолькорс. ЖТФ, XIV, 681, 693, 1944.

Поступило в Редакцию  
9 марта 1948 г.

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**О ПРИНЦИПЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН У ПЛОСКИХ ЭКРАНОВ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 IV 1948)

Принцип двойственности в теории плоских щелевых антенн был впервые сформулирован А. А. Пистолькорсом (1).

В несколько иной форме аналогичный принцип был дан М. А. Леонтовичем в теории дифракции плоских электромагнитных волн у плоских экранов (2).

В настоящей заметке мы изложим еще одну форму весьма общего принципа двойственности, который, несмотря на его элементарность, насколько нам известно, не излагался в литературе.

Принцип этот проще всего сформулировать, рассмотрев следующие два случая.

I. Пусть в пространстве с  $\sigma = 0$  и  $\varepsilon = \mu = 1^*$  расположен бесконечно тонкий, идеально проводящий (бесконечный) плоский экран  $S$

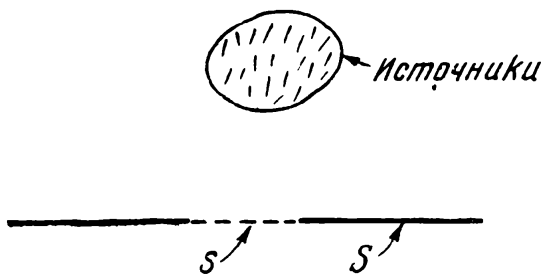


Рис. 1

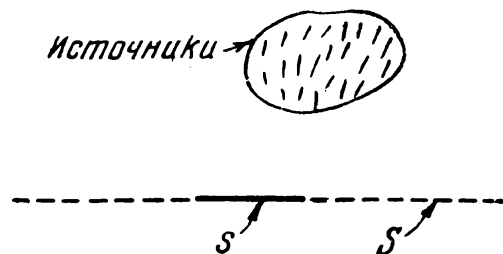


Рис. 2

с отверстием  $s$  произвольной формы. В общем случае отверстие может быть многосвязным. Будем считать, что в верхнем полупространстве (рис. 1) находятся источники (токи), распределенные любым заданным образом.

Поле, создаваемое этими источниками в отсутствие экрана, обозначим буквами  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$ , а полное поле с учетом экрана — буквами  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ .

II. Параллельно этому случаю рассмотрим ему взаимный, когда экран  $S$  убран, а отверстие  $s$  металлизировано (рис. 2). Что касается источников, то мы заменим их теперь новыми, расположенными также в верхнем полупространстве.

Поле их в отсутствие экрана обозначим буквами  $\vec{\mathcal{E}}^0$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^0$ , а полное поле с учетом экрана  $s$  — буквами  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$ .

\* Не представляет труда обобщить все результаты на случай любой однородной среды.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^0 &= \vec{H}^0, \\ \vec{\mathcal{H}}^0 &= -\vec{E}^0, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{в нижнем полупространстве,} \\ \text{включая плоскость } s + S. \end{array} \quad (1)$$

Очевидно, задав (например) источники в первом случае, можно различными способами подобрать распределение источников в случае II, при котором выполняется условие (1). Например, задав источники в виде магнитных токов в первом случае и равных им электрических токов во втором, обеспечим выполнение равенств (1) во всем пространстве.

Принцип двойственности, выражающий связь между полями обеих задач  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  в нижнем полупространстве, запишется при этом так:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^0 + \vec{\mathcal{H}}, \\ \vec{H} &= \vec{H}^0 - \vec{\mathcal{E}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Доказательство этого предложения базируется на следующих почти очевидных положениях.

1) Уравнения Максвелла остаются инвариантными (т. е. не изменяются) при замене  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$  и одновременно  $\vec{H}$  на  $-\vec{E}$ .

2) Поле внутри бесконечной области, ограниченной замкнутой поверхностью (при отсутствии там источников), однозначно определяется заданием тангенциальной составляющей электрического вектора на одной части поверхности и тангенциальной составляющей магнитного вектора на остальной части поверхности.

3) Поверхностные токи, текущие по бесконечно тонкому плоскому экрану любой формы, возбуждают поле, магнитный вектор которого не имеет касательных составляющих на части геометрической плоскости, дополняющей экран до бесконечной плоскости.

Первые два утверждения хорошо известны и не нуждаются в доказательствах; что касается третьего, то оно немедленно вытекает из следующих элементарных соображений.

Рассматривая токи, текущие по экрану, как сумму элементарных токов (диполей Герца), можно утверждать, что магнитные линии каждого из них имеют форму кругов, оси которых совпадают с элементарными токами, т. е. лежат в плоскости экрана.

Таким образом, магнитные линии элементарных токов, а следовательно, и результирующего поля, пересекают бесконечную плоскость в части, не совпадающей с экраном, под прямым углом.

Переходя к доказательству принципа двойственности (2), будем считать, что поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  решает задачу II (рис. 2) и, следовательно, удовлетворяет в нижнем полупространстве однородным уравнениям Максвелла, не имеет там источников и, кроме того, для него выполнены граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_t &= \mathcal{H}_t^0 \text{ на } S, \\ \mathcal{E}_t &= 0 \text{ на } s. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первое из этих условий вытекает из положения 3, а второе очевидно.

Для того чтобы поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , определяемое уравнениями (2), действительно являлось решением задачи I (рис. 1) для нижнего полупространства, необходимо и достаточно, чтобы:

а)  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  удовлетворяло однородным уравнениям Максвелла и не имело там источников, что, очевидно, выполнено благодаря самому виду равенства (2) и положению 1.

б) Для  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  должны быть выполнены граничные условия (см. рис. 1 и положение 3).

$$\left. \begin{aligned} E_t &= 0 \text{ на } S, \\ H_t &= H_t^0 \text{ на } s. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , определяемое равенствами (2), автоматически удовлетворяет условиям (4), если учесть при этом равенства (1) и (3).

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} E_t &\equiv E_t^0 + \mathfrak{E}_t = -\mathfrak{E}_t^0 + \mathfrak{E}_t^0 = 0 \text{ на } S, \\ H_t &\equiv H_t^0 - \mathfrak{E}_t = H_t^0 \text{ на } s. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, принцип двойственности (2) доказан.

Равенства (2) определяют поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  только в нижнем полупространстве. Чтобы найти также поле в верхнем полупространстве, достаточно проанализировать структуру формул (2). Из нее немедленно следует, что вторые члены формул (2) представляют собой поле, создаваемое в нижнем полупространстве токами, индуцированными на поверхности экрана  $S$ .

Так как поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в верхнем полупространстве складывается из поля источников  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$  и поля токов, индуцированных на поверхности экрана, а последние расположены симметрично относительно обоих полупространств, то на основании только что сказанного можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(g) &= \vec{E}^0(g) - \vec{\mathfrak{E}}(q), \\ \vec{H}(g) &= \vec{H}^0(g) - \vec{\mathfrak{E}}^*(q). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь  $g$  — произвольная точка в верхнем полупространстве, а  $q$  — ее зеркальное отображение относительно плоскости  $s + S$ . Звездочка у вектора  $\vec{\mathfrak{E}}$  означает его зеркальное отображение относительно  $s + S$ .

Таким образом, формулы (2) и (5) определяют связь между полями  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{\mathfrak{E}}$ ,  $\vec{\mathfrak{E}}^*$  во всем пространстве.

Поступило  
7 IV 1948

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Пистолькорс, ЖТФ, 14, № 12 (1944). <sup>2</sup> М. Леонтович, ЖЭТФ, 16, № 6 (1946).

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**НАВЕДЕНИЕ ТОКОВ ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯДАМИ**

(Представлено академиком А. И. Бергом 23 IX 1953)

Из литературы <sup>(1)</sup> известна теорема, позволяющая найти токи, наведенные движущимся зарядом в системе из  $m$  заземленных проводников

$$J_k = QuE_k, \quad (1)$$

Здесь  $J_k$  — ток в  $k$ -м проводнике;  $u$  — скорость заряда  $Q$ ;  $E_k$  — электростатическое поле в точке нахождения  $Q$ , при расчете которого заряд  $Q$  считается отсутствующим, а потенциалы всех проводников, за исключением  $k$ -го, равного единице, принимаются при этом равными нулю. Эта формула выведена в предположении, что поле движущегося заряда удовлетворяет уравнению Лапласа, и не учитывает конечной скорости распространения электромагнитных волн. Дадим вывод точной формулы и сравним ее с приближенной формулой (1).

Поле  $E, H$  заряда  $Q$ , движущегося со скоростью  $u$  в системе из  $m$  заземленных проводников, удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u \quad (\int \rho dV = Q). \quad (2)$$

Рассмотрим электростатическое поле  $E_h$ , возбуждаемое в рассматриваемой системе постоянной сторонней единичной эдс, приложенной вдоль некоторого элемента  $dl_c$  линейного провода, соединяющего  $k$ -й электрод с землей (рис. 1); заряд  $Q$  при расчете  $E_h$  предполагается отсутствующим. Умножив скалярно уравнение (2) на  $E_k$  и вычтя из левой части получившегося равенства произведение  $H \text{ rot } E_h$ , что допустимо, так как  $\text{rot } E_h = 0$ , получим

$$E_k \text{ rot } H - H \text{ rot } E_k \equiv \text{div } [HE_h] = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} E_h + \rho u E_k,$$

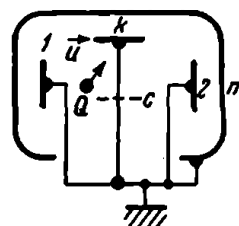


Рис. 1

или, интегрируя по всему пространству  $V$ , ограниченному поверхностями проводников  $s$ , найдем, используя теорему Гаусса и ограничиваясь случаем точечного заряда  $Q$ ,

$$\int_{(s)} [HE_h] \vec{d}s = QuE_h + \int_V \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} E_h dV. \quad (3)$$

Интеграл по бесконечно удаленной сфере обратился при этом в нуль, так как  $E_h$  убывает на бесконечности как  $r^{-2}$ . Поверхностный интеграл в формуле (3) сводится к интегралу по поверхности элемента  $dl_c$ , вдоль которого приложена постоянная единичная сторонняя эдс, так как на остальной поверхности проводников  $s$  касательная

составляющая  $E_k$  равна нулю. Учитывая сказанное, а также то, что циркуляция  $\mathbf{H}$  по контуру, охватывающему провод, равна току, текущему в нем, найдем

$$\int_{(s)} [\mathbf{H} \mathbf{E}_k] d\vec{s} = J_k,$$

после чего формула (3) принимает окончательный вид:

$$J_k = QuE_k + \int_{(V)} \mathbf{E}_k i_{cm} dV. \quad (4)$$

Здесь  $J_k$  — искомый ток, протекающий через сечение  $s$  (см. рис. 1)  $k$ -го провода, индуцированный полем  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , т. е. движущимся зарядом  $Q$ , а  $i_{cm}$  — плотность тока смещения, равная  $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ . Формула (4) является точной, заменяющей приближенную формулу (1). Первый член ее равен току, определяемому формулой (1), а второй играет роль поправочного.

Рассмотрим пример, в котором системой проводников является плоский диод (рис. 2), состоящий из двух дисков радиуса  $r_0$ , находящихся на расстоянии  $a$ . Пусть точечный заряд  $Q$  начинает двигаться в момент  $t = 0$  вдоль оси  $z$  от нижней пластины диода с постоянной скоростью  $u$  и момент  $t_0 = a/u$  достигает верхней пластины. Чтобы определить возникающий при этом в сечении  $s$  провода, соединяющего пластины, ток  $J$  (индекс  $k$  мы опустили), необходимо определить поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , возбуждаемое движущимся зарядом  $Q$ . В рассматриваемом

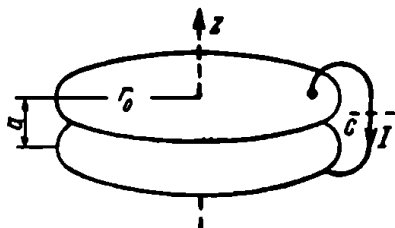


Рис. 2

примере при интегрировании по объему (в формуле (4)) можно ограничиться областью  $V_1$ , заключенной между пластинами диода. Действительно, электростатическое поле  $\mathbf{E}_1$  (индекс  $k = 1$ ), входящее под интеграл, может быть положено равным нулю всюду вне области  $V_1$ , если  $r_0 > a$  и краевой эффект незначителен. Таким образом, нам достаточно найти  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}$  только внутри  $V_1$ . Что касается  $E_1$ , то оно при пренебрежении краевым эффектом определяется внутри  $V_1$  выражением  $E_1 = E_{1z} = 1/a$ , и формула (4) принимает, учитывая сказанное, вид

$$J = \frac{Qu}{a} + \frac{1}{a} \int_0^a I_{cm} dz = \frac{Qu}{a} + \tilde{I}_{cm} \quad (I_{cm} = \int i_{cmz} ds), \quad (5)$$

где  $\tilde{I}_{cm}$  — среднее (по  $z$ ) значение всего тока смещения между пластинами.

Обычная формула (1) отличается от выведенной (5) отсутствием члена  $\tilde{I}_{cm}$ . Для учета его найдем поле  $\mathbf{E}$  движущегося заряда в области  $V_1$ . Предположим, что обе пластины имеют бесконечные размеры. Поле  $\mathbf{E}$  внутри  $V_1$  при этом мало изменится, если пренебречь отражением от краев пластин\*. Найдем поле, возбуждаемое между двумя бесконечными пластинами введенным выше движущимся зарядом. Заменяем последний эквивалентным ему линейным током  $j$ , текущим вдоль оси  $z$  между пластинами:  $j = Qu\delta(z - ut)$ , где  $\delta$  — дельта-функция. Этот ток как функцию  $t$  представим интегралом Фурье

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{j}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$\hat{j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Qu\delta(z - ut) e^{-i\omega t} dt = \frac{Q}{2\pi} e^{-i\omega z/u}. \quad (6)$$

\* Это, повидимому, допустимо; действительно, окончательная формула (14) достаточно хорошо передает основные черты процесса.



Теперь задача свелась к нахождению поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ , возбуждаемого линейным током  $\hat{j}(\omega) e^{i\omega t}$ , после чего искомого поле найдется путем интегрирования по  $\omega$ . Разложим этот ток на интервале  $0 < z < a$  в ряд Фурье по косинусам

$$\hat{j}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi}{a} z, \quad \text{где } b_n = \frac{uQ}{2\pi i a \omega} \left(1 - e^{-i \frac{\omega a}{u}}\right). \quad (7)$$

Теперь легко определить поле, возбуждаемое линейным током  $\hat{j}(\omega) e^{i\omega t}$ , текущим вдоль оси  $z$  на интервале  $0 < z < a$  между пластинами:

$$\mathbf{e} = \text{rot rot } \vec{\Pi}, \quad \mathbf{h} = i\omega \varepsilon \text{ rot } \vec{\Pi}, \quad \Pi = \Pi_z = -\frac{1}{i\varepsilon \omega} \sum_{n=0}^{\infty} b_n H_0^{(2)}(k_n r) \cos \frac{n\pi}{a} z \cdot e^{i\omega t}, \quad (8)$$

где  $k_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$ ,  $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega/v$ .

Возвращаясь к задаче о поле, возбуждаемом между конечными пластинами, мы, на основании сказанного ранее, будем считать, что и в этом случае оно описывается внутри  $V_1$  выражениями (8). Среднее (по  $z$ ) значение всего тока смещения, протекающего между пластинами диода в направлении  $z$ , для частоты  $\omega$  равно

$$\tilde{I}_{\text{см}}(\omega) = \frac{2\pi}{a} \int_0^a \int_0^{r_0} r i \omega \varepsilon e_z dr dz.$$

Переставляя сюда значение  $e_z$  из формулы (8), получим после интегрирования

$$\tilde{I}_{\text{см}}(\omega) = \frac{\pi b_0}{2i} \left\{ k r_0 H_1^{(2)}(k r_0) - \frac{2i}{\pi} \right\} e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Весь средний ток смещения  $\tilde{I}_{\text{см}}$  получится после интегрирования (9) по  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  (см. формулу (6)):

$$\tilde{I}_{\text{см}} = \frac{\pi}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} b_0 \left\{ k r_0 H_1^{(2)}(k r_0) - \frac{2i}{\pi} \right\} e^{i\omega t} d\omega. \quad (10)$$

Для того чтобы сделать подинтегральную функцию однозначной на комплексной плоскости  $\omega$ , необходимо провести на ней разрез вдоль отрицательной вещественной оси. При этом, в соответствии с принципом излучения и асимптотической формулой для функции Ганкеля  $H_1^{(2)}$ , интеграл в выражении (10) должен быть взят по нижнему берегу разреза.

Введем безразмерное время  $\tau = \frac{t}{r_0 \sqrt{\varepsilon \mu}} = t \frac{v}{r_0}$ , новое переменное  $\gamma = k r_0 = \frac{r_0}{v} \omega$  и заменим  $b_0$  ее значением, взятым из формул (7); тогда выражению (10) можно придать вид

$$\tilde{I}_{\text{см}} = \frac{Qu}{a} \{-F(\tau) + F(\tau - \tau_0)\}, \quad (11)$$

где

$$F(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_1^{(2)}(\gamma) - \frac{2i}{\pi \gamma} \right\} e^{i\tau \gamma} d\gamma, \quad \tau_0 = \frac{av}{r_0 u}. \quad (12)$$

Путь интегрирования в (12) проводится так же, как в формуле (10). Интеграл (12) можно вычислить для  $\tau < 1$ , смещая путь интегрирова-

ния параллельно самому себе вниз и применяя затем теорему о вычетах с учетом асимптотического поведения  $H_1^{(2)}$  на бесконечности.

При  $\tau > 1$  следует сначала при помощи соотношения обхода  $H_1^{(2)}(\gamma) = H_1^{(2)}(\gamma e^{2\pi i}) - 4J_1(\gamma)$  преобразовать путь интегрирования в формуле (12) в путь, проходящий вдоль верхнего берега разреза, а затем применить теорему о вычетах. При этом в выражение (12) войдет также табличный интеграл типа  $\int_0^{\infty} J_1(\gamma) e^{-i\tau\gamma} d\gamma$ . Проведя все эти преобразования, найдем

$$F(\tau) = 0, \quad \tau < 0; \quad F(\tau) = 1, \quad 0 < \tau < 1; \quad F(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}, \quad \tau > 1. \quad (13)$$

Теперь легко написать выражение для  $\tilde{I}_{cm}$  и  $J$  (см. (5)):

$$J = \frac{Qu}{a} \begin{cases} 0, & \tau < 1 \quad (t < r_0/v); \\ \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}, & 1 < \tau < 1 + \tau_0 \quad \left(\frac{r_0}{v} < t < \frac{r_0}{v} + \frac{a}{u}\right); \\ \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} - \frac{\tau - \tau_0}{\sqrt{(\tau - \tau_0)^2 - 1}}, & \tau > 1 + \tau_0 \quad \left(t > \frac{r_0}{v} + \frac{a}{u}\right), \end{cases} \quad (14)$$

в то время как ток, подсчитанный по формуле (1), равен

$$J = \frac{Qu}{a} \quad \text{при } 0 < \tau < \tau_0 \quad (0 < t < a/u); \\ J = 0 \quad \text{при } \tau < 0 \quad \text{и} \quad \tau > \tau_0 \quad (t < 0 \quad \text{и} \quad t > a/u). \quad (15)$$

Физический смысл формулы (14) вполне ясен. До момента  $t = r_0/v$  ток  $J$  в проводе отсутствует, так как заряд  $Q$  начинает двигаться в момент  $t = 0$ , а для того, чтобы вызванное им электромагнитное возмущение достигло провода, оно должно пройти со скоростью  $v$  путь не меньший чем  $r_0$ . В действительности этот путь больше (см. рис. 1) и „задержка“ должна быть больше  $r_0/v$ , однако формула (14) этого не учитывает, так как при ее выводе интегрирование производилось только по части пространства, заключенной между пластинами. В моменты  $t = 0$  и  $t = a/u$  производная скорости заряда  $Q$  обращается в бесконечность, поэтому в соответствующие моменты  $t = r_0/v$  и  $t = r_0/v + a/u$ , сдвинутые на время  $r_0/v$ , необходимое для распространения, ток  $J$  обращается в бесконечность. Ток  $J \neq 0$  и после прекращения движения заряда, так как в системе имеет место устанавливающийся процесс. Аперриодический характер последнего объясняется тем, что мы отбросили при вычислениях интеграл по внешнему пространству и пренебрегли отражением от краев дисков. При некоторых соотношениях между  $r_0$ ,  $a$ ,  $u$  процесс мог бы быть периодически затухающим.

Поступило  
11 IX 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Г. А. Гринберг, Избр. вопросы матем. теории электр. и  
1948, стр. 650.



*1953. Орденом Трудового Красного Знамени награждает К.Е. Ворошилов.*



*1954. С супругой Верой Михайловной на даче в Кратово.*

Я. Н. ФЕЛЬД

**О БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ О ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 5 II 1955)

Ряд граничных задач электродинамики, связанных с полубесконечными периодическими структурами, может быть сведен к бесконечной системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n} = B_m, \quad m \geq 0. \quad (1)$$

Займемся решением уравнений (1) относительно неизвестных  $A_n$  при следующих предположениях о поведении заданных последовательностей  $Z_m$  и  $B_m$ :

$$r_1 > r_2, \quad r_0 > r_2, \quad (2)$$

где

$$r_1^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|Z_m|}, \quad r_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|Z_{-m}|}, \quad r_0^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|B_m|}.$$

В наиболее интересном для практики случае, когда  $Z_{-m} = Z_m$ , условия (2) принимают вид:

$$r_1 = r_2^{-1} > 1, \quad r_0 > r_2. \quad (2a)$$

Переходя к решению системы (1), построим прежде всего функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n z^n. \quad (3)$$

Как это следует из условий (2), функция  $g(z)$  голоморфна в круге  $|z| < r_0$ , а  $G(z)$  — в кольце  $r_2 < |z| < r_1$ . Предположим также, что искомая функция  $f(z)$  голоморфна, как это будет показано ниже, в круге  $|z| < r$ , где  $r$  — наименьшее из чисел  $r_0$  и  $r_1$ . Тогда величины  $A_n$ , являющиеся коэффициентами разложения  $f(z)$  в ряд Тейлора, можно выразить при помощи формул Коши

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

где  $c$  — произвольный контур (в круге  $|z| < r$ ), охватывающий начало координат, который нам удобно выбрать лежащим в кольце  $r_2 < |z| < r$ .

Для последующего важно отметить, что из условия голоморфности функции  $f(w)$  при  $|w| < r$  немедленно следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} d\omega = 0 \quad \text{при } n < 0, \quad (4a)$$

и наоборот.

Вернемся теперь к системе (1) и подставим в нее вместо  $A_n$  выражение (4):

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{m-n} \oint_{(c)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} d\omega = B_m \quad \text{при } m \geq 0. \quad (5)$$

Учитывая (4a), можно в равенствах (5) суммирование по  $n$  проводить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поменяв, кроме этого, в (5) местами суммирование и интегрирование получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{m-n} \frac{1}{w^n} d\omega = B_m, \quad m \geq 0. \quad (5a)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{m-n}}{w^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Z_n}{w^{m-n}} = \frac{1}{w^m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n w^n = \frac{1}{w^m} G(w) \quad (6)$$

и (учитывая (3), а также формулы Коши для коэффициентов ряда Тейлора)

$$B_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{g(w)}{w^{m+1}} d\omega, \quad m \geq 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в уравнения (5a), придадим им окончательный вид

$$\oint_{(c)} \frac{f(w) G(w) - g(w)}{w^{m+1}} d\omega = 0 \quad \text{при } m \geq 0. \quad (8)$$

Уравнения (8) получены из заданной системы (1) при условии выполнения равенств (4a)

$$\oint_{(c)} \frac{f(w)}{w^{m+1}} d\omega = 0 \quad \text{при } m < 0. \quad (8a)$$

Поэтому решение системы (1) сводится к нахождению функции  $f(w)$ , удовлетворяющей уравнениям (8) и (8a). Последнюю задачу, в свою очередь, легко привести к неоднородной задаче Гильберта. Применительно к нашему случаю задачу Гильберта удобно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(w) = \begin{cases} \Phi^+(w) & \text{при } w \in s^+, \\ \Phi^-(w) & \text{при } w \in s^- \end{cases} \quad (9)$$

(где  $\Phi^+(w)$  голоморфна в области  $s^+$ , внешней по отношению к контуре  $c$ , и стремится к нулю при  $|w| \rightarrow \infty$ , а  $\Phi^-(w)$  — голоморфна в области  $s^-$ , внутренней по отношению к  $c$  по граничному условию

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) G(t) - g(t) \quad \text{на контуре } c. \quad (10)$$

Здесь  $G(t)$  и  $g(t)$  — заданные на  $c$  функции, удовлетворяющие условию Гельдера (H), причем  $G(t) \neq 0$  на  $c$ ;  $\Phi^+(t)$  и  $\Phi^-(t)$  — граничные значения  $\Phi(w)$  на  $c$  при стремлении  $w$  к точке  $t$  контура  $c$  из областей  $s^+$  и  $s^-$ , соответственно. Поскольку определенные формулами (3) функции  $G$  и  $g$  безусловно удовлетворяют условию (H), то, решив задачу

$$f(w) = \Phi^-(w). \quad (11)$$

Действительно, подставив (11) в уравнения (8) и (8a), перепишем их, учитывая (10), в виде

$$\int_{(c)} \frac{\Phi^+(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m \geq 0; \quad \int_{(c)} \frac{\Phi^-(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m < 0.$$

Вследствие голоморфности  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  в областях  $s^+$  и  $s^-$  и стремлении  $\Phi^+(w) \rightarrow 0$  при  $|w| \rightarrow \infty$  эти равенства тождественно удовлетворяются. Поскольку  $c$  — произвольный контур, лежащий в кольце  $r_2 < |w| < r$ , то предположение о голоморфности  $f(w)$  при  $|w| < r$  действительно выполняется (см. (11)). Впрочем, это и не нуждается в проверке, так как непосредственно следует из условий (8a), которые совместно с (8) положены в основу определения  $f(w)$ . Определив  $f(w)$  (формула (11)), немедленно найдем решение исходной системы (1) по формуле (4).

Таким образом, решение сведено к задаче Гильберта, которая подробно изучена (см. (1), гл. III, § 37).

Отсылая за подробностями к работе (1), выпишем оттуда решение неоднородной задачи Гильберта (9) — (10) для частного случая ( $\ln G(t)$  однозначен \*\* на  $c$ ), когда оно всегда существует и единственно\*\*\*,

$$\Phi(w) = \frac{X(w)}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{g(t) dt}{X^+(t)(t-w)}. \quad (12)$$

Здесь  $X(w)$  — каноническое решение однородной задачи Гильберта, т. е. задачи (9) — (10) при  $g(t) \equiv 0$  и при условии, что  $X(w)$  остается конечным, когда  $|w| \rightarrow \infty$ .

Для иллюстрации метода рассмотрим волновод прямоугольного сечения ( $a \times b$ ), в котором может распространяться только волна  $H_{10}$ . Вдоль положительной полуоси  $z$  волновода установим в плоскости симметрии перпендикулярно широкой стенке  $a$  бесконечный ряд металлических стержней длины  $b$  на расстоянии  $l$  друг от друга. Если на стержни со стороны отрицательных  $z$  падает волна  $H_{10}$ , то в стержнях возбуждаются токи, величина которых не меняется вдоль стержней. Для нахождения поля в такой системе достаточно определить токи  $A_n$  ( $n \geq 0$ ), наведенные в стержнях падающей волной. Токи  $A_n$  удовлетворяют системе уравнений типа (1). Для того чтобы получить ее, определим  $y$ -овую компоненту (параллельную оси стержней) электрического вектора  $E^{n,m}$  основной волны  $H_{10}$ , возбуждаемой током  $A_n$   $n$ -го стержня на оси  $m$ -го стержня:

$$E_{n,m} = \alpha A_n e^{-i\gamma l |m-n|}, \quad m \neq n, \quad (13)$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad \alpha = -\frac{120 \pi b}{\gamma a}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Если  $l$  настолько велика, что высшие типы волн успеют затухнуть на длине  $l$ , то, учитывая граничные условия на поверхности стержней, можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha e^{-i\gamma l |m-n|} + e^{-i\gamma l m} = 0, \quad m \geq 0, \quad (14)$$

\* Так как в нашем случае  $G$  голоморфно в окрестности контура  $c$ , то небольшой деформацией  $c$  можно добиться, чтобы  $G(t) \neq 0$  на  $c$ .

\*\* Это выполняется, в частности, когда в формуле (3)  $Z_{-m} = Z_m$ .

\*\*\* Если  $\arg G(t)$  получает положительное приращение, когда  $t$  обходит  $c$  против часовой стрелки, то для существования решения необходимо наложить добавочные условия на коэффициенты  $B_m$  (см. (1), § 37).

где  $e^{-i\gamma l m}$  —  $u$ -овая составляющая электрического вектора падающей волны на оси  $m$ -го стержня.

При этом, как обычно, учитывая малость радиусов  $\rho$  стержней, наведенная эдс  $E_{n,m} \cdot l$  берется не на поверхности стержня, а на его оси. Исключение составляет эдс  $E_{m,m} \cdot l$ , наведенная собственным током, на что указывает штрих у знака суммы. Это означает, что при  $n = m$  коэффициент у  $A_m$  должен быть взят равным

$$Z_0 = \frac{E_{m,m}}{A_m} \cong 60 \text{ кВ} \ln \left( \frac{\beta k \rho}{2} \right), \quad \beta = 1,781. \quad (14a)$$

Для решения уравнений (14), которые аналогичны системе (1), применим изложенную выше методику. Функции  $G$  и  $g$  (см. (3)) имеют теперь вид

$$G(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha e^{-i\gamma l |n|} w^n = \alpha \left\{ Z_0 + \frac{w}{e^{i\gamma l} - w} + \frac{e^{-i\gamma l}}{w - e^{-i\gamma l}} \right\}, \quad r_2 < |w| < r_1; \quad (15)$$

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\gamma l n} w^n = \frac{e^{i\gamma l}}{w - e^{i\gamma l}}, \quad |w| < r_0, \quad (16)$$

где  $r_1 = r_2^{-1} = |e^{i\gamma l}| > 1$ ,  $r_0 = |e^{i\gamma l}|$ , т. е. условия (2a) выполнены.

При этом мы предположили (на время), что  $\text{Im} \gamma < 0$ , т. е. что среда, заполняющая волновод, обладает некоторыми потерями. Каноническое решение однородной задачи Гильберта для  $G(t)$  в рассматриваемом случае находится элементарно. Пусть контур  $c$  совпадает с кругом  $|w| = 1$ , тогда из (15) следует

$$X(w) = \begin{cases} X^+(w) \equiv \alpha (Z_0 - 1) \frac{w - w_1}{w - e^{-i\gamma l}}, & w \in s^+, \\ X^-(w) \equiv \frac{w - e^{i\gamma l}}{w - w_2}, & w \in s^-, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$w_{1,2} = \cos \gamma l + i \frac{\sin \gamma l}{Z_0 - 1} \mp \sqrt{\left( \cos \gamma l + i \frac{\sin \gamma l}{Z_0 - 1} \right)^2 - 1}, \quad |w_1| < 1, \quad |w_2| > 1.$$

Используя формулы (11), (12), (16) и (17), получим

$$f(w) = \frac{2 \sin \gamma l e^{i\gamma l}}{i \alpha (Z_0 - 1) (w_1 - e^{i\gamma l})} \frac{1}{w - w_2}, \quad (18)$$

после чего токи  $A_n$  найдем при помощи формулы (4):

$$A_n = \frac{2i \sin \gamma l e^{i\gamma l}}{\alpha (Z_0 - 1) (w_1 - e^{i\gamma l})} \frac{1}{w_2^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Полученное решение, очевидно, справедливо и при вещественном  $\gamma$ . Если  $\gamma l = \pi n$ , то  $A_n = 0$ . Коэффициент отражения в сечении  $z = 0$ , где расположен стержень с  $n = 0$ , очевидно, равен

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha A_n e^{-i\gamma l n} = \frac{2i \sin \gamma l e^{i\gamma l}}{(Z_0 - 1) (w_1 - e^{i\gamma l}) (w_2 - e^{-i\gamma l})}.$$

При  $\gamma l = n\pi$   $R = -1$ .

Поступило  
5 II 1955

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ПАРНЫЕ СИСТЕМЫ БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С БЕСКОНЕЧНЫМИ  
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ**

(Представлено академиком А. И. Бергом 11 VII 1955)

Ряд задач математической физики может быть сведен к решению системы уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n}^{11} + \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n \beta^n Z_{m-n}^{12} = C_m^1, \quad m \geq 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n Z_{m-n}^{21} + \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n Z_{m-n}^{22} = C_m^{(2)}, \quad m < 0.$$
(1)

Здесь  $A_n$  и  $B_n$  — искомые величины, а остальные постоянные заданы. Введем следующие функции:

$$G^{mk}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n^{mk} \omega^n, \quad m, k = 1, 2; \quad g^+(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 \omega^n;$$

$$g^-(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n^{(2)} \omega^n; \quad f_+(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega^n; \quad f_-(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n \omega^n.$$
(2)

Будем полагать, что заданные последовательности  $Z_n^{mk}$ ,  $C_n^1$ ,  $C_n^{(2)}$  таковы, что три первых ряда сходятся в некотором кольце  $\rho_1 < |\omega| < \rho_2$  и функции  $G^{11}(\omega)$ ,  $G^{22}(\omega)$  не имеют в нем нулей.

Пусть постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют неравенству\*.

$$r_1 < r_2, \quad \text{где } r_1 = \max(\rho_1, \rho_1 |\beta|^{-1}), \quad r_2 = \min(\rho_2, \rho_2 |\alpha|^{-1}). \quad (2a)$$

Ниже будет показано, что последние два ряда в (2) также будут сходиться при  $|\omega| < \rho_2$  и  $|\omega| > \rho_1$ , соответственно.

Выберем контур  $L$ , охватывающий начало координат и лежащий в кольце  $r_1 < |\omega| < r_2$ . Тогда очевидны равенства:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_+(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = \begin{cases} A_n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0; \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_-(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = \begin{cases} B_n, & n < 0; \\ 0, & n \geq 0; \end{cases} \quad (3a)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_+(\alpha\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = \begin{cases} A_n \alpha^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0; \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_-(\beta\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = \begin{cases} B_n \beta^n, & n < 0; \\ 0, & n \geq 0. \end{cases} \quad (4a)$$

Действительно, например,  $f_+(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \alpha^n) \omega^n$  голоморфна при  $|\omega| < r_2$ , если, как было предположено ранее,  $f_+(\omega)$  голоморфна при  $|\omega| < \rho_2$  (см. (2a)), контур же  $L$  лежит в области  $|\omega| < r_2$ . Аналогично доказываются остальные равенства.

\* Условие достаточное, но не необходимое.

Подставив теперь в систему (1) выражения (3а) и (4а), найдем, учитывая также равенства (3б) и (4б): 309

$$\int_L f_+(w) G^{11}(w) \frac{dw}{w^{m+1}} + \int_L f_-(\beta w) G^{12}(w) \frac{dw}{w^{m+1}} = 2\pi i C_m^1, \quad m \geq 0; \quad (5)$$

$$\int_L f_+(\alpha w) G^{21}(w) \frac{dw}{w^{m+1}} + \int_L f_-(w) G^{22}(w) \frac{dw}{w^{m+1}} = 2\pi i C_m^{(2)}, \quad m < 0.$$

При этом мы использовали преобразования типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z_{m-n}^{21} \int_L \frac{f_+(\alpha w)}{w^{n+1}} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{m-n}^{21} \int_L \frac{f_+(\alpha w)}{w^{n+1}} d\omega = \int_L f_+(\alpha w) G^{21}(w) \frac{dw}{w^{m+1}},$$

где переход к суммированию по  $n$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  сделан на основании соотношений типа (4б).

Выражения (2) для  $g^+$  и  $g^-$  позволяют написать

$$C_m^1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L^-)} \frac{g^+(w)}{w^{m+1}} dw, \quad m \geq 0; \quad C_m^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L^+)} \frac{g^-(w)}{w^{m+1}} dw, \quad m < 0, \quad (5a)$$

где  $L^-$  и  $L^+$  — произвольные контуры, охватывающие начало координат и лежащие в области  $\rho_1 < |w| < \rho_2$ , соответственно вне и внутри  $L$ . Используя (5а), уравнениям (5) можно придать вид:

$$\int_L \{f_+(w) G^{11}(w) + f_-(\beta w) G^{12}(w)\} \frac{dw}{w^{m+1}} = \int_{(L^-)} g^+(\mu) \frac{d\mu}{\mu^{m+1}}, \quad m \geq 0; \quad (6)$$

$$\int_L \{f_+(\alpha w) G^{21}(w) + f_-(w) G^{22}(w)\} \frac{dw}{w^{m+1}} = \int_{(L^+)} g^-(\nu) \frac{d\nu}{\nu^{m+1}}, \quad m < 0.$$

Уравнения (6) получены из заданной системы (1) при условии выполнения равенств (3б) и (4б), т. е.

$$\int_L \frac{f_+(\alpha^k w)}{w^{n+1}} d\omega = 0, \quad n < 0, \quad k = 0, 1; \quad (7)$$

$$\int_L \frac{f_-(\beta^k w)}{w^{n+1}} d\omega = 0, \quad n \geq 0, \quad k = 0, 1.$$

Таким образом, уравнения (6) и (7) эквивалентны заданной системе (1). Определив из (6) и (7)  $f_+$  и  $f_-$ , найдем  $A_n$  и  $B_n$  при помощи (3а). Так как система (6), (7) линейна относительно  $f_+$  и  $f_-$ , то эти функции при  $w$ , лежащем в кольце между  $L^+$  и  $L^-$ , имеют вид

$$f_{\mp}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L^-)} g^+(\mu) \varphi_{\pm}^{(1)}(w, \mu) d\mu + \int_{(L^+)} g^-(\nu) \varphi_{\mp}^{(2)}(w, \nu) d\nu. \quad (8)$$

Функции  $\varphi_{\mp}^{(1)}(w)$  и  $\varphi_{\mp}^{(2)}(w)$  (зависимость от  $\mu$  и  $\nu$  для краткости опускаем) при этом должны удовлетворять следующей системе уравнений на  $L$ :

$$\varphi_{+}^{(k)}(w) G^{11}(w) + \varphi_{-}^{(k)}(\beta w) G^{12}(w) = \frac{\Phi_{-}^{(k)}(w)}{(w - \mu)^{2-k}}, \quad (9)$$

$$\varphi_{+}^{(k)}(\alpha w) G^{21}(w) + \varphi_{-}^{(k)}(w) G^{22}(w) = \frac{\Phi_{+}^{(k)}(w)}{(w - \nu)^{k-1}}, \quad k = 1, 2,$$

где: I.  $\Phi_{-}^{(k)}(w)$ ,  $\varphi_{-}^{(k)}(w)$ ,  $\varphi_{-}^{(k)}(\beta w)$  ( $k = 1, 2$ ) — функции, голоморфные на контуре  $L$  и вне его. II.  $\varphi_{-}^{(k)}(w)$ ,  $\Phi_{-}^{(k)}(w)$  равномерно стремятся к нулю, а  $\Phi_{-}^{(1)}(w)$  остается равномерно ограниченной, когда  $|w| \rightarrow \infty$ . III.  $\Phi_{+}^{(k)}(w)$ ,  $\varphi_{+}^{(k)}(w)$ ,  $\varphi_{+}^{(k)}(\alpha w)$  голоморфны на контуре  $L$  и внутри его. IV.  $\Phi_{-}^{(1)}(\mu) = -1$ ,  $\Phi_{+}^{(2)}(\nu) = 1$ .

Подстановка выражений (8) с учетом (9) и условий I — IV в уравнения (6), (7) убеждает нас в справедливости сказанного.

Из выражений (8), где  $\varphi_{\mp}^{(k)}$  удовлетворяют системе (9), следует, что  $f_+(\omega)$  и  $f_-(\omega)$  голоморфны при  $|\omega| < \rho_2$  и  $|\omega| > \rho_1$  соответственно, как это и предполагалось ранее.

Таким образом мы свели решение системы (1) к задаче (9), аналогичной неоднородной задаче Гильберта для двух кусочно-голоморфных функций.

Рассмотрим в качестве примера волновод прямоугольного сечения  $a \times b$ , в котором может распространяться только волна  $H_{10}$ . Вдоль оси  $z$  волновода установим в плоскости симметрии перпендикулярно широкой стенке  $a$  бесконечный ряд металлических стержней длины  $b$ , причем интервал между стержнями, расположенными вдоль положительной полуоси  $z$ , сделаем равным  $l$ , а вдоль отрицательной  $d$ . Если эту систему возбудить, приложив вдоль  $n_0$ -го ( $n_0 < 0$ ) стержня единичную стороннюю напряженность поля, то в стержнях, расположенных вдоль положительной и отрицательной полуосей, наведутся соответственно токи  $A_n$  ( $n \geq 0$ ) и  $B_n$  ( $n < 0$ ), величина которых не меняется вдоль оси стержня.

Для определения поля достаточно найти указанные токи, которые удовлетворяют уравнениям типа (1). Переходя к выводу этих уравнений, определим компоненту (параллельную оси стержней) электрического вектора  $E_{nm}$  основной волны  $H_{10}$ , возбуждаемой током  $n$ -го стержня на оси  $m$ -го (при  $m \neq n$ ),

$$\begin{aligned} E_{nm} &= \zeta A_n e^{-i\gamma l |m-n|}, & m \geq 0, n \geq 0; \\ E_{nm} &= \zeta B_n e^{-i\gamma l |m-n|} e^{-i\gamma n \Delta}, & m \geq 0, n < 0 \text{ и т. д.}, \end{aligned}$$

где  $\Delta = l - d$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\zeta = -120 \pi k/\gamma a$ ,  $\gamma = \sqrt{k^2 - \pi^2/a^2}$ .

Если  $l$  и  $d$  настолько велики, что высшие типы волн успевают затухнуть на пути  $l$  и  $d$ , то граничные условия на поверхности идеально проводящих стержней можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta e^{-i\gamma l |m-n|} + \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n \zeta e^{-i\gamma l |m-n|} e^{-i\gamma n \Delta} &= 0, & m \geq 0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta e^{-i\gamma d |m-n|} e^{-i\gamma n \Delta} + \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n \zeta e^{-i\gamma d |m-n|} &= -\delta_{mn_0}, & m < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом, как обычно, учитывая малость радиусов стержней, наведенное поле  $E_{nm}$  взято на оси стержней. Исключение составляет  $E_{mm}$ , на что указывает штрих у  $\Sigma$ . Он означает, что при  $n = m$  коэффициент у  $A_m$  и  $B_m$  должен быть взят равным  $Z_0$  (погонное сопротивление излучения одиночного штыря в волноводе).

Уравнения (10) являются частным случаем системы (1), когда

$$\begin{aligned} Z_n^{11} = Z_n^{12} = \zeta e^{-i\gamma l |n|}, \quad Z_n^{22} = Z_n^{21} = \zeta e^{-i\gamma d |n|}, \quad n \neq 0; \\ C_n^1 = 0, \quad C_n^{(2)} = -\delta_{mn_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому, используя (11), найдем при помощи формул (2)

$$\begin{aligned} G^{11}(\omega) = G^{12}(\omega) = \zeta (Z_0 - 1) \frac{(\omega - w_1)(\omega - w_2)}{(\omega - e^{-i\gamma l})(\omega - e^{i\gamma l})}, \quad g^+(\omega) = 0; \\ G^{22}(\omega) = G^{21}(\omega) = \zeta (Z_0 - 1) \frac{(\omega - w'_1)(\omega - w'_2)}{(\omega - e^{-i\gamma d})(\omega - e^{i\gamma d})}, \quad g^-(\omega) = -\omega^{n_0}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} = p \mp \sqrt{p^2 - 1}, \quad p = \cos \gamma l + i \frac{\sin \gamma l}{Z_0 - 1}, \quad |\omega_1| < 1, \quad |\omega_2| > 1, \\ \omega'_{1,2} = q \mp \sqrt{q^2 - 1}, \quad q = \cos \gamma d + i \frac{\sin \gamma d}{Z_0 - 1}, \quad |\omega'_1| < 1, \quad |\omega'_2| > 1. \end{aligned}$$

Очевидно, в рассматриваемом случае  $\rho_1 = \max(|\omega_1|, |\omega'_1|, |e^{-i\gamma l}|, |e^{-\gamma d}|) < 1$ , а  $\rho_2 = \rho_1^{-1}$ , если положить, что  $\text{Im } \gamma < 0$ , т. е. среда внутри волновода обладает потерями.

Если, например,  $\Delta > 0$ , то условие (2а) принимает вид  $|\beta| > \rho_1^2$ ; 311  
оно выполняется, если  $\Delta < 2d$ .

В случае отсутствия потерь решение может быть получено, если положить, что  $\gamma$  в уравнениях (10) всюду, за исключением множителя  $e^{-i\gamma\Delta n} = \beta^n$ , обладает отрицательной мнимой частью. При этом  $|\beta| = 1$  и условие (2а) сводится к  $\rho_1 < \rho_2$ . Решение таким образом может быть проведено при любых  $\Delta$ . В окончательных формулах для  $A_n$  и  $B_n$  следует затем положить  $\text{Im } \gamma = 0$ .

Так как  $g^+(w) = 0$  (см. (12)), то решение уравнений (10) сводится на основании (8) к нахождению функций  $\varphi_{\pm}^{(2)}$  при помощи системы (9), которая принимает вид:

$$\begin{aligned} \{\varphi_{+}^{(2)}(w) + \varphi_{-}^{(2)}(\beta w)\} G^{11}(w) &= \Phi_{-}^{(2)}(w), \\ \{\varphi_{+}^{(2)}(\beta w) + \varphi_{-}^{(2)}(w)\} G^{22}(w) &= \frac{\Phi_{+}^{(2)}(w)}{w - v} \quad \text{на } L. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко проверить, что решением этой системы с учетом формул (12) являются функции

$$\begin{aligned} \varphi_{-}^{(2)}(w) &= \frac{D_1(w\beta^{-1} - e^{i\gamma l}) + D_2(w - e^{-i\gamma d})}{(w - w'_1)(w - v)}; \\ \varphi_{+}^{(2)}(w) &= \frac{C_1(w - e^{i\gamma l}) + (w\beta^{-1} - e^{-i\gamma d})C_2}{w - w_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь величины  $D_1, D_2, C_1, C_2$  находятся из 4 условий, вытекающих из требований I—IV,

$$\begin{aligned} \lim_{|w| \rightarrow \infty} \{\varphi_{+}^{(2)}(w) + \varphi_{-}^{(2)}(\beta w)\} &= 0, \quad \varphi_{+}^{(2)}(e^{i\gamma l}) + \varphi_{-}^{(2)}(\beta e^{i\gamma l}) = 0, \\ \varphi_{+}^{(2)}(\beta e^{-i\gamma d}) + \varphi_{-}^{(2)}(e^{-i\gamma d}) &= 0, \quad \Phi_{+}^{(2)}(v) = 1. \end{aligned} \quad (14a)$$

Подставляя в (14а) выражения (14) и разрешая их, найдем

$$C_1 = \frac{C}{v - w'_2}, \quad C_2 = -\beta C_1, \quad D_1 = D' \frac{e^{-i\gamma d} - v}{v - w'_2}, \quad D_2 = D'' \frac{e^{i\gamma d} - v}{v - w'_2}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sin \gamma d}{\zeta(Z_0 - 1) \sin \gamma l} \left[ \frac{e^{-i\gamma d} - w'_1}{e^{-i\gamma l} - w_2} - \frac{e^{i\gamma d} - w'_1}{e^{i\gamma l} - w_2} \right]^{-1} \\ D' &= C\beta \frac{\sin \gamma l (e^{-i\gamma d} - w'_1)}{\sin \gamma d (w_2 - e^{-i\gamma l})}; \quad D'' = C \frac{\sin \gamma l (e^{i\gamma d} - w'_1)}{\sin \gamma d (e^{i\gamma l} - w_2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы (8) с учетом (14) и (15) позволяют определить  $f_{\pm}(w)$ , после чего, используя (3а), найдем

$$\begin{aligned} A_n &= -4\pi C \sin \gamma l \frac{(w'_2)^{n_0}}{w_2^{n+1}}; \\ B_n &= 2\pi i (w'_k)^{n_0} (D'\beta^{-1} + D'') \frac{(w'_k - e^{i\gamma d})(w'_k - e^{-i\gamma d})}{(w'_k)^{n+1} (w'_2 - w'_1) (-1)^k} + \\ &+ 2\pi i (w'_2)^{n_0} \frac{D'\beta^{-1} (w'_1 - e^{i\gamma d})(e^{-i\gamma d} - w'_2) + D'' (w'_1 - e^{-i\gamma d})(e^{i\gamma d} - w'_2)}{(w'_1 - w'_2)(w'_1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

$k = 1$  при  $n < n_0$ ;  $k_2 = 2$  при  $n_0 < n < 0$ .

Поступило  
9 VII 1955

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ПАДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВОЙНЫЕ  
БЕСКОНЕЧНЫЕ РЕШЕТКИ**

(Представлено академиком А. И. Бергом 6 VIII 1955)

Рассмотрим диффракцию электромагнитной волны  $E^0, H^0$  произвольной формы на двойной металлической решетке, состоящей из двух рядов бесконечных параллельных стержней радиуса  $r_0$ , смещенных относительно друг друга как в продольном, так и перпендикулярном направлениях (см. рис. 1). Перенумеруем стержни так, как показано на рис. 1,

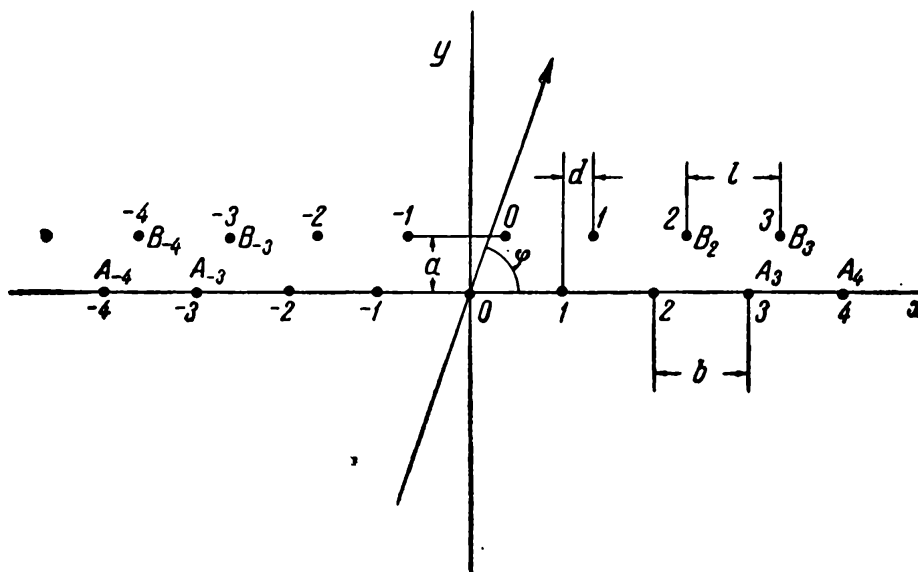


Рис. 1

и обозначим токи в стержнях нижней и верхней решетки  $A_n$  и  $B_n$ , соответственно. Будем полагать, что вектор  $E^0$  параллелен осям стержней и не зависит от координаты  $z$ , что, как легко сообразить, не уменьшает общности постановки задачи. Если стержни тонкие ( $r_0 \ll \lambda$ ;  $\lambda$  — длина волны) и можно пренебречь потерями в них\*, то граничные условия на поверхности стержней позволяют написать следующую систему уравнений для определения токов  $A_n$  и  $B_n$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{m-n}^{11} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n Z_{m-n}^{12} = C_m^{(1)}, \quad -\infty < m < \infty;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{m-n}^{21} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n Z_{m-n}^{22} = C_m^{(2)}, \quad -\infty < m < \infty.$$

(1)

\* Учет конечной проводимости легко провести, например, так, как это указано в работе (1).

$$\begin{aligned} Z_n^{11} = Z_n^{22} = \alpha H_0^{(2)}(kl|n|) \quad \text{при } n \neq 0, \quad Z_0^{11} = Z_0^{22} = \alpha H_0^{(2)}(kr_0), \\ Z_n^{12} = \alpha H_0^{(2)}(k\sqrt{(d-nl)^2 + a^2}), \quad Z_n^{21} = \alpha_0 H_0^{(2)}(k\sqrt{(d+nl)^2 + a^2}), \quad (2) \\ C_m^1 = -E^0(q_m), \quad C_m^{(2)} = -E^0(g_m), \quad \alpha = -\frac{i \cdot 60}{r_0 H_1^{(2)}(kr_0)}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \end{aligned}$$

где  $l$ ,  $d$ ,  $a$  указаны на рисунке;  $q_m$  и  $g_m$  — точки нахождения оси  $m$ -го стержня соответственно нижней и верхней решеток на рис. 1. Дадим общий метод решения системы (1), полагая, что заданные последовательности  $Z_n^{\nu\mu}$  и  $C_m^1$ ,  $C_m^{(2)}$  таковы, что нижеследующие ряды сходятся в нужной области и операции законны.

Для этого умножим уравнения (1) на  $e^{imw}$  и просуммируем по  $m$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда, учитывая, что, например,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{m-n}^{11} e^{imw} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inw} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m^{11} e^{imw}, \quad (3)$$

придадим системе (1) вид:

$$f(w) G^{11}(w) + \varphi(w) G^{12}(w) = g^1(w); \quad f(w) G^{21}(w) + \varphi(w) G^{22}(w) = g^{(2)}(w), \quad (4)$$

где, учитывая (3):

$$\begin{aligned} G^{\nu\mu}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n^{\nu\mu} e^{inw}, \quad \nu, \mu = 1, 2; \quad f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inw}, \\ \varphi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{inw}; \quad g^{(\nu)}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(\nu)} e^{inw}, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции  $G(w)$  и  $g(w)$  известны, поэтому, разрешая (4) относительно  $f(w)$  и  $\varphi(w)$ , найдем

$$f(w) = \frac{g^1(w) G^{22}(w) - g^{(2)}(w) G^{12}(w)}{G^{11}(w) G^{22}(w) - G^{12}(w) G^{21}(w)}; \quad \varphi(w) = \frac{g^{(2)}(w) G^{11}(w) - g^1(w) G^{21}(w)}{G^{11}(w) G^{22}(w) - G^{12}(w) G^{21}(w)}. \quad (6)$$

Так как искомые точки  $A_n$  и  $B_n$  являются коэффициентами Фурье функций  $f(w)$  и  $\varphi(w)$  (см. (5)), то, определив последние, легко найдем решение системы (1) по известным формулам

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{ip}^{2\pi+ip} f(w) e^{-inw} dw, \quad B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{ip}^{2\pi+ip} \varphi(w) e^{-inw} dw. \quad (7)$$

Здесь  $p$  — вещественное число, подбираемое так, чтобы интегралы (7) существовали (в частности,  $p$  может равняться нулю).

Зная токи в стержнях решетки, не представляет труда определить, например, результирующее электрическое поле по очевидной формуле

$$\begin{aligned} E = E^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha A_n H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-nl)^2 + y^2}) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha B_n H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-nl-d)^2 + (y-a)^2}), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x$ ,  $y$  — координаты точки наблюдения.

После получения общего решения поставленной задачи рассмотрим подробнее случай, когда падающая волна плоская: 314

$$E^0 = e^{-ih(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}; \quad (9)$$

здесь  $\varphi$  — угол между направлением движения волны и осью  $x$  (см. рис. 1).

Очевидно, при этом (см. (2))

$$C_m^1 = -e^{-ikml \cos \varphi}, \quad C_m^{(2)} = -De^{-ikml \cos \varphi}, \quad D = e^{-ih(x \cos \varphi + a \sin \varphi)}, \quad (10)$$

и из формул (5) следует

$$g^1(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\omega-\beta)} = -2\pi\delta_{2\pi}(\omega-\beta), \quad g^{(2)}(\omega) = -2\pi D\delta_{2\pi}(\omega-\beta), \quad (11)$$

$$\beta = kl \cos \varphi;$$

здесь  $\delta_{2\pi}(\omega)$  — периодическая дельта-функция, совпадающая в пределах периода  $2\pi$  с обычной.

Положим в формулах (7)  $p = 0$ ; при этом, как будет видно из дальнейшего, все операции имеют смысл. Подставляя затем выражения (6) в формулы (7), найдем, учитывая (11):

$$A_n = Ae^{-in\beta}, \quad A = \frac{DG^{12}(\beta) - G^{22}(\beta)}{G^{11}(\beta)G^{22}(\beta) - G^{12}(\beta)G^{21}(\beta)},$$

$$B_n = Be^{-in\beta}, \quad B = \frac{G^{21}(\beta) - DG^{11}(\beta)}{G^{11}(\beta)G^{22}(\beta) - G^{12}(\beta)G^{21}(\beta)}. \quad (12)$$

Зная токи в стержнях, определим полное поле при помощи формулы (8):

$$E = E^0 + \alpha A \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-nl)^2 + y^2})e^{-in\beta} +$$

$$+ \alpha B \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-nl-d)^2 + (y-a)^2})e^{-in\beta}. \quad (13)$$

Полученные ряды весьма медленно сходятся, поэтому мы преобразуем их при помощи формулы (см. (1), стр. 578, формула (35))

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n\Delta} H_0^{(2)}(2\pi\mu\sqrt{(n-\delta)^2 + \varepsilon^2}) =$$

$$= \frac{i}{\pi} e^{i2\pi\delta\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi n\delta} e^{-2\pi\varepsilon[(n+\Delta)^2 - \mu^2]^{1/2}}}{\sqrt{(n+\Delta)^2 - \mu^2}}, \quad (14)$$

где знак у корней в правой части следует выбирать так, чтобы  $\operatorname{Re}(\varepsilon\sqrt{(n+\Delta)^2 - \mu^2}) \geq 0$ ,  $\operatorname{Im}(\varepsilon\sqrt{(n+\Delta)^2 - \mu^2}) \geq 0$ .

Используя (14), придадим выражению (13) вид

$$E = E^0 + AF(x, y) + BF(x-d, y-a), \quad (15)$$

где

$$F(x, y) = \frac{i\alpha}{\pi} e^{-i\beta x/l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi n x/l} e^{-2\pi y/l[(n-\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2]^{1/2}}}{\sqrt{(n-\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2}}.$$

Если  $\frac{l}{\lambda} < \frac{1}{1 + |\cos \varphi|}$ , то, пренебрегая высшими типами волн, экспоненциально затухающими с ростом  $|y|$ , следует сохранить в сумме (15) только нулевой член, после чего получим

$$E = E^0 + \frac{\alpha\lambda}{\pi l \sin \varphi} \{A + Be^{ik(d \cos \varphi + a \sin \varphi)}\} E^0 \quad \text{при } y > a; \quad (16)$$

$$E = E^0 - \frac{\alpha\lambda}{\pi l \sin \varphi} \{A + Be^{ik(d \cos \varphi - a \sin \varphi)}\} e^{-ik(x \cos \varphi - y \sin \varphi)} \quad \text{при } y < 0.$$

Коэффициенты отражения и преломления при этом равны

$$R = -\frac{\alpha\lambda}{\pi l \sin \varphi} \{A + Be^{ik(d \cos \varphi - a \sin \varphi)}\} e^{2iky \sin \varphi}, \quad y < 0;$$

$$Q = 1 + \frac{\alpha\lambda}{\pi l \sin \varphi} \{A + Be^{ik(d \cos \varphi + a \sin \varphi)}\}.$$

Для определения постоянных  $A$  и  $B$ , входящих во все полученные формулы, необходимо на основании (12) знать  $G^{\nu\mu}(\beta)$  ( $\nu, \mu = 1, 2$ ). Используя (2) и (5), немедленно найдем:

$$G^{11}(w) = G^{22}(w) = \alpha H_0^{(2)}(kr_0) + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(2)}(kln) \cos nw,$$

$$G^{12}(w) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{(nl+d)^2 + a^2}) e^{inw}, \quad (18)$$

$$G^{21}(w) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{(nl-d)^2 + a^2}) e^{inw}.$$

Эти ряды вследствие их плохой сходимости следует преобразовать при помощи формул типа (14), после чего найдем

$$G^{12}(\beta) = \frac{\alpha i}{\pi} e^{i\beta d/l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi n l/l} e^{-2\pi a/l[(n+\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2]^{1/2}}}{V(n+\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2};$$

$G^{21}(\beta)$  получается из предыдущей формулы заменой  $d$  на  $-d$ , а

Таблица 1		
$a/\lambda$	$ R $	$ Q $
0,00	0,974	0,226
0,25	0,994	0,110
0,50	0,973	0,229

$$G^{11}(\beta) = \alpha H_0^{(2)}(kr_0) + \frac{\alpha}{\pi} \left\{ -\pi + 2i \ln \left( K \frac{l}{2\lambda} \right) + \right.$$

$$+ \frac{i}{V(\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{V(n+\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{V(n-\beta/2\pi)^2 - (l/\lambda)^2} - \frac{2}{n} \right] \right\},$$

где  $\ln K = 0,5772$ . Эти выражения совместно с (12) позволяют определить  $A$  и  $B$ , а значит,  $E$ ,  $R$ ,  $Q$ .

В табл. 1 приведены значения модулей коэффициентов отражения  $|R|$  и преломления  $|Q|$  (по полю), рассчитанные по формулам (17) для двойной решетки при  $\varphi = 90^\circ$ ,  $l = 0,2 \lambda$ ,  $d = 0,1 \lambda$ ,  $r_0 = 0,01 \lambda$ . Отметим, что при  $a = 0$  и произвольном  $d$  мы приходим к одинарной решетке, у которой расстояния между стержнями различны и принимают попеременно значения, равные  $d$  и  $l - d$ .

Указанный выше прием решения применим также для системы, состоящей из любого конечного числа решеток, при произвольной форме падающей (первичной) волны  $E^0$ ,  $H^0$ .

Поступило  
5 VIII 1955

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> James R. Wait, Canad. J. of Physics, № 9 (1954).



## ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ АНТЕНН И ФИДЕРНЫХ УСТРОЙСТВ В СССР

*А. А. Пистолькорс, Я. Н. Фельд*

### ВВЕДЕНИЕ

За 40 лет, прошедших со дня Великой Октябрьской социалистической революции, советская наука и техника ушли далеко вперед. Радиотехника принадлежит к числу тех областей техники, где этот прогресс чувствуется особенно сильно. Практически современная радиотехника была почти полностью создана за истекшее сорокалетие.

Настоящая статья посвящена краткому обзору путей развития за 40 лет одной из специфических областей радиотехнической науки — теории антенн и фидерных систем. Развитие этой теории, примыкающей с одной стороны к электродинамике, а с другой — к радиотехнике как таковой, — сыграло немаловажную роль в достижениях последней.

В разработке теории антенно-фидерных систем советские ученые имеют немалые заслуги. Естественно, что в кратком обзоре нет возможности подробно перечислить все, что сделали советские ученые в этой области. Мы остановимся лишь на наиболее важных работах и, в первую очередь, на таких, которые явились вкладом советской науки в развитие мировой науки в области антенн и линий передачи.

### 1. АНТЕННЫ ДЛИННЫХ И СРЕДНИХ ВОЛН

40 лет назад основными типами антенн являлись Г-образные и Т-образные антенны. Радиотехников тогда, в первую очередь, интересовал вопрос о настройке антенны, т. е. о расчете ее реактивного входного сопротивления. Вот почему большое значение для того времени имели работы М. В. Шулейкина [1], посвященные расчету емкости антенн. Независимо от Хоу, предложившего известный метод расчета емкости радиосетей, Шулейкин разработал свой, более простой метод расчета, получивший у нас широкое распространение и дававший особенно хорошие результаты, когда погонная емкость антенны была одинаковой по всей длине.

Метод расчета входного сопротивления антенны, состоящей из неоднородных частей (например, Т-образной с широким горизонтальным полотном и сравнительно тонким снижением) был разработан И. Г. Кляцкиным [2]; он применяется и до сих пор.

Вторым, стоявшим на очереди вопросом, был вопрос о КПД антенны и, в первую очередь, о расчете ее сопротивления излучения  $R_{\Sigma}$ . Для этой цели применялась известная формула Рюденберга

$$R_{\Sigma} = 160\pi^2 \frac{h_d^2}{\lambda^2},$$

но понятие действующей высоты  $h_d$  для распространенных тогда антенн было неясно. Этот вопрос был разрешен Шулейкиным [3]. Для расчета сопротивления потерь в антенне  $R_{\Pi}$  им же была предложена формула

$$R_{\Pi} = A \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

долгое время игравшая большую роль в расчетах антенн. Здесь  $\lambda_0$  — собственная волна антенны;  $A$  — некоторый коэффициент.

Само понятие коэффициента полезного действия антенны  $\eta_A$  было введено Кляцкиным [2], предложившим для него формулу:

$$\eta_A = \frac{R_\Sigma}{R_\Sigma + R_{\Pi}}.$$

Следующим вопросом, возникшим в связи с ростом строительства радиовещательных антенн, явился вопрос о расчете частотной характеристики антенны. Методы расчета полосы частот, пропускаемых антенной, были разработаны в 1930—1932 гг. Кляцкиным [4] и М. И. Конторовичем [5, 6].

## 2. МЕТОД НАВЕДЕННЫХ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩИХ СИЛ

Большую роль в развитии теории антенн сыграл метод наведенных эдс, предложенный в 1922 г. советским физиком Д. А. Рожанским [7] и независимо от него французским ученым Бриллюэном.

В первоначальной его трактовке метод этот позволял определять мощность и сопротивление излучения одиночного провода с заданным вдоль него током, не прибегая к интегрированию вектора Пойнтинга по поверхности достаточно удаленной сферы.

Впервые к чисто антенным вопросам применил его Кляцкин [8], рассчитавший сопротивление излучения несимметричного заземленного провода произвольной длины. Дальнейшее развитие метод получил в работах А. А. Пистолькорса [9, 10, 11], который распространил его на систему вибраторов. Сопротивление излучения отдельного вибратора в системе было представлено при этом в виде суммы из собственного и наведенных остальными вибраторами сопротивлений. В этих же работах были даны таблицы активных составляющих наведенных сопротивлений для полуволновых параллельных и перпендикулярных вибраторов.

Принципиальный интерес, для своего времени, имела работа А. Е. Сузанта [12], в которой он показал, что сопротивления излучения, рассчитанные по методу наведенных эдс и по методу вектора Пойнтинга, должны совпадать. Хотя, принципиально, метод наведенных эдс позволял находить как вещественную, так и мнимую составляющие сопротивления излучения, однако первым оценил роль мнимой составляющей в теории антенн В. В. Татаринев. Он же дал оригинальный метод расчета наведенных комплексных сопротивлений излучения, сводящий расчет мнимой составляющей к расчету вещественной, но при наличии сдвига фаз между токами вибраторов, и составил наиболее подробные таблицы комплексных наведенных сопротивлений для полуволновых параллельных вибраторов [13, 14, 15].

Расчетные формулы для наведенных сопротивлений, при произвольно ориентированных друг относительно друга вибраторах, были даны в статье Б. П. Афанасьева [16].

Громоздкость общих формул для наведенных сопротивлений привела к появлению работ, в которых получены приближенные простые формулы, выведенные в предположении, что вибраторы находятся на достаточном расстоянии друг от друга (в дальней зоне). Такие формулы даны в работах А. З. Фрадина [17] и Г. Т. Маркова [18].

Примыкающей к рассматриваемым является работа М. Л. Левина [19], в которой он, исходя из комплексной теоремы Пойнтинга, выразил мнимую составляющую сопротивления излучения через разность средних энергий магнитного и электрического полей. Это позволило ему получить формулы для мнимых составляющих собственных сопротивлений различных вибраторов, отличающихся формой продольного профиля.

Метод наведенных эдс является вполне точным, если его применять к расчету мощности и сопротивления излучения системы линейных проводов с заданным вдоль них распределением токов. Однако уже в первых работах Пистолькорса [10] и, особенно, Татарина [13] этот метод применялся также для определения амплитуд токов в клеммных сечениях отдельных вибраторов. При этом предполагаются заданными распределения сторонних эдс вдоль вибраторов, а токи ищутся в виде подходящих функций с постоянными множителями, которые и надлежит определить. Точность результата зависит от выбора указанных функций, а сам метод расчета аналогичен методам Галеркина или Ритца, если ограничиться в них первым членом ряда.

В этой связи значительный методический интерес представляет работа Конторовича [20], посвященная детальному анализу метода наведенных эдс с точки зрения выяснения основных положений, на которых он базируется.

### 3. МНОГОВИБРАТОРНЫЕ АНТЕННЫ

В двадцатых — тридцатых годах, в связи с широким внедрением коротковолновой связи, происходило интенсивное развитие техники коротковолновых антенн. Наиболее распространенные из них представляли собой решетки из синфазных полуволновых горизонтальных или вертикальных вибраторов. Различные типы таких антенн были разработаны Татариновым и М. А. Бонч-Бруевичем. Развитие решеток в горизонтальном и вертикальном направлениях позволяло получать узкие диаграммы направленности, а применение зеркал из активных или пассивных вибраторов уничтожало заднее излучение.

Для оценки направленных свойств антенны Пистолькорсом [22] был введен специальный параметр — коэффициент направленного действия, являющийся в настоящее время основной характеристикой антенной системы.

Первые работы по теории таких антенн опубликованы Бонч-Бруевичем [23, 24, 25]. В частности, им были получены, путем интегрирования вектора Пойнтинга по поверхности удаленной сферы, формулы для сопротивления излучения.

Однако дальнейшее развитие теории многоэтажных антенн стало возможным лишь в результате создания метода наведенных эдс.

После работ Пистолькорса [9, 10, 11, 22] Татаринов разработал в ряде статей [13, 14, 15] детальную методику расчета синфазных многоэтажных антенн как с активными, так и пассивными зеркалами. На базе своих работ по теоретическому и экспериментальному исследованию антенн Татариновым была написана монография [26], сыгравшая большую роль в развитии антенной техники в Советском Союзе.

Наряду с активно питаемыми вибраторами, в антенной технике широкое применение получили пассивные вибраторы, используемые в качестве рефлекторов и директоров. Первая работа по исследованию пассивных вибраторов была опубликована Татариновым в 1925 г. [27]. После нее появилась работа Пистолькорса [28], в которой при помощи уравнения баланса активной мощности и экспериментальной кривой Татарина для сдвига фаз исследовалось рефлекторное действие пассивного вибратора.

Использование как активных, так и реактивных составляющих наведенных сопротивлений позволило Татаринову [13] создать чисто теоретический метод расчета пассивных вибраторов.

В перечисленных работах, в соответствии с приемами, используемыми в методе наведенных эдс, закон распределения тока вдоль вибраторов считался заданным, и определялись комплексные амплитуды тока в клеммных сечениях вибраторов.

Иной подход к решению задачи о распределении тока в пассивном вибраторе был дан в работе М. С. Неймана [29]. Им было составлено уравнение электродинамического равновесия для пассивного вибратора с учетом первичного возбуждающего поля, создаваемого активным вибратором, и найдено распределение тока вдоль пассивного вибратора при любой его длине. Уравнение электродинамического равновесия находилось в приближении теории длинных линий.

Применение метода наведенных эдс к расчету токов в пассивных вибраторах линейных решеток осевого излучения, например антенн типа «волновой канал», успеха пока не имело. Объясняется это громоздкостью решения системы уравнений для токов при большом числе вибраторов и отсутствием простых формул для наведенных сопротивлений (в случае вибраторов произвольной длины), входящих коэффициентами в указанные уравнения. Однако при небольшом числе директоров такие расчеты проводились. Наиболее удачной является работа А. М. Моделя [30], где при ряде упрощающих предположений проведены расчеты антенн типа «волновой канал».

Теории линейных решеток осевого излучения с активно питаемыми вибраторами посвящена работа В. Д. Кузнецова [31]. В ней детально исследовалась зависимость кнд от длины решетки и сдвига фаз между соседними излучателями. Показано, что для каждой длины решетки существует оптимальная фазовая скорость волны в питающей вибраторы линии. Скорость эта стремится к скорости света при увеличении длины решетки.

#### 4. ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

Решетки проводов применяются в антенной технике не только в качестве излучателей, когда каждый из них настраивается в резонанс, но и для других целей. Так, двумерные решетки используются для экранировки или в качестве отражающих поверхностей, заменяющих сплошной металл. Наконец, в последнее время диффракционные и замедляющие свойства решеток стали применять для создания различного рода излучающих и канализирующих систем.

Развитие теории таких решеток шло главным образом в направлении создания приближенных методов их расчета.

Из серии посвященных им работ следует, прежде всего, отметить статью Конторовича [32], в которой впервые использована идея замены дискретной решетки из тонких проводов или лент непрерывной поверхностью с импедансными (усредненными) граничными условиями. Эта идея получила развитие в работах Б. Я. Мойжеса [33, 34], которому удалось найти, при определенных ограничениях, наложенных на геометрию решеток, соответствующие импедансные граничные условия, существенно упрощающие решение задач о диффракции электромагнитных волн у решеток.

Обобщение граничных условий Мойжеса на случай решеток, состоящих из широких лент с узкими щелями, дано в работе Н. Н. Смирнова [35] при помощи принципа двойственности.

Теории трехмерных решеток посвящена работа Моделя [36]. Представляя такие системы в виде ряда плоских решеток и считая, что для каждой из последних известны коэффициенты отражения и прохождения, он находит, при помощи уравнений в конечных разностях, волновое число для основной волны, распространяющейся в трехмерной решетке. Метод этот, по существу, сводится к замене решетки двухпроводной линией с периодически включенными нагрузками.

Ряд работ по диффракции электромагнитных волн на бесконечных и полубесконечных решетках опубликован Я. Н. Фельдом [37, 38, 39]. В них решение бесконечных систем линейных уравнений для токов в элементах решетки сведено к нахождению эквивалентных аналитических

функций. Для бесконечных решеток эти функции находятся элементарно, а для полубесконечных — в результате решения неоднородной задачи Гильберта. Таким способом рассмотрены двойные и одинарные полубесконечные решетки в волноводе и двойные бесконечные решетки в свободном пространстве. Значительный интерес представляет работа Л. А. Вайнштейна [40], в которой строго решена задача о диффракции электромагнитных волн на решетке из параллельных лент при нормальном падении волны на нее и ширине лент, равной зазору между ними. Задача решена для Е-и Н-поляризации падающей волны.

Исследованию диффракции плоской электромагнитной волны у проводочной сетки при косом падении, посвящена также работа В. Г. Ямпольского [41].

## 5. ПОСТРОЕНИЕ АНТЕННЫ ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

Если в первых работах, касавшихся направленного действия антенн, решалась прямая задача: «по заданному распределению тока в проводе или токов в системе вибраторов рассчитать диаграмму направленности антенны», то в дальнейшем, во второй половине 30-х гг., развитие антенной техники поставило перед советскими и зарубежными учеными обратную задачу: «рассчитать распределение токов или полей в антенне, обеспечивающее получение заданной диаграммы направленности». При этом естественным являлось желание получить заданную диаграмму при наименьших габаритах антенны.

Впервые (у нас и за границей) рассматриваемая задача была сформулирована Г. С. Раммом [42], исследовавшим распределение тока  $f(u)$  в вертикальном проводе, необходимое для получения заданной (антифэдинговой) диаграммы направленности  $F(\varphi)$  в вертикальной плоскости, где  $\varphi$  — угол, отсчитываемый от оси провода. Указанные величины связаны следующим равенством:

$$F(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{u_0} \int_0^{u_0} f(u) \cos(u \cos \varphi) du, \quad (1)$$

где  $u = kx$ ;  $u_0 = kl$ ;  $x$  — текущая координата вдоль провода длины  $l$ ;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число.

При заданной диаграмме направленности  $F(\varphi)$  выражение (1) можно рассматривать как интегральное уравнение для определения функции  $f(u)$ . Исследуя это интегральное уравнение, Рамм показал, что если ограничить величину  $M$ , равную отношению максимального тока в антенне к его среднему значению, то решение существует далеко не всегда, т. е. не всякая диаграмма направленности может быть воспроизведена линейным излучателем при указанном условии. Исследование Рамма показало, что требуемое распределение тока при коротком проводе будет сложным: оно будет осциллирующим с частой переменной фазы; при этом максимальные значения тока сильно возрастут.

В 1941 г. И. И. Вольман [43] расширил пределы интегрирования в уравнении (1) до  $\pm\infty$ , подразумевая, что за пределами провода ток равен нулю. Вводя

$$t = \cos \varphi \text{ и } \psi(t) = \frac{u_0 F(\varphi)}{\sin \varphi},$$

Вольман получает:

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iut} du,$$

откуда при помощи трансформации Фурье находит искомую функцию рас-

пределения тока вдоль провода:

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-iux} dx. \quad (2)$$

Выражение (2) явилось исходным для ряда исследований, выполненных в дальнейшем различными авторами. Это выражение является приближенным, так как не гарантирует равенства нулю тока за пределами провода.

В 1939 г. Фрадин [44] исследовал вопрос о возможности получения от сферической антенны остронаправленной диаграммы с осевой симметрией. Он получает коэффициент направленности  $D$  сферического излучателя как функцию коэффициентов разложения в ряд векторного потенциала по элементарным сферическим волнам и ищет максимум  $D$  при заданном конечном числе членов разложения. При уменьшении радиуса сферы токи на ее поверхности, необходимые для реализации острой диаграммы направленности, приобретают переменного-фазный характер и сильно возрастают по амплитуде. Волновая зона отодвигается за счет расширения зоны индукции. Связанное с этим возрастание реактивной мощности антенны вызывает резкое снижение ее диапазонности. Эти черты, общие для всех так называемых «малогабаритных» антенн, не позволяют на практике сокращать размеры направленных антенн далее некоторого определенного предела.

В 1939 г. Пистолькорсом [45] был предложен метод построения системы из дискретных излучателей по заданной диаграмме направленности, использующий разложение функции плоской волны  $e^{-ikh \cos \varphi}$  в ряд по бесселевым функциям. При этом напряженность поля антенны выражается в виде ряда Фурье, коэффициенты которого зависят от токов во всех вибраторах. Проведенные по указанному методу расчеты подтвердили и для случая дискретных излучателей справедливость ограничений для малогабаритных антенн.

Позднее [46] этим же автором был предложен метод построения антенн с непрерывным распределением поля в раскрыве, основанный на применении функций Матье. Этот метод оказался чрезвычайно удобным для антенн с размерами порядка нескольких длин волн и получил дальнейшее развитие в работах Л. Д. Бахраха [47, 48], установившего, в частности, интересную связь между коэффициентом направленного действия антенны и коэффициентами разложения поля в ряд по функциям Матье. В 1946 г. А. И. Узковым [49] был рассмотрен вопрос об оптимальном кнд линейной системы продольного излучения из  $n$  излучателей, расположенных на одинаковом расстоянии один от другого. Им было показано, что с уменьшением этого расстояния, при соответствующем выборе амплитуд и фаз токов в излучателях, оптимальный кнд становится пропорциональным  $n^2$ ; при очень малых расстояниях и большом  $n$  это означает переход к уже упоминавшимся «малогабаритным» антеннам.

За последние годы большая работа в рассматриваемом направлении проделана Л. Б. Тартаковским. Им подробно рассмотрен вопрос о диаграмме направленности линейного проводника конечной длины для случаев синфазного и несинфазного распределения тока [50, 51]; исходя из возможности варьировать фазовую диаграмму антенны (которая обычно не задается), автор рассматривает вопрос об оптимальном распределении амплитуды и фазы тока в антенне при заданной амплитудной диаграмме направленности.

Попутно им предложен метод определения тока в антенне при помощи системы функций

$$f_n(u_0, \varphi) = J_n(u_0 \cos \varphi),$$

которая, аналогично системе функций Матье, также является полной системой и позволяет аппроксимировать заданную диаграмму направленности.

Важный вывод получен Тартаковским [52] в отношении решения рассматриваемой задачи указанным выше методом преобразования интеграла Фурье. Им показано, что при заданной длине провода практически наилучшее приближение к заданной диаграмме среди токов с медленным изменением фазы дает функция распределения токов, равная в пределах провода интегралу Фурье от заданной диаграммы.

Из общего числа работ, опубликованных в мировой литературе и посвященных рассматриваемой проблеме, не менее половины принадлежит советским ученым.

## 6. ТЕОРИЯ ПРИЕМНОЙ АНТЕННЫ И ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ

Наряду с теорией передающих антенн развивалась также теория приемных антенн.

Характер возбуждения приемной антенны, при помощи плоской падающей волны, существенно отличен от возбуждения передающей антенны, осуществляемого (в проволочных антеннах) сосредоточенной электродвижущей силой. Поэтому, на первой стадии, теория приемных антенн развивалась в достаточной степени независимо. Изучались законы распределения тока вдоль приемной антенны при различных углах падения плоской волны, вводились специфические параметры, характеризующие работу антенны в режиме приема. Основными здесь являются работы Пистолькорса, в которых изучалось распределение тока в приемном проводе при различных углах падения плоской волны и любых сопротивлениях приемника, а также рассматривались вопросы вторичного излучения [53, 54].

Состояние этого направления развития теории подытожено в книге Пистолькорса [55], посвященной проволочным приемным антеннам. Расчету вибраторных приемных антенн с рефлекторами посвящена обширная работа И. А. Домбровского [56].

Нельзя не отметить весьма оригинальной работы Фрадина [57], в которой им сделана попытка построения теории приемных антенн, исходя из теории антенн с пассивными рефлекторами. Удаляя рефлектор на достаточное расстояние, он рассматривает его как приемную антенну и получает все ее параметры, исходя из соответствующих соотношений Татарина для пассивных рефлекторов.

Дальнейшее развитие теории приемных антенн базируется на использовании электродинамического принципа взаимности. основополагающей здесь является известная работа Неймана [58]. В этой работе он, исходя из принципа взаимности, развил теорию приемных антенн, позволяющую находить все параметры антенны в режиме приема через ее параметры в режиме передачи. Такой подход привел к тесной связи между теорией приемных и передающих антенн, и последующее их развитие шло в виде единой теории антенн. В опубликованной в 1955 г. работе А. Р. Вольперта [59], базирующейся также на принципе взаимности, проведено дальнейшее уточнение теории, учитывающее фазовые соотношения между током в приемной антенне и падающим полем. В этой же работе исследуются диаграммы и мощность вторичного излучения приемной антенны.

Принцип взаимности сформулирован впервые в оптике Л. И. Мандельштамом [60]. В виде, удобном для использования в теории антенн, принцип этот был разработан в обстоятельной работе М. П. Свешниковой [61], выполненной под руководством Мандельштама. Наряду с уточнением и исправлением результатов Зоммерфельда по теоремам взаимности для электрических и магнитных диполей, ею был детально исследован принцип взаимности для антенн конечных размеров. В этой же работе был использован ряд интересных приемов, сыгравших большую роль в дальнейшем при разработке методов решения граничных задач электродинамики. Принцип взаимности был вначале сформулирован для гармонических ко-

лебаний определенной частоты и при условии, что сопротивления приемника и генератора, подключаемых к антенне в режиме приема и передачи, равны. В работах Фельда [62, 63] принцип взаимности был обобщен в двух направлениях. В первой — на случай произвольно изменяющихся во времени негармонических процессов. Во второй — на случай неравных друг другу сопротивлений генератора и приемника, подключаемых к одной и той же антенне в режимах передачи и приема.

## 7. ТЕОРИЯ ВИБРАТОРА

Теории проволочных вибраторов, которые на метровых и более длинных волнах являются основными элементами антенн, посвящено значительное число работ. В большинстве из них, при нахождении законов распределения тока вдоль вибратора и при определении реактивной составляющей входного сопротивления, пользовались, без должного обоснования, теорией длинных линий. Для тонких вибраторов результаты расчета достаточно хорошо совпадали с экспериментом. Дать обоснование этому стало возможным только после появления работ М. А. Леонтовича и М. Л. Левина [64, 65], в которых они независимо от Халлена и другим методом получили интегродифференциальное уравнение для распределения тока вдоль тонкого вибратора. Решая это уравнение разложением в ряд по малому параметру, авторы показали, что в первом приближении законы распределения тока аналогичны законам, вытекающим из теории длинных линий. Следующие приближения дают соответствующие поправки и позволяют определить также затухание и укорочение волны вдоль вибратора.

Параметром малости задачи является логарифмический декремент затухания вибратора. Эта теория применима для очень тонких вибраторов, для которых логарифм отношения длины  $l$  к диаметру  $d$  вибратора велик по сравнению с единицей. На метровых и более коротких волнах последнее требование в ряде случаев может не выполняться. Поэтому весьма желательным является обобщение этой теории на случай более толстых вибраторов, когда  $l/d \gg 1$ , но  $\ln l/d$  нельзя считать большим. При этом, вероятно, более четко выяснится также роль параметров  $l/d$  и  $\lambda/d$ , различие между которыми пока несколько нивелировано в существующей теории.

Теория тонких вибраторов в дальнейшем распространена А. И. Ахизером и Г. Я. Любарским [66] на случай вибраторов, расположенных внутри волноводов.

Наряду с тонкими, широкое распространение в антенной технике получили так называемые «толстые» вибраторы, диаметр которых соизмерим с длиной. Первой теоретической работой, позволяющей подойти к расчету таких вибраторов, явилась работа А. Е. Сузанта [67], опубликованная в 1937 г. В ней вибратор аппроксимировался вытянутым эллипсоидом вращения, вдоль средней части которого прикладывалась сторонняя эдс. Решение уравнений Максвелла проводилось в эллиптической системе координат методом разделения переменных.

В результате удалось построить, насколько это позволяли слабо табулированные функции задачи, кривые распределения тока вдоль эллипсоида и найти сопротивление излучения.

Дальнейшее развитие это направление получило в двух работах М. Г. Белкиной [68]. В первой рассматривалось возбуждение вытянутого эллипсоида вращения электрическим диполем, расположенным на оси эллипсоида вдоль нее. Вычислено значительное число диаграмм направленности для различных геометрических соотношений и показано, что характерной особенностью вытянутого эллипсоида является сильное излучение назад — в сторону, противоположную расположению диполя. Во второй работе изучалось возбуждение сплюснутого эллипсоида электрическим и магнитным диполями. В частности, рассмотрена задача о возбуждении диска горизонтальным магнитным диполем, расположенным на его оси. Это, по-видимому, единственно решенная до сего времени задача о несим-



метричном возбуждении эллипсоида вращения. В связи с теорией вибратора, нельзя не отметить также работу Б. Л. Брауде [21]. В ней поднимается вопрос о необходимости учитывать, при составлении интегрального уравнения для распределения истинного электрического тока, текущего по вибратору, и магнитные токи, эквивалентные сторонней эдс, приложенной к вибратору. Обсуждение этого вопроса было продолжено в статье Гапонова и Миллера [204], которые уточнили ряд высказаний Брауде. Они, в частности, показали, что поле вне вибратора, удовлетворяющее заданным на его поверхности граничным условиям, может быть получено при различном выборе типа источников, распределенных по вибратору. Это могут быть чисто электрические (как у Леонтовича и Левина) или магнитные токи, или те и другие (как предлагает Брауде).

## 8. ТЕОРИЯ ЦЕЛЕВЫХ АНТЕНН. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Переход к сверхвысоким частотам в радиотехнике привел к появлению нового типа антенн, в которых излучение осуществляется через отверстия или щели, прорезанные в металлических поверхностях. Прорезание щелей в замкнутой металлической поверхности, внутри которой тем или иным способом возбуждено поле, приводит к искажению распределения токов на ней, нарушению экранировки и, следовательно, к излучению энергии наружу. На этом принципе построено значительное количество типов одно- и многощелевых антенн.

Первая работа, посвященная таким антеннам, была опубликована Нейманом [69]. В ней изучались небольшие, по сравнению с волной, отверстия, прорезанные в поверхности полых резонаторов. При помощи приближенной концепции были рассчитаны диаграммы направленности, мощность и сопротивление излучения таких антенн, названных автором диффракционными. Работа эта привлекла внимание к щелевым антеннам и сыграла большую роль в развитии их теории. Более точные формулы для расчета излучения через малые отверстия были даны в статье Мандельштама [70]. Однако дальнейшее развитие этих систем пошло по пути использования узких щелей, главным образом полуволновых, после того как, благодаря принципу двойственности, стали очевидны их преимущества.

Впервые принцип двойственности был сформулирован в работе Пистолькорса [71]. Он устанавливает простую связь между полем, излучаемым произвольной щелью, прорезанной в бесконечно тонком, идеально проводящем бесконечном плоском экране, и полем соответствующего ей ленточного вибратора, дополняющего экран до бесконечной плоскости. При возбуждении щели сторонней силой, прикладываемой непосредственно к краям щели, поле щели  $\vec{E}_{щ}$ ,  $\vec{H}_{щ}$  связано с полем соответствующего вибратора  $\vec{E}_в$ ,  $\vec{H}_в$  соотношением  $\vec{E}_{щ} = \vec{H}_в$ ,  $\vec{H}_{щ} = -\vec{E}_в$  (в гауссовой системе единиц). В этой же работе [71], посвященной общей теории щелевых антенн в плоских экранах, выведена простая связь между проводимостью излучения щели и сопротивлением излучения соответствующего вибратора и дан ряд других важных соотношений.

Впоследствии принципу двойственности были посвящены еще две работы: работа Леонтовича [72], в которой аналогичный принцип был рассмотрен в теории диффракции плоских волн у экранов, и работа Фельда [73]. В последней принцип двойственности был распространен на случай возбуждения щели произвольными источниками, расположенными в одном из полупространств. Связь между полями в полупространстве, где нет источников, имеет при этом вид

$$\vec{E}_{щ} = \vec{E}^0 + \vec{H}_в, \quad \vec{H}_{щ} = \vec{H}^0 - \vec{E}_в$$

( $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$  — невозмущенное поле первичных источников).

Принцип двойственности во многом аналогичен принципу Бабине для абсолютно поглощающих экранов, но в отличие от последнего он является строгим.

Для щелей в плоских достаточно больших экранах принцип двойственности позволяет дать ответ на большинство интересующих нас вопросов, сводя задачу к соответствующим проволочным вибраторам, теории которых хорошо разработана. Однако в ряде практических конструкций щели прорезаются в криволинейных замкнутых поверхностях, для которых принцип двойственности, строго говоря, не применим. В этих случаях приходится непосредственно определять поля внутри и вне металлической поверхности так, чтобы выполнялись граничные условия на металле и поле было непрерывно при переходе через отверстия. В работах Фельда [74, 75] было показано, что в случае узких щелей на криволинейных поверхностях распределение напряжения вдоль них удовлетворяет интегродифференциальному уравнению, сводящемуся в первом приближении к уравнению, аналогичному телеграфному.

Для многощелевых антенн задача определения напряжений в клеммных сечениях щелей свелась [76] к решению системы линейных уравнений, аналогичных уравнениям типа Кирхгофа для многовибраторных антенн, с той только разницей, что в них вместо наведенных сопротивлений и эдс фигурируют наведенные проводимости (внутренние и внешние) и магнитодвижущие силы.

Л. С. Бененсон [77] распространил эту систему линейных уравнений на случай наличия в волноводе как щелей, так и вибраторов, рассчитал наведенные сопротивления для щелей различных типов и связал их с амплитудами парциальных волн, возбуждаемых в волноводе.

Таким образом методы определения распределения напряжений вдоль щелей оказались во многом подобными используемым в теории проволочных вибраторов для нахождения тока вдоль них. Исключение составляют щели, прорезанные в поверхности резонатора, при частоте возбуждения, равной или близкой одной из собственных частот замкнутого резонатора. Случай этот не имеет аналога в теории проволочных вибраторов и исследован Фельдом [78]. Уравнение для напряжения вдоль щели оказывается значительно сложнее и даже в первом приближении не сводится к телеграфному и имеет порядок выше второго на величину, равную кратности вырождения собственной частоты резонатора. Результаты эти были распространены на случай нескольких щелей в работе А. В. Гапонова [79].

Зная распределение напряжения вдоль щелей, можно определить поле снаружи и внутри антенной системы, решая внешнюю и внутреннюю первую граничную задачу электродинамики для соответствующих областей пространства, после чего можно определить все интересующие практику параметры щелевых антенн.

Решению таких задач применительно к различным типам щелевых антенн посвящено значительное число работ. Так, в работах Пистолькорса [80, 81, 82, 83], опубликованных в 1944—1947 гг., дана общая теория кольцевой щели в плоском экране, решена внешняя задача (включая расчет диаграмм направленности) для системы продольных щелей в круговом цилиндре, изучено распространение электромагнитных волн вдоль бесконечной щели в проводящем экране, волн в желобе и рассмотрен ряд других задач. Внешней задаче об излучении щелей, прорезанных в круговом цилиндре, посвящена также работа Левина [84], в которой найдены внешние проводимости излучения щелей и уточнены выражения для полей.

В ряде работ Фельда [85, 86], Вольмана [87] и Левина [88, 89] изучены щели в круглых и прямоугольных волноводах и цилиндрическом резонаторе. В этих работах основное внимание уделялось внутренней задаче, т. е. изучались поля внутри волноводов и резонаторов при наличии щелей. К общей теории щелевых антенн можно, пожалуй, отнести работы [90] 1943—1944 гг., в которых сформулированы первая, вторая и смешан-

ная граничные задачи электродинамики и развиты методы их решения при помощи вспомогательных полей, аналогичных функциям Грина. В этих же работах было показано, что если отверстие в металлической поверхности заматаллизировать и распределить на нем магнитные диполи или токи с плотностью  $\vec{K}_\mu = [\vec{n}\vec{E}]$ , то поле при этом не изменится.

Многочисленные результаты, полученные в теории щелевых антенн, позволяют считать ее доведенной до уровня теории проволочных антенн.

## 9. ТЕОРИИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ АНТЕНН

### Зеркальные антенны

В сороковых годах вместе с внедрением в практику радиотехники и, в частности, радиолокации остронаправленных зеркальных антенн стала усиленно разрабатываться их теория.

В первую очередь разрабатывались методы расчета параболических зеркал. Из многочисленных работ, посвященных этому вопросу, мы отметим здесь работу Узкова [91], который одним из первых дал метод расчета параболической зеркальной антенны по распределению токов на зеркале. Эти токи находились им приближенно по касательной составляющей магнитного вектора невозмущенного поля облучателя.

Из других вопросов расчета зеркальных антенн внимание советских ученых привлекло применение для указанной цели принципа стационарной фазы. Этот вопрос рассматривался в работах Конторовича и Ю. К. Муравьева [92], Б. Е. Кинбера и Тартаковского [93, 94].

Теория перископической антенной системы (с вспомогательным плоским зеркалом, изменяющим направление луча) разрабатывалась Тартаковским и А. М. Покрас [95].

Расчету отражающих поверхностей с волнистым или ребристым профилем посвящены работы Л. М. Бреховских [96, 97], Ю. П. Лысакова [98] и Л. Н. Дерюгина [99], детально разработавшего теорию поверхностных волн, возникающих при отражении от ребристых поверхностей.

### Антенны поверхностных волн

Внимание антенных специалистов за последние годы привлекли к себе вопросы теории поверхностных волн, распространяющихся вдоль диэлектрического слоя или вдоль ребристой проводящей поверхности.

М. А. Миллер [100] в 1952 г. рассматривал вопросы распространения электромагнитных волн над плоской поверхностью с анизотропными однородными граничными условиями. Расчету фазовой и групповой скорости поверхностных волн посвящена работа В. Я. Сморгонского [101]. Методы расчета диаграмм направленности антенн поверхностных волн с малым замедлением разрабатывались К. И. Гринева [102]. Исследование поверхностных волн вдоль ребристых структур выполнено Дерюгиным в упоминавшейся уже работе [99].

Специальный случай структур с очень тонкими ребрами строго рассмотрен Вайнштейном [103].

### Спиральные антенны

На сантиметровых и дециметровых волнах широкое распространение получили спиральные антенны, излучающие поле с вращающейся поляризацией в режиме осевого излучения.

Расчеты таких антенн базируются на теории распространения волн вдоль бесконечных цилиндрических спиралей. Основные работы по распространению волн вдоль бесконечных спиральных линий принадлежат С. Х. Когану [104, 105]. Он впервые, достаточно строго, изучил электромагнитные поля, распространяющиеся вдоль таких систем, нашел веще-

ственные корни характеристического уравнения, определил фазовые скорости распространяющихся волн и области их существования.

При помощи интегрального уравнения Фока ему удалось также решить задачу о возбуждении волн в бесконечной спирали при помощи сторонней эдс (типа дельта-функции), приложенной к участку провода спирали. В своей последней работе [106] он рассмотрел распространение волн вдоль бесконечной ленточной спирали. При этом он получил решение, справедливое для спиралей из очень узких и широких лент. В последнем случае ленточная спираль переходит, по существу, в щелевую спиральную линию. Щелевая бесконечная спиральная линия впервые была изучена в работе С. А. Вакина [107]. Распространению свободных колебаний вдоль бесконечной спиральной линии посвящена также работа Смирнова [35]. В ней он показал, что большинство результатов теории может быть получено, исходя из усредненных импедансных граничных условий, аналогичных условиям Мойжеса. Эти условия можно рассматривать в случае спиралей, как дальнейшее уточнение известных граничных условий Владимирского. Этот прием, в сочетании с методом выделения из общего выражения для поля резонансных членов (впервые примененного еще в работах Когана), позволил ему упростить расчеты спиральных линий. Не останавливаясь на других работах по спиральным линиям, тяготеющих в значительной мере к электронике, отметим только, что в настоящее время назрела необходимость в решении задачи о полубесконечной спирали. Все предпосылки для решения таких задач методом интегральных уравнений типа Винера — Хопфа или, что почти одно и то же, методом функциональных уравнений, по-видимому, имеются.

#### 10. ДИФФРАКЦИЯ НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ ВОЛНОВОДА

Вместе с развитием техники антенн сантиметровых волн практическое значение стало приобретать повышение точности расчета диаграмм направленности антенн особенно в части, касающейся побочных лепестков. Расчет диаграммы по заданному распределению поля в раскрыве антенны, осуществляемый по формулам Кирхгофа или Коттлера, этим требованиям не удовлетворяет, поскольку распределение поля в раскрыве может быть задано лишь приближенно; точно так же лишь приближенно могут быть учтены и влияния краев зеркала или других элементов конструкции антенны. Вот почему актуальными стали более строгие методы расчета излучающего раскрыва. Большую роль в указанном направлении сыграли опубликованные в течение 1947—1950 гг. работы Вайнштейна, посвященные диффракции электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода [108]. В 1947 г. Вайнштейном впервые была строго решена задача о диффракции на открытом конце плоского волновода. Полученные результаты позволили выяснить пределы применимости формулы Кирхгофа.

Дальнейшие работы Вайнштейна были посвящены диффракции у открытого конца круглого волновода сперва для симметричных электромагнитных и звуковых волн, а затем и для несимметричных электромагнитных волн. Для круглого волновода помимо определения внешнего поля большое значение имеет также возможность точного вычисления коэффициента отражения от конца и коэффициентов трансформации для волн различных типов.

Вайнштейном дано большое количество графиков для абсолютных величин и фаз коэффициентов отражения и трансформации в случае несимметричных волн и, в частности, волны  $H_{11}$  в круглом волноводе.

Последующие работы Вайнштейна касались более глубокого анализа процессов, сопровождающих излучение из открытых концов волноводов при больших размерах отверстий. Этот анализ позволил ему сделать ряд важных выводов об условиях применимости принципа Гюйгенса для расчета диаграмм направленности.

## 11. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДВУХПРОВОДНЫХ И КОАКСИАЛЬНЫХ ФИДЕРНЫХ ЛИНИЙ

Одновременно с развитием теории антенн развивалась и теория фидерных систем. Потребность в создании такой теории появилась в середине 20-х годов, в связи с развитием техники коротких волн и созданием первых коротковолновых направленных антенн. Надо было выяснить оптимальный режим двухпроводной или коаксиальной линии, питающей антенну, и разработать способы получения этого режима, т. е. согласования антенны с линией. В первых работах, посвященных этому вопросу, исследовалось распределение тока и напряжения в линии без потерь энергии в зависимости от величины нагрузки [109]. Тогда впервые было введено понятие о коэффициенте бегущей волны (КБВ) как о величине, характеризующей степень согласования линии с нагрузкой. По определению Татаринова [111] КБВ есть отношение напряжения в минимуме кривой напряжения вдоль линии к напряжению в максимуме, т. е. величина, не большая единицы.

В ряде работ исследован режим питающей линии, т. е. величина КБВ и положение экстремумов кривых напряжения и тока в зависимости от характера нагрузки [110, 111].

Следующим этапом, естественно, явилось исследование вопроса о расчете схем согласования антенны с линией, использующих как сосредоточенные реактивности, так и отрезки закороченных и разомкнутых линий. Сюда относятся напечатанные в начале 30-х годов работы Татаринова [111, 112] и С. И. Надененко [113], посвященные указанным схемам, а также схемам автоматических антенных коммутаторов для линии, питающей подключенные в параллель две антенны, предназначенные для работы на разных волнах.

Появление в практике эксплуатации ромбических антенн, в которых бегущая волна в проводах обеспечивалась включением поглощающего сопротивления, поставило на очередь вопрос о получении в линии режима бегущей волны тока и напряжения без такового сопротивления. В 1938 г. появилась интересная статья Неймана [114], обосновывающая возможность создания такого режима.

Все указанные работы считали рассматриваемые линии лишенными потерь. Однако, когда на очередь встал вопрос о кпд линии, пришлось перейти от обычно применявшихся тригонометрических кривых распределения тока и напряжения к гиперболическим и экспоненциальным. Была определена величина кпд линии при бегущей волне и других режимах в зависимости от затухания и длины линии. Был предложен метод экспериментального определения затухания линии по форме кривой напряжения вблизи минимума. Этим вопросам посвящены работы Пистолькорса [109] и Татаринова [111].

По мере того как фидерные линии все более и более входили в употребление, появилась потребность в методах, облегчающих инженерные расчеты в этой области. В 1940 г. Вольпертом [115] были предложены круговые номограммы для расчета входного сопротивления и КБВ длиной линии без потерь в зависимости от данных нагрузки. Эти номограммы, независимо от Вольперта введенные в Америке Смитом, в дальнейшем повсеместно вошли в практику.

По мере развития техники коротких волн формы выполнения фидерных линий усложнялись. Появились четырехпроводные линии для приемных антенн, двухпроводные экранированные линии для мощных коротковолновых радиовещательных станций. Возник вопрос о расчете волнового сопротивления линий в прямоугольном экране (рис. 1). Эта работа в 1938—1939 гг. была выполнена Фельдом [116, 117], использовавшим функции Грина для прямоугольника (построенные при помощи эллиптических сигма-функций Вейерштрасса).

Вскоре после внедрения в практику двухпроводных фидерных линий внимание радиотехников привлекли так называемые неоднородные линии, т. е. линии с изменяющимся по длине волновым сопротивлением. У нас такие линии были исследованы Нейманом в 1938 г. [118], рассмотревшим свойства линии, у которой волновое сопротивление по длине не меняется по экспоненциальному закону (при неизменной постоянной распространения). Им были выведены основные выражения для законов изменения напряжения и тока по длине линии и рассмотрены условия согласования нагрузки с линией.

Несколько позже Вольпертом [119] был исследован большой класс неоднородных линий, волновое сопротивление которых меняется по закону  $x^c$ , где  $x$  — текущая координата вдоль линии. В его работе подробно исследован режим трансформации сопротивления нагрузки, а также режим, в котором линия выполняет роль фильтра.

И. Е. Средний [120] рассматривал весьма общий случай неоднородной линии и предложил новую классификацию этих линий, основанную на свойствах дифференциальных уравнений неоднородных линий; некоторые классы таких линий были исследованы им более подробно.

В работе В. А. Ильина [121] дан оригинальный метод исследования неоднородных линий, в котором задача сводится к решению дифференциального уравнения для эквивалентного сопротивления линии в сечении  $x$  при заданных погонном последовательном сопротивлении  $z(x)$  и погонной параллельной проводимости  $y(x)$  линии.

За последние годы А. Л. Фельдштейном [122, 123, 124] был разработан более общий метод исследования неоднородных линий, основанный на предельном переходе от ступенчатой линии к линии с плавно меняющимися характеристиками. Этот переход приводит к системе интегральных уравнений, при помощи которых автор решает задачу синтеза неоднородных линий по заданным частотным характеристикам и исследует вопрос об использовании неоднородных линий в качестве фильтров.

Рассмотренные выше работы (кроме, отчасти [110, 117]) посвящены двухпроводным линиям, обладающим электрической симметрией — удаленным от проводников и возбуждаемым симметричным генератором. Однако в действительности двухпроводные линии коротковолновых антенн располагаются над поверхностью земли, и несимметрия в самой линии или в соединенном с ней генераторе или приемнике нарушает нормальный режим противофазной волны, при котором провода имеют потенциалы, одинаковые по величине, но противоположные по знаку. К этому режиму добавляется еще однофазная волна с токами и напряжениями, имеющими одинаковую фазу в обоих проводах.

Теории несимметричных линий были посвящены работы Пистолькорса [125, 126] и Татарина [127]. Первым были получены удобные формулы для токов и потенциалов (относительно земли) для системы из двух проводов, параллельных земной поверхности. Выводы теории были применены к исследованию такого образца несимметричной двухпроводной системы, как шлейф (рис. 2), представляющий собой закороченную двухпроводную линию, к двум концам которой присоединены генератор и нагрузка. Были исследованы входное сопротивление шлейфа и законы распределения тока и потенциала вдоль его проводов, в частности законы распределения однофазного (излучающего) тока. Результаты этого исследования послужили основанием для введения в практику шлейф-вибратора (рис. 3), получившего широкое распространение в качестве передающей и приемной антенн. Тем же автором позднее [128] был исследован антенный эффект коаксиального фидера, наружный проводник которого заземлен

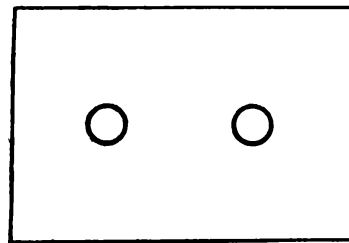


Рис. 1

не во всех точках. Эта работа была непосредственно связана с появлением антенн нового типа, основанных на использовании антенного эффекта несимметричных линий. Подробно теория антенн этого рода была рассмотрена Г. З. Айзенбергом [129], реализовавшим выводы теории в известной антенне верхнего питания.

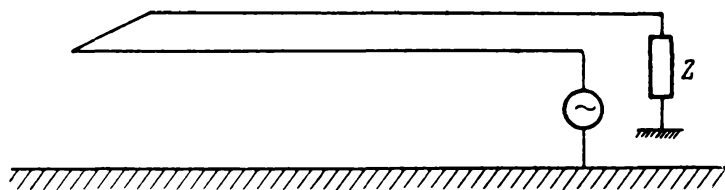


Рис. 2

Несимметричным фидерам без потерь энергии посвящена также напечатанная в 1939 г. работа Татарина [127]. В ней последовательно проводится концепция одновременного существования и взаимодействия в асимметричных линиях двух волн: синфазной и противофазной. С этой точки

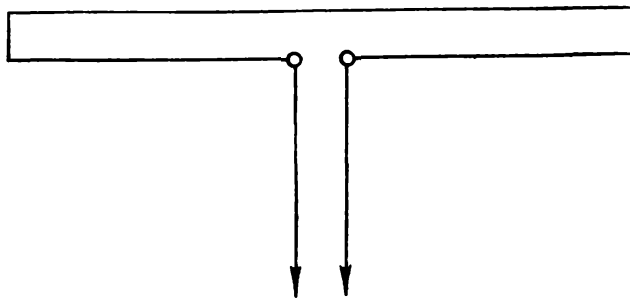


Рис. 3

зрения в работе рассматриваются вопросы распределения тока и напряжения в указанных фидерах и передачи по ним энергии.

Электродинамическому исследованию несимметричных двухпроводных линий посвящена работа Фельда [130], рассмотревшего общий случай двухпроводной линии без потерь с проводниками разных радиусов.

Для строгого решения задачи им был применен метод конформного отображения, при котором сечение двухпроводной линии отображалось на кольцо. Позднее этим же автором [131] были исследованы потери энергии в поверхностном слое симметричных и несимметричных линий разных типов (с учетом эффекта близости).

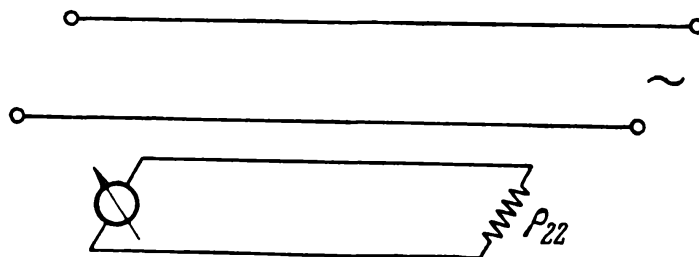


Рис. 4

Уточнению теории многопроводных систем над землей (при учете конечной проводимости проводов) посвящена работа П. И. Кузнецова и Р. Л. Стратоновича [132].

Разработанный в теории несимметричных линий аппарат оказался пригодным также для исследования электрически связанных между собой двухпроводных линий. Исследование таких линий [133] позволило установить, что они обладают свойствами избирательности по направлению, т. е. в связанной пассивной линии можно регистрировать наличие волн того или иного направления, идущих по основной возбуждающей ее линии. Так, например, если в линии  $I$  рис. 4 существует бегущая волна от генератора к нагрузке, в связанной линии  $II$  имеет место бегущая вол-

на, направленная к генератору. Нагрузив линию  $II$  на волновое сопротивление  $\rho_{22}$ , поглощающее всю энергию этой волны, мы будем иметь нулевой ток в индикаторе  $A$  на другом конце.

Если в линии  $I$  имеет место отраженная волна, она будет возбуждать в связанной линии волну, бегущую в сторону индикатора. Заменяв индикатор на поглощающее сопротивление  $\rho_{22}$  и сравнивая теперь напряжения на обоих концах, мы получим прибор для измерения отражений в линии — рефлектометр, теории которого посвящены работы Неймана, Пистолькорса и Вольперта [134, 135]. Аналогами связанных линий с линейной избирательностью являются направленные ответвители, широко применяемые сейчас в волноводной технике.

## 12. ТЕОРИЯ ОДНОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Теория распространения электромагнитных волн вдоль бесконечно длинного уединенного провода всегда интересовала антенных специалистов как с точки зрения потенциальной возможности использовать такой провод в качестве фидерной линии, так и с точки зрения применения найденных зависимостей (с соответствующими ограничениями) для расчета антенн с проводами конечной длины.

После классической работы Зоммерфельда, посвященной цилиндрическому проводнику круглого сечения, следующими шагами могли быть либо исследование распространения электромагнитных волн вдоль проводников иных сечений, либо рассмотрение случая сосредоточенного возбуждения бесконечно длинного провода.

К первому направлению относится работа Фельда [136], исследовавшего в 1938 г. распространение электромагнитных волн вдоль идеально проводящего эллиптического цилиндра и получившего закон распределения плотности тока на поверхности такого цилиндра, вырождающегося в предельном случае в бесконечно тонкую ленту\*.

В этой статье им был рассмотрен также экранированный фидер эллиптического сечения.

Серию работ, посвященных сосредоточенному возбуждению провода, открывает в 1935 г. статья Нэттера [137], в которой исследуется бесконечно длинный провод, возбуждаемый с помощью концентрического кольцевого магнитного тока смещения (тороидального магнитного сердечника с обмоткой, рис. 5). Последовательно рассматриваются цилиндры без потерь и с потерями энергии. Автор проводит четкое различие между полями цилиндрических (зоммерфельдовских) волн и полем сферической волны, создаваемой комбинацией тор — цилиндр. Это поле он находит, вычисляя полученный интеграл методом перевала.

В 1940 г. появилась статья В. Н. Кессениха [139], в которой включение генератора представляется в виде электродвижущей силы, действующей на поверхности идеального проводника в пределах узкого кольца. Автор интересуется, в первую очередь, волновым сопротивлением провода, которое и определяет для различных радиусов провода путем численного интегрирования.

В 1944 г. В. В. Владимирский [140] исследовал распространение электромагнитных волн вдоль бесконечно длинного провода, обладающего конечной проводимостью и возбуждаемого электродвижущей силой в виде дельта-функции.

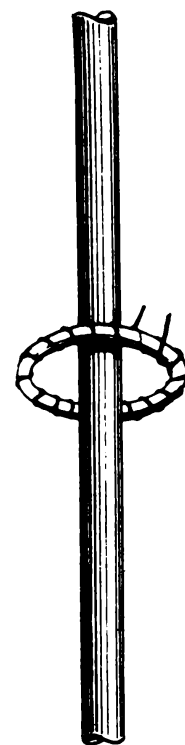


Рис. 5

\* Следует заметить, что в книге Стретта [138] в разделе, посвященном эллиптическому цилиндру, была допущена грубая ошибка: на контуре сечения плотность тока была постулирована постоянной.



Проводя в выражении для тока интегрирование по разрезу в плоскости комплексного переменного, Владимирский исследовал существующее параллельно с основной (кабельной) волной медленно убывающее поле, заметно проявляющееся на больших расстояниях, где кабельная волна затухает. Им дано новое выражение для входной проводимости, переходящее при отсутствии потерь в выражение, полученное Кессенихом.

Помимо теории уединенного одиночного провода, большой интерес для радиотехники представляла также разработка теории провода, параллельного границе раздела двух сред, в частности, — земли и воздуха. Выводы этой теории были необходимы для расчета низко-расположенных горизонтальных антенн типа бегущей волны. Первоначально задача здесь ставилась так; задаваясь синфазным распределением тока на участке провода, найти поправки, вносимые землей в электрические параметры провода, рассчитанные при идеальной проводимости земли, — погонную емкость, индуктивность и сопротивление. Иногда вместо синфазного задавался ток с некоторой определенной фазовой скоростью (хотя на самом деле фазовая скорость и затухание являются основными искомыми величинами). Вопросы этого рода рассматривались Н. К. Титовым [141], Н. С. Бесчастновым и Конторовичем [142, 143]. Последним, в частности, для анализа было применено разложение цилиндрической волны на бесконечную сумму плоских волн. Эта методика была развита далее в работах Пистолькорса [144, 145] и особенно Г. А. Лаврова [146, 147, 148], которые использовали ее для нахождения фазовой скорости и затухания тока в проводе, исходя из граничных условий на поверхности земли и провода.

Независимо от них аналогичная работа была проделана Г. А. Гринбергом и Б. Э. Бонштедтом [149], применившим полученные результаты к колебаниям с круговой частотой, меньшей  $10^6$ , применительно к которым ими даны выражения для расчета постоянной распространения вдоль провода и составляющих поля в окружающем провод воздухе.

### 13. ВОЛНОВОДЫ

С переходом к сантиметровым волнам для их канализации стали широко применять полые трубы—волноводы. Распространение свободных электромагнитных волн в волноводах было изучено еще Релеем. Основы теории регулярных волноводов в советской литературе впервые были изложены в книге Б. А. Введенского и А. Г. Аренберга [150]; дальнейшие исследования регулярных волноводов были посвящены, в основном, изучению потерь, анализу волноводов сложного сечения и вопросам возбуждения электромагнитных волн в них. Регулярными волноводами с потерями занимались: Я. Л. Альперт [151], впервые использовавший для этой цели граничные условия Леонтовича; С. М. Рытов [152], получивший для полей разложения в асимптотические ряды по малому параметру, пропорциональному глубине поверхностного слоя; Б. З. Каценеленбаум [153], изучавший волноводы произвольного сечения с потерями при любых частотах, включая критическую, и В. А. Ильин [154], рассматривавший волноводы сложного сечения с угловыми точками на базе уточненных граничных условий Леонтовича.

Хотя наибольший практический интерес представляют волноводы прямоугольного и отчасти круглого сечения, в ряде случаев применяются волноводы специального сечения, позволяющие увеличить критическую длину волны и расширить полосу пропускания. Таким системам посвящены работы: Вайнштейна [155], исследовавшего методом Ритца круглый волновод с тонкой радиальной металлической пластиной; Л. Н. Дерюгина [156]; обстоятельно изучившего П- и Н-образные волноводы и рассчитавшего, при помощи метода Галеркина, кривые критических частот для различных размеров сечений, и А. С. Лаврова [157], решавшего (методом

сеток) задачу о круглом волноводе с двумя и четырьмя металлическими вставками.

Первые теоретические работы по возбуждению волноводов принадлежат А. Л. Драбкину [158, 159, 160]. В них он изучал, при помощи теоремы взаимности, работу вибраторов в волноводе в режиме передачи и приема. Исследованию работы вибратора в волноводе посвящен также ряд работ Вольмана [161, 162, 163]. Весьма интересна работа Мандельштама [164], в которой оригинальным методом дано решение задачи о возбуждении круглого волновода разнообразными заданными источниками. Общий метод расчета возбуждения волновода произвольно распределенными токами был впервые дан в работах Г. В. Кисунько [165, 166, 167]. Им была построена полная ортогональная система векторных функций, при помощи которой удалось найти общее решение неоднородных уравнений поля для волноводов произвольного сечения. Детальному исследованию ряда математических вопросов, возникающих при решении задач о возбуждении волн в волноводах, посвящены статьи А. А. Самарского и А. Н. Тихонова [168, 169]. Другая группа работ по возбуждению волноводов, базирующаяся, в методическом отношении, на использовании леммы Лоренца, была опубликована Фельдом [170], М. Б. Заксоном [171] и Вайнштэйном [172]. В них поле в волноводе выражалось в виде рядов типа Фурье по соответствующей полной системе вспомогательных ортогональных полей. Лемма Лоренца использовалась затем для определения коэффициентов этих рядов. Особенно законченный вид, в смысле общности и простоты, это направление получило в работе Вайнштейна [172]. Ряд работ, которые мы отнесли к разделу щелевых антенн, в равной мере мог бы быть отнесен к теории возбуждения волноводов щелями.

Чисто регулярный волновод является, вообще говоря, абстракцией. В реальных системах в волноводе всегда имеются различные неоднородности в виде отдельных волноводных узлов: диафрагм, фланцев, штырей, уголков и т. п. Плавные изгибы волноводов и просто неточное их изготовление приводит, как и в случае других неоднородностей, к возбуждению основной и высших типов волн, а также к трансформации одних типов волн в другие.

Регулярный волновод с неоднородностью можно заменить, по основной волне, эквивалентной двухпроводной линией с некоторым четырехполюсником. Эта эквивалентная схема обычно характеризует, в достаточной для практики мере, рассматриваемую систему. Поэтому основной задачей теории, при изучении различных неоднородностей в волноводе, является определение параметров эквивалентного четырехполюсника. Это не исключает, в ряде случаев, необходимости определения полного поля в районе расположения неоднородности. Большое практическое значение всех указанных вопросов привело к появлению значительного числа работ, посвященных задачам теории неоднородностей в волноводе, хотя наиболее трудные из них остаются до сего времени неразрешенными. Одной из первых работ, посвященных неоднородностям в волноводе, явилась работа Контровича [173], в которой он рассмотрел кольцевую диафрагму в круглом волноводе.

Существенным в его методе решения было использование усредненного граничного условия для касательной составляющей магнитного вектора в плоскости отверстия диафрагмы. Это позволило довести решение до расчетных формул.

Методы, использующие различные усредненные граничные условия для решения волноводных задач, были развиты в работах Кисунько.

В частности, им были изучены вопросы сочленения волноводов различных сечений и ряд других задач волноводной и резонаторной техники. Результаты своих исследований Кисунько систематизировал в весьма интересной и обширной монографии [174], опубликованной им в 1949 г. Задачи о неоднородностях в волноводе принадлежат к числу наиболее трудных.

Поэтому в разнообразных приемах, развитых для их решения, в той или иной степени используются приближенные методы. В этой связи необходимо отметить работу Вайнштейна [175], где совершенно строго, при помощи функциональных уравнений, решена задача об индуктивной и емкостной диафрагмах в прямоугольном волноводе для некоторых частных соотношений их размеров. Весьма удачный метод, с использованием леммы Лоренца, развит Каценеленбаумом [176] для изучения малых неоднородностей в волноводе ступенек и т. п. Ему же принадлежит работа [177], в которой впервые исследованы методом возмущения слабо изогнутые волноводы. Этот вопрос имеет принципиальный интерес, а в последнее время приобрел также большое практическое значение в связи с использованием волны  $H_{01}$  в круглых волноводах для передачи сигналов на большие расстояния.

В 1955—1956 гг. Каценеленбаум опубликовал ряд работ [178, 179], посвященных нерегулярным волноводам с медленно меняющимися параметрами, изогнутым волноводам постоянного сечения, диэлектрическим переходам для волны  $H_{01}$  и ряду других вопросов.

Для всех этих работ характерно представление поля в нерегулярном волноводе при помощи разложения в ряд по собственным волнам соответствующего регулярного волновода того же сечения.

Ряд фундаментальных работ по изогнутым волноводам принадлежит перу П. Е. Краснушкина [180—183]. В них он применил метод конформного преобразования, позволивший перейти от волновода со сложными границами, заполненного однородной средой, к задаче о волноводе с плоскими стенками и неоднородной средой. Им же был развит так называемый метод «нормальных» волн, изучено «прилипание» электромагнитных волн у криволинейной границы и ряд других вопросов.

Метод конформного преобразования был использован Б. Л. Рождественским [184] для решения задачи о сочленении волновода с бесконечным рупором. Распространению волн в слабо изогнутых волноводах посвящена также работа А. Г. Свешникова [185].

Наряду с развитием теории металлических волноводов шло, хотя и менее интенсивно, создание теории диэлектрических волноводов — стержней и трубок. Такие системы, по целому ряду причин, пока еще не используются для канализации электромагнитных волн, однако теория их имеет большое принципиальное и практическое значение. Последнее объясняется тем, что в настоящее время применяются различные диэлектрические антенны в виде стержней, трубок, пластин и т. п. Строгой теории таких систем конечной длины еще нет, и при их расчетах приходится исходить из рассмотрения распространения волн вдоль бесконечно-длинных диэлектрических волноводов, используя затем приближенные методы типа принципа Гюйгенса — Кирхгофа и им подобные.

Вдоль диэлектрических волноводов могут распространяться электромагнитные волны различных типов, обладающие, вообще говоря, критическими частотами. Исключение составляет несимметричная смешанная волна типа  $HE_{11}$  с азимутальной зависимостью вида  $\sin \varphi$  или  $\cos \varphi$ , у которой отсутствует критическая частота. Эта волна имеет наибольшее практическое значение, так как она используется в диэлектрических антеннах. Впервые, весьма существенный для практики, факт отсутствия у волны  $HE_{11}$  критической частоты был установлен Вольпертом [186].

Диэлектрическим волноводам посвящены фундаментальные работы Каценеленбаума [187, 188]. В первой из них изучены электромагнитные колебания в диэлектрических волноводах произвольного сечения и показано, что при любых низких частотах вдоль них могут распространяться два типа смешанных волн. Найдены также их фазовые скорости в зависимости от частоты. В двух других работах рассмотрено возбуждение симметричных и несимметричных волн в бесконечно-длинном цилиндрическом волноводе при помощи продольного и поперечного диполей, расположенных на его

оси. Подробнейшим образом изучены поля в диэлектрике и вне его, области преимущественного существования поверхностных и сферических волн, границы перехода одной волны в другую и ряд других вопросов. В частности, дана детальная классификация волн в диэлектрических волноводах круглого сечения. Показано, что классификация Щелкунова не полна, так как в ней пропущен целый класс волн.

В последние годы большое развитие в волноводной технике получили схемы вентиляей, модуляторов и других устройств, использующих намагниченные ферриты. Участки волноводов с такими ферритами обладают гиротропными свойствами, отличными от свойств обычных четырехполюсников; так, например, в гиротропных системах нарушается принцип взаимности, что позволяет разделять волны, идущие по волноводу в различных направлениях. Разработке вопросов теории гиротропного волновода у нас было посвящено большое количество работ.

Первой по времени явилась работа М. Е. Гинцбурга [189], давшего весьма общую теорию распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных системах. Большую роль в развитии нового направления волноводной техники сыграли работы А. Л. Микаэляна [190—195], разработавшего методы расчета целого ряда систем гиротропных волноводов, включая волноводы с гиротропной электронной плазмой.

Вопросам уточнения основных законов электродинамики применительно к гиротропным средам посвящена интересная работа А. Г. Гуревича [196].

Наконец, вопросы теории измерений параметров ферритов на сантиметровых волнах подробно рассмотрены в ряде статей В. В. Никольского [197—199] и в статье В. Н. Васильева [200].

\* \* \*

Заканчивая на этом наш краткий обзор, мы должны отметить, что его можно было бы дополнить еще целым рядом интересных работ, опубликованных в разное время в советской печати. Таковы, например, работа Надененко [201], посвященная расчету линии с периодически включенными нагрузками, статья Вольперта [202], рассмотревшего излучение диполя, заключенного в магнито-диэлектрическую оболочку, работа Э. Бурштейна и Л. Соловьева [203], исследовавших распространение электромагнитных волн между параллельными изогнутыми проводящими поверхностями, и целый ряд других. Понятно, что в настоящем обзоре мы не имели возможности упомянуть о всех работах советских ученых по теории антенн и линий передачи.

Нам представляется, однако, что приведенный материал достаточно полно и наглядно характеризует ту огромную работу, которая за 40 лет была проделана в этой области советскими учеными, тот исключительно ценный вклад, который был сделан ими за это время в мировую науку.

Это несомненно результат тех огромных творческих возможностей, которые открыты перед советскими учеными.

Одновременно приведенный здесь материал отражает все убыстряющиеся темпы развития теоретической работы в области антенн и линий передачи в нашей стране.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Шулейкин, Вестник военной радиотелеграфии и электротехники, 1917, 1, 2.
2. И. Г. Кляцкин, Радиотехника, 1947, 8, 26—29.
3. М. В. Шулейкин, Радиотехника, 1921, 14, 402.
4. И. Г. Кляцкин, Радиосборник ОДР, 1930, II—III, 42.
5. М. И. Конторович, Вестник электротехники, 1930, 7—8, 259.
6. М. И. Конторович, Техника радио и слабого тока, 1932, 8—9, 520.
7. Д. А. Рожанский, ТИТбп, 1922, 14.
8. И. Г. Кляцкин, ТИТбп, 1927, 40.
9. А. А. Пистолькорс, ТИТбп, 1928, 48.
10. А. А. Пистолькорс, ТИТбп, 1928, 50, 540, 546.

11. А. А. Пистолькорс, ТЯТбп, 1929, 52.
12. А. Е. Сузант, Вестник электротехники, 1930, 5.
13. В. В. Татаринцов, Техника радио и слабого тока, 1932, 2.
14. В. В. Татаринцов, ИЭСТ, 1933, 2.
15. В. В. Татаринцов, Коротковолновые направленные антенны, Связьтехиздат, 1936.
16. Б. П. Афанасьев, ИЭСТ, 1938, 10.
17. А. З. Фрадин, ЖТФ, 1939, 9, 4.
18. Г. Т. Марков, Радиотехника, 1948, 1.
19. М. Л. Левин, Известия АН СССР, серия физ., 1947, 2.
20. М. И. Конторович, Радиотехника, 1951, 2.
21. Б. В. Брауде, ЖТФ, 1955, 10.
22. А. А. Пистолькорс, ТЯТбп, 1929, 54.
23. М. А. Бонч-Бруевич, ТЯТбп, 1925, 29.
24. М. А. Бонч-Бруевич, ТЯТбп, 1926, 36.
25. М. А. Бонч-Бруевич, ТЯТбп, 1926, 39.
26. В. В. Татаринцов, Коротковолновые направленные антенны, Связьтехиздат, 1933.
27. В. В. Татаринцов, ТЯТбп, 1925, 32.
28. А. А. Пистолькорс, ТЯТбп, 1928, 50.
29. М. С. Нейман, ИЭСТ, 1935, 2.
30. А. М. Модель, Радиотехника, 1954, 1.
31. В. Д. Кузнецов, Радиотехника, 1950, 5.
32. М. И. Конторович, ЖТФ, 1939, IX, 2195.
33. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 1950, XX, 716.
34. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 1955, XXV, 158, 167.
35. Н. Н. Смирнов, ДАН СССР, 1956, 108, 8.
36. А. М. Модель, Радиотехника, 1955, 6.
37. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1955, 102, 2.
38. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1956, 106, 2.
39. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1956, 107, 1.
40. Л. А. Вайвштейн, ЖТФ, 1955, 5.
41. Е. Г. Ямпольский, Радиотехника, 1955, 9.
42. Г. С. Рамм, Научно-техническ. сборн. по электросвязи ЛЭИС, Связьтехиздат, 1937, 3 (19), 43—59.
43. И. Вольман, Электросвязь, 1941, 4, 46—51.
44. А. З. Фрадин, ЖТФ, 1939, IX, 13, 1161—1174.
45. А. А. Пистолькорс, ИЭСТ, 1939, 1, 9—19.
46. А. А. Пистолькорс, ДАН СССР, 1953, LXXXIX, 5.
47. Л. Д. Бахрах, ДАН СССР, 1953, XCVI, 4.
48. Л. Д. Бахрах, ДАН СССР, 1954, XCVI, 1.
49. А. И. Узков, ДАН СССР, 1946, 53, 1, 35.
50. Л. Б. Тартаковский, Вестник НИИ МПСС, 1952, 5 (28).
51. Л. Б. Тартаковский, Вестник НИИ МПСС, 1953, 1—2 (35—36).
52. Л. Б. Тартаковский, Вестник НИИ МЭСЭП, 1953, 11 (45).
53. А. А. Пистолькорс, ИЭСТ, 1933, 10.
54. А. А. Пистолькорс, ИЭСТ, 1934, 3.
55. А. А. Пистолькорс, Коротковолновые приемные антенны, Связьтехиздат, 1933.
56. И. А. Домбровский, Электрический расчет антенн (сборн. статей), Связьтехиздат, 1937.
57. А. З. Фрадин, ЖТФ, 1939, 4.
58. М. С. Нейман, ИЭСТ, 1935, 8.
59. А. Р. Вольперт, Радиотехника, 1955, 11.
60. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, Изд. АН СССР, 1948, 1, 270.
61. М. П. Свешникова, Журнал Русского физ.-хим. об-ва, ч. физ., 1927, 59, 5—6.
62. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1943, 41, 7.
63. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1945, XLVШ, 7.
64. М. А. Леонтович, М. Л. Левин, Изв. АН СССР, серия физ., 1944, 3.
65. М. А. Леонтович, М. Л. Левин, ЖТФ, 1944, 9.
66. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, ЖТФ, 1950, 9.
67. А. Е. Сузант, Радиотехника, 1937, 3, 4.
68. М. Г. Белкина, Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, Сборн. статей, Изд. Советское радио, 1957.
69. М. С. Нейман, ИЭСТ, 1940, 6.
70. Л. И. Мандельштам, ЖТФ, 1945, 9.
71. А. А. Пистолькорс, ЖТФ, 1944, 12, 693.
72. М. А. Леонтович, ЖТФ, 1946, 6.
73. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1948, LX, 7.
74. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1946, 53, 7; 1947, 55, 5.
75. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 1947, 9, 12.

76. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 1948, 10.
77. Л. С. Бененсон, ЖТФ, 1952, XXII, 4.
78. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1947, 56, 4.
79. А. В. Гапонов, ЖТФ, 1955, 25, 6, 1069, 1085.
80. А. А. Пистолькорс, ЖТФ, 1944, 12, 681.
81. А. А. Пистолькорс, ДАН СССР, 1946, LI, 2.
82. А. А. Пистолькорс, ЖТФ, 1946, 1, 3, 11, 21.
83. А. А. Пистолькорс, ЖТФ, 1946, 10, 1061, 1087.
84. М. Л. Левин, ЖТФ, 1951, 21, 772.
85. Я. Н. Фельд, Радиотехника, 1947, 5.
86. Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, Изд. Советское радио, 1948.
87. И. И. Вольман, Радиотехника, 1948, 3.
88. М. Л. Левин, ЖТФ, 1948, 4; 1951, 7.
89. М. Л. Левин, Изв. АН СССР, серия физ., 1946, 3.
90. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 1943, 3—4, 1944, 9.
91. А. И. Узков, Вестник НИИ МПСС, 1945, 1; 1950, 7(14).
92. М. И. Конторович, Ю. К. Муравьев, ЖТФ, 1952, 22, 3, 394.
93. Б. Е. Кинбер, Л. Б. Тартаковский, Вестник НИИ МПСС, 1953, 10(44).
94. Б. Е. Кинбер, Вестник НИИ МПСС, 1953, 11(45).
95. Л. Б. Тартаковский, А. М. Покрас, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 2, 186.
96. Л. М. Бреховских, ДАН СССР, 1951, 31, 1023.
97. Л. М. Бреховских, ЖЭТФ, 1952, 23, 75.
98. Ю. П. Лысаков, ДАН СССР, 1952, 87, 5.
99. Л. Н. Дерюгин, Исследование электродинамических свойств ребристых поверхностей (докторская диссертация), МАИ, Москва, 1954.
100. М. А. Миллер, ДАН СССР, 1952, 87, 4.
101. В. Я. Сморгонский, Радиотехника, 1955, 10, 5.
102. К. И. Гринева, Радиотехника, 1956, 11, 12, 3.
103. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1956, 26, 2, 385.
104. С. Х. Коган, ДАН СССР 1949, 66, 5.
105. С. Х. Коган, ДАН СССР, 1950, 74, 3.
106. С. Х. Коган, ДАН СССР, 1956, 107, 4.
107. С. А. Вакин, ДАН СССР, 1952, 84, 1.
108. Л. А. Вайнштейн, Диффракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд. Советское радио, 1953, 204.
109. А. А. Пистолькорс, ТИТбл, 1927, 40, 41.
110. В. В. Татаринов, Вестник электротехники, 1931, 1.
111. В. В. Татаринов, Коротковолновые направленные антенны, 2-е изд., Связьтехиздат, 1936.
112. В. В. Татаринов, Вестник электротехники, 1931, 4.
113. С. И. Надененко, Техника связи, 1932, 6, 11.
114. М. С. Нейман, ИЭСТ, 1938, 11.
115. А. Р. Вольперт, Производственно-техническ. бюллетень НКЭП, 1940, 2.
116. Я. Н. Фельд, Электросвязь, 1938, 4.
117. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 1939, IX, 7.
118. М. С. Нейман, ИЭСТ, 1938, 11.
119. А. Р. Вольперт, Электросвязь, 1940, 2.
120. И. Е. Средний, Радиотехника, 1946, 6.
121. В. А. Ильин, Электричество, 1950, 2.
122. А. Л. Фельдштейн, Радиотехника, 1951, 5.
123. А. Л. Фельдштейн, Радиотехника, 1952, 6.
124. А. Л. Фельдштейн, Радиотехника, 1953, 3.
125. А. А. Пистолькорс, Научно-техническ. сборн. ЛЭИС, 1936, 16.
126. А. А. Пистолькорс, Научно-техническ. сборн. ЛЭИС, 1937, 17.
127. В. В. Татаринов, Изв. АН СССР, ОТН, 1939, 3, 10.
128. А. А. Пистолькорс, Электросвязь, 1940, 7.
129. Г. З. Айзенберг, Применение двухпроводных несимметричных линий в качестве средневолновых и длинноволновых антенн, Докторская диссертация, 1944.
130. Я. Н. Фельд, Научно-техническ. сборн. ЛЭИС, 1937, 18.
131. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 1940, X, 9.
132. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 9.
133. А. А. Пистолькорс, Электросвязь, 1939, 9.
134. А. А. Пистолькорс, М. С. Нейман, Электросвязь, 1941, 4.
135. А. Р. Вольперт, Радиотехника, 1947, 2.
136. Я. Н. Фельд, Научно-техническ. сборн. Ленинградского института связи, 1938, 17.
137. F. Noether, Physical. Zeitschr. d. Sowjetunion, 1935, 8, 12.
138. М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ОНТИ НКТП, 1935, 139.

139. В. Н. Кессених, ДАН СССР, 1940, 27, 6.
140. В. В. Владимирский, Изв. АН СССР, серия физ., 1944, VIII, 3.
141. Н. К. Титов, Электрический расчет антенн (сборн. статей), Связьтехиздат, 1937.
142. Н. С. Бесчастнов, М. И. Конторович, Труды ВЭТАС им. С. М. Буденного, 1944, 6.
143. М. И. Конторович, Труды ВЭТАС им. С. М. Буденного, 1944, 6.
144. А. А. Пистолькорс, ДАН СССР, 1952, 86, 5.
145. А. А. Пистолькорс, Радиотехника, 1953, 3.
146. Г. А. Лавров, Труды ЦНИИИС СА, 1951, 11.
147. Г. А. Лавров, Труды ЦНИИИС СА, 1954, 4.
148. Г. А. Лавров, Труды ЦНИИИС СА, 1955, 6.
149. Г. А. Гринберг, Б. Э. Бонштедт, ЖТФ, 1954, XXIV, 1.
150. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, Гостехиздат, 1946.
151. Я. Л. Альперт, ЖТФ, 1940, 10, 16.
152. С. М. Рытов, ЖТФ, 1940, 2, 176, 180.
153. Б. З. Каценеленбаум, ДАН СССР, 1953, LXXXVIII, 1.
154. В. А. Ильин, ДАН СССР, 1954, 47, 6.
155. Л. А. Вайнштейн, Сборн. научных трудов ЦНИИ, 1947, 5.
156. Л. Н. Дерюгин, Радиотехника, 1948, 6.
157. А. С. Лавров, Труды Военно-Воздушной Академии им. Жуковского, 1953, 474.
158. А. Л. Драбкин, ЖТФ, 1942, 10, 614, 621.
159. А. Л. Драбкин, ЖТФ, 1943, 4—5.
160. А. Л. Драбкин, ЖТФ, 1945, 4—5.
161. И. И. Вольман, Радиотехника, 1946, 9.
162. И. И. Вольман, Радиотехника, 1947, 1.
163. И. И. Вольман, Радиотехника, 1948, 3.
164. Л. И. Мандельштам, ЖТФ, 1945, 9.
165. Г. В. Кисунько, ДАН СССР, 1946, 51, 3.
166. Г. В. Кисунько, Изв. АН СССР, серия физ., 1946, 2.
167. Г. В. Кисунько, ЖТФ, 1946, 5.
168. А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, ЖТФ, 1947, 11; 1947, 12.
169. А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, ЖТФ, 1948, 7.
170. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 1946, 51, 2; ЖТФ, 1947, 12.
171. М. Б. Заксон, ДАН СССР, 1949, XVI, 4.
172. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1953, 4.
173. М. И. Конторович, ЖТФ, 1947, 3.
174. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС им. С. М. Буденного, Ленинград, 1949.
175. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1955, 5.
176. Б. З. Каценеленбаум, ЖТФ, 1954, 10.
177. Б. З. Каценеленбаум, Сборн. научных трудов ЦНИИ, 1946, 2.
178. Б. З. Каценеленбаум, ДАН СССР, 1955, 102, 4.
179. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 2, 3.
180. П. Е. Краснушкин, Ученые записки МГУ, физика, 1945, 75, ч. II.
181. П. Е. Краснушкин, Вестник МГУ, 1946, 1.
182. П. Е. Краснушкин, Е. Р. Мустель, ДАН СССР, 1946, IV, 3.
183. П. Е. Краснушкин, J. of. Physics USSR, 1949, 10(5).
184. Б. Л. Рождественский, ДАН СССР, 1951, 77, 221; ЖТФ, 1953, 23, 1609.
185. А. Г. Свешников, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 9.
186. А. Р. Вольперт, Диэлектрические антенны, Доклад на Всесоюзной научной сессии, посвященной «Дню радио», Москва, 1946.
187. Б. З. Каценеленбаум, ДАН СССР, 1947, VIII, 7.
188. Б. З. Каценеленбаум, ЖТФ, 1949, 10 (две статьи).
189. М. Е. Гинцбург, ДАН СССР, 1954, 95, 3, 489.
190. А. Л. Микаэлян, ДАН СССР, 1954, 98, 6, 194.
191. А. Л. Микаэлян, Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 3, 139.
192. А. Л. Микаэлян, А. А. Пистолькорс, Радиотехника, 1955, 10, 3, 14.
193. А. Л. Микаэлян, ДАН СССР, 1955, 104, 1.
194. А. Л. Микаэлян, ДАН СССР, 1955, 104, 2.
195. А. Л. Микаэлян, Радиотехника, 1955, 10, 9.
196. А. Г. Гуревич, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 8, 960.
197. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 4, 447.
198. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 5, 638.
199. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 2, 157.
200. В. Н. Васильев, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 11, 1444.
201. С. И. Надененко, Электрический расчет антенн (сборн. статей), Связьтехиздат, 1937, 160.
202. А. Р. Вольперт, Радиотехника, 1948, 3, 6, 29.
203. Э. Бурштейн, Л. Соловьев, ДАН СССР, 1955, 101, 465.
204. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖТФ, 1956, XXVI, 12.

## РАСЧЕТ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВОЛН В ИСКУССТВЕННОМ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИКЕ

*Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон*

В статье излагается метод расчета фазовой скорости волн в системах с периодическими структурами.

Получено характеристическое уравнение для фазовой скорости, решение которого стационарно относительно вариаций распределения токов на элементах структуры.

Метод иллюстрируется на примере искусственного диэлектрика в виде трехмерной решетки металлических элементов.

### ВВЕДЕНИЕ

В антенной технике большое распространение получили линзовые системы, в которых используются периодические решетки из металлических элементов различной формы: стержней, шариков, дисков, лент и т. п.

Основным параметром, интересующим антенную технику, является фазовая скорость волн, распространяющихся в рассматриваемой среде. Задаче расчета этого параметра посвящен ряд работ [1—4], в которых используются те или иные приближенные методы.

В настоящей работе излагается достаточно простой прием расчета, сводящийся, по существу, к применению обобщенного метода наведенных эдс.

### 1. ОБЩЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

Изложим общий метод получения характеристического уравнения для определения фазовой скорости. Рассмотрим трехмерную решетку металлических элементов. Ограничимся изучением волн, распространяющихся вдоль одной из пространственных осей решетки, которую мы примем за ось  $z$  декартовой системы координат (элементы решетки располагаются в ее узлах).

Перенумеруем элементы решетки при помощи натурального числового ряда. Обозначим общую поверхность элементов решетки буквой  $S = \sum_n S_n$ , где  $S_n$  — поверхность  $n$ -го элемента. Волна, распространяющаяся вдоль оси  $z$ , наводит на поверхности элементов токи с поверхностной плотностью  $\vec{K}$  (элементы предполагаем идеальнопроводящими; потери в среде отсутствуют). Полное поле в такой системе является интегральным оператором поверхностного тока  $\vec{K}$  на элементах решетки, т. е.  $\vec{E} = \vec{E}\{\vec{K}\}$ .

Этот оператор можно считать известным, и по заданному  $\vec{K}$  легко найти  $\vec{E}$ . Действительно, для решетки в свободном пространстве оператор определяется при помощи запаздывающего векторного потенциала или вектора Герца. Будем считать, что оператор  $\vec{E}$  найден.



Перейдем теперь к нахождению тока  $\vec{K}$  на  $S$ , т. е. на элементах решетки. Для этого используем граничное условие

$$\vec{E}_t \{ \vec{K} \} = 0 \text{ на } S. \quad (1)$$

Оно является интегральным уравнением, определяющим  $\vec{K}$  на  $S$ .

Вследствие периодичности структуры распределение тока  $\vec{K}$  на всех элементах ее одинаково и отличается только постоянным фазовым множителем, зависящим лишь от номера элемента.

Обозначая распределение тока на нулевом элементе  $\vec{K} = A \vec{\psi}$ , имеем очевидное выражение для тока на любом элементе:

$$\vec{K} = A e^{-ihf(n)} \vec{\psi} \text{ на } S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Здесь  $h$  — волновое число, определяющее фазовую скорость вдоль оси  $z$ ;  $f(n)$  — неизвестная функция от  $n$ , одинаковая для всех элементов, лежащих в одной и той же плоскости  $z = \text{const}$ , и меняющаяся на величину  $L_z$  ( $L_z$  — период структуры по оси  $z$ ) при переходе к элементам, лежащим в плоскости, отстоящей на  $L_z$ ;  $A$  — постоянная.

Характеристическое уравнение для фазовой скорости (или для волнового числа  $h = \omega/v$ ) найдем, умножая скалярно уравнение (1) на  $\vec{K}^*$  и интегрируя по  $S_n$ :

$$\int_{S_n} \vec{K}^* \cdot \vec{E} \{ \vec{K} \} dS = 0 \quad (3)$$

(при этом отброшен индекс  $t$ , так как ток  $\vec{K}$  касателен к  $S_n$ ; звездочка, как обычно, является знаком комплексного сопряжения).

Индекс  $n$  входит в это выражение только в виде несущественного фазового множителя, который можно отбросить. Поэтому результат будет независим от  $n$ , и интегрирование можно производить по нулевому элементу, что мы и будем делать.

Подставляя (2) в (3), запишем

$$\mathcal{L} [\vec{\psi}; h] = 0, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{L} [\vec{\psi}; h] \equiv \int_{\vec{S}} \vec{K}^* \cdot \vec{E} \{ \vec{K} \} dS \quad (\vec{K} = A e^{-ihf(n)} \vec{\psi}) \quad (4a)$$

— функционал от  $\vec{\psi}$  и обычная функция от  $h$ .

Полученное выражение (4) и является искомым характеристическим уравнением для определения числа  $h$ . Уравнение (4) выгодно отличается тем, что полученное из него решение для  $h$  стационарно относительно изменения вектор-функции  $\vec{\psi}$ .

Если бы удалось найти явное решение (4) относительно  $h$ ,

$$h = F \{ \vec{\psi} \}, \quad (5)$$

где  $F \{ \vec{\psi} \}$  — функционал, то для подтверждения сказанного достаточно было бы показать, что  $\delta F \{ \vec{\psi} \} = 0$  для истинного распределения. Можно, однако, провести доказательство, не прибегая к (5), используя неявную связь между  $h$  и  $\vec{\psi}$ , задаваемую равенством (4). Для этого возьмем полную вариацию от уравнения (4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \delta h + \Delta \mathcal{L} = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta\mathcal{L}$  означает вариацию от  $\mathcal{L}$  при постоянном  $h$ , т. е. при этом варьируется только  $\phi$ .

Докажем теперь, что  $\Delta\mathcal{L} = 0$  для истинных значений  $h$  и  $\phi$ .

Для этого возьмем  $\Delta$ -вариацию от равенства (4). Тогда, учитывая (4а), найдем

$$\Delta\mathcal{L} = \int_{S_0} \Delta\vec{K}^* \cdot \vec{E} dS + \int_{S_0} \vec{K}^* \cdot \Delta\vec{E} dS. \quad (7)$$

Из сопряженной леммы Лоренца, примененной к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\Delta\vec{E}, \Delta\vec{H}$ , порожденным токами  $\vec{K}$  и  $\Delta\vec{K}$ , соответственно, следует\*:

$$\int_{S_0} \Delta\vec{E} \cdot \vec{K}^* dS = - \int_{S_0} \vec{E}^* \cdot \Delta\vec{K} dS. \quad (8)$$

Учитывая это равенство, перепишем (7) так:

$$\Delta\mathcal{L} = \int_{S_0} \{ \vec{E} \Delta\vec{K}^* - \vec{E}^* \Delta\vec{K} \} dS = 2i \operatorname{Im} \int_{S_0} \vec{E} \Delta\vec{K}^* dS = 0. \quad (9)$$

Последнее вытекает из условия (1), которому удовлетворяет истинное значение  $\vec{E}$  (напомним, что  $\vec{E} \Delta\vec{K}^* = \vec{E}_t \Delta\vec{K}^*$ ).

Так как  $\Delta\mathcal{L} = 0$ , то из (6) следует также, что и  $\delta h = 0$ , т. е.  $h$ , определяемое уравнением (4), стационарно относительно вариации  $\phi$ . Это очень существенно для вычисления  $h$  при помощи уравнения (4), так как, подставляя в (4) приближенное выражение для распределения тока  $\vec{\phi}$  с некоторой погрешностью, найдем величину  $h$  с погрешностью второго порядка.

## 2. СТЕРЖНЕВАЯ ТРЕХМЕРНАЯ РЕШЕТКА

Используем уравнение (4) для расчета фазовой скорости волны в искусственном металлодиэлектрике. Пусть он представляет собой трехмерную прямоугольную решетку из стержней длины  $2l$ , радиуса  $a$ , расположенных параллельно друг другу с центрами в узлах решетки. Периоды решетки обозначим буквами  $L_x, L_y, L_z$  (см. рис. 1).

Полное поле  $\vec{E}$ , создаваемое токами всех стержней, можно записать на основании принципа суперпозиции в виде

$$\vec{E} \{ \vec{K} \} = \sum_n \vec{E}_n \{ \vec{K}_n \}, \quad (10)$$

где  $\vec{K}_n$  — ток в  $n$ -м стержне, а  $\vec{E}_n \{ \vec{K}_n \}$  — его поле. Так как  $\vec{E}$  представляет собой линейный оператор от тока, то, используя выражение типа (2)

$$\vec{K}_n = Ae^{-ihf(n)} \vec{\phi}, \quad (11)$$

найдем

$$\vec{E} \{ \vec{K} \} = \sum_n Ae^{-ihf(n)} \vec{E}_n \{ \vec{\phi} \}. \quad (12)$$

Подчеркнем, что  $\vec{E}_n \{ \vec{\phi} \}$  есть поле, создаваемое  $n$ -м стержнем, когда на нем распределен ток  $\vec{\phi}$ . В дальнейшем для упрощения записи будем

\* Справедливость этого равенства доказывается в *Приложении*.

считать  $\phi$  вещественной функцией, как это имеет место в большинстве практических случаев. При комплексном  $\vec{\phi}$  лишь несколько усложнится запись некоторых из приводимых ниже формул. Подставив (11) и (12) в (4), получим

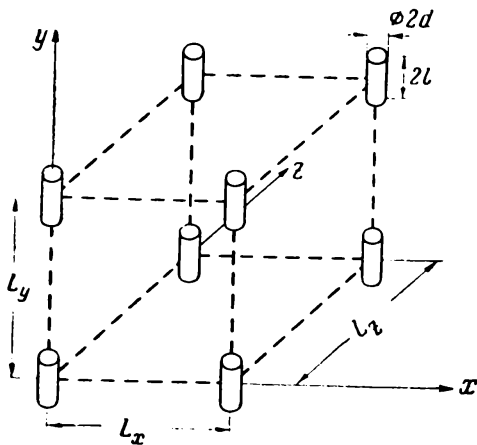


Рис. 1. Ячейка трехмерной решетки стержней

$$|A|^2 e^{ihf(0)} \int_{S_0} \vec{\phi} \sum_n e^{-ihf(n)} \vec{E}_n \{\vec{\phi}\} dS = 0. \quad (13)$$

Поле  $E_n \{\vec{\phi}\}$   $n$ -го вибратора в месте нахождения нулевого обратно пропорционально расстоянию между ними. Это расстояние растет не быстрее, чем  $|n|$ , поэтому величина  $\vec{E}_n \{\vec{\phi}\}$  в (13) с ростом  $|n|$  убывает не быстрее, чем  $1/|n|$ . Следовательно, ряд, стоящий под интегралом, хотя и сходится, но не абсолютно.

Можно, однако, превратить его в абсолютно и равномерно сходящийся ряд, предполагая (временно) при вычислении  $\vec{E}_n \{\vec{\phi}\}$ , что среда обладает малыми потерями. Это, по существу, эквивалентно умножению каждого члена ряда на  $e^{-\alpha|n|}$ . В окончательном результате необходимо положить «затухание»  $\alpha = 0$ .

Поступая таким образом, мы можем обращаться с этим рядом как с абсолютно и равномерно сходящимся, произвольно менять порядок суммирования и, в частности, производить в (13) почленную интеграцию. Учитывая это и сокращая постоянный множитель, перепишем (13) так:

$$\sum_n e^{-ihf(n)} \int_{S_0} \vec{\phi} \vec{E}_n \{\vec{\phi}\} dS = 0. \quad (13a)$$

Вводя обозначение

$$Z_n = - \int_{S_0} \vec{\phi} \vec{E}_n \{\vec{\phi}\} dS, \quad (14)$$

придадим (13a) окончательный вид:

$$\sum_n e^{-ihf(n)} Z_n = 0. \quad (15)$$

Здесь суммирование идет по всем стержням трехмерной решетки, а  $Z_n$  имеет смысл сопротивления\*, наведенного  $n$ -м стержнем на нулевой. Сходимость ряда (15) такая же, как и у ряда, стоящего под интегралом в равенстве (13). Поэтому, учитывая сказанное выше, можно изменить нумерацию стержней, приписав каждому стержню три индекса:  $n \{v, \mu, \kappa\}$  соответственно трем координатным осям  $x, y, z$ . При такой нумерации (см. выше)  $f(n) = \kappa L_z$ , так как фаза меняется только вдоль оси  $z$  и для всех стержней, лежащих в плоскости  $z = \text{const}$  ( $\kappa = \text{const}$ ), одинакова. Учитывая, что  $f(n) = \kappa L_z$  и  $Z_n = Z_{v\mu\kappa}$ , придадим выражению (15) вид

$$\sum_{\kappa} e^{-ih \kappa L_z} \sum_{v, \mu} Z_{v\mu\kappa} = 0$$

\* При этом  $A$  должно иметь размерность полного тока.

или, вводя обозначение

$$Z_{0\kappa} = \sum_{\nu, \mu} Z_{\nu\mu\kappa}, \quad (16)$$

$$\sum_{\kappa} e^{-i\kappa L_z} Z_{0\kappa} = 0. \quad (17)$$

Здесь  $Z_{0\kappa}$  — сопротивление, наведенное на нулевой стержень всеми стержнями, лежащими в плоскости  $z = \text{const}$  ( $\kappa = \text{const}$ ). Для расчета  $Z_{0\kappa}$  подставим в формулу (16) выражение (14) для  $Z_{\nu\mu\kappa}$  (учитывая, что  $n = n\{\nu, \mu, \kappa\}$ ):

$$Z_{0\kappa} = - \int_{S_0} \vec{\phi} \left( \sum_{\nu, \mu} \vec{E}_{\nu\mu\kappa} \{\vec{\phi}\} \right) dS. \quad (18)$$

Сумма, стоящая под интегралом, представляет собой поле, создаваемое двумерной решеткой стержней, лежащих в плоскости  $z = \text{const}$  ( $\kappa = \text{const}$ ). Для ее расчета воспользуемся эквивалентностью двумерной решетки стержней одиночному стержню, расположенному в прямоугольном волноводе с двумя стенками, обладающими идеальной электрической, и двумя — идеальной магнитной проводимостями. Действительно, из рис. 2 видно, что, используя метод зеркальных изображений и учитывая, что горизонтальные стенки обладают электрической, а вертикальные — магнитной проводимостями, мы перейдем от стержня в волноводе к двумерной решетке.

Таким образом,  $\sum_{\nu, \mu} \vec{E}_{\nu\mu\kappa} \{\vec{\phi}\}$  можно рассчитать, пользуясь указанной эквивалентной схемой, как поле, возбужденное в волноводе одиночным стержнем с распределением тока  $\vec{\phi}$ . Обозначая это поле

$$\vec{\mathcal{E}}_{\kappa} \{\vec{\phi}\} \equiv \sum_{\nu, \mu} \vec{E}_{\nu\mu\kappa} \{\vec{\phi}\}, \quad (19)$$

получим

$$Z_{0\kappa} = - \int_{S_0} \vec{\phi} \vec{\mathcal{E}}_{\kappa} \{\vec{\phi}\} dS. \quad (20)$$

Как известно (см. [6]), поле  $\vec{\mathcal{E}}$ , возбуждаемое стержнем в волноводе, представляет собой суперпозицию собственных волн

$$\vec{\mathcal{E}}_{\kappa} = \begin{cases} \sum_p C_p \vec{E}_p, & z > z_{\kappa}, \\ \sum_p C_{-p} \vec{E}_{-p}, & z < z_{\kappa}, \end{cases} \quad (21a)$$

где  $z_{\kappa}$  — координата стержня номера  $\kappa$ ,

$$C_{\pm p} = \frac{1}{N_{|p|}} \int_{S_x} \vec{\phi} \vec{E}_{\mp p} dS, \quad (21b)$$

$$N_{|p|} = \int_{S_{\perp}} \{[\vec{E}_p \vec{H}_{-p}] - [\vec{E}_{-p} \vec{H}_p]\} \vec{i}_z dS,$$

$\vec{E}_p$  — поле собственной волны типа  $p$ , распространяющейся в сторону

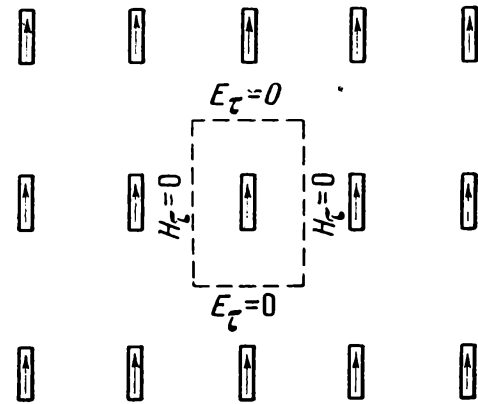


Рис. 2. Двумерная решетка стержней, эквивалентная одиночному стержню в прямоугольном волноводе с двумя металлическими ( $E_t = 0$ ) и двумя магнитными ( $H_t = 0$ ) стенками

$z > 0$ ,  $\vec{E}_{-p}$  — в сторону  $p < 0$ ,  $S_{\perp}$  — поперечное сечение эквивалентного волновода. Введем обозначение

$$f_{|p|} = \int_{S_x} \vec{\psi} \vec{E}_{\mp p} dS e^{\mp i\gamma_p z x}, \quad (22)$$

где  $\gamma_p$  — постоянная распространения  $p$ -волны в волноводе. Величина  $f_{|p|}$  не зависит от знака  $p$ , если собственные волны нормированы так, что они удовлетворяют соотношению

$$\vec{E}_{\perp p} = \vec{E}_{\perp(-p)} e^{-2i\gamma_p z}, \quad (23)$$

а распределение тока  $\psi$  на поверхности стержней симметрично относительно оси  $z$ . Легко видеть, что  $f_{|p|}$  не зависит от номера вибратора  $x$ , так как, ввиду идентичности всех стержней, индекс  $x$  входит в интеграл только в виде фазового множителя, который компенсируется благодаря умножению на  $e^{\mp i\gamma_p z x}$ .

При этом

$$C_{\pm p} = \frac{1}{N_{|p|}} f_{|p|} e^{\pm i\gamma_p z x}, \quad (21в)$$

и учитывая (21) и (20), получим

$$Z_{0x} = - \sum_p \frac{1}{N_{|p|}} f_{|p|}^2 e^{-i\gamma_p |z x|}, \quad x \neq 0. \quad (24)$$

Эта формула непригодна для вычисления собственного сопротивления  $Z_{00}$ , так как формулы (21) непригодны в области источников. Однако нетрудно убедиться путем непосредственного расчета, что активная составляющая собственного сопротивления стержня в волноводе равна

$$R_{00} = \text{Re } Z_{00} = - \sum_p \frac{1}{N_{|p|}} f_{|p|}^2, \quad (25)$$

причем суммирование происходит только по распространяющимся волнам (см., например, [7]). Здесь следует отметить, что в волноводе с боковыми магнитными стенками, наряду с  $E$ - и  $H$ -волнами, существует всегда распространяющаяся  $TEM$ -волна.

Так как поперечные периоды  $L_x$  и  $L_y$  в искусственной диэлектрике обычно выбираются меньше  $\lambda/2$ , то в эквивалентном волноводе все  $E$ - и  $H$ -волны будут затухающими, и в (25) следует сохранить только один член, соответствующий  $TEM$ -волне.

Подставляя полученные выражения (24) и (25) для  $Z_{0x}$  и  $R_{00}$  в уравнения (17), получим, учитывая, что  $|z_x| = |x| L_z$ ,

$$\begin{aligned} & - \sum_{x=-\infty}^{-1} e^{-ih x L_z} \sum_p \frac{1}{N_{|p|}} f_{|p|}^2 e^{+i\gamma_p x L_z} + \left( - \frac{1}{N_{|1|}} f_{|1|}^2 + iX_{00} \right) - \\ & - \sum_{x=1}^{\infty} e^{-ih x L_z} \sum_p \frac{1}{N_{|p|}} f_{|p|}^2 e^{-i\gamma_p x L_z} = 0 \quad (X_{00} = \text{Im } Z_{00}). \end{aligned} \quad (26)$$

Перепишем (26), меняя местами порядок суммирования:

$$- \sum_p \frac{f_{|p|}^2}{N_{|p|}} \left\{ \sum_{x=1}^{\infty} e^{-ix L_z (\gamma_p + h)} + \sum_{x=1}^{\infty} e^{-ix L_z (\gamma_p - h)} \right\} = \frac{f_{|1|}^2}{N_{|1|}} - iX_{00}. \quad (27)$$

Бесконечные суммы по индексу  $x$  легко просуммировать, полагая, согласно сказанному выше, что имеется малое затухание в среде для собственных волн. При этом

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{-ix L_z(\gamma_p+h)} = \frac{e^{-iL_z(\gamma_p+h)}}{1 - e^{-iL_z(\gamma_p+h)}},$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{-jx L_z(\gamma_p-h)} = \frac{e^{-iL_z(\gamma_p-h)}}{1 - e^{-iL_z(\gamma_p-h)}}. \quad (28)$$

Учитывая (28), преобразуем (27) к виду

$$\sum_p \frac{1}{N_{|p|}} f_{|p|}^2 \left\{ 1 + i \frac{\sin \gamma_p L_z}{\cos hL_z - \cos \gamma_p L_z} \right\} = \frac{1}{N_{|1|}} f_{|1|}^2 - iX_{00}. \quad (29)$$

Так как среди собственных волн лишь *ТЕМ*-волна — распространяющаяся, то целесообразно переписать (29), перенося в правую часть все члены, относящиеся к затухающим волнам, и учитывая, что  $\gamma_1 = k$ ,  $\gamma_p = -i\alpha_p$ ,  $p > 1$ , а  $N_{|p|}$  при  $p > 1$  — чисто мнимая величина:

$$R_{00} \frac{\sin kL_z}{\cos hL_z - \cos kL_z} = X_{00} - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{-iN_{|p|}} f_{|p|}^2 \left( 1 + \frac{\text{sh } \alpha_p L_z}{\cos hL_z - \text{ch } \alpha_p L_z} \right). \quad (30)$$

Сумма, стоящая в правой части, обусловлена затухающими волнами.

Таким образом, влияние этих волн эквивалентно лишь некоторому изменению собственного реактивного сопротивления одиночного стержня  $X_{00}$  (правда, эта добавка сама является функцией искомой постоянной распространения  $h$ ).

Вводя обозначение

$$X(h) \equiv X_{00} - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{f_{|p|}^2}{-iN_{|p|}} \left[ 1 + \frac{\text{sh } \alpha_p L_z}{\cos hL_z - \text{ch } \alpha_p L_z} \right] \quad (31)$$

и разрешая уравнение (30) относительно  $\cos hL_z$ , перепишем его в окончательном виде:

$$\cos hL_z = \cos kL_z + \frac{R_{00}}{X(h)} \sin kL_z. \quad (32)$$

Сравним, прежде всего, полученное уравнение с уравнениями, найденными другими методами — с использованием метода конечных разностей (см. [1]) и матричного метода (см. [2]). Эти уравнения имеют вид, аналогичный (32), с тем лишь отличием, что вместо коэффициента  $R_{00}/X(h)$  при  $\sin kL_z$  в первом случае стоит  $i \frac{\Gamma}{1 + \Gamma}$  (где  $\Gamma$  — коэффициент отражения, а  $1 + \Gamma$  — коэффициент прохождения плоской волны, падающей на двумерную плоскую решетку стержней  $x = \text{const}$ ), а во втором случае — взятая с обратным знаком половина реактивной проводимости эквивалентной схемы стержня решетки (эквивалентная схема рассматриваемой решетки представляет собой длинную линию, периодически шунтированную проводимостями). Легко показать, что если пренебречь взаимодействиями элементов решетки по затухающим

волнам и отбросить в (31) сумму  $\sum_{p=2}^{\infty}$ , т. е. положить просто  $X(h) \equiv X_{00}$ , то мы придем к уравнениям матричного метода и метода конечных разностей. Действительно, в [7] показано, что эквивалентная схема поперечного стержня в волноводе представляет собой линию, шунтиро-

ванную проводимостью

$$Y_{\text{эКВ}} = \frac{2R_{00}}{Z_{00} - R_{00}} = -i \frac{2R_{00}}{X_{00}} \quad (33)$$

(если стержень не нагружен и не излучает наружу). Половина реактивной компоненты  $Y_{\text{эКВ}}$ , взятая с обратным знаком, как раз равна  $R_{00}/X_{00}$ .

Используя полученные в [5] значения коэффициента прохождения  $q^+ = 1 + \Gamma = 1 - \frac{R_{00}}{Z_{00}}$  и коэффициента отражения  $q^- = \Gamma = \frac{-R_{00}}{Z_{00}}$ , найдем, что

$$-i \frac{q^-}{q^+} = -i \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} = i \frac{R_{00}}{Z_{00} - R_{00}} = \frac{R_{00}}{X_{00}}. \quad (34)$$

Таким образом, характеристическое уравнение (32) при условии пренебрежения волнами высших типов совпадает с уравнениями, полученными в [1] и [2] другими методами. Преимуществом (32) является то, что в нем учитываются и волны высших типов, причем члены, обусловленные ими, входят в (34) только в виде поправки к собственному реактивному сопротивлению стержней.

Решая (32), найдем постоянную распространения  $h$  как функцию параметров структуры. Удобнее, однако, поступать иначе и, задаваясь произвольными значениями  $hL_z$ , находить, для фиксированных  $kL_z$ , соответствующие значения собственного реактивного сопротивления стержня в волноводе  $X_{00} = F(hL_z)$ . Обращая полученную зависимость, найдем искомую функцию  $h = f(X_{00})$ . Вычисление собственного реактивного сопротивления  $X_{00}$  одиночного стержня, помещенного в эквивалентный волновод (рис. 2), может быть выполнено известными приемами. Например,  $X_{00}$  можно вычислить, суммируя известное собственное реактивное сопротивление стержня в свободном пространстве с реактивными сопротивлениями, наведенными на него его зеркальными изображениями в стенках волновода (рис. 2). Отметим, что вследствие стационарности исходного уравнения (4) относительно вариаций распределения тока на стержне, задание последнего не критично.

При решении (32) придется вычислять сумму слагаемых, обусловленных затухающими собственными волнами.

Практически число членов, которое необходимо будет при этом удерживать, невелико. Действительно, если  $\alpha_{p'} L_z \gg 1$ , то

$$\text{sh } \alpha_{p'} L_z \simeq \text{ch } \alpha_{p'} L_z \gg \cos hL_z, \quad (35)$$

и члены суммы, соответствующие собственным волнам с  $p \geq p'$ , обращаются в нуль. Оценим, когда будет выполняться условие (35), или ему эквивалентное

$$\frac{1}{2} e^{\alpha_{p'} L_z} \gg 1, \quad \alpha_{p'} L_z \gg \ln 2 \simeq 0,7. \quad (36)$$

Учитывая, что  $\alpha_{p'} \equiv \alpha_{\nu\mu} = \sqrt{\left(\frac{\nu\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\mu\pi}{L_y}\right)^2 - k^2}$  для затухающих  $E$ - и  $H$ -волн в прямоугольном волноводе, придадим (36) вид

$$\left(\frac{\nu}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{L_y}\right)^2 \gg \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \frac{0,05}{L_z^2}. \quad (37)$$

Пусть, например,  $L_x = L_y = L_z = L$ . Тогда (37) переписется так:

$$\nu^2 + \mu^2 \gg \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 + 0,05 \quad \text{или} \quad \nu^2 + \mu^2 \gg 1,05, \quad (38)$$

ибо  $L < \lambda/2$ . Но (38) выполняется уже при  $\nu = 2, \mu = 0, \nu = 0, \mu = 2$ , и т. д.

Таким образом, в случае кубической решетки следует учитывать лишь по три высших типа  $E$ - и  $H$ -волн, характеризуемых индексами:  $\nu = 1, \mu = 0; \nu = 0; \mu = 1$  и  $\nu = \mu = 1$ . Из (37) видно, что в общем случае число типов волн, которое следует учитывать, растет с уменьшением  $L_z$  и падает с уменьшением  $L_x$  и  $L_y$ . Уравнение (34) для  $h$  имеет ряд корней. Если  $h_0$  — один из них, то, очевидно, одновременно корнями будут и

$$h_m = h_0 + \frac{2\pi m}{L_z}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (39)$$

Это обусловлено тем, что поле в решетчатой структуре представляет собой суперпозицию бесчисленного множества пространственных гармоник, постоянные распространения которых связаны соотношением (39). Среди этих гармоник обычно выделяют основную, для которой

$$-\pi \leq hL_z \leq \pi. \quad (40)$$

### 3. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Проанализируем характеристическое уравнение (32), предполагая, что отношение  $R_{00}/X(h)$  можно менять от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом правая часть уравнения (32) принимает любые вещественные значения. Область

$$-1 \leq \cos kL_z + \frac{R_{00}}{X(h)} \sin kL_z \leq 1 \quad (41)$$

соответствует, очевидно, вещественным  $hL_z$  (см. (32)), т. е. области прохождения волн через решетку. Вне этой области

$$\cos hL_z > 1 \quad \text{и} \quad \cos hL_z < -1.$$

Это соответствует области запираания, в которой  $hL_z$  комплексно. Условие

$$\cos hL_z = \pm 1 \quad (42)$$

определяет границы полосы пропускания; при этом

$$h_1 = \frac{\pi}{L_z} \quad \text{и} \quad h_2 = 0. \quad (43)$$

На рис. 3 приведены кривые  $hL_z = f(kL_z)$  при различных  $R_{00}/X_{00}$ . При построении кривых не учитывались затухающие собственные волны, т. е. считалось, что  $X(h) = X_{00}$ . Из рис. 3 видно, что кривая  $hL_z = f(kL_z)$ , соответствующая  $X < 0$ , проходит выше линии  $hL_z = kL_z$ . Таким образом, при этом  $h > k$ , т. е. волны замедленные. При  $X > 0$  кривая проходит ниже линии  $hL_z = kL_z$ , т. е. для нее  $h < k$ , и волны ускоренные.

В области замедления, при  $X \rightarrow -\infty, h \rightarrow k$ ; для  $X_{00}/R_{00} = -\text{tg} \frac{kL_z}{2}$  достигается максимальное значение замедления  $h_{\text{макс}} \equiv h_1 = \pi/L_z$ , т. е.  $h_{\text{макс}}/k = \lambda/2L_z$ . При  $L_z \rightarrow 0, h_{\text{макс}} \rightarrow \infty$ . Уменьшение реактивности стержней, т. е. приближение к первому резонансу приводит к возрастанию замедления.

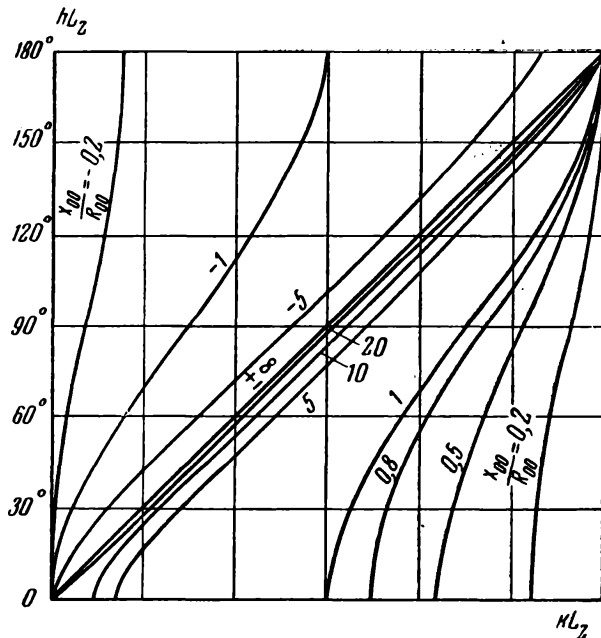


Рис. 3. Расчетные кривые  $hL_z = f(kL_z)$  для различных  $X_{00}/R_{00}$ , без учета высших типов волн



В области ускорения, при  $X \rightarrow +\infty$  (индуктивные стержни в области второго резонанса),  $h \rightarrow k$ . По мере уменьшения  $X$ , т. е. по мере приближения к первому резонансу стержней со стороны  $X > 0$ , ускорение возрастает, и при  $\frac{X_{00}}{R_{00}} = \operatorname{ctg} \frac{kL_z}{2}$ ,  $h \equiv h_2 = 0$ , что соответствует бесконечно большому ускорению. При  $kL_z = \pi$ , независимо от значения  $X$ , наступает полоса запираия. Вследствие периодичности  $\sin kL_z$  и  $\cos kL_z$ , при изменении  $kL_z$  последовательно возникают новые чередующиеся полосы пропускания и запираия, в отличие от случая открытых, т. е. двумерных и одномерных стержневых структур, в которых имеет место лишь одна область прохождения, соответствующая замедленным волнам.

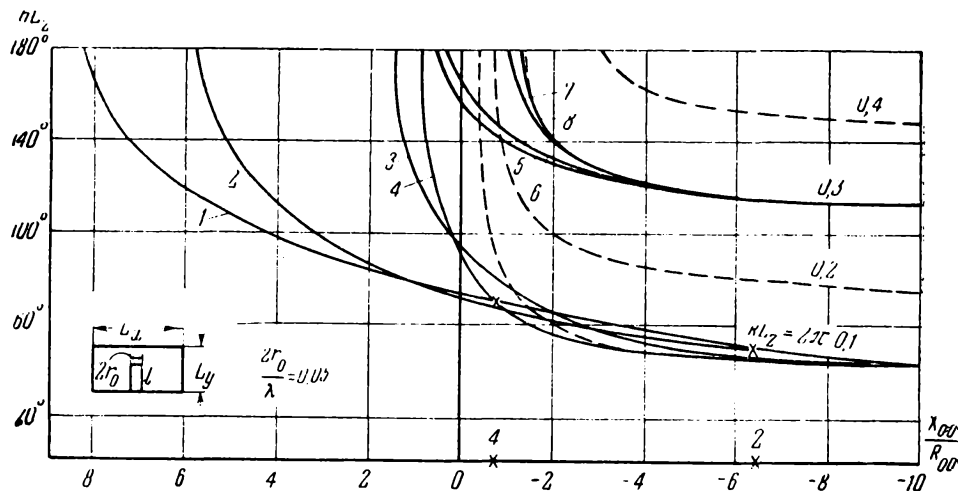


Рис. 4. Расчетные кривые  $hL_z = F(X_{00}/R_{00})$  для различных  $kL_z$ , с учетом волн высших типов:

$$L_x/\lambda = \begin{cases} 0,1 (2; 6) \\ 0,2 (1; 3; 4; 5; 7; 8), \end{cases} \quad L_y/\lambda = \begin{cases} 0,1 (3; 8) \\ 0,2 (1; 2; 4; 5; 6; 7), \end{cases} \quad l/\lambda = \begin{cases} 0,1 (1; 2; 3; 5; 6; 8) \\ 0,2 (4; 7) \end{cases}$$

На рис. 4 приведены графики  $hL_z = f(X_{00}/R_{00})$  для различных  $kL_z$ . Сплошными линиями изображены кривые, построенные с учетом высших типов волн, а пунктиром — без их учета. Каждая сплошная кривая строилась для конкретной геометрии структуры. При этом изменение величин  $X_{00}/R_{00}$  можно мыслить обусловленным изменением реактивного сопротивления  $X_{00}$  посредством последовательно включенного в каждый стержень сосредоточенного элемента настройки. Крестиками отмечены точки на кривых, соответствующие нулевому сопротивлению элементов настройки (т. е. их отсутствию).

Из рис. 4 видно, что влияние высших типов волн может существенно изменять величину фазовой постоянной. Это влияние возрастает с увеличением  $L_x$  и  $L_y$  (поскольку при этом уменьшается затухание волн высших типов), с уменьшением  $L_z$  (так как при этом увеличивается взаимодействие элементов по волнам высших типов) и с укорочением стержней (ибо при этом увеличивается амплитуда возбуждения этих волн). Из рис. 4 также видно, что в отсутствие элементов настройки максимально достижимое  $h_{\max}$  значительно меньше  $h_1 = \pi/L_z$ . При укорочении стержней  $h$  уменьшается и его можно вычислять (в отсутствие настройки) без учета волн высших типов. Расчеты\* показали, что постоянная распространения определяется из уравнения (32) с большой точностью. Так, 20%-я неточность задания величины  $X_{00}/R_{00}$  приводит к ошибке в величине  $hL_z$  порядка 2—3%. Это является следствием стационарности уравнения (32).

\* Расчеты и построение кривых выполнены студентом-дипломником МФТИ И. Н. Марченко.

Приложение

Докажем справедливость соотношения типа (8). Для этого рассмотрим поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  двух волн в трехмерной решетке, возбуждаемых заданными токами  $\vec{K}_1$  и  $\vec{K}_2$ , распределенными на ее элементах, согласно формулам

$$\vec{K}_1 = A e^{-ihf(n)L_z} \vec{\psi}_1 \text{ на } S_n, \quad (I)$$

$$\vec{K}_2 = B e^{-ihf(n)L_z} \vec{\psi}_2 \text{ на } S_n.$$

Здесь  $f(n)$  имеет тот же смысл, что и в тексте,  $h$  одинаково для обоих токов, а распределения  $\vec{\psi}_1$  и  $\vec{\psi}_2$  — произвольные заданные функции, одинаковые для всех  $n$ . Поскольку распределения  $\vec{\psi}_1$  и  $\vec{\psi}_2$  выбраны произвольно, то поля, порождаемые токами (I), не удовлетворяют нулевым граничным условиям (1) на поверхностях  $S_n$ , которые при этом следует рассматривать как геометрические поверхности, распределены заданные токи.

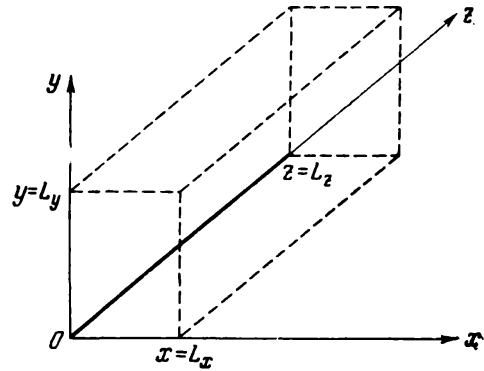


Рис. 5

Рассмотрим замкнутую поверхность  $S$  в виде параллелепипеда с размерами, равными периодам решетки  $L_x, L_y$  и  $L_z$ , образованного координатными плоскостями  $x = x_1, x = x_1 + L_x, y = y_1, y = y_1 + L_y, z = z_1$  и  $z = z_1 + L_z$  (рис. 5). Тогда внутри  $S$  находится один элемент решетки с поверхностью  $S_0$ . Легко видеть, что введенные поля периодичны по координатам  $x$  и  $y$  с периодами  $L_x$  и  $L_y$  и удовлетворяют следующему условию по координате  $z$ :

$$E_1|_{z+L_z} = e^{-ihL_z} E_1|_z, H_1|_{z+L_z} = e^{-ihL_z} H_1|_z, \quad (II)$$

и аналогично для поля  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ .

Применим к этим полям в области, ограниченной поверхностью  $S$ , сопряженную лемму Лоренца [5]:

$$\int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] + [\vec{E}_2^* \vec{H}_1]\} d\vec{S} = - \int_{S_0} \{\vec{K}_1 \vec{E}_2^* + \vec{K}_2^* \vec{E}_1\} dS. \quad (III)$$

Интегралы в равенстве (III) по противоположным граням  $x = x_1, x = x_1 + L_x$  и  $y = y_1, y = y_1 + L_y$  взаимно компенсируются вследствие периодичности полей по координатам  $x$  и  $y$  и противоположного направления нормалей на противоположных гранях. Интегралы по граням  $z_1 = z_1$  и  $z = z_1 + L_z$  также уничтожаются при вещественном  $h$  вследствие выполнения соотношений (II) и противоположной ориентации нормалей к этим граням.

Таким образом, в равенстве (III) интеграл в левой части пропадает, и мы приходим к соотношению

$$\int_{S_0} \{\vec{K}_1 \vec{E}_2^* + \vec{K}_2^* \vec{E}_1\} dS = 0. \quad (IV)$$

Полагая в (IV)

$$\vec{E}_1 = \vec{E}, \vec{K}_1 = \vec{K}, \vec{E}_2 = \Delta \vec{E}, \vec{K}_2 = \Delta \vec{K}, \quad (V)$$

получим использованное в тексте соотношение (8). Отметим, что при  $\Delta$ -вариации варьируется только распределение  $\vec{\psi}$ , а  $h$  остается неизменной, т. е. токи  $\vec{K}$  и  $\Delta \vec{K}$  имеют вид (I) с различными  $\vec{\psi}$  и одинаковыми  $h$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Модель, Радиотехника, 1955, 6, 6, 52.
2. S. V. Sohn, J. Appl. Phys., 1949, 20, 3, 257.
3. L. Lewin, J. I. E. E., 1947, p. III, 94, 27, 65.
4. J. Brown, W. Jackson, Proc. I. E. E., 1955, 102, p. B, 1, 37.
5. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1947, LVI, 5.
6. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1953, XXIII, 4, 654.
7. Л. С. Бененсон, ЖТФ, 1952, XXII, 4, 559

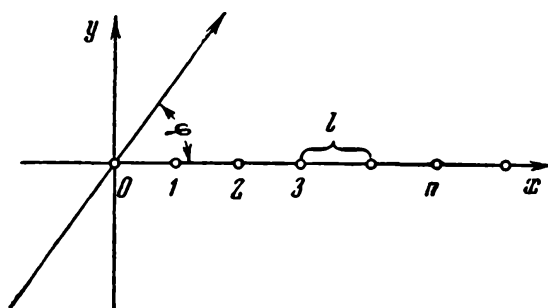
## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ РЕШЕТКЕ

Я. Н. Фельд

Предложен метод, позволяющий сводить задачи о дифракции волн на полубесконечных решетках к неоднородной задаче Гильберта, которая решается в квадратурах. Когда вычисление последних связано с громоздкими выкладками, задача приводится к вариационной и решается при помощи разложения в ряд по специальным полиномам.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полубесконечную решетку бесконечно-длинных линейных проводов, расположенных в плоскости  $x-z$  параллельно оси  $z$  (рисунок). Расстояния между осями соседних проводов обозначим буквой  $l$ , а радиус проводов — буквой  $r_0$ . Перенумеруем провода решетки, присвоив край-



нему левому проводу, ось которого совпадает с осью  $z$ , индекс нуль.

Пусть на эту решетку падает в направлении, ортогональном оси  $z$ , электромагнитная первичная плоская волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  с электрическим вектором, параллельным оси  $z$ :

$$E^0 = E_z^0 = e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}. \quad (1)$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  — длина волны, а  $\varphi$  — угол между направлением распространения и осью  $x$ .

Первичная волна возбуждает в проводах решетки токи, величина которых не меняется вдоль проводов.

Полный ток, протекающий через сечение  $n$ -го провода, обозначим буквой  $I_n$ . Эти токи, очевидно, создают вторичное поле  $\vec{E}, \vec{H}$  с электрическим вектором, параллельным оси  $z$ . На основании принципа суперпозиции его можно записать так:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \quad (2)$$

где  $E_n$  — электрическое поле, возбуждаемое током  $n$ -го провода, равное

$$E_n = \alpha I_n H_0^{(2)}(kR_n), \quad \alpha = \frac{60}{ir_0 H_1^{(2)}(kr_0)}. \quad (3)$$

Здесь  $H_{0,1}^{(2)}$  — функция Ханкеля (зависимость от времени взята в форме  $e^{i\omega t}$ ), а  $R_n$  — расстояние от оси  $n$ -го провода до точки наблюдения.

Если провода решетки идеально-проводящие, то полное электрическое поле  $E^0 + E$  должно обращаться на их поверхности в нуль.

Это граничное условие на поверхности  $m$ -го провода записывается, учитывая (1)—(3), так:

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} I_n H_0^{(2)}(kl|m-n|) + e^{-iklm \cos \varphi} = 0 \quad \text{при } m \geq 0. \quad (4)$$

При этом, как обычно, учитывая малость радиусов проводов ( $r_0 \ll l, \lambda$ ), значения полей  $E^0$  и  $E_n (n \neq m)$  взяты не на поверхности  $m$ -го провода, а на его оси. Исключение составляет собственное поле  $m$ -го провода  $E_m$ , с которым так поступать нельзя, на что указывает штрих у  $\Sigma$ . Он означает, что при  $n = m$  коэффициент у  $I_m$  в (4) должен быть взят равным  $\alpha H_0^{(2)}(kr_0)$  (погонное сопротивление одиночного провода).

Равенства (4) представляют собой бесконечную систему линейных уравнений, определяющих токи  $I_n$  в проводах решетки.

Вводя обозначения

$$Z_n = H_0^{(2)}(kl|n|) \quad \text{при } n \neq 0, \quad Z_0 = H_0^{(2)}(kr_0), \quad (5)$$

придадим уравнениям (4) вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n Z_{m-n} + \frac{1}{\alpha} e^{-iklm \cos \varphi} = 0, \quad m \geq 0. \quad (4a)$$

Для дальнейшего важно отметить [см. (5)], что  $Z_n = Z_{-n}$ . Будем искать решение в форме

$$I_n = A_n + \beta e^{-ikln \cos \varphi}, \quad (6)$$

где

$$\frac{1}{\beta} = -\alpha H_0^{(2)}(kr_0) - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(2)}(kln) \cos(kln \cos \varphi). \quad (6a)$$

Второй член в формуле (6) равен току в  $n$ -м проводе бесконечной решетки при падении на нее волны (1). Величина  $A_n$  при этом представляет собой краевую поправку, обусловленную наличием края  $x = 0$  у рассматриваемой полубесконечной решетки.

Учитывая сказанное, можно ожидать, что  $|A_n|$  будут резко убывать при удалении от края, т. е. с ростом  $n$ . Подставляя (6) в (4a), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n} = B_m, \quad m \geq 0. \quad (7)$$

Здесь

$$B_m = -\frac{1}{\alpha} e^{-iklm \cos \varphi} - \beta \sum_{n=0}^{\infty} Z_{m-n} e^{-ikln \cos \varphi}. \quad (7a)$$

Так как второй член в (6) удовлетворяет уравнению типа (4a) для бесконечной решетки, когда суммирование по  $n$  идет от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то правую часть (7a) можно еще записать иначе:

$$B_m = \beta \sum_{n=-\infty}^{-1} Z_{m-n} e^{-ikln \cos \varphi}. \quad (7b)$$

Система (7), в которой  $Z_{m-n}$  и  $B_m$  — известные величины [см. (5) и (7b)], принципиально позволяет определить неизвестные  $A_n$  и, следовательно, токи (6) в проводах. Зная токи, не представляет труда, используя (2) и (3), найти вторичное (дифрагированное) поле решетки.

В процессе вычислений будем полагать окружающую среду обладающей небольшими потерями, т. е.  $\text{Im } k < 0$ .

При этом обеспечивается абсолютная сходимость всех встречающихся рядов.

2. СВЕДЕНИЕ К ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ [1]  
(НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА)

Займемся анализом системы типа (7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n} = B_m, \quad m \geq 0. \quad (8)$$

При этом, в настоящем и следующих двух параграфах, будем считать  $Z_n$  и  $B_n$  произвольными заданными последовательностями, удовлетворяющими следующим условиям:

$$Z_n] = Z_{-n}, \quad \rho^{-1} \equiv \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Z_n|} < 1, \quad \rho_0^{-1} \equiv \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} < 1. \quad (9)$$

В случае физических задач, первое условие является следствием теоремы взаимности, а остальные накладывают определенные ограничения на рост  $|Z_n|$  и  $|B_n|$  при  $n \rightarrow \infty$ , которые при наличии некоторых потерь в среде всегда выполняются.

Введем прежде всего три функции комплексного переменного  $w$ :

$$G(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n w^n; \quad g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^n; \quad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n. \quad (10)$$

Как это следует из (9), функция  $G(w)$  голоморфна в кольце

$$\rho^{-1} < |w| < \rho, \quad \text{а } g(w) \text{ — в круге } |w| < \rho_0 \quad (\rho_0 > 1).$$

Предположим также, что  $f(w)$  голоморфна, как это будет показано ниже, в круге  $|w| \leq 1$ .

Величины  $A_n$ , являющиеся коэффициентами разложения  $f(w)$  в ряд Тейлора, можно выразить при помощи формул Коши

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw, \quad n \geq 0, \quad (11)$$

где  $L$  — произвольный контур, охватывающий начало координат и лежащий в области  $|w| \leq 1$ . Нам будет удобно считать его совпадающим с кругом  $|w| = 1$ .

Для последующего важно отметить, что из условия голоморфности  $f(w)$  при  $|w| \leq 1$  немедленно следует:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = 0 \quad \text{при } n < 0 \quad (11a)$$

и наоборот. Аналогично формуле (11), можно написать

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw, \quad n \geq 0. \quad (12)$$

Вернемся теперь к системе (8) и подставим в нее вместо  $A_n$  выражение (11):

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{m-n} \int_{(L)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = B_m, \quad m \geq 0.$$

Учитывая (11a), можно здесь суммирование по  $n$  проводить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поменяв, кроме этого, местами суммирование и интегрирование, что допустимо вследствие равномерной сходимости ряда, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{m-n} \frac{dw}{w^n} = B_m, \quad m \geq 0. \quad (13)$$

Справедливы [см. (10)] следующие равенства:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{m-n}}{w^n} = \frac{1}{w^m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n w^n = \frac{1}{w^m} G(w). \quad (14)$$

Подставляя (14) и (12) в уравнения (13), придадим им вид

$$\int_{(L)} \{f(w) G(w) - g(w)\} \frac{dw}{w^{m+1}} = 0 \quad \text{при } m \geq 0. \quad (15)$$

Эти равенства получены из системы (8) при условии выполнения соотношений (11а):

$$\int_{(L)} \frac{f(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m < 0. \quad (15a)$$

Поэтому решение системы (8) свелось к нахождению функции  $f(w)$ , удовлетворяющей уравнениям (15) и (15а). Определив из них  $f(w)$ , немедленно найдем решение исходной системы (8) при помощи формулы (11). Напомним, что функции  $G(w)$  и  $g(w)$  известны [см. (10)], поскольку  $Z_n$  и  $B_n$  заданы. Равенства (15) и (15а), очевидно, тождественно выполняются, если искомая функция  $f(w)$  удовлетворяет условиям

$$f(w) G(w) - g(w) = \Phi^-(w), \quad (16)$$

$$f(w) = \Phi^+(w), \quad (16a)$$

где  $\Phi^-(w)$  — функция, голоморфная в области  $|w| \geq 1$  (вне контура  $L$ ) и равномерно стремящаяся к нулю при  $|w| \rightarrow \infty$ , а  $\Phi^+(w)$  — голоморфна в области  $|w| \leq 1$  (внутри  $L$ ).

Действительно, подставив (16) и (16а) в (15) и (15а), перепишем последние в виде

$$\int_{(L)} \frac{\Phi^-(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m \geq 0;$$

$$\int_{(L)} \frac{\Phi^+(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m < 0.$$

Вследствие голоморфности  $\Phi^-(w)$  и  $\Phi^+(w)$  соответственно вне и внутри  $L$  и стремлении  $\Phi^-(w)$  к нулю при  $|w| \rightarrow \infty$  эти равенства тождественно удовлетворяются.

Исключая из (16) и (16а)  $f(w)$ , получим

$$\Phi^+(w) G(w) - g(w) = \Phi^-(w), \quad (17)$$

т. е. мы пришли к хорошо изученной [2] неоднородной задаче Гильберта о нахождении функций  $\Phi^-(w)$  и  $\Phi^+(w)$ , голоморфных соответственно вне и внутри контура  $L$ , по условию (17).

Эта задача, в нашем случае [см. (9)], всегда имеет единственное решение\*, которое можно записать в виде контурного интеграла по  $L$ . Мы не будем здесь выписывать это решение (отсылая интересующихся к монографии [2]), так как оно приводит, в случае полубесконечной решетки, к весьма сложному интегралу. Вместо этого используем непосредственно условия (16) и (16а) для получения эквивалентного вариационного принципа, позволяющего определить  $f(w)$ , а значит и  $A_n$ .

\* Таким образом, предположение о голоморфности  $f(w)$  при  $|w| \leq 1$  выполняется. Отметим, что  $G(w) \neq 0$  на контуре  $|w| = 1$ . Действительно,  $G(e^{i\gamma l}) = 0$  есть характеристическое уравнение для постоянной распространения  $\gamma$  волны вдоль бесконечной решетки и при наличии потерь не может иметь вещественных корней  $\gamma l$ .

### 3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Покажем, что функционал

$$\mathcal{L} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n} - 2B_m \right\} \quad (18)$$

стационарен для значений  $A_n$ , удовлетворяющих системе (8). Взяв вариацию  $\mathcal{L}$ , помня, что заданные величины  $Z_n$  и  $B_n$  при этом не варьируются, найдем

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{A_m Z_{m-n} \delta A_n + A_n Z_{m-n} \delta A_m\} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \delta A_m$$

или, учитывая соотношения  $Z_n = Z_{-n}$ ,

$$\delta\mathcal{L} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \delta A_m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n} - B_m \right\}. \quad (18a)$$

Если  $A_n$  удовлетворяют системе (8), то отсюда сразу следует, что  $\delta\mathcal{L} = 0$ , т. е. функционал  $\mathcal{L}$  стационарен. Наоборот, из стационарности  $\mathcal{L}$  следуют равенства (8), поскольку  $\delta A_m$  произвольны.

Подставляя в выражение (18) значения величин  $A_n$  и  $B_n$ , взятые из формул (11) и (12), получим, после несложных преобразований,

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f\left(\frac{1}{w}\right) \{f(w) G_1(w) - 2g(w)\} \frac{dw}{w}. \quad (19)$$

Функционал (18) стационарен для значений  $A_n$ , удовлетворяющих системе (8).

Отсюда можно сделать следующий вывод: функционал (19), рассматриваемый в классе функций  $f(w)$ , голоморфных при  $|w| \leq 1$  (т. е. определяемом условием (16a)), стационарен для функции  $f(w)$ , удовлетворяющей условию (16).

Дадим прямое доказательство этому утверждению. Проварьируем выражение (23), помня, что известные функции  $G$  и  $g$  не варьируются,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left\{ \delta f\left(\frac{1}{w}\right) [f(w) G(w) - 2g(w)] + f\left(\frac{1}{w}\right) G(w) \delta f(w) \right\} \frac{dw}{w}.$$

Из первой формулы (10) и соотношения  $Z_n = Z_{-n}$  следует, что

$$G\left(\frac{1}{w}\right) = G(w). \quad (20)$$

Поэтому, сделав замену переменного  $w$  на  $w^{-1}$  в последнем члене подынтегрального выражения, найдем

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{\pi i} \int_{(L)} \delta f\left(\frac{1}{w}\right) \{f(w) G(w) - g(w)\} \frac{dw}{w}. \quad (21)$$

Поскольку  $f(w)$  варьируется в классе функций, голоморфных при  $|w| \leq 1$ , то  $\delta f(w)$  также голоморфна в этой области и, следовательно,  $\delta f\left(\frac{1}{w}\right)$  голоморфна при  $|w| \geq 1$  (включая  $w = \infty$ ). Учитывая последнее, легко видеть, что  $\delta\mathcal{L}$  обращается в нуль, если  $f(w)$  удовлетворяет условию (16) и доказательство закончено. Наоборот, из стационарности функционала (19) в классе функций, голоморфных при  $|w| \leq 1$ , т. е. из условия  $\delta\mathcal{L}\{f\} = 0$  следует, как это видно из выражения (21), выполнение условия (16).

Таким образом, решение системы уравнений (15), (15а), а значит и соответствующей ей задачи Гильберта (17), эквивалентно решению вариационной задачи  $\delta\mathcal{L}\{f\} = 0$ . Стационарное значение  $\mathcal{L}$ , как это следует из (18) и (19) и равенств (8), (16), (16а), которые при этом выполняются, равно

$$\mathcal{L}_{\text{стац}} = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n = - \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f\left(\frac{1}{w}\right) g(w) \frac{dw}{w}. \quad (22)$$

Определение  $f(w)$ , при помощи изложенного выше вариационного принципа, удобно провести, представляя ее в виде ряда по специальным полиномам  $X_n(w)$  ( $n$  — степень полинома),

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(w). \quad (23)$$

Очевидно, любая функция, удовлетворяющая условию (16а), может быть представлена таким рядом в области  $|w| \leq 1$ .

Полиномы  $X_n(w)$  будем считать ортонормированными на контуре  $L$  ( $|w| = 1$ ), т. е. удовлетворяющими соотношениям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} X_n(w) X_m\left(\frac{1}{w}\right) G(w) \frac{dw}{w} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (24)$$

Эти полиномы аналогичны известным полиномам Сеге, отличаясь от них наличием веса  $G(w)/w$  и заменой аргумента  $w$  на  $1/w$  у одного из полиномов в условии ортонормировки (24).

Важно отметить, что при перемене местами индексов  $n$  и  $m$  левая часть равенства (24) не изменяется.

Оставляя построение полиномов  $X_n(w)$  до следующего параграфа, определим коэффициенты  $c_n$  в разложении (23), используя вариационный принцип  $\delta\mathcal{L}\{f\} = 0$ . Для этого найдем вариацию  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  при помощи (23), варьируя  $c_n$ ,

$$\delta f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n\left(\frac{1}{w}\right) \delta c_n. \quad (25)$$

Подставляя (23) и (25) в выражение (21), найдем

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{\pi i} \int_{(L)} \sum_n X_n\left(\frac{1}{w}\right) \delta c_n \left\{ G(w) \sum_m c_m X_m(w) - g(w) \right\} \frac{dw}{w}.$$

Используя ортонормировку (24), это выражение можно упростить, после чего получим

$$\delta\mathcal{L} = 2 \sum_n c_n \delta c_n - \frac{1}{\pi i} \int_{(L)} g(w) \sum_n X_n\left(\frac{1}{w}\right) \delta c_n \frac{dw}{w}.$$

Так как для искомых  $c_n$   $\delta\mathcal{L} = 0$ , то, приравнявая полученное выражение нулю, найдем

$$2 \sum_n \delta c_n \left\{ c_n - \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} g(w) X_n\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w} \right\} = 0.$$

Вследствие произвольности  $\delta c_n$  отсюда следует, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} g(w) X_n\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w}, \quad (26)$$



и задача определения  $f(w)$  [см. (23)] решена. Запишем полином  $X_n$  в виде

$$X_n(w) = \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}w + \dots + \alpha_n^{(n)}w^n. \quad (27)$$

Подставляя это выражение в (26), найдем, используя теорему о вычетах и вторую из формул (10),

$$c_n = B_0\alpha_0^{(n)} + B_1\alpha_1^{(n)} + \dots + B_n\alpha_n^{(n)}. \quad (26a)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $w$  в (23) и последней из формул (10), получим

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} c_{n+m}\alpha_n^{(n+m)}. \quad (28)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить искомые неизвестные  $A_n$ , достаточно определить коэффициенты полиномов (27).

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМОВ $X_n(w)$

Ортонормированные полиномы  $X_n(w)$  [см. (24)] можно построить, используя известный процесс ортогонализации Шмита. Для дальнейшего удобно записать общее выражение для  $X_n(w)$  при помощи определителей, аналогично тому, как это делается при построении полиномов Сеге [3]:

$$X_n(w) = \frac{1}{\sqrt{D_{n+1}D_n}} \begin{vmatrix} d_{00} & d_{10} & \dots & d_{n0} \\ d_{01} & d_{11} & \dots & d_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{0,n-1} & d_{1,n-1} & \dots & d_{n,n-1} \\ 1 & w & \dots & w^n \end{vmatrix}, \quad (29)$$

где

$$D_0 = 1, \quad D_{n+1} = \begin{vmatrix} d_{00} & \dots & d_{n0} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{0n} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}, \quad d_{mn} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} w^m w^{-n} G(w) \frac{dw}{w}. \quad (30)$$

Непосредственной подстановкой (29) в (24) можно убедиться в выполнении последнего.

Легко видеть, что  $d_{nm} = d_{mn}$ . Займемся вычислением  $d_{mn}$ . Для этого подставим в (30) значение  $G(w)$  из (10). Применяя теорему о вычетах, найдем

$$d_{mn} = Z_{n-m}. \quad (31)$$

Это равенство полностью определяет полиномы  $X_n(w)$ . Выпишем первые три из них:

$$\left. \begin{aligned} X_0(w) &= Z_0^{-\frac{1}{2}}; \quad X_1(w) = (-Z_1 + Z_0w) [Z_0(Z_0^2 - Z_1^2)]^{-\frac{1}{2}}; \\ X_2(w) &= \frac{(Z_1^2 - Z_0Z_2) + Z_1(Z_2 - Z_0)w + (Z_0^2 - Z_1^2)w^2}{\sqrt{(Z_0^2 - Z_1^2)(Z_0 - Z_2)\{Z_0(Z_0 + Z_2) - 2Z_1^2\}}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

#### 5. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Построенные в § 4 полиномы  $X_n(w)$ , точнее их коэффициенты  $\alpha_m^{(n)}$  позволяют, при помощи формул (26a) и (28), определить искомые неизвестные  $A_n$ . Однако для этого необходимо знать величины  $B_m$ , заданные рядами (7a) или (7б).

Подставляя в (7б) значение  $Z_{m-n}$  из (5), перепишем его в виде

$$B_m = \beta e^{-iklm \cos \varphi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(2)}(kln) e^{ikln \cos \varphi} - \sum_{n=1}^m H_0^{(2)}(kln) e^{ikln \cos \varphi} \right\}, \quad (33)$$

при  $m = 0$  вторую сумму следует отбросить. Нетрудно убедиться, что  $B_m$  так же, как и  $Z_n$  [см. (5)] удовлетворяют условиям (9), если  $\text{Im } k < 0$ , и, следовательно, мы вправе применить развитый метод. Для расчета  $B_m$  по формуле (33) необходимо улучшить сходимость ряда, стоящего первым в фигурных скобках. Это можно сделать, используя известную формулу  $\sum_n \varphi(n) = \sum_n \psi(n)$ , где  $\psi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n x} \varphi(x) dx$ . В частности, при  $\varphi = \pi/2$  она приводит для первой суммы в (33) к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(2)}(kln) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi + 2i \ln \left( K \frac{l}{2\lambda} \right) + \frac{\lambda}{l} + i \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\sqrt{n^2 - (l/\lambda)^2}} - \frac{2}{n} \right) \right\}$$

( $\ln K = 0,5772$ ).

Ниже приведены результаты расчета токов в полубесконечной решетке при нормальном падении ( $\varphi = \pi/2$ ) волны. Формула (6) при этом принимает вид:  $I_n = \beta(1 + A_n/\beta)$ . Относительные краевые поправки  $A_n/\beta$  для четырех крайних вибраторов ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) даны в таблице для проводов радиуса  $r_0 = 0,01\lambda$  и различных расстояний  $l$  между их осями. Величина  $\beta$  равна току в проводах бесконечной решетки, индуцированному рассматриваемой волной. Вычислять поправки для следующих вибраторов ( $n > 3$ ) не имеет смысла, так как уже при  $n = 3$  поправка весьма мала. Вычисления  $A_n$  производились по формуле (28). При этом, поскольку были найдены только первые четыре полинома  $X_n(w)$  [см. (29)], в формуле (28) при вычислении  $A_0/\beta$  учитывались первые четыре члена, при вычислении  $A_1/\beta$  — три члена, а для  $A_2/\beta$  и  $A_3/\beta$  — второй и первый член соответственно. Для того чтобы судить о быстроте сходимости (28), выпишем первые четыре члена для  $A_0/\beta$ :

$$\begin{aligned} A_0/\beta &= (-0,126 + i 0,031) + (0,012 - i 0,005) + \\ &+ (0,004 - i 0,001) + (0,002 - i 0,0007) \text{ при } l = 0,5\lambda, \\ A_0/\beta &= (-0,160 - i 0,248) + (-0,008 - i 0,034) + \\ &+ (-0,003 + i 0,006) + (0,002 - i 0,001) \text{ при } l = 0,2\lambda. \end{aligned}$$

n	l = 0,5 λ		l = 0,2 λ		l = 0,08 λ	
	$\left  \frac{A_n}{\beta} \right $	$\arg \frac{A_n}{\beta}$	$\left  \frac{A_n}{\beta} \right $	$\arg \frac{A_n}{\beta}$	$\left  \frac{A_n}{\beta} \right $	$\arg \frac{A_n}{\beta}$
0	0,110	2,931	0,324	4,164	0,852	4,857
1	0,051	6,132	0,121	2,817	0,266	4,072
2	0,035	3,032	0,068	1,575	0,142	3,416
3	0,027	6,112	0,035	0,216	0,105	2,456

### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Ф е л ь д, Докл. АН СССР, 1955, 102, 2, 257.
2. Н. И. М у с х е л и ш в и л и, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.
3. В. Л. Г о н ч а р о в, Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.

Поступила в редакцию  
14 I 1958

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*Я. Н. Фельд*

Развивается метод для нахождения распределения токов на системе из  $N$  металлических тел, возбуждаемых падающей волной или сторонними эдс, приложенными к их поверхностям. Решение дается в виде рядов по специальным ортонормированным функциям с окончательно определенными коэффициентами.

Метод проиллюстрирован на примере задач о возбуждении систем из  $N$  конечных параллельных трубчатых вибраторов и бесконечных лент.

### 1. ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ СИСТЕМЫ ИЗ $N$ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ

Рассмотрим систему из  $N$  металлических тел произвольной формы, возбуждаемых непосредственно приложенной к ним сторонней эдс или падающей на них первичной волной. Общая поверхность этих тел  $S$  равна:  $S = \sum_{n=1}^N S_n$ , где  $S_n$  — поверхность  $n$ -го тела. Полагая тела идеально проводящими, обозначим поверхностную плотность тока на них через  $\vec{K}$ . Полное поле можно записать в виде

$$\vec{E}_{\text{пол}} = \vec{E}^0 + \vec{E}, \quad \vec{H}_{\text{пол}} = \vec{H}^0 + \vec{H}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  — первичное возбуждающее поле;  $\vec{E}, \vec{H}$  — вторичное, обусловленное токами  $\vec{K}$ , индуцированными на  $S$ . Вторичное поле существенно зависит от формы поверхности  $S$  и элементарно выражается через  $\vec{K}$  при помощи известных формул. Например,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon} (\text{grad div} + k^2) \int_{(S)} \vec{K} e^{-ikR} \frac{dS'}{R}. \quad (2)$$

Здесь  $R$  — расстояние между точками интегрирования и наблюдения; операция  $\text{grad div}$  берется по координатам последней. Таким образом, задача определения поля (1) сводится к нахождению токов  $\vec{K}$  на  $S$ , для чего служит уравнение

$$\vec{E}_t + \vec{E}_t^0 = 0 \text{ на } S, \quad (3)$$

являющееся граничным условием на идеально проводящей поверхности.

Тангенциальная составляющая  $\vec{E}_t$  на  $S$  получается в результате воздействия линейного интегродифференциального оператора (см. (2)) на ток  $\vec{K}$ . Это можно записать так:

$$\vec{E}_t = L\mathcal{L}\vec{K} \text{ на } S, \quad (4)$$

где  $L$  — дифференциальный, а  $\mathcal{L}$  — интегральный линейные операторы.

Учитывая (2), их можно представить в виде

$$L \equiv (\text{grad div} + k^2)_t, \quad \mathcal{L} \equiv \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon} \int_{(S)} dS' \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (4a)$$

Индекс  $t$  в выражении для  $L$  указывает на то, что после взятия операции  $(\text{grad div} + k^2)$  результат нужно спроектировать на плоскость, касательную к  $S$  в рассматриваемой точке. Введенное обозначение (4) позволяет придать уравнению (3) следующую форму:

$$L\mathcal{L}\vec{K} = -\vec{E}_t^0 \text{ на } S. \quad (5)$$

В тех случаях, когда возможно найти \* оператор  $L^{-1}$ , обратный оператору  $L$ , равенство (5) легко упрощается и принимает вид

$$\mathcal{L}\vec{K} = L^{-1}(-\vec{E}_t^0). \quad (5a)$$

Равенства (5) и (5a) принадлежат к следующему типу уравнений:

$$\mathcal{G}\vec{K} = \vec{F}, \quad (6)$$

где  $\vec{F}$  — заданный на  $S$  вектор [равный  $-\vec{E}_t^0$  и  $L^{-1}(-\vec{E}_t^0)$  в случаях (5) и (5a)];  $\vec{K}$  — искомый вектор, касательный к  $S$ ;  $\mathcal{G}$  — линейный самосопряженный оператор (равный  $L\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}$  в случаях (5) и (5a)).

Определим скалярное (интегральное) произведение двух произвольных векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , заданных на  $S$ , при помощи формулы \*\*

$$(\vec{A}, \vec{B}) = \int_{(S)} \vec{A} \vec{B} dS. \quad (7)$$

Оператор  $\mathcal{G}$  будем считать самосопряженным в смысле выполнения равенства

$$(\vec{K}_1, \mathcal{G}\vec{K}_2) = (\mathcal{G}\vec{K}_1, \vec{K}_2), \quad (8)$$

где  $\vec{K}_1$  и  $\vec{K}_2$  — два произвольных, заданных на  $S$ , распределения тока. Для  $\mathcal{G} = L\mathcal{L}$  соотношение (8) является записанной в новых обозначениях леммой Лоренца (см. (4) и (7)) и потому не нуждается в доказательстве, а при  $\mathcal{G} = \mathcal{L}$  оно, учитывая (4a), принимает вид \*\*\*

$$\int_{(S)} \vec{K}_1 \int_{(S)} \vec{K}_2' \frac{e^{-ikR}}{R} dS' dS = \int_{(S)} \vec{K}_2 \int_{(S)} \vec{K}_1' \frac{e^{-ikR}}{R} dS' dS,$$

из которого сразу же следует его справедливость.

Введем на  $S$  полную систему векторных функций (базис)  $\vec{X}^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), касательных к  $S$  и удовлетворяющих условиям ортонормировки:

$$(\vec{X}^{(n)}, \mathcal{G}\vec{X}^{(m)}) = \delta_{nm} \quad (\delta_{nm} = 0 \text{ при } n \neq m, \delta_{nn} = 1). \quad (9)$$

\* Так как оператор  $L$  — дифференциальный, то при нахождении  $L^{-1}$  приходится иногда использовать также некоторые концевые условия.

\*\* Так как векторы, вообще говоря, комплексны, то это произведение не является гильбертовым.

\*\*\* Штрихованные величины относятся к точке одного из концов  $R$ , а нештрихованные — к точке другого.

Будем полагать, что такая система построена (см. § 2) и будем искать решение (6) в виде ряда

$$\vec{K} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \vec{X}^{(n)} \text{ на } S, \quad (10)$$

где  $C_n$  — постоянные числа, подлежащие определению. Подставляя этот ряд в уравнение (6) и умножая последнее скалярно (в смысле (7)) на  $\vec{X}^{(m)}$ , найдем

$$(\vec{X}^{(m)}, \mathcal{G}\{\sum_n C_n \vec{X}^{(n)}\}) = (\vec{X}^{(m)}, \vec{F})$$

или, учитывая (7) и линейность оператора  $\mathcal{G}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (\vec{X}^{(m)}, \mathcal{G}\vec{X}^{(n)}) = (\vec{X}^{(m)}, \vec{F}).$$

Условие ортонормировки (9) позволяет сразу получить отсюда искомые коэффициенты

$$C_m = (\vec{X}^{(m)}, \vec{F}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Таким образом, получаем для плотности тока ряд типа Фурье:

$$\vec{K} = \sum_{n=0}^{\infty} (\vec{X}^{(n)}, \vec{F}) \vec{X}^{(n)} \text{ на } S. \quad (12)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА $\vec{X}^{(n)}$

Пусть на поверхности  $S$  задана некоторая полная система векторных функций  $\vec{Y}^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), касательных к  $S$ . Для того чтобы построить базис  $\vec{X}^{(n)}$ , ортонормированный в смысле (9), следует применить к  $\vec{Y}^{(n)}$  процесс ортогонализации типа Шмидта.

В результате такой ортогонализации придем к следующему выражению для  $\vec{X}^{(n)}$ :

$$\vec{X}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \begin{vmatrix} d_{00} d_{01} \dots \dots \dots d_{0n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ d_{n-1,0} d_{n-1,1} \dots \dots d_{n-1,n} \\ \vec{Y}^{(0)} \vec{Y}^{(1)} \dots \dots \dots \vec{Y}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где

$$d_{mn} = (\vec{Y}^{(m)}, \mathcal{G}\vec{Y}^{(n)}); \quad D_0 = 1; \quad D_{n+1} = \begin{vmatrix} d_{00} \dots \dots d_{0n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ d_{n0} \dots \dots d_{nn} \end{vmatrix}. \quad (13a)$$

Действительно, полагая вначале  $m < n$ , можно написать

$$(\vec{Y}^{(m)}, \mathcal{G}\vec{X}^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \begin{vmatrix} d_{00} d_{01} \dots \dots \dots d_{0n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ d_{n-1,0} d_{n-1,1} \dots \dots d_{n-1,n} \\ d_{m0} d_{m1} \dots \dots \dots d_{mn} \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (14)$$

Так как (см. (13))  $\vec{X}^{(m)}$  есть линейная комбинация  $\vec{Y}^{(0)}, \vec{Y}^{(1)}, \dots, \vec{Y}^{(m)}$ , то соотношение (14) позволяет написать

$$(\vec{X}^{(m)}, \mathcal{E}\vec{X}^{(n)}) = 0 \text{ при } m < n;$$

$\mathcal{E}$  является самосопряженным оператором (см. (8)), поэтому  $(\vec{X}^{(m)}, \mathcal{E}\vec{X}^{(n)}) = (\vec{X}^{(n)}, \mathcal{E}\vec{X}^{(m)}) = 0$  и при  $m > n$ . Таким образом, ортогональность  $\vec{X}^{(n)}$  доказана.

Учитывая (7) и (13) и обозначая через  $D_{ik}^{(n+1)}$  алгебраическое дополнение элемента  $d_{ik}$  в определителе  $D_{n+1}$ , напомним цепь равенств

$$\begin{aligned} D_n D_{n+1} (\vec{X}^{(n)}, \mathcal{E}\vec{X}^{(n)}) &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} D_{nk}^{(n+1)} \vec{Y}^{(k)}, \sum_{i=0}^n D_{ni}^{(n+1)} \mathcal{E}\vec{Y}^{(i)} \right) = \\ &= \sum_{i,k}^{0-n} D_{nk}^{(n+1)} D_{ni}^{(n+1)} (\vec{Y}^{(k)}, \mathcal{E}\vec{Y}^{(i)}) = \sum_{k,i}^{0-n} D_{nk}^{(n+1)} D_{ni}^{(n+1)} d_{ki} = D_{n+1} D_{nn}^{(n+1)} = D_{n+1} D_n. \end{aligned}$$

Следовательно, условие нормировки  $(\vec{X}^{(n)}, \mathcal{E}\vec{X}^{(n)}) = 1$  также выполнено. Таким образом, (13) действительно определяет базис, удовлетворяющий условиям ортонормировки (9).

Отметим, что при проведении доказательства существенно использовалась самосопряженность оператора  $\mathcal{E}$ .

### 3. ВЕКТОРЫ, ЗАДАННЫЕ НА S

Задать вектор  $\vec{A}$  на  $S = \sum_n S_n$  — это значит задать его на каждой поверхности  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), например, при помощи равенств

$$\vec{A} = \vec{A}_n \text{ на } S_n, \quad n=1, 2, \dots, N, \tag{15}$$

где  $\vec{A}_n$  — вектор, определенный только на  $S_n$ .

Таким образом, вектор  $\vec{A}$  на  $S$  определяется совокупностью из  $N$  векторов  $\vec{A}_n$ , заданных на соответствующих поверхностях  $S_n$ . Этот факт удобно записать в виде символического равенства

$$\vec{A} = (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_N), \tag{15a}$$

которое заменяет собой  $N$  равенств (15).

Представление (15) ((15a)) используется ниже при рассмотрении векторов типа  $\vec{K}$ ,  $\vec{Y}^n$  и  $\vec{X}^{(n)}$ , областью определения которых является поверхность  $S = \sum_n S_n$ . Если вектор  $\vec{A}$  касателен к  $S$ , т. е. представляет собой некоторое распределение тока, то, воздействуя на него оператором  $\mathcal{E}$ , в случае, когда последний совпадает с  $\mathcal{L}$ , найдем, используя (4a) и (15),

$$\mathcal{E}\vec{A} = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon} \sum_{n=1}^N \int_{(S_n)} \vec{A}_n \frac{e^{-ikR}}{R} dS'. \tag{16}$$

Для дальнейшего важно отметить, что в случае, когда элемент системы представляет собой бесконечную идеально проводящую незамкнутую

поверхность (лента, трубка и т. п.), то под  $\vec{K}$  мы будем понимать двухстороннюю плотность тока и в соответствии с этим все интегралы брать по одной стороне поверхности, которая и обозначается через  $S_n$ .

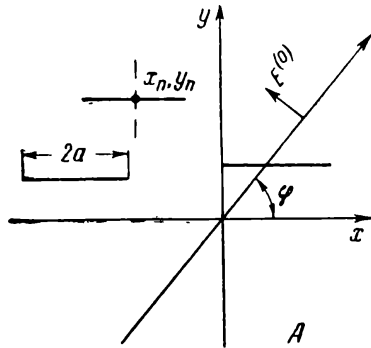
#### 4. ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ ТИПА ЛЕНТ И ТРУБЧАТЫХ ВИБРАТОРОВ

Рассмотрим две следующие задачи.

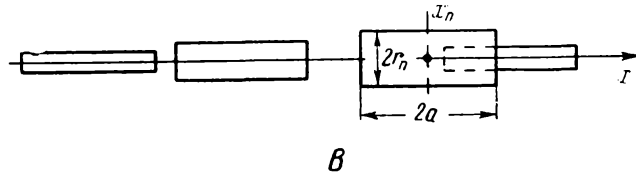
А. Дифракция плоской электромагнитной волны

$$E_x^{(0)} = -\sin \varphi e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} \quad (17A)$$

на системе из  $N$  идеально проводящих бесконечно длинных лент ширины  $2a$  и нулевой толщины. Все ленты параллельны плоскости  $y = 0$  и их средние линии имеют координаты  $x_n$ ,  $y_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Направление падения волны  $E^{(0)}$  нормально к оси  $z$  и составляет угол  $\varphi$  с осью  $x$  (см. рис. А).



В. Возбуждение системы из  $N$  иде-



ально проводящих трубчатых вибраторов (длины  $2a$  каждый, с диаметрами  $2r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  и осями труб, совпадающими с осью  $x$ ) сторонней эдс, распределенной вдоль наружной поверхности труб по закону

$$E^0 = E_x^0(x), \quad (17B)$$

т. е. обладающей осевой симметрией. Центральные сечения труб совпадают с плоскостями  $x = x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  (рис. В).

Применим к решению этих задач метод, изложенный в § 1 и 2. Токи на элементах системы имеют только  $x$ -ю компоненту  $K = K_x$  и зависят от одной координаты  $x$ . В соответствии с (12а) запишем двухстороннюю поверхностную плотность тока так:

$$K = (K_1, K_2, \dots, K_N),$$

т. е.  $K = K_n$  на  $S_n$ .

На поверхности  $S$  элементов системы тангенциальная составляющая  $\vec{E}$  равна  $E_x$ . Только она и будет входить во все формулы для нахождения тока.

Используя (4) и (4а), легко получить следующие выражения для интересующей нас компоненты (аналогичные формулы см. в [1]):

$$E_x = -\frac{1}{4\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \sum_{n=1}^N \int_{(n)} K_n H_0^{(2)} \left( k \sqrt{(x-x')^2 + (y-y_n)^2} \right) dx', \quad (18A)$$

где  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — координаты точки интегрирования, и

$$E_x = -\frac{1}{4\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \sum_{n=1}^N r_n \int_{(n)} K_n \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(vr, vr_n) e^{iw(x-x')} dw dx', \quad (18B)$$

где

$$\Psi(vr, vr') = \begin{cases} J_0(vr) H_0^{(2)}(vr') & \text{при } r \leq r', \\ J_0(vr') H_0^{(2)}(vr) & \text{при } r \geq r', \end{cases} \quad (19B)$$

$v = \sqrt{k^2 - w^2}$ ,  $\text{Im } v < 0$ ;  $r'$ ,  $\varphi'$ ,  $x'$  — цилиндрические координаты точки интегрирования;  $J_0(x)$  и  $H_0^{(2)}(x)$  — цилиндрические функции. Знак  $(n)$  под интегралами означает, что интегрирование по  $x'$  производится в пределах  $n$ -го элемента. Учитывая, что  $x'$  и  $x$  в пределах  $n$ -го элемента  $S_n$  пробегают интервал от  $x_n - a$  до  $x_n + a$ , удобно в каждом из таких интервалов произвести замену переменных по формулам

$$x' = a\xi + x_n, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad \text{и} \quad x = a\eta + x_n, \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (20)$$

При этом оба выражения (18) запишутся так:

$$E_x = \alpha_m \left( \frac{d^2}{d\eta^2} + \kappa^2 \right) \sum_{n=1}^N \int_{-1}^1 K_n(\xi) G_{mn}(\eta - \xi) d\xi \quad \text{на } S_m. \quad (21)$$

Здесь введены обозначения:  $\kappa = ka$ ;

$$G_{mn}(\eta) = -\frac{1}{4\omega\epsilon a} H_0^{(2)}(k\sqrt{(a\eta + x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}); \quad \alpha_m = 1, \quad (22A)$$

$$G_{mn}(\eta) = -\frac{\pi r_m r_n}{2\omega\epsilon a} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(vr_m, vr_n) e^{i\omega(a\eta + x_m - x_n)} d\omega; \quad \alpha_m = \frac{1}{2\pi r_m}. \quad (22B)$$

Таким образом, вместо общей для всей системы координаты  $x'(x)$  мы пользуемся в пределах каждого элемента системы местной координатой  $\xi(\eta)$ , отсчитываемой от середины ( $x = x_n$ ) рассматриваемого элемента.

Из формул (22) и (19B) сразу вытекает следующее соотношение:

$$G_{mn}(\eta) = G_{nm}(-\eta). \quad (23)$$

Отметим также, что в задаче  $A$  под  $S_n$  понимается двухсторонняя поверхность ленты единичной длины вдоль оси  $z$  (так как поле не зависит от координаты  $z$ ).

Из формулы (21), в соответствии с обозначениями (4) и (4а), следует, что

$$L = \left( \frac{d^2}{d\eta^2} + \kappa^2 \right); \quad \mathcal{E}K = \mathcal{L}K = \alpha_m \sum_{n=1}^N \int_{-1}^1 K_n(\xi) G_{mn}(\eta - \xi) d\xi \quad \text{на } S_m. \quad (24)$$

В отличие от (4а) здесь в выражениях для  $L$  и  $\mathcal{L}$  отброшены несущественные множители  $a^{-2}$  и  $a^2$ , а также опущены стрелки над  $K$  и  $K_n$ , так как последние имеют только одну составляющую.

Обратный оператор  $L^{-1}$ , удовлетворяющий условию  $LL^{-1} = 1$ , как легко показать, определяется формулой

$$F = L^{-1}(-E_x^0) = A_m e^{i\kappa\eta} + B_m e^{-i\kappa\eta} - \frac{1}{\kappa} \int_0^\eta E_x^0 \sin \kappa(\eta - \xi) d\xi \quad \text{на } S_m, \quad (25)$$

Постоянные интегрирования  $A_m$ ,  $B_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) находятся из условия обращения в нуль тока на концах ( $\eta = \mp 1$ )  $m$ -го элемента системы, т. е.

$$K_m(1) = K_m(-1) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Всюду ниже при рассмотрении задач  $A$  и  $B$  оператор  $\mathcal{E} = \mathcal{L}$  определяется формулой (24), а  $F$  — формулой (25).



### 5. ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА $X^{(n)}$ ДЛЯ ЗАДАЧ А И В

Поскольку в задачах А и В ток имеет только одну  $x$ -ю компоненту, то и базисы  $Y^{(n)}$  и  $X^{(n)}$ , при помощи которых он выражается, могут быть взяты на  $S$  в виде скалярных функций.

Базис  $Y^{(n)}$  проще всего построить, используя семейство функций, аналогичное применяемому при разложении в обычный ряд Фурье. Однако, учитывая необходимость удовлетворения граничным условиям (26), эти функции не должны (все) иметь период, равный двум и обращаться в нуль на концах основного интервала  $(-1, 1)$ . Кроме этого, они, естественно, должны являться полной системой на интервале  $(-1, 1)$  в интересующем нас классе функций.

В противном случае, как легко проследить, условия (26) будут формально удовлетворяться при любых  $A_m$  и  $B_m$ , вследствие чего сильно затруднится определение последних. Всем перечисленным выше требованиям удовлетворяют функции  $\exp(in\alpha\xi)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $\alpha$  — фиксированное число, лежащее в интервале  $0 < \alpha < \pi$ . Например, можно положить  $\alpha = \pi/2$ , однако, по-видимому, сходимость рядов улучшится, если взять  $\alpha$  ближе к  $\pi$ .

Используя эти функции, запишем  $Y^{(n)}$  в виде

$$Y^{(n)} = (Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_N^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где

$$Y_\nu^{(n)} = 0 \quad \text{при } \nu \neq \mu; \quad Y_\mu^{(n)} = e^{i\sigma\alpha\xi}.$$

Здесь  $\mu$  и  $\sigma$  — целые числа, причем  $1 \leq \mu \leq N$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$ ; оба числа находятся из выражений

$$\left. \begin{aligned} n &= 2(N\sigma + \mu) - 2 && \text{при } n \text{ — четном,} \\ n &= -2(N\sigma - \mu) - 2N - 1 && \text{при } n \text{ — нечетном.} \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

Такое представление неотрицательного целого числа  $n$  единственно. Вследствие (27a), каждому числу  $\sigma$  соответствует  $N$  различных чисел  $n$ . Некоторое усложнение по сравнению с обычным рядом Фурье объясняется тем, что в нашем случае при помощи базиса (27) необходимо представить функцию, любым образом заданную на  $N$  интервалах  $-1 < \xi < 1$ , соответствующих  $N$  элементам системы.

Задав при помощи (27) исходный базис  $Y^{(n)}$ , найдем по формулам (13) ортонормированный базис  $X^{(n)}$ . Для этого прежде всего изложим метод расчета элементов определителей  $d_{mn}$ . Используя (13a), с учетом (7) и (27), можно написать

$$d_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{(S_k)} Y_k^{(m)} \mathcal{G}Y^{(n)} dS = \int_{(S_{\mu'})} Y_{\mu'}^{(m)} \mathcal{G}Y^{(n)} dS. \quad (28)$$

Из формул (24) и (27) следует, что

$$\mathcal{G}Y^{(n)} = \alpha_{\mu'} \int_{-1}^1 Y_{\mu}^{(n)}(\xi) G_{\mu'\mu}(\eta - \xi) d\xi \quad \text{на } S_{\mu'}$$

и

$$Y_{\mu}^{(n)}(\xi) = e^{i\sigma\alpha\xi}, \quad Y_{\mu'}^{(m)}(\eta) = e^{i\sigma'\alpha\eta},$$

где целые числа  $\sigma$ ,  $\mu$  и  $\sigma'$ ,  $\mu'$  определяются из представления (27a) для  $n$  и  $m$  соответственно.

Подставив написанные выражения в (28) и переходя от интегрирования по  $dS$  к интегрированию по  $d\eta$  (см. (20)), найдем,

$$d_{mn} = \int_{-1}^1 e^{i\sigma'\alpha\eta} \int_{-1}^1 e^{i\sigma\alpha\xi} G_{\mu'\mu}(\eta - \xi) d\xi d\eta. \tag{29}$$

Этот двойной интеграл можно свести к однократным, заменив переменную  $\xi$  на  $\xi' = \eta - \xi$  и меняя порядок интегрирования по формуле Дирихле. В результате, учитывая соотношение (23), найдем

$$d_{mn} = \frac{e^{i\alpha(\sigma+\sigma')}}{i\alpha(\sigma+\sigma')} (\beta_{\mu'\mu}^{(-\sigma)} + \beta_{\mu\mu'}^{(-\sigma')}) - \frac{e^{-i\alpha(\sigma+\sigma')}}{i\alpha(\sigma+\sigma')} (\beta_{\mu'\mu}^{(\sigma')} + \beta_{\mu\mu'}^{(\sigma)}). \tag{30}$$

Здесь

$$\beta_{ik}^{(\nu)} = \int_0^2 e^{i\nu\alpha\xi} G_{ik}(\xi) d\xi \tag{30a}$$

— коэффициенты типа Фурье функции  $G_{ik}(\xi)$  в интервале (0,2). Напомним (см. (27a)), что

$$n = \begin{cases} 2(N\sigma + \mu) - 2 \\ -2(N\sigma - \mu) - 2N - 1 \end{cases};$$

$$m = \begin{cases} 2(N\sigma' + \mu') - 2, & -\infty < \sigma, \sigma' < \infty, \\ -2(N\sigma' - \mu') - 2N - 1, & 1 \leq \mu, \mu' \leq N; n, m \geq 0. \end{cases} \tag{31}$$

Таким образом, для определения  $d_{mn}$ , т. е. для построения базиса  $X^{(n)}$ , нужно знать коэффициенты (30a) типа Фурье ядер  $G_{ik}(\xi)$  в интервале (0,2).  $X^{(n)}$  можно записать в виде (см. (15a))

$$X^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_N^{(n)}), \tag{32}$$

где

$$X_\nu^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \sum_{m=0}^n D_{nm}^{(n+1)} Y_\nu^{(m)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N, \tag{32a}$$

как это сразу следует из формул (13) и (27).

### 6. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТОКОВ В ЭЛЕМЕНТАХ СИСТЕМЫ

Построив  $X^{(n)}$ , можно при помощи (12) найти плотность тока  $K$  на поверхности  $S$  элементов системы. Для этого прежде всего определим коэффициенты в формуле (12). Используя (13), можно написать

$$(X^{(n)}, F) = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \begin{vmatrix} d_{00} & \dots & \dots & \dots & d_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & \dots & \dots & \dots & d_{n-1,n} \\ (Y^{(0)}, F) & \dots & \dots & \dots & (Y^{(n)}, F) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \sum_{k=0}^n D_{nk}^{(n+1)} (Y^{(k)}, F), \tag{33}$$

где, как это следует из (7) и (27),

$$(Y^{(n)}, F) = \int_{(S_\mu)} Y_\mu^{(n)} F dS = \frac{1}{\alpha_\mu} \int_{-1}^1 F_\mu e^{i\sigma\alpha\xi} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{34}$$

Здесь  $F_\mu = F$  на  $S_\mu$ , а  $\sigma$  и  $\mu$  однозначно определяются числом  $n$  при помощи (27а). Таким образом, формулы (33) и (33а) определяют коэффициенты разложения (12) (если  $F$  известно), а следовательно и  $K = (K_1, K_2, \dots, K_N)$ . Действительно, из формул (12), (32) и (32а) следует

$$K_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X^{(n)}, F)}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \sum_{m=0}^n D_{nm}^{(n+1)} Y_\nu^{(m)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N$$

или, подставляя вместо  $Y_\nu^{(m)}$  его значение из (27),

$$K_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(X^{(n)}, F)}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} D_{nm}^{(n+1)} e^{i\sigma' \alpha \xi}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

Штрих у  $\Sigma(\Sigma')$  указывает на то, что суммирование идет только по тем значениям  $m$ , которые допускают представление типа (27а):

$$m = 2(N\sigma' + \nu) - 2 \quad \text{или} \quad m = -2(N\sigma' - \nu) - 2N - 1, \quad (36)$$

где  $\nu$  задано, а  $\sigma'$  — любое целое число, при котором  $0 \leq m \leq n$ . Благодаря связи (36) между  $\sigma'$  и  $m$  правая часть (35) неявно зависит от  $\nu$ . Напомним, что  $D_{nm}^{(n+1)}$  — алгебраическое дополнение элемента  $d_{nm}$  в определителе  $D_{n+1}$  (см. (13а)). Формула (35) определяет плотность тока на поверхности  $S_\nu$   $\nu$ -го элемента системы в случае, когда  $F$  полностью определено. Однако, как это следует из формулы (25), в рассматриваемых примерах  $F$  известно пока лишь с точностью до  $2N$  постоянных —  $A_n$  и  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Определить их можно при помощи условий (26).

Для этого прежде всего перепишем выражение (35), выделив в нем явно постоянные  $A_n$  и  $B_n$ . Введем функции\*  $e^{(n)} = (e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_N^{(n)})$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , заданные на  $S$ , у которых

$$e_p^{(n)} = \delta_{np}. \quad (36a)$$

При помощи их можно записать  $F$  на  $S$  следующим образом (см. (25)):

$$F = e^{ix\eta} \sum_{p=1}^N A_p e^{(p)} + e^{-ix\eta} \sum_{p=1}^N B_p e^{(p)} + g, \quad (37)$$

где

$$g = -\frac{1}{x} \int_0^\eta E_x^0 \sin x(\eta - \xi) d\xi. \quad (37a)$$

Здесь нужно иметь в виду, что при нахождении  $g$  на  $S_m$  следует под интеграл подставлять значение  $E_x^0$ , соответствующее этому элементу.

Таким образом, на разных  $S_m$   $E_x^0$  является различной функцией  $\xi$ . Подставляя выражение (37) в (35), найдем после несложных преобразований

$$K_\nu = \sum_{p=1}^N A_p \Gamma_\nu(\xi; e^{ix\eta} e^{(p)}) + \sum_{p=1}^N B_p \Gamma_\nu(\xi; e^{-ix\eta} e^{(p)}) + \Gamma_\nu(\xi; g). \quad (38)$$

\* Используются обозначения в соответствии с (15а).

Здесь

$$\Gamma_\nu(\xi; F) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(X^{(n)}, F)}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} D_{nm}^{(n+1)} e^{i\sigma' \alpha \xi} \quad (38a)$$

— обычная функция от  $\xi$  и функционал от  $F$ ; зависимость от  $\nu$  входит неявно благодаря связи между  $\sigma'$  и  $m$ , на что указывает штрих у суммы (см. (36) и выше). Теперь можно определить постоянные  $A_p$  и  $B_p$ . Для этого используем условия (26), которые дают  $2N$  уравнений для определения  $2N$  постоянных:

$$\sum_{p=1}^N A_p \Gamma_\nu(\mp 1; e^{i\kappa n} e^{(p)}) + \sum_{p=1}^N B_p \Gamma_\nu(\mp 1; e^{-i\kappa n} e^{(p)}) = -\Gamma_\nu(\mp 1; g), \quad (39)$$

$\nu = 1, 2, \dots, N.$

Определив отсюда постоянные  $A_p$  и  $B_p$ , задачу нахождения токов (38) можно считать законченной. Для вычислений по формулам (38) и (38a) следует пользоваться выражениями (33) и (34), в которые вместо  $F$  нужно подставлять интересующие нас функции. Так, например, из (34) получим

$$\left. \begin{aligned} (Y^{(n)}, g) &= \frac{1}{\alpha_\mu} \int_{-1}^1 g_\mu(\xi) e^{i\sigma \alpha \xi} d\xi \quad (g \equiv g_\mu \text{ на } S_\mu), \\ (Y^{(n)}, e^{\mp i\kappa \xi} e^{(p)}) &= \frac{2 \sin(\alpha \sigma \mp \kappa)}{\alpha_\mu (\alpha \sigma \mp \kappa)} \delta_{p\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Характерным для развитого метода является то, что в конечные расчетные формулы входят только коэффициенты типа Фурье (30a) и (40). Методика их расчета достаточно известна и поэтому на ней можно не останавливаться.

## 7. ЗАДАЧИ А И В В СЛУЧАЕ ОДНОГО ЭЛЕМЕНТА

При  $N = 1$  решение имеет свою специфику, поэтому этот случай следует рассмотреть отдельно. Все вычисления упрощаются, ибо величины  $K$ ,  $Y^{(n)}$ ,  $X^{(n)}$  становятся однокомпонентными (см., например, (27)), т. е. должны быть определены только на одном элементе. Кроме того, так как при  $N = 1$  четному (нечетному) распределению сторонней эдс  $E^0(\xi)$  на элементе соответствует четное (нечетное) распределение плотности тока  $K(\xi)$ , построение базиса  $X^{(n)}$  может быть также упрощено. Более того, разбив  $E^0(\xi)$  на четную и нечетную составляющие, можно соответствующие им токи находить порознь. Все это позволяет при построении базиса  $X^{(n)}$  пользоваться также семействами функций с периодом, равным двум. Однако и в этом случае требование о неравенстве нулю этих функций на концах интервала  $(-1, 1)$  сохраняется. Учитывая сказанное, будем исходить из двух семейств

$$Y_{\text{ч}}^{(n)} = \cos(\pi n \xi) \quad (41)$$

и

$$Y_{\text{н}}^{(n)} = \sin \alpha (n + 1) \xi \quad (0 < \alpha < \pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые вместе представляют полную систему в интервале  $(-1, 1)$ . Теперь, если произвести ортонормировку (в смысле (9)) семейств  $Y_{\text{ч}}^{(n)}$  и  $Y_{\text{н}}^{(n)}$  порознь, мы опять придем к формулам типа (13), (13a) для ортонормированных функций  $X_{\text{ч}}^{(n)}$  и  $X_{\text{н}}^{(n)}$ , в которых вместо  $Y^{(n)}$  должны стоять  $Y_{\text{ч}}^{(n)}$  и  $Y_{\text{н}}^{(n)}$  соответственно. При этом  $X_{\text{ч}}^{(n)}$  будут четными, а  $X_{\text{н}}^{(n)}$  — нечетными функциями  $\xi$ .

Подставляя в первую формулу (13а) взамен  $Y^{(n)}$  функции первого или второго семейства (41), найдем\* соответственно (после выкладок, аналогичных проведенным выше [см. (28) — (30)])

$$d_{mn} = \frac{2}{\pi} (-1)^{m+n} \frac{ms_m - ns_n}{n^2 - m^2} \quad \text{для } X_{\text{ч}}^{(n)}, \quad (42)$$

$$d_{m-1, n-1} = \frac{2n (s^{(m)} \cos \alpha n - c^{(n)} \sin \alpha m)}{\alpha (n^2 - m^2)} + \frac{2m (s^{(n)} \cos \alpha m - c^{(m)} \sin \alpha n)}{\alpha (m^2 - n^2)} \quad \text{для } X_{\text{н}}^{(n)}. \quad (43)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} s_n &= \int_0^2 G(\xi) \sin(\pi n \xi) d\xi; & G(\xi) &\equiv G_{11}(\xi), \\ s^{(n)} &= \int_0^2 G(\xi) \sin \alpha n (\xi - 1) d\xi; & c^{(n)} &= \int_0^2 G(\xi) \cos \alpha n (\xi - 1) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где  $G_{11}(\xi)$  определяется формулой (22А) или (22В). При  $N = 1$  вместо формулы (30) следует пользоваться выражениями (42) и (43). Вследствие того, что  $G(\xi)$  и  $X_{\text{ч}}^{(n)}(\xi)$  — четные, а  $X_{\text{н}}^{(n)}(\xi)$  — нечетные функции  $\xi$ , следует, что  $X_{\text{ч}}^{(n)}$  и  $X_{\text{н}}^{(m)}$  также ортогональны между собой (в смысле (9)) при любых  $n$  и  $m$ . Действительно, в рассматриваемом случае

$$(X_{\text{ч}}^{(n)}, \mathcal{E}X_{\text{н}}^{(m)}) = \int_{-1}^1 X_{\text{ч}}^{(n)}(\eta) \int_{-1}^1 X_{\text{н}}^{(m)}(\xi) G(\eta - \xi) d\xi d\eta.$$

Внутренний интеграл есть нечетная функция  $\eta$ , поэтому все подынтегральное выражение внешнего интеграла также представляет собой нечетную функцию  $\eta$ . Отсюда, используя самосопряженность оператора  $\mathcal{E}$ , имеем

$$(X_{\text{ч}}^{(n)}, \mathcal{E}X_{\text{н}}^{(m)}) = (\mathcal{E}X_{\text{ч}}^{(n)}, X_{\text{н}}^{(m)}) = 0.$$

Учитывая все сказанное, вместо формул (12) и (35) получим следующие:

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} (X_{\text{ч}}^{(n)}, F) X_{\text{ч}}^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} (X_{\text{н}}^{(n)}, F) X_{\text{н}}^{(n)}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(X_{\text{ч}}^{(n)}, F)}{\sqrt{{}^{\text{ч}}D_n {}^{\text{ч}}D_{n+1}}} {}^{\text{ч}}D_{nm}^{(n+1)} \cos(\pi m \xi) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(X_{\text{н}}^{(n)}, F)}{\sqrt{{}^{\text{н}}D_n {}^{\text{н}}D_{n+1}}} {}^{\text{н}}D_{nm}^{(n+1)} \sin \alpha (m + 1) \xi. \end{aligned} \quad (46)$$

Индексы «ч» и «н» сверху перед  $D$  означают, что эти определители находятся по формулам (13а), в которых вместо  $Y^{(n)}$  фигурируют  $Y_{\text{ч}}^{(n)}$  и  $Y_{\text{н}}^{(n)}$  (см. (41)) соответственно. Другими словами, элементы  $d_{mn}$  этих определителей следует находить по формулам (42) и (43). Если  $E_x^0(\xi)$  — четная (нечетная) функция, то в решении (46) пропадают вторые (первые) суммы.

Ограничившись случаем чисто четного распределения сторонней эдс  $E_x^0(\xi)$ , преобразуем (46) к виду, аналогичному (38). Используя выраже-

\* При  $m = n$   $d_{nn}$  находится при помощи предельного перехода в формулах (42) и (43):  $d_{nn} = \lim_{m \rightarrow n} d_{mn}$ , например, по правилу Лопиталья.

ние (37) для  $F$ , найдем

$$K = A_0 \Gamma(\xi; \cos x\eta) + \Gamma(\xi; g), \quad (47)$$

где

$$\Gamma(\xi; F) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(X_q^{(n)}, F)}{\sqrt{{}^q D_n {}^q D_{n+1}}} {}^q D_{nm}^{(n+1)} \cos(\pi m \xi). \quad (47a)$$

При этом положено  $A_0 = A_1 + B_1$  и учтено, что  $(X_q^{(n)}, e^{\mp i x \eta}) = (X_q^{(n)}, \cos x\eta)$ . Постоянная  $A_0$  находится из граничных условий (26):

$$A_0 = - \frac{\Gamma(1; g)}{\Gamma(1; \cos x\eta)}. \quad (48)$$

Величины типа  $(X_q^{(n)}, F)$ , входящие в (47a), находятся по формулам, аналогичным (33):

$$(X_q^{(n)}, F) = \frac{1}{\sqrt{{}^q D_n {}^q D_{n+1}}} \sum_{k=0}^n {}^q D_{nk}^{(n+1)} (Y_q^{(k)}, F), \quad (49)$$

где

$$(Y_q^{(k)}, F) = \frac{1}{\alpha_1} \int_{-1}^1 F(\eta) \cos(k\pi\eta) d\eta. \quad (49a)$$

В интересующих нас случаях, когда  $F = \cos x\eta$  или  $F = g$ , последний интеграл берется элементарно. Для нечетного распределения сторонней эдс  $E^0(\xi)$  получим аналогичные формулы, отличающиеся заменой  $Y_q^{(n)}$  на  $Y_n^{(n)}$ .

Решение задач электродинамики развитым здесь методом связано с построением счетного ортонормированного в смысле (9) базиса. Решение представляется в виде ряда по функциям этого базиса с окончательно определенными коэффициентами. Это возможно лишь для задач с самосопряженными операторами. Поэтому выбор скалярного произведения (см. (7)), т. е. по существу метрики, произведен так, чтобы заданный оператор оказался в ней самосопряженным. Операторы в задачах, связанных с уравнениями Максвелла, не эрмитовы, поэтому при введении обычной метрики с помощью скалярного произведения типа Гильберта  $[(\vec{A}, \vec{B}) = \int \vec{A} \vec{B}^* dS]$  эти операторы оказываются несамосопряженными.

Выражаю признательность Л. А. Вайнштейну, прочитавшему рукопись и сделавшему замечание, способствовавшее ее улучшению.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. В а й н ш т е й н, Диффракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд. Советское радио, 1953.

Поступила в редакцию  
30 VII 1959



*Группа участников симпозиума на антенном полигоне ОЭИС.*

*1960. На симпозиуме по дифракции. Одесса.*



*1960. Ученый совет ЦНИИ-108. Слева направо: сидят – академик А.Н. Шукин, М.С. Нейман, академик А.И. Берг, член-корреспондент АН СССР А.А. Расплетин, Б.Ф. Высоцкий, Я.Н. Фельд, И.С. Гоноровский, И.С. Джигит, стоят – Н.В. Осипов, Б.Д. Сергиевский, А.Е. Безменов, Л.А. Вайнштейн, В.Н. Горицунов, Ю.Н. Мажоров, А.Г. Рапопорт, В.А. Аудер, Л.Н. Лошаков, А.В. Данилов, Л.Ю. Блюмберг, П.С. Плеваков, А.А. Железов.*

## О ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*Я. Н. Фельд*

Дан общий метод построения функционалов, стационарных для функции, совпадающей с решением заданного линейного операторного уравнения.

Стационарные значения указанных функционалов могут быть сделаны равными любому параметру, являющемуся линейным функционалом решения операторного уравнения.

Метод применим для уравнений как с симметричными, так и несимметричными операторами и может быть использован для приближенного расчета различных параметров. В качестве примера дано стационарное выражение для диаграммы направленности цилиндрических зеркал.

### ВВЕДЕНИЕ

Прямые методы вариационного исчисления широко применяются при решении различных задач математической физики.

Заменяя дифференциальное или интегральное уравнение эквивалентным вариационным принципом и используя те или иные прямые методы, находят приближенные решения в виде рядов, которые обычно сходятся довольно медленно.

Значительно лучшие результаты получаются, если требуется определить какой-либо параметр задачи: собственную частоту колебания, коэффициент отражения, сопротивление и т. п. Необходимо только сформулировать эквивалентный вариационный принцип так, чтобы стационарное значение функционала, фигурирующего в нем, совпадало с искомым параметром. При этом уже в первом приближении можно получить достаточную для практики точность. Последний прием получил широкое распространение в работах Швингера и его сотрудников [1].

Важный шаг сделан в одной из последних работ Вайнштейна [2], где применен функционал, стационарное значение которого может быть сделано равным искомому решению исходного уравнения, если оператор, фигурирующий в нем, симметричен.

В настоящей статье описан общий прием для построения различных функционалов, позволяющих формулировать вариационные принципы, эквивалентные заданному линейному операторному уравнению. При этом результаты работы [2] обобщены в двух направлениях: 1) на случай уравнений с несимметричными (несамосопряженными) операторами, 2) на случай гильбертовой метрики.

### 1. ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрим операторное уравнение типа

$$Gu = f. \quad (1)$$

Здесь  $G$  — линейный оператор, определенный на некотором классе  $A$  векторных функций\*;  $u$  — искомое решение, которое ищется в указанном классе  $A$ ;  $f$  — заданная внешняя «сила» (из того же класса  $A$ ). Введем

\* В общем случае векторная функция  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ . Предполагается, что класс  $A$  удовлетворяет всем требованиям, необходимым при дальнейшем рассмотрении.



билинейное скалярное произведение  $(u, v)$  (где  $u, v \in A$ ), удовлетворяющее условиям

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha (u, w) + \beta (v, w), \quad (2a)$$

$$(u, v) = (v, u) \quad \text{или} \quad (u, v) = \overline{(v, u)}, \quad (2б)$$

если  $(u, v) = 0$  для любых  $v \in A$ , то  $u = 0$ . (2в)

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные числа;  $u, v, w$  — любые функции из класса  $A$ ; черта означает комплексно-сопряженную величину.

Тогда, как известно [3], если оператор  $G$  симметричен, т. е.

$$(Gu, v) = (u, Gv), \quad (3)$$

то решение уравнения (1) эквивалентно нахождению функции  $u$ , обеспечивающей стационарность одного из следующих двух функционалов:

$$L\{u\} = (u, f) + (f, u) - (Gu, u), \quad (4a)$$

$$L\{u\} = \frac{(u, f)(f, u)}{(Gu, u)}, \quad (4б)$$

где функция  $f$  не варьируется. Стационарные значения этих функционалов равны  $L_{\text{ст}} = (u, f)$ , где  $u$  — решение уравнения (1). Поскольку  $f$  — фиксированная заданная функция, то только в исключительных случаях искомый параметр задачи может совпадать с  $L_{\text{ст}}$ .

Представляет поэтому интерес построить функционалы, условие стационарности которых эквивалентно уравнению (1) и из которых можно выбрать функционал, стационарное значение которого совпадает с искомым параметром задачи. При этом желательно избавиться от ограничений, связанных с симметричностью оператора  $G$  (условие (3)).

Введем прежде всего вспомогательное уравнение

$$Tv = F, \quad (5)$$

где  $T$  — некоторый линейный оператор;  $v$  — искомая, а  $F$  — заданная функции, обе из класса  $A$ .

Объединим уравнения (1) и (5) в одно матричное уравнение

$$\mathfrak{H}X = \mathfrak{F}, \quad (6)$$

где оператор — матрица

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad (6a)$$

а

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} \quad (6б)$$

— одностолбцовые матрицы класса  $B$ , элементами которых являются функции класса  $A$ . Введем для любых двух элементов класса  $B$  понятие скалярного произведения  $\langle X, Y \rangle$ , удовлетворяющего условиям типа (2). Тогда если оператор  $\mathfrak{H}$  симметричен:

$$\langle \mathfrak{H}X, Y \rangle = \langle X, \mathfrak{H}Y \rangle, \quad (7)$$

то решение уравнения (6) будет эквивалентно нахождению элемента  $X$  из класса  $B$ , для которого обращаются в нуль вариации функционалов типа (4). В рассматриваемом случае они имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{X\} &= \langle X, \mathfrak{F} \rangle + \langle \mathfrak{F}, X \rangle - \langle \mathfrak{H}X, X \rangle, \\ \mathcal{L}\{X\} &= \frac{\langle X, \mathfrak{F} \rangle \langle \mathfrak{F}, X \rangle}{\langle \mathfrak{H}X, X \rangle}. \end{aligned} \quad (8)$$

Определяя различными (допустимыми) способами скалярное произведение  $\langle X, Y \rangle$ , будем получать разные функционалы.

Так, например, пусть скалярное произведение определяется следующей формулой:

$$\langle X, Y \rangle = (u_x, v_y) + (v_x, u_y), \text{ где } X = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Легко убедиться в том, что условия типа (2) относительно  $X$  и  $Y$  выполнены\*. Условие (7) сводится при этом к равенству

$$(Gu_x, v_y) + (Tv_x, u_y) = (u_x, Tv_y) + (v_x, Gu_y).$$

Так как  $u_x, u_y, v_x, v_y$  — любые функции из класса  $A$ , то написанное равенство эквивалентно следующим двум:

$$(Gu_x, v_y) = (u_x, Tv_y), \quad (Tv_x, u_y) = (v_x, Gu_y).$$

Последние, в свою очередь, будут выполняться, если

$$(Gu, v) = (u, Tv) \quad (10)$$

при любых  $u, v$  из класса  $A$ .

Таким образом, вспомогательный оператор  $T$  должен быть сопряженным по отношению к заданному оператору  $G$ . Используя общепринятое обозначение, можно написать

$$T = G^*. \quad (10a)$$

Что касается  $G$ , то он может быть любым линейным оператором, в частности несимметричным.

Функционалы (8) принимают теперь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (u, F) + (F, u) + (v, f) + (f, v) - (Gu, v) - (v, Gu), \\ \mathcal{L} &= \frac{\{(u, F) + (v, f)\} \{(F, u) + (f, v)\}}{(Gu, v) + (v, Gu)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если реализуется первое из условий (2б), то выражения (11) упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2 \{(u, F) + (v, f) - (Gu, v)\}, \\ \mathcal{L} &= \frac{\{(u, F) + (v, f)\}^2}{2(Gu, v)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Стационарное значение этих функционалов найдем, подставив в них в качестве  $u$  и  $v$  решения уравнений (1) и (5). Так как для этих решений справедливо равенство

$$(u, F) = (v, f), \quad (12a)$$

то легко получить

$$\mathcal{L}_{ст} = 2(u, F). \quad (12б)$$

Второй из функционалов (12) можно преобразовать. Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{\{(u, F) - (v, f)\}^2}{2(Gu, v)}.$$

Учитывая (12a), легко видеть, что вариация его обращается в нуль при  $u$  и  $v$ , совпадающих с решениями уравнений (1) и (5). Стационарное значение его также равно нулю. Поэтому можно вычесть его (ничего не изменив) из правой части второго функционала (12), после чего получим

$$\mathcal{L} = \frac{2(u, F)(v, f)}{(Gu, v)}. \quad (12в)$$

Функционалы (12в) и первый из (12) формально совпадают с функционалами, приведенными в работе [2], однако между ними есть и существен-

\* Операции сложения и умножения на число в классе  $B$  те же, что и в теории матриц.

ная разница. Как следует из вывода, функционалы (12) и (12в) стационарны для значений  $u$  и  $v$ , удовлетворяющих уравнениям

$$Gu = f, \quad G^*v = F,$$

где  $G$  — любой линейный оператор;  $G^*$  — с ним сопряженный. В цитированной же работе [2] функции  $u$  и  $v$  подчинены уравнениям

$$Gu = f, \quad Gv = F,$$

и потому функционалы оказываются стационарными только для симметричных линейных операторов  $G$ .

При реализации второго из условий (26) функционалы (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2 \operatorname{Re} \{(u, F) + (v, f) - (Gu, v)\}, \\ \mathcal{L} &= \frac{|(u, F) + (v, f)|^2}{2 \operatorname{Re}(Gu, v)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь решения уравнений (1) и (5) удовлетворяют соотношению

$$(u, F) = \overline{(v, f)}, \quad (13a)$$

поэтому

$$\mathcal{L}_{\text{ст}} = 2 \operatorname{Re}(u, F). \quad (13б)$$

Для того чтобы в этом случае получить  $\operatorname{Im}(u, F)$ , поступим следующим образом. Поскольку выражения (13) и (13б) получены при произвольных  $F$  (из класса  $A$ ), то, заменяя в них  $F$  на  $iF$  и  $v$  на  $iv$  (последнее вследствие линейности оператора  $T = G^*$ , фигурирующего в (5)), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2 \operatorname{Im} \{(u, F) - (v, f) - (Gu, v)\}, \\ \mathcal{L} &= \frac{|(v, f) - (u, F)|^2}{2 \operatorname{Im}(Gu, v)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ст}} = 2 \operatorname{Im}(u, F). \quad (14a)$$

Функционалы (14) также стационарны для  $u$  и  $v$ , удовлетворяющих уравнениям (1) и (5).

Заметим, что последний результат можно получить используя приведенный выше общий прием, вводя скалярное произведение в классе  $B$  при помощи выражения

$$\langle X, Y \rangle = (u_x, iv_y) + (iv_x, u_y). \quad (15)$$

Вторые функционалы в (13) и (14) можно также представить в несколько ином виде. Для этого вычтем соответственно из их правых частей выражения

$$\frac{|(u, F) - \overline{(v, f)}|^2}{2 \operatorname{Re}(Gu, v)}, \quad \frac{|(u, F) - \overline{(v, f)}|^2}{2 \operatorname{Im}(Gu, v)}.$$

Это допустимо, так как вследствие (13a) вариации этих выражений обращаются в нуль для  $u$  и  $v$ , совпадающих с решениями уравнений (1) и (5).

После этого получим

$$\mathcal{L} = \frac{2 \operatorname{Re}(v, f) \operatorname{Re}(u, F)}{\operatorname{Re}(Gu, v)}, \quad (16)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{2 \operatorname{Im}(v, f) \operatorname{Im}(u, F)}{\operatorname{Im}(Gu, v)}. \quad (17)$$

Стационарные значения этих функционалов по-прежнему определяются выражениями (13б) и (14a).

Любой интересующий нас параметр, являющийся линейным функционалом решения уравнения (1), можно представить в виде  $(u, F)$ , где  $F$  — соответствующим образом подобранная функция. Поэтому полученные функционалы решают поставленную в начале статьи задачу для уравнения (1) с любым линейным оператором как симметричным, так и несимметричным. Обобщение на случай несимметричных операторов весьма существенно, так как позволяет при решении задач электродинамики вводить гильбертову метрику, в которой, как известно, электродинамические операторы оказываются несимметричными.

## 2. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

Более общие результаты найдем, определив скалярное произведение в классе  $B$  при помощи формулы

$$\langle X, Y \rangle = (\mathcal{E}u_x, v_y) + (\mathcal{E}^*v_x, u_y), \quad (18)$$

где  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^*$  — два заданных линейных взаимно сопряженных  $[(\mathcal{E}u, v) = (u, \mathcal{E}^*v)]$  оператора. Условия типа (2) при этом оказываются выполненными для скалярного произведения (18), а равенство (7) сводится к следующему:

$$(\mathcal{E}Gu_x, v_y) + (\mathcal{E}^*Tv_x, u_y) = (\mathcal{E}u_x, Tv_y) + (\mathcal{E}^*v_x, Gu_y).$$

Так как  $u_x, v_x, u_y, v_y$  произвольны, то оно эквивалентно двум соотношениям

$$(\mathcal{E}Gu_x, v_y) = (\mathcal{E}u_x, Tv_y), \quad (\mathcal{E}^*Tv_x, u_y) = (\mathcal{E}^*v_x, Gu_y).$$

Последние, очевидно, выполняются, если справедливо равенство

$$(\mathcal{E}Gu, v) = (u, \mathcal{E}^*Tv) \text{ при любых } u, v \in A, \quad (19)$$

поскольку  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^*$  взаимно сопряжены.

Таким образом, для выполнения условия (7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{E}G = T^*\mathcal{E}, \quad (20)$$

где  $T^*$  — оператор, сопряженный с  $T$   $[(Tu, v) = (u, T^*v)]$ . Это единственное условие, которому должны удовлетворять операторы  $T$  и  $\mathcal{E}$ .

Если оно выполнено; то, используя (8), можно получить следующие стационарные функционалы:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{E}u, F) + (\mathcal{E}^*v, f) + (\mathcal{E}f, v) + (\mathcal{E}^*F, u) - (\mathcal{E}Gu, v) - (\mathcal{E}^*Tv, u), \quad (21)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\{(\mathcal{E}u, F) + (\mathcal{E}^*v, f)\} \{(\mathcal{E}f, v) + (\mathcal{E}^*F, u)\}}{(\mathcal{E}Gu, v) + (\mathcal{E}^*Tv, u)}.$$

Если реализуется первое из условий (2б), то функционалы (21) можно записать так:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2 \{(\mathcal{E}u, F) + (v, \mathcal{E}f) - (Gu, \mathcal{E}^*v)\}, \\ \mathcal{L} &= \frac{\{(\mathcal{E}u, F) + (v, \mathcal{E}f)\}^2}{2(Gu, \mathcal{E}^*v)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Второй из функционалов (22) можно, как и выше (см. (12) и (12в)), преобразовать к виду

$$\mathcal{L} = \frac{2(\mathcal{E}u, F)(v, \mathcal{E}f)}{(Gu, \mathcal{E}^*v)}. \quad (22a)$$

Стационарное значение функционалов (22) и (22a) равно (поскольку при этом  $(\mathcal{E}u, F) = (\mathcal{E}^*v, f)$ )

$$\mathcal{L}_{\text{ст}} = 2(\mathcal{E}u, F). \quad (22б)$$

При реализации второго из условий (2б) выражения (21) принимают вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 2 \operatorname{Re} \{(\mathcal{E}u, F) + (\mathcal{E}f, v) - (Gu, \mathcal{E}^*v)\}, \\ \mathcal{L} &= \frac{|(\mathcal{E}u, F) + (v, \mathcal{E}f)|^2}{2 \operatorname{Re} (Gu, \mathcal{E}^*v)}.\end{aligned}\quad (23)$$

Так как теперь решения (1) и (5) удовлетворяют соотношению

$$(\mathcal{E}u, F) = \overline{(\mathcal{E}^*v, f)}, \quad (24)$$

то

$$\mathcal{L}_{\text{ст}} = 2 \operatorname{Re} (\mathcal{E}u, F). \quad (23a)$$

Заменяя в (23) и (23a)  $F$  на  $iF$  и  $v$  на  $iv$ , получим стационарные функционалы

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 2 \operatorname{Im} \{(\mathcal{E}u, F) + (\mathcal{E}f, v) - (Gu, \mathcal{E}^*v)\}, \\ \mathcal{L} &= \frac{|(v, \mathcal{E}f) - (\mathcal{E}u, F)|^2}{2 \operatorname{Im} (Gu, \mathcal{E}^*v)}\end{aligned}\quad (25)$$

и

$$\mathcal{L}_{\text{ст}} = 2 \operatorname{Im} (\mathcal{E}u, F). \quad (25a)$$

Элементарные преобразования, аналогичные приведенным выше, позволяют привести вторые функционалы в (23) и (25) к виду

$$\mathcal{L} = \frac{2 \operatorname{Re} (\mathcal{E}u, F) \operatorname{Re} (v, \mathcal{E}f)}{\operatorname{Re} (Gu, \mathcal{E}^*v)}, \quad (26)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{2 \operatorname{Im} (\mathcal{E}u, F) \operatorname{Im} (v, \mathcal{E}f)}{\operatorname{Im} (Gu, \mathcal{E}^*v)}. \quad (27)$$

Вернемся к условию (20). Оно, очевидно, оставляет значительный произвол при введении вспомогательных операторов  $T$  и  $\mathcal{E}$ .

Можно, например, удовлетворить условию (20), задав  $T$  (как и в предыдущем параграфе) при помощи равенства

$$T = G^*. \quad (20a)$$

После этого (20) переписывается так:

$$\mathcal{E}G = G\mathcal{E}, \quad (20b)$$

т. е. оператор  $\mathcal{E}$  должен удовлетворять единственному условию перестановочности с  $G$ .

Найденные в этом параграфе результаты не могут быть получены из предыдущего простым переопределением скалярного произведения  $(u, v)$ , например, заменой его на  $(\mathcal{E}u, v)$ , как это кажется на первый взгляд. Действительно, для того чтобы

$$[u, v] \equiv (\mathcal{E}u, v)$$

удовлетворяло условиям (2),  $\mathcal{E}$  должно быть симметричным, чего не требовалось выше; кроме того, необходимо еще определить  $T$  при помощи соотношения

$$[Gu, v] = [u, Tv] \text{ и т. д.}$$

С другой стороны, можно получить стационарные выражения для величин типа (22б) или (23a) и (25a), используя полученные ранее формулы (12) ((12в)) или (13) и (14) ((16) и (17)), заменив в них  $F$  на  $\mathcal{E}^*F$ . Однако этот прием требует нахождения  $v$  из уравнения

$$Tv = \mathcal{E}^*F,$$

которое может оказаться сложнее, чем уравнение (5).

Пример. Стационарное выражение для диаграммы направленности системы токов. Рассмотрим плоскую задачу о возбуждении цилиндрического зеркала произвольной формы линейным источником (рисунок), первичное поле которого

$$E^0 = H_0^{(2)}(kR) \psi(\varphi) \quad (28)$$

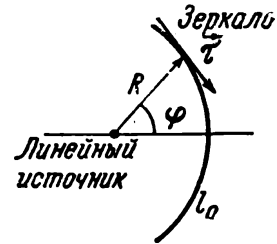
поляризовано параллельно образующим зеркала. Здесь  $\psi(\varphi)$  — диаграмма направленности первичного источника;  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля;  $R, \varphi$  — цилиндрические координаты.

Двухсторонняя плотность тока  $u$ , возбуждаемого на зеркале, удовлетворяет уравнению

$$Gu = f \text{ на } l_0, \quad (29)$$

где

$$G = -\frac{\pi k}{c} \int_{(l_0)} H_0^{(2)}(kr) dl; \quad f = H_0^{(2)}(kR) \psi(\varphi).$$



Цилиндрическое зеркало с линейным облучателем

Здесь интегрирование идет по контуру  $l_0$  сечения зеркала;  $r$  — расстояние между точками интегрирования и наблюдения, лежащими на  $l_0$ .

Введем скалярное произведение при помощи формулы [4]

$$(u, v) = \int_{(l_0)} uv dl. \quad (30)$$

Оператор  $G$  при этом оказывается симметричным ( $G = G^*$ ). Если теперь задать  $\vec{F}$  в виде плоской волны:

$$F = \frac{1}{2} e^{ikR\vec{n}}, \quad (31)$$

где  $\vec{n}$  — произвольный единичный вектор, лежащий в плоскости сечения зеркала, то формула (12в) даст стационарное выражение для диаграммы направленности.

Действительно, из (12б), (30) и (31) следует

$$\mathcal{L}_{ст} = \int_{(l_0)} u e^{ikR\vec{n}} dl,$$

а это и есть диаграмма направленности [5] системы токов  $u$ . Ее следует рассчитывать по формуле (12в) (или (12)), подставив вместо  $u$  и  $v$  приближенные решения уравнений (1) и (5), помня, что в последнем  $T = G$ . В качестве такого приближения можно взять умноженное на  $c/2\pi$  значение касательной (к зеркалу) составляющей магнитного вектора первичной волны. Так как электрический и магнитный векторы последней равны по величине и сдвинуты в пространстве на  $90^\circ$ , то, учитывая, что они численно совпадают с  $f$  и  $F$  (см. (29) и (31)) при решении уравнений (1) и (5) соответственно, найдем

$$u \simeq 2H_0^{(2)}(kR) \psi(\varphi) \sin(\widehat{\vec{R}, \vec{\tau}}), \quad (32)$$

$$v \simeq e^{ikR\vec{n}} \sin(\widehat{-\vec{n}, \vec{\tau}}) \frac{c}{4\pi}.$$

Здесь  $\vec{\tau}$  — вектор, касательный к контуру  $l_0$  в рассматриваемой точке.

В заключение отметим, что различные вариационные принципы используются в теоретической физике, в частности в теории столкновений [6]. Однако они отличны от рассмотренных здесь, и нам кажется, что последние предпочтительнее для задач электродинамики и теории антенн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, 1954.
2. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1961, 31, 1, 29.
3. Fritz E. Borgnis, Charles H. Papas, Randwertprobleme der Mikrowellenphysik, Springer-Verlag, 1955; С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, ГИФМЛ, 1957.
4. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 12, 2004.
5. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. I, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
6. Ю. Н. Дымков, Вариационные принципы в теории столкновений, ГИФМЛ, 1958.

Поступила в редакцию  
19 VIII 1961

1962. Якову Наумовичу 50 лет



*Поздравления от А.А. Пистолькорса.*



*Поздравляет Л.Д. Бахрах, справа П.С.Плешаков*



## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ СИНТЕЗА АНТЕНН

*Я. Н. Фельд, Л. Д. Бахрах*

Излагаются основные методы современной теории синтеза антенн.

## ВВЕДЕНИЕ

Синтезом антенн принято называть класс задач, связанных с нахождением законов распределения излучающих источников — токов или полей в антенне, обеспечивающих создание заданной диаграммы направленности. При этом, в отличие от теории синтеза цепей, остаются в стороне вопросы построения конкретной схемы антенны, реализующей найденное распределение источников.

Первые работы по синтезу антенн появились в 1937 г. В них уже рассматривались задачи синтеза линейной антенны и дискретной линейной решетки [1, 2]. С тех пор поток работ по синтезу антенн в нашей и зарубежной литературе не иссякает и охватывает все более широкий круг вопросов. Для того чтобы разобраться в них, разобьем их, впрочем довольно условно, на ряд групп.

I. Определение классов диаграмм направленности, точно реализуемых при помощи антенн различных типов (дискретных, линейных, плоских и т. п.), а также нахождение распределений источников, создающих эти диаграммы.

II. Расчет распределений источников в антеннах различных типов, создающих диаграммы, достаточно хорошо аппроксимирующие любые заданные, в том числе и не принадлежащие к классу реализуемых диаграмм.

III. Изучение вопросов, связанных со «сверхнаправленностью» антенн.

IV. Рассмотрение «оптимальных» диаграмм и методов их реализации.

V. Синтез антенн с качанием луча.

Прежде чем перейти к рассмотрению перечисленных групп, приведем здесь основные определения и формулы для диаграмм направленности.

Диаграммой направленности антенны (по полю) называют векторную функцию  $\vec{F}(\theta, \varphi)$ , характеризующую распределение напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в дальней зоне в зависимости от угловых координат  $\theta$  и  $\varphi$ .

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{F}$  связаны соотношением

$$\vec{E} = A \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{F}(\theta, \varphi). \quad (1)$$

Здесь  $A$  — постоянная, выбор которой зависит от нормировки диаграммы  $F$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — координаты точки наблюдения в сферической системе координат с центром в области расположения источников. При этом предполагается, что последние колеблются по гармоническому закону с зависимостью от времени типа  $e^{i\omega t}$ . Если поле создается токами  $\vec{I}$ , распределен-

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = \int_{(S)} [\vec{R}_1 [\vec{I}\vec{R}_1]] e^{ik\rho\vec{R}_1} dS, \quad (2)$$

где  $\vec{\rho}$  — радиус-вектор точки интегрирования (рис. 1);  $\vec{R}_1 = \vec{R} / R$  — единичный орт, направленный на точку наблюдения;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Формула (2) справедлива для объемной, поверхностной и

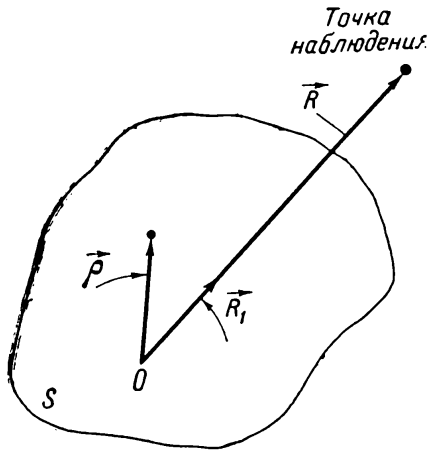


Рис. 1

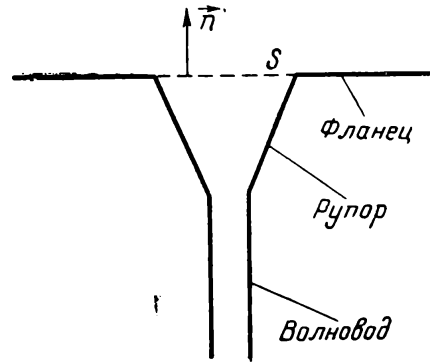


Рис. 2

линейной областей  $S$ , если под  $\vec{I}$  понимать соответственно объемную, поверхностную плотность тока или полный ток, текущий вдоль линии\*.

Диаграмма направленности антенн с плоским излучающим раскрытием  $S$  выражается также формулой типа (2). Действительно, если такой раскрытив дополнить металлическим (идеально проводящим) фланцем до полной плоскости (рис. 2), то поле в верхнем полупространстве однозначно определяется распределением касательной составляющей электрического вектора  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_t$  в раскрытии  $S$ . С другой стороны, известно [3], что это поле не изменится, если раскрытив  $S$  заметаллизировать и распределить на нем эквивалентный магнитный поверхностный ток  $\vec{K}_\mu = [\vec{\mathcal{E}}\vec{n}]$  ( $\vec{n}$  — единичная нормаль к  $S$ ). Теперь остается только применить принцип зеркального отображения для магнитных токов, чтобы прийти к задаче о нахождении поля, создаваемого в свободном пространстве магнитными токами  $2\vec{K}_\mu$ , распределенными на геометрической поверхности  $S$ . Задача эта элементарна и при сохранении связи (1) между  $\vec{E}$  и  $\vec{F}$  в дальней зоне приводит к формуле [3]

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = \int_{(S)} [\vec{R}_1 [\vec{\mathcal{E}}\vec{n}]] e^{ik\rho\vec{R}_1} dS. \quad (2a)$$

Она, как это следует из сказанного выше, справедлива только для верхнего полупространства (рис. 2).

Все предыдущие рассуждения, как и сама формула (2a), полностью сохраняются для плоских импедансных антенн, расположенных на бесконечной идеально проводящей плоскости (подложке). Второй половины задачи синтеза импедансных антенн — определения закона изменения импеданса в пределах области  $S$  по найденной из (2a) касательной составляющей электрического вектора  $\vec{\mathcal{E}}$  на  $S$  — мы в настоящем обзоре касаться не будем.

\* В последнем случае следует  $I$  и  $dS$  в формуле (2) поменять местами.

Формула (2а) остается справедливой в приближении Гюйгенса-Кирхгофа и для реальных антенн, у которых отсутствуют бесконечные фланцы и подложки [3]. Необходимо только, чтобы излучающий раскрыв был достаточно велик по сравнению с волной. Однако и в этом случае формула (2а) достаточно правильно передает диаграмму только в пределах основного лепестка и ближайших к нему боковых.

Поэтому в применении к подобным антеннам термин «реализуемая» диаграмма, которым мы пользуемся ниже, ввиду приближенности формулы (2а), имеет довольно условный характер.

## 1. ТОЧНО РЕАЛИЗУЕМЫЕ ДИАГРАММЫ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИСТОЧНИКОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ИХ СОЗДАНИЕ

### Линейные антенны

Простейшей антенной такого типа является отрезок провода  $L$ , вдоль которого распределен ток  $I$ . Если ось  $z$  сферической системы координат совместить с проводом, как показано на рис. 3, то формулу (2) можно записать так:

$$F_{\theta} = \frac{\sin \theta}{k} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I e^{ikz \cos \theta} k dz; \quad F_{\varphi} = 0. \quad (3)$$

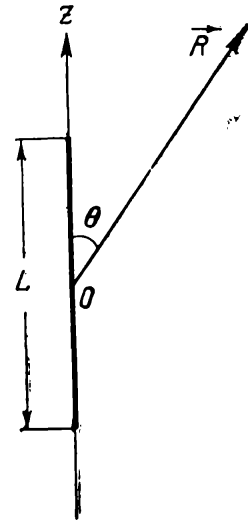


Рис. 3

Таким образом, диаграмма имеет только меридиональную составляющую и не зависит от угла  $\varphi$ . Первый множитель  $\sin \theta$  характеризует направленность элементарного источника длины  $dz$ , а второй — влияние системы источников. Поэтому его называют множителем системы \* и обозначают буквой  $f$  ( $F_{\theta} = \frac{\sin \theta}{k} f$ ).

Так как  $\sin \theta$  — относительно медленно меняющаяся функция  $\theta$ , то множитель  $f$  по существу полностью определяет диаграмму направленности линейной антенны. Его мы и будем ниже называть, для краткости, диаграммой и записывать в виде

$$f(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} I(\xi) e^{iu\xi} d\xi. \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi = kz; \quad u = \cos \theta; \quad \sigma = \frac{kL}{2}. \quad (4a)$$

Таким образом,  $2\sigma$  есть электрическая длина антенны. Задача синтеза заключается в нахождении распределения тока  $I$  вдоль антенны по заданной диаграмме  $f$ , т. е. в решении интегрального уравнения первого рода (4). Оно должно выполняться на сегменте  $-1 \leq u \leq 1$  (вещественные углы  $\theta$ ).

Однако, как хорошо известно, подобные уравнения разрешимы не для любой заданной левой части  $f$ . Поэтому прежде всего укажем класс функций  $f(u)$ , для которых уравнение (4) разрешимо. Это и будет класс реализуемых диаграмм. Рассматривая правую часть выраже-

\* Или множителем решетки в случае дискретной группы излучателей.

ния (4) при любых значениях  $u$ , в том числе и комплексных, убеждаемся, что она является целой функцией конечной степени  $\leq \sigma$  переменного  $u$  [4]. Следовательно, и  $f(u)$  должна быть целой функцией конечной степени; более того, так как из энергетических соображений вытекает, что квадрат  $I(\xi)$  абсолютно интегрируем на отрезке  $-\sigma \leq \xi \leq \sigma$ , то (вследствие теоремы Парсеваля) и  $f^2(u)$  должна быть абсолютно интегрируемой вдоль действительной оси.

Такие функции называются принадлежащими к классу  $W_\sigma$  [4]. Отсюда заключаем, что точно реализуемые при помощи конечной линейной антенны диаграммы (множители системы) должны принадлежать к классу  $W_\sigma$  ( $f \in W_\sigma$ ).

С другой стороны, из теоремы Винера — Палей [4, 5] следует, что любая функция  $f \in W_\sigma$  представима в виде интеграла (4) и ее преобразованная по Фурье равна нулю вне сегмента \*  $[-\sigma, \sigma]$ . Поэтому решение уравнения (4) для реализуемых диаграмм  $f \in W_\sigma$  находится простым преобразованием Фурье \*\*

$$I(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\xi u} du. \quad (5)$$

Это решение абсолютно точное и, на основании сказанного, оно обращается в нуль (см. первую сноску) при  $\xi > \sigma$  и  $\xi < -\sigma$ . Диаграмма  $f(u)$  может быть задана на сегменте  $-1 \leq u \leq 1$ , и ее следует аналитически продолжить на всю действительную ось, прежде чем воспользоваться формулой (5). Практически это не представляет труда, так как обычно реализуемые диаграммы задаются при помощи аналитического выражения, пригодного для всей действительной оси.

□ Необходимо подчеркнуть, что заданная реализуемая диаграмма однозначно определяет не только распределение тока (5), но и электрическую (а значит и геометрическую) длину антенны, равную длине конечного интервала, на котором ток (расчитываемый по формуле (5)) отличен от нуля. Можно дать явное выражение для длины антенны [6]

$$kL = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right), \quad (6)$$

где  $h_f(\varphi)$  — индикатор функции  $f \in W_\sigma$ , равный [4, 5]

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi})|.$$

### Антенны с плоским излучающим раскрывом

Рассмотрим плоский излучающий раскрыв  $S$ . Введем декартову и сферическую системы координат с общим центром, расположенным на  $S$ , и общей осью  $z$ , нормальной к раскрыву (рис. 4). Ограничимся случаем, когда поле  $\vec{\mathcal{E}}$  в раскрыве поляризовано вдоль одного направления, например оси  $x$ .

Тогда  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \vec{i}_x$ , и формула (2а) для диаграммы запишется так:

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = [R_1 [\vec{i}_x \vec{n}]] \frac{1}{k^2} \int_{(S)} \mathcal{E} e^{ik\vec{\rho} \cdot \vec{R}_1} k^2 dS. \quad (7)$$

Первый медленно меняющийся множитель характеризует направленность элементарного излучателя  $dS$ , а второй является множителем системы и, как в случае линейной антенны, определяет направленность

\* Почти всюду, т. е. за исключением множества точек меры нуль.

\*\* Формулу (5) в общем случае следует понимать в смысле сходимости в среднем 2.

$$f(u, v) = \int_{(S')} \mathcal{E}(\xi, \eta) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta. \quad (8)$$

Здесь введены новые переменные

$$u = \sin \theta \cos \varphi; \quad v = \sin \theta \sin \varphi; \quad \xi = kx; \quad \eta = ky, \quad (8a)$$

а  $S'$  — область, в которую преобразовался раскрыв  $S$  в результате замены координат  $x, y$  на  $\xi, \eta$ .

Отметим, что формула (8) для множителя системы сохраняется вне зависимости от того, из какой концепции источников, распределенных в раскрыве  $S$ , исходить. Ими могут быть магнитные токи, электрические, или те и другие (гюйгенсовский источник). Важно только, чтобы направление этих токов на  $S$  не менялось.

Интегральное уравнение (8), где  $f$  задано, а  $\mathcal{E}$  ищется, является естественным обобщением уравнения (5) на случай двух переменных.

Анализ (аналогичный проведенному для уравнения (5)) с использованием теории целых функций от двух переменных приводит к следующим результатам [8].

Уравнение (8) разрешимо, если его левая часть  $f(u, v)$  удовлетворяет условиям:

а) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u, v)|^2 du dv < \infty;$$

б)  $f(u, v)$  принадлежит к классу целых функций конечной степени от двух (комплексных) переменных.

Этими же условиями определяется класс реализуемых, при помощи конечного раскрыва, диаграмм  $f$  (множителей системы).

Если  $f$  принадлежит к указанному классу, то решение уравнения (8) может быть получено при помощи двойного преобразования Фурье

$$\mathcal{E}(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) e^{-i(u\xi + v\eta)} du dv. \quad (9)$$

Величина  $\mathcal{E}$ , определяемая формулой (9), обращается (на основании теоремы Планшереля — Пойя) в нуль почти всюду вне некоторой конечной области плоскости  $\xi, \eta$ . Эта область, зависящая только от заданной реализуемой диаграммы  $f$ , и определяет форму излучающего раскрыва  $S'$  (или  $S$  в координатах  $x, y$ ).

Существует [8] способ непосредственного определения раскрыва  $S$  по заданной диаграмме  $f$ , на чем мы здесь не останавливаемся.

Когда реализуемая диаграмма имеет вид  $f(u, v) = f_1(u) f_2(v)$  ( $f_1 \in W_{\sigma_1}$ ,  $f_2 \in W_{\sigma_2}$ ), то и распределение источников сводится к  $\mathcal{E}(\xi, \eta) = \mathcal{E}_1(\xi) \mathcal{E}_2(\eta)$ , где  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  находятся путем отдельного преобразования Фурье соответствующих функций  $f_1$  и  $f_2$ . Раскрыв  $S'$ , естественно, оказывается прямоугольным, и размер его сторон однозначно определяется функциями  $f_1$  и  $f_2$ , как и в случае линейных антенн.

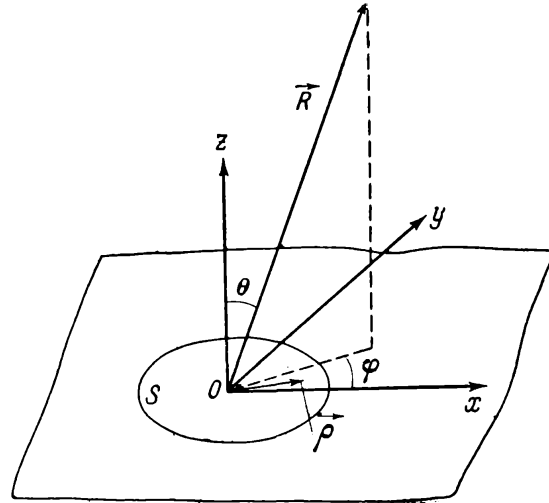


Рис. 4

Такие антенны являются частным случаем систем, рассмотренных в предыдущем разделе. Однако в случае осесимметричных диаграмм имеет смысл их рассматривать независимо.

Введем сферическую систему координат с центром в центре раскрыва  $S$  и осью  $z$ , нормальной к последнему. Если, как и выше, положить  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}} i_x$ , где  $\vec{i}_x$  — постоянный единичный вектор, лежащий в плоскости раскрыва, то остаются справедливыми формулы (7) и (8) предыдущего раздела, причем последнюю из них удобно теперь записать в виде [7]

$$f = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \mathcal{E} e^{ik\rho \sin \theta \cos(\varphi' - \varphi)} k^2 \rho \, d\rho \, d\varphi'. \quad (10)$$

Здесь  $\theta, \varphi$  — угловые сферические координаты точки наблюдения;  $\rho, \varphi'$  — полярные координаты точки интегрирования;  $\rho_0$  — радиус раскрыва.

Ограничиваясь осесимметричными диаграммами (множителями системы), будем считать  $f$  и  $\mathcal{E}$  не зависящими от  $\varphi$  и  $\varphi'$ , после чего (10) можно записать так:

$$f(u) = 2\pi \int_0^{\rho_0} \mathcal{E}(r) J_0(ur) r \, dr, \quad (11)$$

где  $r = k\rho$ ;  $r_0 = k\rho_0$ ;  $u = \sin \theta$ ;  $J_0$  — функция Бесселя.

В работе [9] показано путем сведения (11) к уравнению типа (4), что для разрешимости (11) относительно  $\mathcal{E}(r)$  необходимо, чтобы  $f(u)$  была четной целой функцией (аргумента  $u$ ) конечной степени, удовлетворяющей требованию

$$\int_0^{\infty} |f(u)|^2 u \, du < \infty. \quad (12)$$

Этими условиями, таким образом, определяется класс реализуемых, при помощи конечных круглых раскрывов, диаграмм  $f$ .

Решение уравнения (11) получается при этом при помощи обратного преобразования Ханкеля

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(u) J_0(ur) u \, du. \quad (13)$$

Как и длина, в случае линейной антенны, радиус раскрыва  $r_0$  (или  $\rho_0$ ) однозначно определяется заданной диаграммой  $f$ , так как выражение (13) обращается в нуль при  $r$ , большем некоторого значения.

### Системы дискретных излучателей

Множитель системы из  $N$  дискретных однотипных излучателей, одинаково ориентированных в пространстве, определяется выражением [3, 7]

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{ik\vec{\rho}_n \vec{R}_1}. \quad (14)$$

Здесь  $n$  — номер излучателя;  $\vec{\rho}_n$  — радиус-вектор, определяющий положение «центра»  $n$ -го излучателя;  $\vec{R}_1 = \vec{R}/R$ , где  $\vec{R}$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $a_n$  — коэффициент, пропорциональный комплексной амплитуде  $n$ -го излучателя.

Задача синтеза подобных систем при произвольном расположении центров излучателей в пространстве в литературе рассмотрена недостаточно.

Изучались случаи, когда источники располагались на некоторых заранее заданных плоских линиях [2, 10, 11, 12]. Наиболее детально изучены линейные решетки, у которых центры отдельных излучателей расположены на равных расстояниях  $d$  вдоль некоторой прямой.

Выражение (14) в последнем случае записывается так:

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{inkd \cos \theta}. \quad (14a)$$

Множитель линейной решетки по мощности  $\Psi$  определяется как  $|f|^2$ .

Каждому множителю решетки (14a) можно поставить в соответствие следующий полином [11]:

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n, \quad (15)$$

который совпадает с  $f$  при  $z = e^{ikd \cos \theta}$ .

Задача об определении класса реализуемых, при помощи линейной решетки, диаграмм (множителей решетки) тривиальна — это любые полиномы от аргумента  $e^{ikd \cos \theta}$ .

Несколько менее тривиален вопрос о классе реализуемых множителей  $\Psi$  по мощности. Для них может быть получена, с использованием (14a), формула [7]

$$\Psi(\theta) = |f|^2 = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \{A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi\}, \quad (16)$$

где  $\psi = kd \cos \theta$ .

Отсюда следует, что реализуемые  $\Psi(\theta)$  принадлежат к классу неотрицательных (для вещественных  $\psi$ ) тригонометрических полиномов. Для нахождения коэффициентов возбуждения (токов)  $a_n$  отдельных излучателей (см. выражение (14)) по заданному (формулой типа (16)) множителю  $\Psi(\theta)$  поступают [7] следующим образом.

Вводится вспомогательный полином

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{N-1} (A_n - iB_n) z^{N-1+n} + \sum_{n=1}^{N-1} (A_n + iB_n) z^{N-1-n} + A_0 z^{N-1}, \quad (17)$$

связанный с (16) соотношением

$$\Psi(\theta) = |\Phi(e^{i\psi})|. \quad (17a)$$

Легко видеть, что если  $\Phi(z_n) = 0$ , то и  $\Phi(1/z_n^*) = 0$ ; кроме того, из неотрицательности (17a) следует, что нули, лежащие на единичной окружности, входят только в четных степенях, поэтому можно написать

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[ (z - z_n) \left( z - \frac{1}{z_n^*} \right) \right].$$

Теперь если ввести полином

$$\hat{f}(z) = \prod_{n=1}^{N-1} (z - z_n), \quad (18)$$

то справедливо, с точностью до несущественного постоянного множителя

$$\Psi(\theta) = |\hat{f}(e^{i\psi})|^2 = |\Phi(e^{i\psi})|. \quad (19)$$

Таким образом, решение задачи синтеза сводится к построению полинома (17) (по заданному множителю (16)), нахождению его корней  $z_n$  и, наконец, определению коэффициентов возбуждения  $a_n$  путем сравнения выражений (15) и (18) для полинома  $\hat{f}(z)$ .

Разделение нулей  $\Phi(z)$  на две группы  $z_n$  и  $1/z_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, N - 1$ ) можно провести различными способами; кроме того, каждый из них приводит к двум различным распределениям  $a_n$ , так как можно положить

$$\hat{f}(z) = \prod_{n=1}^{N-1} (z - z_n) \quad \text{и} \quad \hat{f}(z) = \prod_{n=1}^{N-1} \left( z - \frac{1}{z_n^*} \right).$$

Таким образом, задача синтеза по заданному множителю решетки (по мощности) оказывается, как и следовало ожидать, неоднозначной. Только когда все нули лежат на единичной окружности  $|z_n| = 1$ , они разделяются единственным образом.

## 2. ДИАГРАММЫ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ К КЛАССУ РЕАЛИЗУЕМЫХ, И МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИСТОЧНИКОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ СОЗДАНИЕ ДИАГРАММ, БЛИЗКИХ К НИМ

### Аппроксимация заданных диаграмм реализуемыми

Диаграммы направленности антенн выбираются так, чтобы они наилучшим образом удовлетворяли техническим требованиям, предъявляемым к станциям, в составе которых антенны работают. При этом диаграммы задаются, в пределах вещественных углов, при помощи кривых или некоторых непрерывных функций. Эти диаграммы, как правило, не принадлежат к классу реализуемых. Поэтому прежде всего возникает задача о достаточно хорошей аппроксимации заданной диаграммы реализуемой.

Возможность такой аппроксимации, с любой заданной точностью, в случае линейных антенн вытекает из следующей теоремы [13, 14].

Любая, непрерывная на отрезке  $-u_0 \leq u \leq u_0$ , функция  $g(u)$  может быть аппроксимирована некоторой функцией  $f(u) \in W_\sigma$ , так, чтобы выполнялось неравенство

$$|g(u) - f(u)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad -u_0 \leq u \leq u_0. \quad (20)$$

Здесь  $u_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$  и  $\varepsilon > 0$  — любые заданные числа. Отсюда, между прочим, следует, что какова бы ни была длина антенны  $2\sigma$ , при помощи нее, в принципе, может быть получена диаграмма, аппроксимирующая (в интервале вещественных углов) любую заданную с произвольной точностью  $\varepsilon$ .

Аналогичная теорема может быть доказана и для непрерывных функций, зависящих от двух переменных, какими, например, являются пространственные диаграммы антенн с плоским излучающим раскрытием. Более того, можно показать, что плоский прямоугольный излучающий раскрыв размером  $2\sigma_1 \times 2\sigma_2$  позволяет получить диаграмму, аппроксимирующую (в пределах вещественных углов) любую непрерывную заданную  $g(u, v)$  с произвольной точностью  $\varepsilon$ .

Для этого достаточно доказать, что в области  $D$ , соответствующей вещественным углам  $\theta, \varphi$ ,

$$\left| g(u, v) - \sum_{n=1}^N f_n(u) F_n(v) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad u, v \in D, \quad (21)$$

где  $f_n(u) \in W_{\sigma_1}$  и  $F_n(v) \in W_{\sigma_2}$  — соответствующим образом подобранные функции.

Действительно, на основании сказанного в § 1, парциальная диаграмма  $f_n(u) F_n(v)$  реализуется прямоугольным раскрытием размером



$2\sigma_1 \times 2\sigma_2$ . Поэтому, на основании принципа суперпозиции, результирующая диаграмма  $\sum_{n=1}^N f_n(u) F_n(v)$  также реализуется этим раскрывом и отличается от заданной  $g(u, v)$  на величину, меньшую  $\varepsilon$  (21).

Неравенство (21) можно, в свою очередь, получить, обобщив соответствующим образом доказательство неравенства (20), приведенное в [14].

Для этого введем две функции  $f_0(u) \in W_{\sigma_1}$  и  $F_0(v) \in W_{\sigma_2}$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |f_0(u)| &> \alpha > 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq u \leq 1; \\ |F_0(v)| &> \alpha > 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq v \leq 1 \end{aligned} \quad (22)$$

и убывающие вдоль действительной оси быстрее любой степени  $|1/u|$  и  $|1/v|$  соответственно.

Будем искать аппроксимирующую функцию в виде  $f_0(u) F_0(v) P_N(u, v)$ , где  $P_N$  — полином степени  $N$  от двух переменных, который следует найти из условия

$$|g(u, v) - f_0(u) F_0(v) P_N(u, v)| < \varepsilon, \quad u, v \in D.$$

Деля это неравенство на  $f_0(u) F_0(v)$ , найдем, учитывая (22),

$$\left| \frac{g(u, v)}{f_0(u) F_0(v)} - P_N(u, v) \right| < \frac{\varepsilon}{\alpha^2} = \varepsilon_1, \quad u, v \in D. \quad (23)$$

Поскольку функция  $g(u, v)/f_0(u) F_0(v)$  непрерывна в рассматриваемой области  $D$ , то на основании теоремы типа Вейерштрасса, для функций двух переменных [15], можно построить полином удовлетворяющий неравенству (23). Так как  $f_0(u) F_0(v) P_N(u, v)$  легко представить в виде  $\sum_{n=1}^N f_n(u) F_n(v)$ , где  $f_n \in W_{\sigma_1}$ , а  $F_n \in W_{\sigma_2}$ , то доказана и справедливость неравенства (21).

В ряде случаев удобнее пользоваться среднеквадратичной аппроксимацией заданной диаграммы  $g$  реализуемой  $f$ , т. е. требовать выполнения неравенства

$$\int_D |g(u, v) - f(u, v)|^2 du dv < \varepsilon, \quad (24)$$

где  $D$  — область изменения переменных  $u, v$ , в пределах которой производится аппроксимация, или

$$\int_{-1}^1 |g(u) - f(u)|^2 du < \varepsilon \quad (24a)$$

в случае линейных антенн.

Возможность такой аппроксимации любой непрерывной функции  $g$  некоторой реализуемой  $f$  с любой точностью  $\varepsilon$  сразу следует из приведенных выше неравенств (20) и (21).

### Методы парциальных диаграмм

Этот метод заключается в аппроксимации заданной диаграммы отрезком ряда по специальным функциям (парциальным диаграммам), для каждой из которых существует и может быть найдено точное решение задачи синтеза. При этом искомое распределение источников получается

\* Функции такого типа приведены в [14].

в виде суперпозиции парциальных распределений, соответствующих отдельным парциальным диаграммам. Так, например, для линейных антенн заданную диаграмму  $g(u)$  аппроксимируют на сегменте  $-1 \leq u \leq 1$  с необходимой точностью отрезком ряда

$$f(u) = c_0 f_0(u) + c_1 f_1(u) + \dots + c_{N-1} f_{N-1}(u), \quad (25)$$

где  $f_n(u) \in W_\sigma$ ;  $2\sigma$  — размер антенны, а  $c_n$  — соответствующим образом подобранные коэффициенты. Если  $f_n(u)$  ортогональны, то при среднеквадратичной аппроксимации  $c_n$  совпадают с коэффициентами Фурье заданной диаграммы  $g(u)$ .

Подставляя (25) в формулу (5), найдем распределение источников, реализующих диаграмму  $f(u)$ :

$$I(\xi) = c_0 \tilde{f}_0(\xi) + c_1 \tilde{f}_1(\xi) + \dots + c_{N-1} \tilde{f}_{N-1}(\xi), \quad (26)$$

где  $\tilde{f}_n(\xi)$  — преобразованная по Фурье функция  $f_n(u)$ . В случае антенн с плоским прямоугольным раскрытием этот метод следует несколько модифицировать. Заданная диаграмма  $g(u, v)$  аппроксимируется (в области, соответствующей вещественным углам) отрезком ряда

$$f(u, v) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n f_n(u) F_n(v), \quad (27)$$

где  $f_n(u) \in W_{\sigma_1}$ ;  $F_n(v) \in W_{\sigma_2}$ ;  $2\sigma_1 \times 2\sigma_2$  — «площадь» излучающего раскрытия.

Подставляя (27) в (9), найдем

$$\mathcal{E}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \tilde{f}_n(\xi) \tilde{F}_n(\eta), \quad (28)$$

$\tilde{f}$  и  $\tilde{F}$  — преобразованные по Фурье функций  $f$  и  $F$ .

При выборе функций  $f_n$  и  $F_n$  руководствуются соображениями, связанными с простотой аппроксимации заданной диаграммы  $g$  минимальным числом членов ряда и возможностью выражения  $\tilde{f}_n$  и  $\tilde{F}_n$  через известные функции.

В литературе для решения задачи синтеза методом парциальных диаграмм применялись следующие пары функций [16, 17, 18, 19, 20]:

$$1) \left. \begin{aligned} f_n(u) &= \frac{se_n\left(\arccos u, \frac{\sigma}{2}\right)}{\sqrt{1-u^2}} \\ \tilde{f}_n(\xi) &= \lambda_n se_n\left(\arccos \frac{\xi}{\sigma}, \frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

где  $se_n$  — функция Матье;

$$\lambda_n = \frac{i^n}{2} H_{s_n}^{(2)}\left(0, \frac{\sigma}{2}\right);$$

$H_{s_n}^{(2)}$  — функция Матье — Ханкеля;

$$2) \left. \begin{aligned} f_n(u) &= \frac{\sin \sigma\left(u - n \frac{\pi}{\sigma}\right)}{\sigma\left(u - n \frac{\pi}{\sigma}\right)} \\ \tilde{f}_n(\xi) &= \frac{1}{2i\sigma} e^{-in \frac{\pi}{\sigma} \xi} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$3) \left. \begin{aligned} f_n(u) &= J_n(\sigma u) \\ \tilde{f}_n(\xi) &= \frac{(-i)^n T_n\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)}{\pi \sqrt{\sigma^2 - \xi^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

$$4) \left. \begin{aligned} f_n(u) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma u}} J_{n+\frac{1}{2}}(\sigma u) \\ \tilde{f}_n(\xi) &= \frac{i^{-n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} P_n\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

$J_{n+\frac{1}{2}}$  — функция Бесселя полуцелого порядка;  $P_n$  — полином Лежандра.

Все  $\tilde{f}_n(\xi)$  определяются указанными выражениями только в интервале  $(-\sigma, +\sigma)$ ; вне его они равны нулю.

Приведем некоторые соображения по поводу указанных парциальных диаграмм. Следует заметить, что с весом  $\sqrt{1-u^2}$  парциальные диаграммы (29) ортогональны на интервале  $(-1, +1)$ . Впервые парциальные диаграммы в виде функций Матье были предложены в [16]; затем было показано [17], что функции Матье являются собственными функциями ядра интегрального уравнения (3), приведенного к соответствующим координатам, а  $\lambda_n$  — собственными числами этого ядра. Таким образом, парциальные диаграммы (29) обеспечивают наилучшую среднеквадратичную аппроксимацию заданной диаграммы, а коэффициенты  $c_n$  в силу ортогональности функций (29) просто вычислить.

Система парциальных диаграмм (30), рассмотренная впервые Зелкиным и в работе [18], обладает рядом замечательных свойств. Так, например, аппроксимационный ряд, составленный из этих функций, точно совпадает с заданной (вообще говоря нереализуемой) диаграммой в точках  $u = n \frac{\pi}{\sigma}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ). Система этих функций успешно применяется как для диаграмм, заданных аналитически, так и графически. Система функций  $f_n$  (30) ортогональна и обеспечивает наилучшую среднеквадратичную аппроксимацию на всей действительной оси (а не в области вещественных углов  $|u| \leq 1$ ).

Что касается парциальных диаграмм (31) и (32), то при помощи их заданная диаграмма направленности может быть равномерно аппроксимирована отрезком ряда Неймана, состоящим из функций Бесселя.

При решении задачи синтеза распределение источников в антенне зависит от характера диаграммы на всей действительной оси  $-\infty \leq u \leq \infty$ , а не только в пределах вещественных углов  $-1 \leq u \leq 1$  (см., например, (5)). Поэтому в случае задания нереализуемой диаграммы  $g(u)$  ее следует также продолжить за пределы вещественных углов на всю действительную ось, руководствуясь теми или иными соображениями. Часто ее продолжают нулем, так как при этом антенна будет обладать меньшей реактивностью (см. ниже).

Вследствие сказанного возникает задача наилучшей среднеквадратичной аппроксимации заданной диаграммы  $g(u)$  ( $-\infty < u < \infty$ ) реализуемой  $f(u)$  на всей оси  $u$ .

Легко показать [21], используя равенство Парсеваля, что наилучшая аппроксимация обеспечивается функцией

$$f(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} I(\xi) e^{iu\xi} d\xi,$$

где

$$I(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-iu\xi} du \quad (33)$$

— ток, распределенный вдоль провода «длины»  $2\sigma$ , реализующий диаграмму  $f(u)$ . 391

Таким образом, задача синтеза решается преобразованием Фурье (33) заданной нереализуемой диаграммы с последующим отбрасыванием токов, находящихся вне отрезка  $[-\sigma, \sigma]$ . Достижимая точность аппроксимации определяется при этом выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u) - f(u)|^2 du = \left( \int_{-\infty}^{-\sigma} + \int_{\sigma}^{\infty} \right) |I(\xi)|^2 d\xi, \quad (34)$$

которое будет мало, если спектр  $g(u)$ , определяемый формулой (33), приходящийся на область  $|\xi| > \sigma$ , достаточно мал.

Остановимся еще на приближенном методе синтеза системы дискретных излучателей. Сущность его состоит в том, что приравниваются соответствующие коэффициенты Фурье заданной диаграммы направленности и множителя решетки излучателей [10, 12]. Этот метод применим для излучателей, расположенных на плоскости произвольным образом. Для линейной решетки излучателей диаграмма записывается так:

$$f(\theta) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p e^{i(kd_p \cos \theta + \Phi_p)}, \quad (35)$$

где  $c_p$  и  $\Phi_p$  — соответственно амплитуда и фаза тока в  $p$ -м излучателе;  $d_p$  — расстояние  $p$ -го излучателя от начала координат. Искомый ряд для правой части (35) можно получить, воспользовавшись разложением функцией  $e^{ikd_p \cos \theta}$  в ряд Фурье. Коэффициенты этого ряда содержат функции Бесселя от аргумента  $kd_p$  и зависят от амплитуд и фаз токов и взаимного расположения излучателей; следует приравнять их соответствующим коэффициентам  $b_1, \dots, b_n$  разложения заданной диаграммы направленности  $f(\theta)$  в ряд Фурье. Так, например, для случая, когда антенна имеет фазовый центр, получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} x_1 \frac{J_{2n-1}(m_1)}{m_1} + x_2 \frac{J_{2n-1}(m_2)}{m_2} + \dots + x_N \frac{J_{2n-1}(m_N)}{m_N} = \\ = (-1)^{n-1} \frac{b_{2n-1}}{2(2n-1)}, \end{aligned} \quad (36)$$

$n = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  — четное,

$$y_1 \frac{J_{2n}(m_1)}{m_1} + y_2 \frac{J_{2n}(m_2)}{m_2} + \dots + y_N \frac{J_{2n}(m_N)}{m_N} = (-1)^{n+1} \frac{b_{2n}}{4n}, \quad (37)$$

$n = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  — четное,

где

$$\begin{aligned} m_p &= kd_p; & x_p &= c_p \cos \Phi_p; \\ y_p &= c_p \sin \Phi_p. \end{aligned} \quad (38)$$

Число членов ряда Фурье, достаточно хорошо аппроксимирующих множитель решетки, зависит от  $N$ ,  $d_p$  и монотонно растет с увеличением  $N$  и  $d_p$ . Число функций Бесселя определяется размером раскрыва (например, при  $l = 10 \lambda$  их требуется примерно 35). Значительно лучшая сходимость рядов имеет место, если производить разложение множителя решетки не в тригонометрический ряд, а по функциям Матье [12]. Заданную диаграмму направленности в этом случае тоже надо представить в виде ряда по функциям Матье. В этом случае сходимость ряда лучше (например, при  $l = 10 \lambda$  требуется примерно 20 членов).

При произвольно заданных диаграмме направленности и размере излучающего раскрыва антенны в результате решения задачи синтеза могут получиться быстропеременные распределения источников с очень большими значениями амплитуд. При таких распределениях увеличивается протяженность «ближней» зоны индукции, резко возрастают потери в антенне, имеет место большая реактивная мощность и, как следствие, чрезвычайно резкая критичность диаграммы направленности относительно самых малых изменений распределения источников [22, 16, 23]. Подобные системы называются «сверхнаправленными» и их практически не удается реализовать.

Рассмотрим этот круг вопросов на примере линейной проволочной антенны. Приведем прежде всего выражения для мощности потерь  $W_{\Pi}$  и комплексной мощности излучения  $W$  такой антенны:

$$W_{\Pi} = \frac{r_1}{2k} \int_{-\sigma}^{\sigma} |I(\xi)|^2 d\xi, \quad (39)$$

$$W = -\frac{1}{2k} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_z I^* d\xi.$$

Здесь  $r_1$  — погонное сопротивление потерь провода антенны;  $E_z$  — касательная к проводу составляющая электрического вектора, которую при интегрировании во второй формуле (39) следует брать на поверхности провода.

Выразим эти мощности через диаграмму  $f(u)$ . Используя теорему Парсеваля [4], напишем сразу, учитывая (4) и (5),

$$\begin{aligned} \frac{2k}{r_1} W_{\Pi} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |f(u)|^2 du + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) |f(u)|^2 du. \end{aligned} \quad (40)$$

Выражение для  $W$  получить сложнее. Напишем прежде всего выражение для  $E_z$ , создаваемой на поверхности провода (радиуса  $a$ , длины  $L$ ) осесимметричным током  $I$ , текущим по его поверхности вдоль оси [24].

В наших обозначениях, с учетом конечной длины провода,

$$E_z = -\frac{k^2}{8\pi\epsilon\omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \int_{-\sigma}^{\sigma} I(\xi') \int_{-\infty}^{\infty} J_0(va) H_0^{(2)}(va) e^{-iu(\xi-\xi')} dud\xi',$$

где

$v = k\sqrt{1-u^2}$ ;  $\text{Im } v \leq 0$ ;  $J_0$ ,  $H_0^{(2)}$  — цилиндрические функции.

Полагая, что  $I(\xi)$  — непрерывная функция (на оси  $\xi$ ), имеющая двукусочно-непрерывные производные, придадим  $E_z$  следующий вид:

$$E_z = -\frac{k^2}{8\pi\epsilon\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) J_0(va) H_0^{(2)}(va) (1-u^2) e^{-iu\xi} du.$$

Отсюда следует, что преобразованная по Фурье от  $E_z$  равна

$$\mathcal{E}(u) = -\frac{k^2}{4\epsilon\omega} f(u) J_0(va) H_0^{(2)}(va) (1-u^2).$$

Используя теорему Парсеваля для двух функций  $I(\xi)$  и  $E_z(\xi)$ , получим искомое выражение для  $W$  (формула (39)):

$$W = \frac{k}{16\pi\epsilon\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 J_0(va) H_0^{(2)}(va) (1-u^2) du. \quad (41)$$

Используя соотношение  $H_0^{(2)} = J_0 - iN_0$ , разобьем  $W$  на вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} W = & \frac{k}{16\pi\epsilon\omega} \int_{-1}^1 |f(u)|^2 (1-u^2) du + \\ & + \frac{k}{16\pi\epsilon\omega} \left\{ i \int_{-1}^1 |f(u)|^2 N_0(va) (u^2-1) du + \right. \\ & \left. + \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) |f(u)|^2 J_0(va) H_0^{(2)}(va) (1-u^2) du \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

При этом мы положили  $J_0(va) = 1$  при  $|u| \leq 1$ ; так как провод тонкий,  $ka \ll 1$ . Первый член (42) равен активной мощности излучения, а второй — реактивной мощности.

Укажем теперь класс диаграмм, реализация которых приводит к сверхнаправленности. Для этого введем нормированную на единицу, в пределах вещественных углов, диаграмму

$$f_N(u) = \frac{\int_{-\sigma}^{\sigma} I(\xi) e^{iu\xi} d\xi}{\max_{-1 \leq u \leq 1} \left| \int_{-\sigma}^{\sigma} I(\xi) e^{iu\xi} d\xi \right|}. \quad (43)$$

Применим к ней неравенство Бернштейна [4], справедливое для  $f \in W_{\sigma}$ :

$$\text{Sup}_{-\infty < u < \infty} |f'_N(u)| \leq \sigma \text{Sup}_{-\infty < u < \infty} |f_N(u)|.$$

Из него сразу следует, что диаграмма с большим значением модуля производной может иметь место либо при большой электрической длине антенны  $2\sigma$ , либо при больших значениях модуля самой диаграммы. Так как последняя нормирована на единицу на отрезке  $-1 \leq u \leq 1$ , то большие значения  $|f'_N(u)|$  будут находиться вне указанного интервала, что приведет, как это следует из формул (40) и (42), к резкому росту (при заданной ваттной мощности излучения) потерь и реактивной мощности.

Последнее, как хорошо известно, приводит к большим пиковым значениям тока, увеличению зоны индукции и уменьшению диапазонности антенны. Подобные же выводы можно сделать и для антенн с излучающим раскрывом, если воспользоваться выражением

$$W = A \int_{-1}^1 |f(u)|^2 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - iA \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) |f(u)|^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}, \quad (44)$$

данным в [18] для плоской задачи. Здесь  $A$  — положительный множитель.

Рассмотрим еще, с какими распределениями источников — токов приходится иметь дело при сверхнаправленности. Дифференцируя (43),

$$|f_N'(u)| \leq \frac{\int_{-\sigma}^{\sigma} |I(\xi)| |\xi| d\xi}{\max_{-1 \leq u \leq 1} \left| \int_{-\sigma}^{\sigma} I(\xi) e^{iu\xi} d\xi \right|}. \quad (45)$$

Правая часть его может быть увеличена, при заданной длине  $2\sigma$ , в результате применения быстропеременных токов

$$\frac{d(\arg I(\xi))}{d\xi} > 1, \quad (46)$$

так как при этом знаменатель в (45) можно сделать сколь угодно малым. Таким образом, для получения диаграмм, производная которых по углу  $\theta$  велика, в частности диаграмм с крутыми скатами или узкими лепестками, необходимо либо удлинять антенну, либо применять быстропеременные токи.

В последнем случае, усиливая неравенство (46), мы приходим к сверхнаправленным системам, так как при этом подчеркиваются амплитуды все более высоких частот спектра  $I(\xi)$ , т. е. растут значения  $|f(u)|$  вне интервала  $-1 < u < 1$ .

Укажем еще один случай сверхнаправленности, к которому можно прийти, улучшая аппроксимацию нереализуемой диаграммы  $g$  реализуемой  $f$ , т. е. уменьшая  $\epsilon$  в неравенствах типа (20), (21), (24), (24a). Действительно, улучшая аппроксимацию, мы тем самым увеличиваем число осцилляций разности  $|g(u) - f(u)|$  в заданном интервале аппроксимации. Это означает, что на нем возрастает  $f'(u)$ , и тем сильнее, чем меньше  $\epsilon$ . Последнее, на основании сказанного выше, ведет к сверхнаправленности. К этому же выводу можно прийти, аппроксимируя  $g(u)$  при помощи парциальных диаграмм, например, при помощи функций  $f_n(u)$  типа (29). Увеличивая точность аппроксимации, необходимо использовать ряд с большим числом гармоник  $f_n(u)$ , и хотя последние при больших  $n$  будут иметь весьма малые коэффициенты, соответствующие им парциальные распределения источников  $\tilde{f}_n(\xi)$  вследствие наличия в них множителя  $\lambda_n$  (см. (29)), резко возрастающего вместе с  $n$ , создадут быстропеременное распределение тока с большими пиковыми значениями.

#### 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Оптимальными называются диаграммы, наилучшим образом удовлетворяющие различным практическим требованиям и для реализации которых не приходится прибегать к распределениям источников, приводящих к сверхнаправленности.

Задачи, связанные с нахождением оптимальных диаграмм, можно условно разбить на три группы.

1) Нахождение диаграмм, обеспечивающих наименьший уровень бокового излучения при заданной ширине главного лепестка, и наоборот, т. е. диаграмм с заданным уровнем бокового излучения и наименьшей шириной главного лепестка.

2) Построение реализуемых диаграмм, наилучшим (в некотором смысле) образом аппроксимирующих заданную диаграмму специальной формы (типа косекансной и т. п.).

3) Задачи, связанные с обеспечением заданного или максимального коэффициента направленного действия, при одновременном удовлетворении дополнительным условиям, исключающим сверхнаправленность.

Остановимся более подробно на задачах первой группы.

Подобные решетки наиболее полно исследованы. В частности, для решеток с нормальным излучением ( $\theta_{\text{макс}} = 90^\circ$ ) оптимальная диаграмма, обеспечивающая минимальный уровень боковых лепестков при заданной ширине главного, либо наоборот, выражается формулой [25]

$$f_N = \frac{T_{N-1}(z_0 z)}{T_{N-1}(z_0)}, \quad (47)$$

где

$$z = \cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right); \quad z_0 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2(N-1)}\right)}{\cos\left(\frac{kd}{2} \sin \theta_0\right)} = \text{ch}\left(\frac{1}{N-1} \text{arc ch } \frac{1}{\alpha}\right);$$

$d$  — расстояние между излучателями;  $N$  — число излучателей;  $2\theta_0$  — ширина главного лепестка по нулям;  $\alpha$  — уровень бокового излучения.

Задав  $2\theta_0$ , из последнего равенства определим минимальный уровень лепестков  $\alpha$ , и наоборот.

Выражение (47) справедливо для случая  $d \geq \lambda/2$ . Для  $d < \lambda/2$  задача о нахождении диаграмм, оптимальных в рассматриваемом смысле, более сложна. Математически она эквивалентна отысканию полинома, наименее уклоняющегося от нуля на двух отрезках. В самом деле, интервал изменения  $z$  в этом случае будет  $(-1, -z_{\text{мин}})$  и  $(z_{\text{мин}}, 1)$ , так как минимальное по модулю значение  $z_{\text{мин}} = \cos \frac{\pi d}{\lambda} > 0$ ; для  $d \geq \lambda/2$  величина  $z$  достигает нуля, и поэтому интервал изменения  $z$  представляет один отрезок, а не два разделенных. Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля на двух отрезках, названы полиномами Ахиезера — Чебышева [26]. В случае нечетного числа излучателей эти полиномы, как показал один из авторов настоящей статьи, переходят в обычные полиномы Чебышева; оптимальная диаграмма имеет следующий вид:

$$f_N = \cos \frac{N-1}{2} \text{arc cos } \frac{2z^2 - \beta - \gamma^2}{\beta - \gamma^2}, \quad (48)$$

где  $\gamma^2 = \cos^2 \frac{\pi d}{\lambda}$ , а  $\beta$  определяется значением  $2\theta_0$  или  $\alpha$  (аналогично  $z_0$ ).

При уменьшении  $d$  диаграмма, определяемая формулой (48), будет иметь все лучшие соотношения между шириной диаграммы и уровнем бокового излучения, однако при этом антенна будет обладать сверхнаправленными свойствами. Поэтому не рекомендуется в случае оптимальных диаграмм такого вида выбирать  $d$  существенно меньшим  $\lambda/2$ .

Аналогично может быть найдена оптимальная диаграмма для решеток с осевым излучением, излучающих под заданным углом к оси [27]. Ком-

плексная переменная  $z = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta}$  в этих случаях лежит на единичной окружности, и соответствующее дробно-линейное преобразование переводит единичную окружность в отрезок  $(-1, 1)$  вещественной оси. Далее решение в принципе не отличается от рассмотренных выше; как правило, при  $d < \lambda/2$ , если максимум диаграммы ориентирован не перпендикулярно оси антенны и не вдоль оси, оптимальная диаграмма выражается весьма сложно через нетабулированные функции. Задачи подобного типа могут быть еще усложнены. Так, например, может быть поставлена задача определения реализуемой диаграммы с минимальным уровнем бокового излучения при заданных ширине главного лепестка по нулям и, например, его крутизне в фиксированной точке или ширине диаграммы по уровню  $r$ . Полученное решение [28] сводится либо к полиномам Чебышева (Чебышева — Ахиезера), либо к эллиптическим интегралам в зависимости от соотношения заданных параметров.



Для получения в этом случае оптимальной диаграммы, подобной предыдущим, следует перейти от дискретной решетки к непрерывной системе путем стремления числа излучателей  $N \rightarrow \infty$ ,  $d \rightarrow 0$ , так, чтобы при этом осталась неизменной длина  $L = d(N - 1)$ . Оптимальная диаграмма при этом имеет вид [29]

$$f = \text{ch} \sqrt{\left(\text{ar ch} \frac{1}{\alpha}\right)^2 - v^2}, \quad v = \frac{kL \cos \theta}{2}; \quad (49)$$

$f \sim \cos v$  при больших  $v$ .

Таким образом, уровень боковых лепестков не убывает при  $|v| \rightarrow \infty$ . Для реализации таких диаграмм требуется ток, определяемый преобразованием Фурье от  $f$ :

$$I(\xi) = I_1(\xi) + \frac{1}{2\pi L} [\delta(\xi + 1) + \delta(\xi - 1)], \quad (50)$$

где  $I_1(\xi)$  — непрерывная функция;  $\delta(\xi)$  — дельта-функция. Распределение (50) не реализуемо, поскольку нельзя создать на краях антенны два бесконечных всплеска тока. Для того чтобы устранить всплески тока на краях, предложена [29] квазиоптимальная диаграмма, имеющая вид

$$f = \text{ch} \sqrt{\left(\text{ar ch} \frac{1}{\alpha}\right)^2 - v^2} - \cos v. \quad (51)$$

Переход от оптимальных диаграмм к квазиоптимальным сопровождается некоторым расширением главного лепестка; максимальным боковым лепестком может быть не первый лепесток. Однако отличие квазиоптимальной диаграммы от оптимальной, как показали расчеты, несущественно.

Что касается нахождения оптимальных диаграмм, относящихся ко второй и третьей группам, то на эту тему пока имеется очень мало работ. Вопросы наилучшего приближения к несимметричным диаграммам (на определенном участке) приобретают практическое значение из-за новых возможностей логического синтеза диаграмм. В работе [30] рассмотрена задача, с какой точностью можно воспроизвести несимметричную диаграмму косекансного типа при помощи решетки из  $N$  излучателей. Получены результаты, правда в асимптотическом случае, когда  $N$  велико, или же достаточно велико число парциальных диаграмм (в случае непрерывного распределения), аппроксимирующих в наилучшем смысле заданную. Так, например, для косекансной диаграммы, максимум которой направлен под углом  $\theta_0$ , диаграмма, имеющая  $n$  гармоник  $(\sin \theta, \dots, \sin n\theta)$ , обеспечивает наилучшее приближение к косекансной, характеризуемое величиной  $E_n$  — максимальным отклонением оптимальной диаграммы от заданной:

$$E_n = \frac{S}{(t^2 - 1)(t + \sqrt{t^2 - 1})^n}, \quad (52)$$

где

$$S = \frac{2 \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0}; \quad t = \frac{1 + 2 \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0}.$$

В работе [31] развит метод, использующий критерий дифференциального определения ошибки для каждого значения угла; процесс синтеза при этом требует нескольких последовательных приближений.

Задачи третьей группы в отличие от первых двух можно решать методами вариационного исчисления. Так, например, решены задачи о максимальном усилении антенны, распределение поля в которой выражено конечным рядом Фурье [32]; о максимальном усилении антенны, излучающей определенную мощность в заданном секторе [28].

Эта задача возникла в связи с необходимостью создавать антенны с быстрым качанием луча с частотой порядка  $1 \text{ Мгц}$  и более. Для этого следует электрическим путем менять закон распределения источников в раскрыве. Так, например, имея антенну с линейным распределением фазы поля в раскрыве, можно, меняя угол наклона фазового фронта, без искажения \* качать диаграмму.

Однако если скорость качания увеличивать, то при периоде качания, сравнимом со временем распространения волны вдоль раскрыва, диаграмма начнет искажаться и, наконец, рассыпется на ряд одновременно существующих лепестков, заполняющих весь сектор качания. В связи с этим представляет интерес решить задачу синтеза, т. е. найти закон изменения распределения источников во времени вдоль раскрыва, при котором реализуется заданная диаграмма на заданной скорости качания. При других скоростях допускается существенное искажение ее.

В ряде случаев эта задача может быть решена [33] при помощи преобразования Фурье.

Рассмотрим случай линейной антенны, в которой задан ток

$$I = J(z, t) e^{i\omega_0 t},$$

где  $J(z, t)$  — периодическая функция  $t$  с периодом  $2\pi/\Omega_0$ ;  $\Omega_0 \ll \omega$ . Будем полагать, что  $I$  обладает конечным спектром, точнее спектром, энергия которого за пределами конечного интервала пренебрежимо мала. В этом случае можно говорить о диаграммах для парциальных составляющих тока; они все будут сформированы на некотором конечном расстоянии  $R_0$ , определяемом наибольшей частотой спектра.

Для  $R \geq R_0$  может быть получено [33] следующее выражение для поля:

$$E = E_\theta = \frac{\omega_0 \mu}{4\pi i} \frac{e^{i\omega_0 [t]}}{R} \sin \theta f(\cos \theta, [t]), \quad (53)$$

где

$$f(u, [t]) = \left(1 + \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial}{\partial [t]}\right) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J\left(z, [t] + \frac{zu}{c}\right) e^{ik_0 zu} dz \quad (53a)$$

называется мгновенным множителем системы;  $[t] = t - \frac{R}{c}$  — запаздывающее время.

Обращая формулу для  $f$ , найдем

$$J(z, t) = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u, t - \frac{zu}{c}\right) e^{-ik_0 zu} du. \quad (54)$$

Этот переход проще всего провести, разлагая функции  $f(u, t)$  и  $J(z, t)$  в ряд Фурье по второму аргументу и приравнивая соответствующие члены в левой и правой частях равенства (53a). При этом легко убедиться, что (54) является строгим решением интегрального уравнения (53a), если заданная диаграмма  $f(u, [t])$  принадлежит к классу реализуемых, т. е. представляет собой периодическую функцию с конечным спектром по второму аргументу и принадлежит к классу  $W_{\sigma_M}$   $\left(\sigma_M = \frac{k_M L}{2}, k_M = k_0 + \frac{N\Omega_0}{c}\right)$  по первому аргументу.

\* При этом, однако, будет иметь место некоторое расширение главного луча, пропорциональное косинусу угла наклона фронта.

В заключение перечислим вкратце несколько основных задач, решение которых представляет, по нашему мнению, существенный интерес для теории синтеза антенны.

1. Нахождение распределения поля (или тока) в двумерном плоском раскрыве антенны по заданной комплексной векторной ( $\vec{F} = F_\theta \vec{i}_\theta + F_\varphi \vec{i}_\varphi$ ) диаграмме направленности.

2. Синтез распределения поля или тока на криволинейной замкнутой или разомкнутой поверхности по заданной диаграмме в случае, когда: а) поверхность дана, б) требуется определить также форму поверхности (или класс поверхностей) при некоторых дополнительных условиях.

3. Синтез распределения тока вдоль криволинейного проводника по заданной диаграмме. Эта задача в ряде случаев должна включать и вопросы определения формы линейного проводника.

4. Синтез объемного распределения тока по заданной диаграмме.

Авторы не ставили перед собой задачу рассмотреть в настоящей статье все без исключения вопросы, которые могут быть отнесены к теории синтеза. Поэтому ряд таких вопросов остался неосвещенным.

Список приведенной литературы также не претендует на исчерпывающую полноту: не отмечен целый ряд таких интересных работ, как, например, статья Тейлора [34], и т. д.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Р а м м, Научно-техн. сб. Ленингр. ин-та связи, 1937, 3 (19), 43.
2. J. W o l f, Proc. I. R. E., 1937, 25, 5, 30.
3. Я. Н. Ф е л ь д, Л. С. Б е н е н с о н, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. I, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
4. Н. И. А х и е з е р, Лекции по теории аппроксимации, ГТИ, 1947.
5. Б. Я. Л е в и н, Распределение корней целых функций, ГТИ, 1956.
6. В. И. П о п о в к и н, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 4, 705.
7. Антенны сантиметровых волн, перев. с англ. под ред. Я. Н. Фельда, ч. I, Изд. Советское радио, 1950.
8. Б. М. М и н к о в и ч, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 1, 171.
9. Б. М. М и н к о в и ч, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 12, 2095.
10. А. А. П и с т о л ь к о р с, Изв. электропромышл. слаб. тока, 1939, 1, 9.
11. S. A. S c h e l k u n o f f, Bell System Techn. J., 1943, 22, 1, 80.
12. Л. Д. Б а х р а х, Кандидатск. диссертация, 1950.
13. С. I. В о u w k a m p, N. G. d e V r u i j n, Philips Res. Repts, 1946. 1, 2.
14. Я. И. Х у р г и н, В. П. Я к о в л е в, Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, ГИФМЛ, 1962.
15. Ш. Ж. В а л л е - П у с с е н, Курс анализа бесконечно малых, ч. 2, ГТТИ, 1933.
16. А. А. П и с т о л ь к о р с, Докл. АН СССР, 1953, 89, 5, 849.
17. Л. Д. Б а х р а х, Докл. АН СССР, 1953, 96, 4, 755.
18. P. M. W o o d w a r d, I. D. L a w s o n, J. Instn Electr. Engrs, 1948, 95, pt. 3, 37, 363.
19. Л. Б. Т а р т а к о в с к и й, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 12, 1463.
20. Б. М. М и н к о в и ч, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 4, 708.
21. Л. Б. Т а р т а к о в с к и й, Вестн. НИИ МРТП, 1953, 11 (45).
22. А. З. Ф р а д и н, ЖТФ, 1939, 9, 3, 1161.
23. Л. Д. Б а х р а х, Докл. АН СССР, 1954, XCV, 1, 45.
24. Л. А. В а й н ш т е й н, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд. Советское радио, 1953.
25. C. L. D o l p h, Proc. I. R. E., 1946, 34, 6, 335.
26. В. Л. П о к р о в с к и й, Докл. АН СССР, 1956, 109, 4, 769.
27. В. Л. П о к р о в с к и й, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 12, 1550.
28. Л. Д. Б а х р а х, Докл. на научн. сессии, посвященной Дню Радио, 1958.
29. И. Ф. С о к о л о в, Д. Е. В а к м а н, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 1, 46.
30. Л. Д. Б а х р а х, Тр. НИИ, 1957, VI (50).
31. A. K s i e n s k i, IRE Internat. Convent. Rec., 1960, 8, 1, 3.
32. L. S o l i m a r, IRE Trans., 1958, AP-6, 3, 215.
33. Н. Г. П о н о м а р е в, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 6, 949.
34. T. T. T a y l o r, IRE Trans., 1955, AP-3, 1.

УДК 621.371.167

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВОЙНЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕТКАХ

*Я. Н. Фельд*

Задача о дифракции на двух несимметричных полубесконечных решетках проводов сведена к связанной парной системе функциональных уравнений типа Винера — Хопфа. Путем соответствующего преобразования эта система приводится к двум независимым функциональным уравнениям и решается методом факторизации. Для частного случая — экспоненциального закона взаимодействия токов в проводах решетки — задача доведена до численных результатов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифракцию электромагнитной волны на системе линейных проводов, параллельных оси  $z$ , образующих две полубесконечные решетки (рис. 1). Первая из них расположена в плоскости  $y = d$ , а вторая — в плоскости  $y = -d$  и сдвинута относительно первой на величину  $x_0 = n_0 l$  в направлении отрицательной полуоси  $x$ . Здесь  $l$  — расстояние между

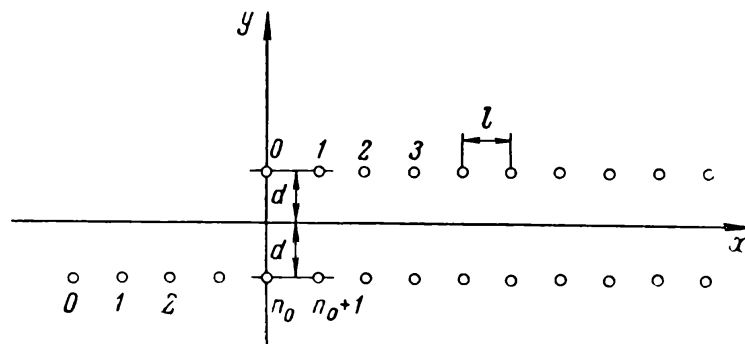


Рис. 1

осями соседних проводов, одинаковое для обеих решеток;  $n_0$  — число проводов второй решетки, расположенных в области  $x < 0$ . Перенумеруем провода решеток так, как показано на рис. 1, присвоив крайним левым проводам индексы нуль. Пусть на эту систему падает первичная волна, электрический вектор которой поляризован параллельно проводам. Индуцированный ею ток в  $n$ -м проводе первой решетки обозначим буквой  $I_n^{(1)}$ , а второй —  $I_n^{(2)}$ . Эти токи создают вторичные поля с электрическим вектором, также параллельным проводам. Условие динамического равновесия рассматриваемой системы сводится к равенству нулю электрического вектора полного поля на поверхности проводов, которые считаются идеально проводящими. Мы будем изучать только плоскую задачу, когда все поля и токи не зависят от координаты  $z$ . Это может иметь место, например, в следующих случаях: 1) провода решеток бесконечно длинные и располо-

жены в свободном пространстве (рис. 1); 2) провода бесконечно длинные и расположены между двумя металлическими плоскостями, параллельными проводам решеток (плоский волновод); 3) провода решеток имеют конечную длину, равную высоте прямоугольного волновода, внутри которого они расположены параллельно боковым стенкам (рис. 2).

Будем вести изложение так, чтобы оно было применимо ко всем перечисленным трем случаям.

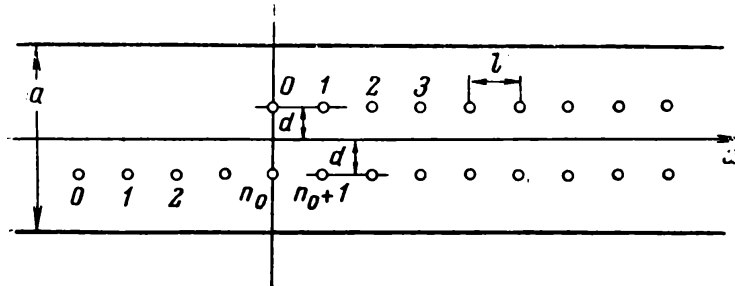


Рис. 2

Обозначим через  $Z^{\nu\mu}_{mn}$  — погонное сопротивление, наведенное на  $m$ -й провод  $\nu$ -й решетки током  $n$ -го провода  $\mu$ -й решетки ( $\nu, \mu = 1, 2$ ). Во втором и третьем случаях это сопротивление рассчитывается с учетом влияния боковых стенок волновода. Легко сообразить, что величины  $m$  и  $n$  могут входить в выражение для  $Z^{\nu\mu}_{mn}$  только через расстояние между соответствующими проводами, измеренное вдоль оси  $x$ , а это расстояние зависит только от разности  $(m - n)$ . Поэтому и наведенное погонное сопротивление зависит только от  $(m - n)$ , и можно вместо  $Z^{\nu\mu}_{mn}$  всюду писать  $Z^{\nu\mu}_{m-n}$ . Из теоремы взаимности вытекает важное для дальнейшего соотношение

$$Z^{\nu\mu}_{m-n} = Z^{\mu\nu}_{n-m} \quad (Z^{\nu\nu}_n = Z^{\nu\nu}_{-n}). \tag{1}$$

Потребуем еще выполнения следующего равенства:

$$Z^{11}_n = Z^{22}_n. \tag{2}$$

Оно безусловно справедливо в первом случае (решетки в свободном пространстве) и будет выполняться в остальных двух случаях, если решетки расположены симметрично относительно боковых стенок волновода. Обозначим через  $A_m^{(1)}$  и  $A_m^{(2)}$  величину электрического вектора первичной волны на поверхности  $m$ -го провода первой и второй решеток соответственно. Эти величины должны рассчитываться во втором и третьем случаях с учетом стенок волновода. Если радиус проводов  $r_0$  достаточно мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$  и расстояниями  $l$  и  $d$ , то  $A^{(\nu)}_m$  можно считать постоянной на поверхности соответствующего провода и равной величине электрического вектора на его оси. Используя введенные обозначения, можно записать условие динамического равновесия в виде двойной бесконечной системы уравнений типа Кирхгофа

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{I_n^{(1)} Z^{11}_{m-n} + I_n^{(2)} Z^{12}_{m-n}\} + A_m^{(1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{I_n^{(1)} Z^{21}_{m-n} + I_n^{(2)} Z^{22}_{m-n}\} + A_m^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} m = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

Система уравнений (3), в которой  $Z^{\nu\mu}_m$  и  $A^{(\nu)}_m$  ( $\nu, \mu = 1, 2$ ) известные величины, принципиально позволяет определить неизвестные токи  $I^{(\nu)}_n$  в

проводах решеток. Зная эти токи, легко найти, используя стандартную методику, вторичное (дифрагированное) поле. Ниже, в процессе вычислений, будем полагать, что среда, окружающая решетки, обладает некоторыми потерями и, следовательно, ее волновое число  $k$  имеет отрицательную мнимую часть (зависимость от времени взята в виде  $e^{i\omega t}$ ). При этом обеспечивается абсолютная и равномерная сходимость всех встречающихся в работе рядов.

Действительно, благодаря потерям  $|Z^{\nu\mu}_n|$  экспоненциально убывают с ростом  $|n|$  и, следовательно,

$$\rho^{-1} \equiv \max_{\nu, \mu=1, 2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Z^{\nu\mu}_n|} \right) < 1. \quad (4)$$

Если источники, возбуждающие первичную волну, находятся на конечном расстоянии или на бесконечности в третьем и четвертом квадрантах (рис. 1), то, как это следует из физических соображений, величины  $I^{(\nu)}_n$  и  $A^{(\nu)}_n$  также экспоненциально убывают с ростом  $n$  и для них выполняются условия, аналогичные (4):

$$\rho_0^{-1} \equiv \max_{\nu=1, 2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|I^{(\nu)}_n|} \right) < 1, \quad (5)$$

$$\rho_A^{-1} \equiv \max_{\nu=1, 2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A^{(\nu)}_n|} \right) < 1. \quad (6)$$

Легко убедиться, что условия (4) и (5) обеспечивают абсолютную сходимость рядов, стоящих в уравнениях (3). Можно также показать, что выполнение любых двух из неравенств (4), (5), (6) влечет за собой справедливость третьего.

## 2. СВЕДЕНИЕ К ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Займемся преобразованием системы уравнений (3), полагая, что известные  $Z^{\nu\mu}_n$ ,  $A^{(\nu)}_n$  и искомые  $I^{(\nu)}_n$  числовые последовательности удовлетворяют условиям (1), (2), (4), (5) и (6). Введем прежде всего следующие функции комплексного переменного  $w$ :

$$G_{\nu\mu}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^{\nu\mu}_n w^n, \quad \varphi_\nu(w) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{(\nu)} w^n; \quad \nu, \mu = 1, 2. \quad (7)$$

Как следует из (4), (5), введенные функции голоморфны:

$$\left. \begin{array}{l} G_{\nu\mu}(w) \text{ — в кольце } \rho^{-1} < |w| < \rho, \\ \varphi_\nu(w) \text{ — в круге } |w| < \rho_0; \rho, \rho_0 > 1. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает также, что

$$G_{\nu\mu}(w) = G_{\mu\nu}(1/w) \text{ и } G_{11}(w) = G_{22}(w). \quad (9)$$

Величины  $I^{(\nu)}_n$ , являющиеся коэффициентами разложения  $\varphi_\nu(w)$  в ряды Тейлора, можно выразить при помощи формул Коши:

$$I_n^{(\nu)} = (1/2\pi i) \int_{(L)} \varphi_\nu(w) (dw/w^{n+1}); \quad n \geq 0, \nu = 1, 2. \quad (10)$$

Контур  $L$  удобно считать совпадающим с кругом  $|w| = 1$ .

Напомним, что интегралы в выражении (10) обращаются в нуль при  $n < 0$ .

Не ограничивая общности, можно считать, что величины  $A^{(\nu)}_n$  имеют вид

$$A^{(\nu)}_n = -g_\nu / \xi^{n+1}; \nu = 1, 2; |\xi| > 1. \tag{11}$$

Такие выражения получаются, если первичная падающая на решетки волна — плоская или волноводного типа. В случае иной первичной волны,  $A^{(\nu)}_n$  можно представить в виде суммы (интеграла) выражений типа (11) и найти решение методом суперпозиции. Для этого достаточно разложить первичную волну на плоские или, что проще, ввести функции  $g_\nu(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(\nu)}_n \xi^n$  — голоморфные при  $|\xi| < \rho_A$  (см. (6)), и выразить через них  $A^{(\nu)}_n$  при помощи формул Коши.

Вернемся теперь к системе (3) и подставим в нее вместо  $I^{(\nu)}_n$  и  $A^{(\nu)}_n$  выражения (10), (11). Тогда, произведя элементарные преобразования, аналогичные проведенным в [1], найдем

$$\left. \begin{aligned} \int_{(L)} \{ \varphi_1(w) G_{11}(w) + \varphi_2(w) G_{12}(w) \} (dw / w^{m+1}) &= 2\pi i g_1 / \xi^{m+1} \\ \int_{(L)} \{ \varphi_1(w) G_{21}(w) + \varphi_2(w) G_{22}(w) \} (dw / w^{m+1}) &= 2\pi i g_2 / \xi^{m+1} \end{aligned} \right\} m = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

Так как выражения, стоящие в фигурных скобках, голоморфны на контуре  $L$  ( $|w| = 1$ ), то, представляя их в виде рядов Лорана и почленно интегрируя, найдем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(w) G_{11}(w) + \varphi_2(w) G_{12}(w) &= F_1(w) / (w - \xi), \\ \varphi_1(w) G_{21}(w) + \varphi_2(w) G_{22}(w) &= F_2(w) / (w - \xi), \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_1(w) \text{ и } F_2(w) &\text{ — функции, голоморфные при } |w| \geq 1, \\ F_1(w) \text{ и } F_2(w) &\text{ равномерно ограничены при } |w| \rightarrow \infty, \\ F_1 = -g_1 \text{ и } F_2 = -g_2 &\text{ при } w = \xi. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Функциональная система уравнений (13), с учетом условий (8) и (14), полностью эквивалентна исходным уравнениям (3). Решив ее, определим токи в проводах решеток по формулам (10).

### 3. РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем приступить к исследованию системы (13), необходимо получить дополнительную информацию о характере функций  $G_{12}$  и  $G_{21}$ . Как уже отмечалось,  $m$  и  $n$  входят в  $Z^{12}_{m-n}$  только через расстояние между  $m$ -м проводом первой решетки и  $n$ -м проводом второй, измеренное вдоль оси  $x$ . Оно, очевидно, равно  $|n_0 + m - n|l$ . Поэтому можно написать

$$Z^{12}_n = f_{12}(|n_0 + n|).$$

Подставляя это выражение в первую формулу (7), найдем

$$G_{12}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{12}(|n_0 + n|) w^n = w^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{12}(|n|) w^n,$$

т. е.

$$G_{12}(w) = w^{-n_0} Q(w), \text{ где } Q(w) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{12}(|n|) w^n \tag{15}$$

— функция, удовлетворяющая соотношению

$$Q(w) = Q(1/w). \quad (15a)$$

Первое из равенств (9) позволяет также получить

$$G_{21}(w) = w^{n_0} Q(w). \quad (16)$$

В общем случае пока нет методов решения систем типа (13). Однако, когда  $G_{\nu\mu}(w)$  удовлетворяет соотношениям (9), (15) и (15a), можно дать эффективный метод их решения. Для этого, предварительно умножив первое уравнение (13) на  $w^{n_0}$ , сложим его со вторым, а затем вычтем из него второе. Тогда получим, учитывая (9), (15), (15a) и (16), систему

$$\begin{aligned} \{w^{n_0}\varphi_1(w) + \varphi_2(w)\} \{G_{11}(w) + Q(w)\} &= (w^{n_0}F_1(w) + F_2(w)) / (w - \xi), \\ \{w^{n_0}\varphi_1(w) - \varphi_2(w)\} \{G_{11}(w) - Q(w)\} &= (w^{n_0}F_1(w) - F_2(w)) / (w - \xi) \end{aligned}$$

или, вводя обозначения

$$G_1(w) = G_{11}(w) + Q(w), \quad G_2(w) = G_{11}(w) - Q(w), \quad (17)$$

$$\varphi^+_1(w) = w^{n_0}\varphi_1(w) + \varphi_2(w), \quad \varphi^+_2(w) = w^{n_0}\varphi_1(w) - \varphi_2(w), \quad (18)$$

$$\varphi^-_1(w) = w^{n_0}F_1(w) + F_2(w), \quad \varphi^-_2(w) = w^{n_0}F_1(w) - F_2(w), \quad (19)$$

запишем ее так:

$$\varphi^+_1(w)G_1(w) = \varphi^-_1(w) / (w - \xi), \quad \varphi^+_2(w)G_2(w) = \varphi^-_2(w) / (w - \xi). \quad (20)$$

Разрешим равенства (18), (19) относительно  $\varphi_\nu$  и  $F_\nu$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(w) &= (1/2) [\varphi^+_1(w) + \varphi^+_2(w)] w^{-n_0}, & \varphi_2(w) &= (1/2) [\varphi^+_1(w) - \varphi^+_2(w)], \\ F_1(w) &= (1/2) [\varphi^-_1(w) + \varphi^-_2(w)] w^{-n_0}, & F_2(w) &= (1/2) [\varphi^-_1(w) - \varphi^-_2(w)]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Теперь найдем дополнительные условия, которым должны удовлетворять искомые функции  $\varphi^+_1$  и  $\varphi^-_1$  при решении системы (20). Они вытекают непосредственно из условий (8) и (14) с учетом (21) и формулируются так:

$$\left. \begin{aligned} 1) & \varphi^+_1 \text{ голоморфны при } |w| \leq 1, \text{ а } \varphi^-_1 \text{ — при } |w| \geq 1, \\ 2) & (\varphi^+_1 + \varphi^+_2) \text{ в точке } w = 0 \text{ имеет нуль кратности } n_0, \\ 3) & (\varphi^-_1 + \varphi^-_2) w^{-n_0} \text{ равна } -2g_1 \text{ при } w = \xi \text{ и равномерно} \\ & \text{ограничена при } |w| \rightarrow \infty, \\ 4) & (\varphi^-_1 - \varphi^-_2) \text{ равна } -2g_2 \text{ при } w = \xi \text{ и равномерно} \\ & \text{ограничена при } |w| \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Эти условия необходимые и достаточные; из них, в частности, следует, что  $\varphi^-_1$  и  $\varphi^-_2$  ведут себя как  $O(w^{n_0})$  при  $|w| \rightarrow \infty$ . (22a)

По существу переход от функций  $\varphi_\nu$ ,  $F_\nu$  к  $\varphi^+_1$ ,  $\varphi^-_1$  не привел к полностью независимым задачам для  $\varphi^+_1$ ,  $\varphi^-_1$  и  $\varphi^+_2$ ,  $\varphi^-_2$ . Действительно, вместо связанной системы (13) мы пришли к независимой (20), однако независимые добавочные условия (14) перешли при этом в связанные (22). Все же этот переход, как показано ниже, позволяет решить задачу до конца.

Произведем прежде всего факторизацию заданных функций  $G_1(w)$  и  $G_2(w)$ . Поскольку они (см. (17)) удовлетворяют соотношениям типа (15a) и на контуре  $|w| = 1$  отличны от нуля\*, то логарифмы их голоморфны

\* Это следует из физических соображений. Действительно, легко показать, что  $G_1(e^{i\gamma_0 l}) G_2(e^{i\gamma_0 l}) = 0$  есть характеристическое уравнение для постоянной распространения  $\gamma_0$  волны вдоль бесконечных двойных решеток, подобных рассматриваемым, и при наличии потерь в среде оно не может иметь вещественных корней  $\gamma_0 l$ .



на этом контуре. Поэтому можно, воспользовавшись стандартной методикой [2] факторизации, написать

$$G_1(w) = G^+_{1}(w)G^-_{1}(w), \quad G_2(w) = G^+_{2}(w)G^-_{2}(w). \quad (23)$$

Это каноническое представление, в котором  $G^+$ , голоморфны и не имеют нулей при  $|w| \leq 1$ , а  $G^-$ , — голоморфны и не имеют нулей при  $|w| \geq 1$  и стремятся к единице при  $|w| \rightarrow \infty$ . Они выражаются через интегралы по  $L$  [2]. Подставим (23) в (20) и запишем последние так:

$$\begin{aligned} (w - \xi)\varphi^+_{1}(w)G^+_{1}(w) &= \varphi^-_{1}(w) / G^-_{1}(w), \\ (w - \xi)\varphi^+_{2}(w)G^+_{2}(w) &= \varphi^-_{2}(w) / G^-_{2}(w). \end{aligned} \quad (24)$$

Левые части этих равенств голоморфны при  $|w| \leq 1$ , а правые — при  $|w| \geq 1$ ; следовательно, они представляют собой целые функции, являющиеся, вследствие условий (22а), полиномами степени  $n_0$ . Обозначив их буквами  $P^1_{n_0}$  и  $P^{(2)}_{n_0}$ , выразим через них искомые функции

$$\begin{aligned} \varphi^+_{\nu}(w) &= P^{(\nu)}_{n_0}(w) / (w - \xi)G^+_{\nu}(w), \quad \varphi^-_{\nu}(w) = G^-_{\nu}(w)P^{(\nu)}_{n_0}(w); \\ \nu &= 1, 2. \end{aligned} \quad (25)$$

Эти выражения удовлетворяют первому условию (22). По-видимому, всегда можно подобрать коэффициенты полиномов  $P^{(\nu)}_{n_0}$  так, чтобы выполнялись и все остальные условия (22). Действительно, второе из них эквивалентно обращению в нуль первых  $n_0$  членов при разложении  $\varphi^+_{1} + \varphi^+_{2}$  в ряд Маклорена по степеням  $w$ , третье сводится к равенству  $\varphi^-_{1} + \varphi^-_{2} = -2g_1\xi^{n_0}$  при  $w = \xi$  и, наконец, четвертое — к обращению в нуль первых  $n_0$  членов при разложении функции  $\varphi^-_{1} - \varphi^-_{2}$  в ряд по отрицательным степеням  $w$  и обращению самой функции в  $-2g_2$  при  $w = \xi$ . Т. е. необходимо удовлетворить всего  $2n_0 + 2$  требованиям. Последних как раз достаточно для определения всех  $2(n_0 + 1)$  коэффициентов полиномов  $P^1_{n_0}$  и  $P^{(2)}$ , которые находятся при этом из решения  $2n_0 + 2$  линейных алгебраических уравнений. Таким образом, система (14) решена.

#### 4. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД С РЕШЕТКАМИ

Рассмотрим подробнее прямоугольный волновод (случай 3), изображенный на рис. 2. Сечение волновода  $a \times b$ , где  $a > b$ . Пусть в волноводе может распространяться только одна волна  $H_{10}$ . Тогда если расстояние  $l$  между проводами решеток достаточно велико, например больше 0,2 длины волны  $\lambda$ , то при расчете наведенных сопротивлений можно пренебречь \* высшими типами волн и ограничиться основной волной. При этом

$$\left. \begin{aligned} Z^{11}_n &= \zeta e^{-i\gamma l|n|}, \quad n \neq 0; \quad \zeta = -\frac{120\pi k}{\gamma a} \cos^2 \frac{\pi d}{a}, \quad \gamma = \sqrt{k^2 - (\pi^2/a^2)}, \\ Z^{12}_n &= \zeta e^{-i\gamma l|n+n_0|}, \quad n \neq -n_0; \quad |e^{-i\gamma l}| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Формулы (7), (15), (17) позволяют теперь получить

$$\left. \begin{aligned} G_{11}(w) &= \zeta \left\{ \frac{e^{-i\gamma l}}{w - e^{-i\gamma l}} - \frac{w}{w - e^{i\gamma l}} \right\} + Z^{11}_0, \\ Q(w) &= G_{11}(w) - Z^{11}_0 + Z^{12}_{-n_0}, \quad G_2(w) = Z^{11}_0 - Z^{12}_{-n_0}, \\ G_1(w) &= 2\zeta \left\{ \frac{e^{-i\gamma l}}{w - e^{-i\gamma l}} - \frac{w}{w - e^{i\gamma l}} \right\} + Z^{11}_0 + Z^{12}_{-n_0}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

\* Исключение составляют наведенные сопротивления вибраторов, находящихся в одном сечении.

Факторизация функций  $G_\nu(w)$  проводится элементарно и дает

$$\left. \begin{aligned} G_1^+(w) &= \beta(w - w_2)(w - e^{i\gamma l})^{-1}, & G_2^+(w) &= \alpha, \\ G_1^-(w) &= (w - w_1)(w - e^{-i\gamma l})^{-1}, & G_2^-(w) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha = Z^{11}_0 - Z^{12}_{-n_0}, \quad \beta = Z^{11}_0 + Z^{12}_{-n_0} - 2\xi, \quad Z = (\beta / 2\xi) + 1, \quad (28a)$$

а  $w_1$  ( $|w_1| < 1$ ) и  $w_2$  ( $|w_2| > 1$ ) — корни уравнения

$$w^2 + 2w(e^{-i\gamma l} - Z \cos \gamma l)(Z - 1)^{-1} + 1 = 0. \quad (29)$$

Определим еще величины  $A_n^{(\nu)}$ , предполагая, что в волноводе, со стороны отрицательных  $x$ , на решетки падает волна  $H_{10}$ . В этом случае, при соответствующей нормировке падающего поля,

$$A_n^1 = e^{-i\gamma l n}, \quad A_n^{(2)} = e^{-i\gamma l(n-n_0)}. \quad (30)$$

Сравнивая эти выражения с формулой (11), найдем

$$g_1 = -\xi, \quad g_2 = -\xi^{n_0+1}, \quad \xi = e^{i\gamma l}, \quad |\xi| > 1. \quad (31)$$

Формулы (25), (28) и (31) позволяют написать решения уравнений (20) для рассматриваемого случая:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^+(w) &= P_{n_0}^1(w) / \beta(w - w_2), & \Phi_1^-(w) &= [(w - w_1) / (w - \xi^{-1})] P_{n_0}^1(w), \\ \Phi_2^+(w) &= P_{n_0}^{(2)}(w) / \alpha(w - \xi), & \Phi_2^-(w) &= P_{n_0}^{(2)}(w). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Для определения полиномов  $P_{n_0}^{(\nu)}(w)$  применим более простой, чем указанный в § 3, метод, пригодный, когда  $G_\nu(w)$  — дробно-рациональные функции. Из условий (22) с учетом (32) и (31) немедленно следует

$$\left. \begin{aligned} \alpha(w - \xi) P_{n_0}^1(w) + \beta(w - w_2) P_{n_0}^{(2)}(w) &= w^{n_0} P_1(w), \\ (w - w_1) P_{n_0}^1(w) - (w - \xi^{-1}) P_{n_0}^{(2)}(w) &= Q_1(w), \\ (\xi - w_1) P_{n_0}^1(\xi) - (\xi - \xi^{-1}) P_{n_0}^{(2)}(\xi) &= 2(\xi - \xi^{-1}) \xi^{n_0+1}, \\ (\xi - w_1) P_{n_0}^1(\xi) + (\xi - \xi^{-1}) P_{n_0}^{(2)}(\xi) &= 2(\xi - \xi^{-1}) \xi^{n_0+1}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Здесь  $P_1(w)$  и  $Q_1(w)$  — пока неопределенные полиномы первой степени. Разрешая первые два уравнения относительно  $P_{n_0}^{(\nu)}(w)$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} P_{n_0}^1(w) &= \frac{[w^{n_0}(w - \xi^{-1}) P_1(w) + \beta(w - w_2) Q_1(w)]}{[\alpha(w - \xi)(w - \xi^{-1}) + \beta(w - w_1)(w - w_2)]}, \\ P_{n_0}^{(2)}(w) &= \frac{[w^{n_0}(w - w_1) P_1(w) - \alpha(w - \xi) Q_1(w)]}{[\alpha(w - \xi)(w - \xi^{-1}) + \beta(w - w_1)(w - w_2)]}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Пусть  $w^0_1$  и  $w^0_2$  — корни знаменателя. Тогда правые части (34) будут полиномами, если  $w^0_{1,2}$  одновременно являются корнями обоих числителей. Для этого необходимо и достаточно выполнения равенств

$$(w^0_\nu)^{n_0} (w^0_\nu - \xi^{-1}) P_1(w^0_\nu) + \beta(w^0_\nu - w_2) Q_1(w^0_\nu) = 0; \quad \nu = 1, 2. \quad (35)$$

Неиспользованные пока третье и четвертое уравнения (33) можно преобразовать, учитывая первое и второе, к виду

$$P_1(\xi) = 0, \quad Q_1(\xi) = 4i\xi^{n_0+1} \sin \gamma l. \quad (36)$$

Четыре уравнения (35), (36) позволяют определить все четыре коэффи-

циента полиномов  $P_1(w)$  и  $Q_1(w)$ . Разрешая их, получим

$$P_1(w) = B(w - \xi), \quad Q_1(w) = c_1 w + c_0, \quad (37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{[(w_1^{n_0} - w_1)(w_1^{n_0})^{n_0} - (w_2^{n_0} - w_1)(w_2^{n_0})^{n_0}] B}{\alpha(w_1^{n_0} - w_2^{n_0})}, \\ c_0 &= \frac{[(w_2^{n_0} - w_1)(w_2^{n_0})^{n_0-1} - (w_1^{n_0} - w_1)(w_1^{n_0})^{n_0-1}] B}{\alpha(w_1^{n_0} - w_2^{n_0})}, \\ B &= \frac{4i\alpha\xi^{n_0+1}(w_1^{n_0} - w_2^{n_0}) \sin \gamma l}{\{(w_1^{n_0} - w_1)[\xi(w_1^{n_0})^{n_0} - (w_1^{n_0})^{n_0-1}] + (w_2^{n_0} - w_1)[(w_2^{n_0})^{n_0-1} - \xi(w_2^{n_0})^{n_0}]\}}. \end{aligned} \right\} \quad (37a)$$

Таким образом, полиномы (34), а значит и функции (32), полностью определены. Напишем еще окончательные выражения для  $\varphi_\nu(w)$ , используя формулы (21), (32) и (34):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(w) &= \frac{B}{2\alpha\beta(w - w_2)}, \\ \varphi_2(w) &= \frac{\{\alpha(w - \xi)(w - \xi^{-1}) - \beta(w - w_1)(w - w_2)\} w^{n_0} \varphi_1(w) + Q_1(w)}{[\alpha(w - \xi)(w - \xi^{-1}) + \beta(w - w_1)(w - w_2)]}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Теперь легко найти все характеристики рассматриваемой системы. Например, коэффициент отражения по основной волне в сечении  $x = -n_0 l$  волновода (см. рис. 2) выражается формулой

$$R = \zeta \xi^{-n_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} I_n^1 \xi^{-(n+n_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{(2)} \xi^{-n} \right\}$$

(падающая волна нормирована так, что ее электрический вектор при  $x = 0$  и  $y = \mp d$  равен единице (см. (30)). Учитывая вторую формулу (7), это выражение можно записать так:

$$R = \zeta \xi^{-n_0} \{ \xi^{-n_0} \varphi_1(\xi^{-1}) + \varphi_2(\xi^{-1}) \}.$$

Подставляя сюда вместо  $\varphi_\nu(\xi^{-1})$  их значения, взятые из (38), найдем

$$R = \zeta \xi^{-n_0} (c_1 \xi^{-1} + c_0) / \beta(\xi^{-1} - w_1)(\xi^{-1} - w_2). \quad (39)$$

Напишем еще выражение для токов  $I_n^{(\nu)}$  в проводах решеток. Для этого подставим (38) в (10) и произведем интегрирование:

$$\left. \begin{aligned} I_n^1 &= -\frac{B}{2\alpha\beta} w_2^{-(n+1)}, \quad n \geq 0; \quad I_n^{(2)} = -\frac{B}{2\alpha\beta} \frac{w_2^{n_0}}{w_2^{n+1}}, \quad n \geq n_0, \\ I_n^{(2)} &= \frac{B(w_1 - w_1^{n_0})(w_1^{n_0})^{n_0}}{\alpha(\alpha + \beta)(w_1 - w_2^{n_0})} \frac{1}{(w_1^{n_0})^{n+1}} + \frac{Q_1(w_2)}{(\alpha + \beta)(w_1 - w_2^{n_0})} \frac{1}{(w_2^{n_0})^{n+1}}, \quad n < n_0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

При выводе последней формулы предполагалось, что нумерация корней знаменателя (34) выбрана так, что  $|w_1^{n_0}| < 1$ , а  $|w_2^{n_0}| > 1$  (напомним, что  $\text{Im } k < 0$ , и только в окончательных формулах потерями можно пренебречь). Легко также сообразить, что произведение корней  $w_1^{n_0} w_2^{n_0} = 1$ , так

же как и  $w_1 w_2 = 1$ . Полученные формулы (40) имеют простой физический смысл. В области  $x \geq 0$  вдоль обеих решеток устанавливается бегущая

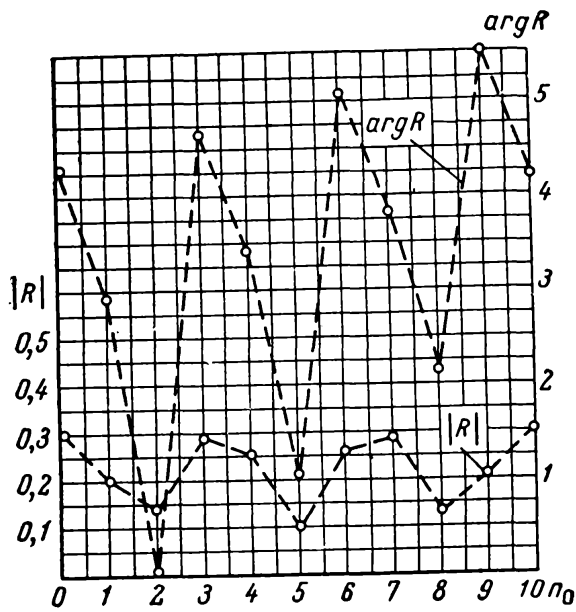


Рис. 3

в направлении положительных  $x$  волна, распространяющаяся с волновым числом, равным  $\text{Im } w_2 / il$  (если  $\text{Im } k = 0$ , оно равно  $\text{arg } w_2 / l$ ); при этом токи в проводах, расположенных в одном и том же сечении  $x = \text{const}$ , равны между собой.

В области  $-n_0 l \leq x \leq 0$ , где находятся только провода второй решетки, вдоль нее устанавливаются две бегущие волны — прямая и отраженная, определяемые соответственно вторым и первым членами второй формулы (40); обе с волновым числом  $\text{Im } w_2^0 / il$ . На рис. 3 приведены зависимости модуля и фазы коэффициента отражения  $R$  от числа проводов  $n_0$ , находящихся в области  $x < 0$  (рис. 2). Они подсчитаны по формуле (39) для следующих значений параметров:  $\lambda = 10 \text{ см}$ ,  $d =$

$= 0,25 a$ ,  $a = 7,2 \text{ см}$ ,  $r_0 = 0,1 \text{ см}$ ,  $l = 2,5 \text{ см}$ . Наведенные сопротивления  $Z_{10}^{11}$  и  $Z_{-n_0}^{12}$ , необходимые для расчета, определялись по формулам [3]

$$\left. \begin{array}{l} Z_{10}^{11} \\ Z_{-n_0}^{12} \end{array} \right\} = - \frac{120\pi ik}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \sin \frac{n\pi(0,5a-d)}{a} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{n\pi(0,5a+r_0-d)}{a} \\ \sin \frac{n\pi(0,5a+d)}{a} \end{array} \right\},$$

где  $\Gamma_n = \sqrt{(n^2\pi^2/a^2) - k^2}$ ;  $\Gamma_1 = i\gamma$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Случай, рассмотренный в последнем параграфе, представляет методический интерес, так как хорошо иллюстрирует изложенную в первых трех параграфах методику решения парных функциональных уравнений типа Винера — Хопфа (или, что то же самое, Римана — Гильберта), коэффициенты которых удовлетворяют условиям (9), (15). Данный при этом метод определения полиномов  $P^{(v)}_{n_0}(w)$  ( $v = 1, 2$ ) степени  $n_0$  сводит последнюю задачу к нахождению двух полиномов первой степени (т. е. к четырем линейным алгебраическим уравнениям) при любом значении  $n_0$ . Этот же прием может быть применен для более интересного случая, когда учитывается конечное число высших типов волн в волноводе. Если  $m_0$  — число всех типов волн, которые необходимо учесть при определении наведенных сопротивлений  $Z^{vu}_n$ , то полиномы  $P^{(v)}_{n_0}(w)$  выражаются через два полинома степени  $m_0$ . Для определения последних нужно решить  $2(m_0 + 1)$  линейных алгебраических уравнений. Поэтому изложенный в § 4 метод определения  $P^{(v)}_n(w)$  следует применять только при  $n_0 > m_0$ . При  $n_0 < m_0$  предпочтительнее прямой метод, указанный в конце третьего параграфа, пригодный также для  $m_0 = \infty$ . В случае континуальных задач парные функциональные уравнения, аналогичные рассмотренным здесь, имеют место, например, для задач дифракции на двух параллельных полуплоскостях, смещенных друг относительно друга. При этом коэффициенты

$G_{\nu\mu}(w)$  удовлетворяют условиям типа

$$G_{11}(w) = G_{22}(w), \quad G_{12}(w) = G_{21}(-w), \quad G_{12}(w) = e^{p(w)}Q(w),$$

где  $Q(w)$  — четная функция, а  $p(w)$  — нечетная целая функция. Роль контура  $|w| = 1$  играет теперь действительная ось  $\text{Im } w = 0$ . Прием, подобным использованному выше, парные связанные функциональные уравнения сводятся к двум независимым. Однако вместо полиномов  $P^{(\nu)}_{n_0}(w)$  в решение войдут две трансцендентные целые функции, определение которых значительно сложнее.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 7, 882.
2. Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, ГТИ, 1954.
3. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, 1954.

Поступила в редакцию  
23 I 1964

---

## РАСЧЕТ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ВОЛН В ЦЕПОЧКАХ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ \*

*Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон*

При помощи обобщенного метода наведенных магнитодвижущих сил (мдс) получено характеристическое уравнение для определения фазовой скорости волн в цепочках связанных резонаторов с произвольным числом неодинаковых резонаторов в пределах одного периода цепочки. Получены расчетные формулы для собственных и наведенных проводимостей, входящих в характеристическое уравнение. Показано, что решение этого уравнения стационарно относительно вариаций поля на отверстиях связи. В случае одночленной аппроксимации поля в отверстиях даны явные формулы для постоянной распространения.

### ВВЕДЕНИЕ

На практике часто применяются периодические структуры в виде цепочек резонаторов, связанных отверстиями в их торцовых стенках. Простейшим примером такой системы является волновод с металлическими диафрагмами. Если диафрагмы одинаковы, эквидистантно расположены, а их толщиной можно пренебречь, то все резонаторы оказываются идентичными, и в периоде структуры, таким образом, содержится по одному резонатору. Если же учитывать толщину диафрагм, то структура будет состоять из резонаторов двух типов, отличающихся между собой размерами. В общем случае в пределах одного периода структуры может содержаться несколько неодинаковых резонаторов разного размера.

Расчет фазовой скорости волн, распространяющихся в цепочках связанных резонаторов и диафрагмированных волноводах, имеет большое практическое значение и неоднократно рассматривался различными методами [2—11], критический обзор которых дан в работе [20]. В настоящей работе для решения этой задачи применяется метод наведенных мдс, поскольку он дает возможность получить стационарное выражение для фазовой скорости и сравнительно простые расчетные формулы. В случае тонких металлических диафрагм малой высоты (когда для токов на их поверхностях применимы простые аппроксимации) следует использовать метод наведенных эдс. При этом для определения фазовой скорости получим такое же характеристическое уравнение, как и в случае искусственного диэлектрика (см. формулы (3) и (15) в [12] и (3) — (7) в [13]). В случае относительно высоких и толстых диафрагм проще вводить аппроксимацию для поля  $\vec{E}$  в отверстиях диафрагм и пользоваться методом наведенных мдс. Если же резонаторы цепочки неодинаковы по размерам в плоскости, поперечной к оси волновода, то применение метода наведенных эдс приводит к трудностям, так как при этом нельзя свести структуру к периодической решетке простых излучателей, расположенных

\* Данная статья представляет собой переработанный текст доклада, прочитанного на юбилейной научно-технической конференции ГКРЭ в 1958 г. и опубликованного в Трудах конференции [1]. Появившаяся с тех пор литература показывает, что результаты настоящей работы не потеряли своего значения и сейчас.

внутри регулярного цилиндрического волновода; при рассмотрении же подобных конфигураций методом наведенных мдс не возникает никаких осложнений, как это будет видно из дальнейшего изложения.

### 1. ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ НАВЕДЕННЫХ МДС

В линейных периодических структурах имеет место квазипериодический процесс, причем на основании теоремы Флоке любая составляющая поля  $A$  удовлетворяет условию типа

$$A(z + d) = A(z)c^{-ihd}, \quad (1)$$

где  $z$  — координата вдоль оси системы;  $h$  — фазовая постоянная в направлении этой оси;  $d$  — период структуры. Отсюда следует, что достаточно рассматривать поле в пределах одного периода  $d$ .

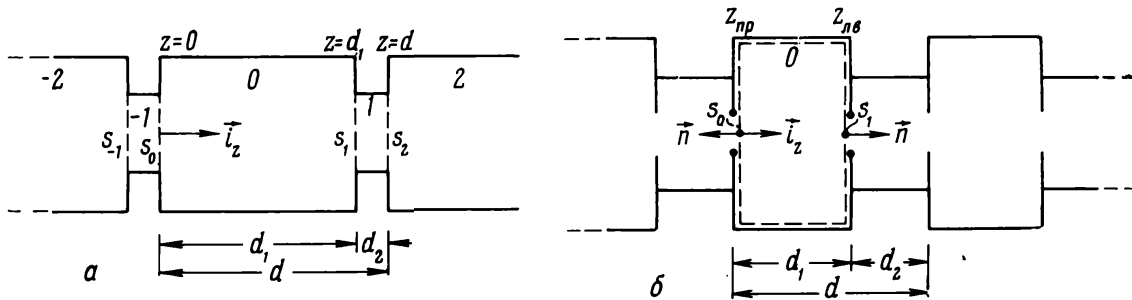


Рис. 1. Периодические структуры из резонаторов двух типов:  
а — диафрагмированный волновод с диафрагмами конечной толщины; б — цепочка резонаторов

Рассмотрим прежде всего периодическую структуру из резонаторов двух типов (рис. 1). Поместим начало координат в плоскости одного из отверстий и пронумеруем отверстия так, как показано на рис. 1. Поскольку распределения касательной составляющей  $\vec{e} \equiv \vec{E}_t$  электрического поля в плоскостях отверстий заранее неизвестны, то зададим их в виде суперпозиций подходящих вещественных функций  $\psi_n$ :

$$\vec{e} = \begin{cases} \vec{e}_0 = \sum_{n=1}^N V_n \vec{\psi}_n \text{ на } s_0, \\ \vec{e}_1 = \sum_{n=1}^N U_n \vec{\psi}_n \text{ на } s_1, \end{cases} \quad (2)$$

где  $V_n$ ,  $U_n$  — неизвестные амплитуды, в общем случае комплексные. Величина  $\vec{e}$  на остальных отверстиях определяется при этом в соответствии с условием (1). Задав  $\vec{E}_t$  на поверхностях  $s_m$  и полагая на металле  $\vec{E}_m = 0$ , мы сводим задачу нахождения поля внутри отдельного резонатора цепочки к первой граничной задаче электродинамики [14]. Магнитный вектор  $\vec{H}$  поля внутри резонаторов можно формально записать в виде

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{H}_{2m} = L_0 \{ \vec{e}_0 e^{-ihmd}; \vec{e}_1 e^{-ihmd} \} \text{ для резонаторов номеров } 2m, \\ \vec{H}_{2m+1} = L_1 \{ \vec{e}_1 e^{-ihmd}; \vec{e}_0 e^{-ih(m+1)d} \} \text{ для резонаторов номеров } 2m + 1. \end{cases} \quad (3a)$$

Здесь  $L_0\{ \}$  и  $L_1\{ \}$  — линейные (по обоим аргументам) операторы,

определяемые в результате решения указанной граничной задачи.  $L_0\{\vec{e}_0; \vec{e}_1\}$ , например, численно равен магнитному полю в нулевом резонаторе, создаваемому сторонними эдс  $\vec{E}_0^{ct} = -\vec{e}_0$  и  $\vec{E}_1^{ct} = -\vec{e}_1$ , распределенными на отверстиях  $s_0$  и  $s_1$ , которые при этом считаются металлизированными. Учитывая линейность этих операторов и формулу (2), перепишем (3а) в виде

$$\begin{aligned} \vec{H}_{2m} &= e^{-ihmd} \sum_{n=1}^N V_n L_0 \{\vec{\psi}_n; 0\} + e^{-ihmd} \sum_{n=1}^N U_n L_0 \{0; \vec{\psi}_n\}, \\ \vec{H}_{2m+1} &= e^{-ihmd} \sum_{n=1}^N U_n L_1 \{\vec{\psi}_n; 0\} + e^{-ih(m+1)d} \sum_{n=1}^N V_n L_1 \{0; \vec{\psi}_n\}. \end{aligned} \quad (3б)$$

Постоянные  $V_n, U_n, h$  должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия непрерывности касательной составляющей  $\vec{H}$  при переходе через плоскости отверстий  $s_0$  и  $s_1$ ; аналогичные условия для других отверстий при этом будут выполняться автоматически вследствие (1).

Указанные условия непрерывности  $\vec{H}$  на поверхностях  $s_0$  и  $s_1$

$$\vec{H}_t^- = \vec{H}_t^+ \text{ на } s_0, \quad \vec{H}_t^- = \vec{H}_t^+ \text{ на } s_1 \quad (4)$$

представляют собой интегродифференциальные уравнения, которые принципиально позволяют определить не только  $h$ , но и  $\vec{E}_t$  на  $s_0$  и  $s_1$  (знаками минус и плюс обозначены предельные значения  $\vec{H}$  при стремлении к плоскости отверстия, соответственно, слева и справа). При задании  $\vec{E}$  в виде (2) уравнения (4) можно свести к системе  $2N$  линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд  $V_1 \dots V_N, U_1 \dots U_N$ . Для получения этих уравнений умножим (4) векторно на  $\vec{\psi}_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) и проинтегрируем по соответствующим поверхностям:

$$\int_{s_0} [\vec{\psi}_n (\vec{H}_0^+ - \vec{H}_{-1}^-)] \vec{i}_z ds = 0, \quad \int_{s_1} [\vec{\psi}_n (\vec{H}_1^+ - \vec{H}_0^-)] \vec{i}_z ds = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Эти уравнения являются основными в методе наведенных мдс. Из формул (3) следует, что на  $s_0$

$$\begin{aligned} \vec{H}_0^+ &= \sum_{n=1}^N V_n L_0 \{\vec{\psi}_n; 0\} + \sum_{n=1}^N U_n L_0 \{0; \vec{\psi}_n\}, \\ \vec{H}_{-1}^- &= e^{-ihd} \sum_{n=1}^N U_n L_1 \{\vec{\psi}_n; 0\} + \sum_{n=1}^N V_n L_1 \{0; \vec{\psi}_n\}, \end{aligned} \quad (6)$$

а на  $s_1$

$$\begin{aligned} \vec{H}_1^+ &= \sum_{n=1}^N U_n L_1 \{\vec{\psi}_n; 0\} + e^{-ihd} \sum_{n=1}^N V_n L_1 \{0; \vec{\psi}_n\}; \\ \vec{H}_0^- &= \sum_{n=1}^N V_n L_0 \{\vec{\psi}_n; 0\} + \sum_{n=1}^N U_n L_0 \{0; \vec{\psi}_n\}. \end{aligned}$$

Подставляя в (5) величины  $\vec{H}^-$  из (6), найдем искомые алгебраические уравнения:

$$\sum_{n=1}^N \{V_n (Y_{10; v_n} + Y_{12; v_n} e^{-ihd}) + U_n Y_{11; v_n}\} = 0, \quad (7)$$



$$\sum_{n=1}^N \{V_n Y_{00; v_n} + U_n (Y_{01; v_n} + Y_{0, -1; v_n} e^{ihd})\} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, N,$$

где использованы обозначения

$$Y_{\alpha\beta; v_n} = \begin{cases} \int_{s_\alpha} [\vec{\psi}_v L_{\alpha'+1} \{0; \vec{\psi}_n\}] \vec{i}_z ds, & \alpha < \beta; \alpha = 0, 1; \beta = \alpha \pm 1; \\ - \int_{s_\alpha} [\vec{\psi}_v L_{\alpha'} \{\vec{\psi}_n; 0\}] \vec{i}_z ds, & \alpha > \beta; \alpha' = \begin{cases} 0, & \alpha - \text{четное,} \\ 1, & \alpha - \text{нечетное;} \end{cases} \end{cases} \quad (8a)$$

$$Y_{\alpha\alpha; v_n} = Y_{\alpha\alpha; v_n}^- + Y_{\alpha\alpha; v_n}^+, \quad Y_{\alpha\alpha; v_n}^- = - \int_{s_\alpha} [\vec{\psi}_v L_{\alpha'+1} \{0; \vec{\psi}_n\}] \vec{i}_z ds;$$

$$Y_{\alpha\alpha; v_n}^+ = \int_{s_\alpha} [\vec{\psi}_v L_{\alpha'} \{\vec{\psi}_n; 0\}] \vec{i}_z ds. \quad (8b)$$

Физический смысл этих величин следующий:  $Y_{\alpha\beta; v_n}$  — проводимость, введенная  $n$ -м распределением на  $s_\beta$  на  $v$ -е распределение на  $s_\alpha$ ;  $Y_{\alpha\alpha; v_n}^\pm$  — правые ( $Y^+$ ) и левые ( $Y^-$ ) — взаимные проводимости распределений номеров  $v$  и  $n$  на одном и том же отверстии ( $s_\alpha$ ). Нетрудно убедиться, что эти проводимости удовлетворяют соотношениям:

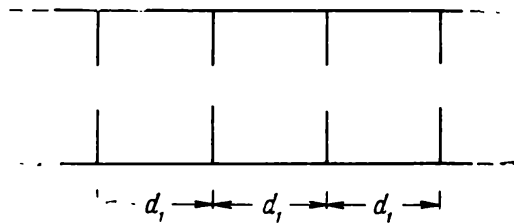
$$\text{взаимности } Y_{\alpha\beta; v_n} = Y_{\beta\alpha; n v}, \quad (9a)$$

$$\text{периодичности } Y_{\alpha\beta; v_n} = Y_{\alpha\pm 2, \beta\pm 2; v_n} \quad (9b)$$

$$\text{и симметрии } Y_{\alpha\alpha; v_n}^- = Y_{\alpha\pm 1, \alpha\pm 1; v_n}^+$$

$$Y_{\alpha\alpha; v_n}^+ = Y_{\alpha\pm 1, \alpha\pm 1; v_n}^-, \quad Y_{\alpha\alpha; v_n} = Y_{\beta\beta; v_n}. \quad (9b)$$

Рис. 2. Дифрагмированный волновод с бесконечно тонкими диафрагмами



Матрица  $A$  коэффициентов уравнений (7) может быть записана с учетом (9) в виде

$$A = \begin{vmatrix} Y_{10} + e^{-ihd} Y_{-10}; & Y_{00} \\ Y_{00}; & Y_{10} + e^{ihd} Y_{-10} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где  $Y_{\alpha\beta}$  означают, в свою очередь, матрицы проводимостей

$$Y_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} Y_{\alpha\beta; 11} & \cdots & Y_{\alpha\beta; 1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{\alpha\beta; N1} & \cdots & Y_{\alpha\beta; NN} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Система линейных однородных уравнений (7) имеет нетривиальные решения при условии обращения в нуль детерминанта матрицы  $A$ :

$$\text{Det } A = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) и есть искомое характеристическое уравнение, определяющее постоянную распространения  $h$ . Характеристическое уравнение в случае бесконечно тонких диафрагм легко получить из (7), если положить в них, в соответствии с рис. 2,  $Y_{10; v_n} = Y_{12; v_n} = Y_{0, -1; v_n}$ ,  $U_n = V_n e^{-ihd/2}$ ,  $d = 2d_1$ :

$$\text{Det } A = 0; \quad A \equiv Y_{00} + 2 \cos hd_1 Y_{10}. \quad (13)$$

## 2. ОБОБЩЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ РЕЗОНАТОРОВ

Характеристическое уравнение (12) легко может быть обобщено на случай цепочки связанных резонаторов, период которой содержит произвольное число  $M + 1$  вообще неодинаковых резонаторов (см. рис. 3). При этом касательные составляющие  $\vec{e} = \vec{E}_t$  электрического поля в отверстиях связи следует, очевидно, записать в виде

$$\vec{e}_m = \sum_{n=1}^N V_{mn} \vec{\psi}_{mn} \text{ на } s_m, m = 0, 1, \dots, M, \quad (14)$$

а уравнения (5) метода наведенных мдс — в виде

$$\int_{s_m} [\vec{\psi}_{mn} (\vec{H}_m^+ - \vec{H}_{m-1}^-)] \vec{i}_z ds = 0; n = 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M. \quad (15)$$

Векторы  $\vec{H}_m^+, \vec{H}_m^-$  являются линейными операторами от  $\vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}$  и могут быть найдены путем решения первой граничной задачи электродинамики

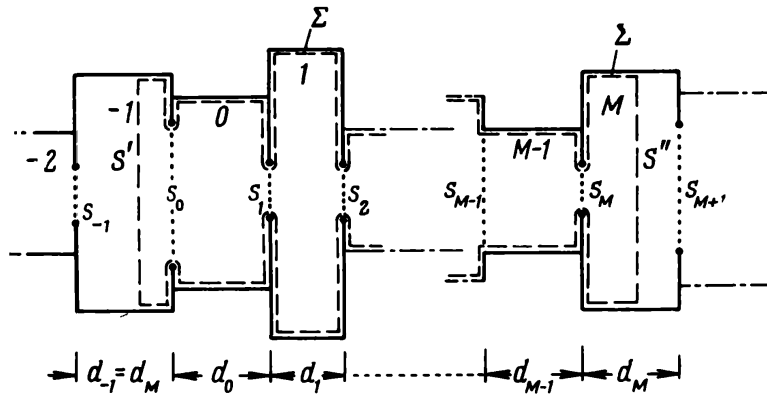


Рис. 3. Цепочка резонаторов с  $M + 1$  неодинаковыми резонаторами в одном периоде

для соответствующих резонаторов. Было бы нетрудно выписать для них выражения, аналогичные (3) и (6). Однако в этом нет необходимости, так как искомую систему алгебраических уравнений, получающуюся при подстановке (14) в (15), легко выписать сразу, по аналогии с (7), учитывая лишь, что в силу условий периодичности (1)  $\vec{e}_{-1} = e^{ihd} \vec{e}_M; \vec{e}_{M+1} = e^{-ihd} \vec{e}_0$ . Она имеет вид

$$\sum_{n=1}^N \{Y_{00}; v_n V_{0n} + Y_{01}; v_n V_{1n} + e^{ihd} Y_{0,-1}; v_n V_{Mn}\} = 0; \quad v = 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{n=1}^N \{Y_{k, k-1}; v_n V_{k-1, n} + Y_{kk}; v_n V_{kn} + Y_{k, k+1}; v_n V_{k+1, n}\} = 0;$$

$$v = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, M - 1, \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^N \{e^{-ihd} Y_{-10}; v_n V_{0n} + Y_{M, M-1}; v_n V_{M-1, n} + Y_{MM}; v_n V_{Mn}\} = 0;$$

$$v = 1, \dots, N.$$

Система уравнений (16) распадается на три группы. Первая и третья состоят из  $N$  уравнений каждая (по числу членов ряда в формуле (14)) и

описывают, соответственно, взаимодействие первого и последнего отверстий одного периода цепочки с двумя соседними (слева и справа). Вторая группа состоит из  $N(M - 1)$  уравнений и описывает взаимодействие каждого внутреннего отверстия одного периода с двумя соседними. Характеристическое уравнение для определения постоянной распространения имеет вид (12), где матрица  $A$  коэффициентов системы однородных уравнений (16) записывается в виде

$$A = \begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e^{ihd} Y_{0,-1} \\ Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Y_{M-1; M-2} & Y_{M-1; M-1} & Y_{M-1; M} \\ e^{-ihd} Y_{10} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Y_{M; M-1} & Y_{MM} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Здесь  $Y_{\alpha\beta}$  — матрица проводимостей вида (11), характеризующая взаимодействие между гармониками  $\psi_n$  (см. формулу (14)) на отверстиях с индексами  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\beta = \alpha \mp 1, \alpha$ ). Отметим, что проводимости  $Y_{\alpha\beta; \nu n}$  выражаются прежними формулами (8) и удовлетворяют соотношениям взаимности (9а) и периодичности:

$$Y_{\alpha\beta; \nu n} = Y_{\alpha\pm(M+1), \beta\pm(M+1); \nu n}. \quad (18)$$

### 3. ОДНОЧЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛЯ В ОТВЕРСТИЯХ

В тех случаях, когда характер распределения поля в отверстиях примерно известен (из экспериментальных или интуитивных соображений), рассматриваемая задача может быть сильно упрощена. Действительно, при этом можно аппроксимировать  $\vec{E}$  на каждом отверстии только одной функцией, положив в формуле (14)  $N = 1$ . Характеристическое уравнение, получаемое из (12) и (17), примет вид

$$\begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e^{ihd} Y_{0,-1} \\ Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Y_{M-1; M-2} & Y_{M-1; M-1} & Y_{M-1; M} \\ e^{-ihd} Y_{-10} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Y_{M; M-1} & Y_{MM} \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

где для сокращения записи положено  $Y_{\alpha\beta; 11} = Y_{\alpha\beta}$ . Это уравнение легко может быть решено, так как неизвестная  $h$  входит только в два элемента определителя:

$$\cos hd = (-1)^{M-1} (Y_{00}A_{00} - Y_{01}Y_{10}A_{01; 10} - Y_{0,-1};_{-10}A_{0,-1; -10}) / 2Y_{-10}Y_{01}Y_{12}Y_{23} \dots Y_{M-1; M}, \quad (20)$$

где  $A_{00}, A_{01; 10}, A_{0,-1; -10}$  — миноры детерминанта (19), получающиеся вычеркиванием соответствующих строк и столбцов. В частном случае обычного диафрагмированного волновода с диафрагмами конечной толщины (рис. 1), когда в пределах одного периода содержатся два резонатора ( $M = 1$ ), выражение (20) принимает особенно простой вид. Действительно, при этом  $A_{01; 10} = A_{0,-1; -10} = 1, A_{00} = Y_{11}, Y_{11} = Y_{00}$  (последнее — в силу симметрии) и

$$\cos hd = (Y_{00}^2 - Y_{10}^2 - Y_{-10}) / 2Y_{10} Y_{-10}. \quad (21)$$

В случае бесконечно тонких диафрагм в периоде содержится лишь один резонатор ( $M = 0$ ),  $A_{01; 10} = A_{0, -1; -10} = 0$ ,  $A_{00} = 1$ , и формула (20) запишется так

$$\cos hd = -Y_{00} / 2Y_{10} \text{ или } \cos hd = -Y_{00}^+ / Y_{10}. \quad (22)$$

Можно также получить (22) из (21), переписав (21) в виде

$$\begin{aligned} \cos hd = -1 + \frac{(Y_{00}^+ - Y_{10}) + (Y_{00}^- + Y_{-10})}{Y_{10}} \times \\ \times \frac{(Y_{00}^+ + Y_{10}) + (Y_{00}^- - Y_{-10})}{2Y_{-10}} \end{aligned} \quad (23)$$

и осуществив в (23) предельный переход  $d = d_1 + d_2 \rightarrow d_1$  ( $d_2$  — толщина диафрагмы) с учетом того, что при этом  $|Y_{-10}|, |Y_{00}^-| \rightarrow \infty$ ,  $Y_{00}^- / Y_{-10} \rightarrow -1$ . Отметим, что расчет поправок к фазовой скорости, обусловленных толщиной диафрагм, если она мала, целесообразно производить по формуле (23).

#### 4. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРОВОДИМОСТЕЙ

Для нахождения фазовой постоянной из уравнений типа (12) необходимо знать проводимости  $Y_{\alpha\beta; \nu n}$ . Для их определения следует, прежде всего, найти поля, возбуждаемые в одиночных резонаторах (ячейках) цепочки при металлизации обоих отверстий связи и распределении на одном из них изнутри сторонней эдс  $E^{ст} = -\vec{e}$ , или, что эквивалентно, поверхностного магнитного тока  $\vec{K}_\mu = [\vec{E}^{ст} \vec{n}]$  ( $\vec{n}$  — внешняя нормаль к поверхности рассматриваемого резонатора). Поле в таком резонаторе, как известно (см. [15] и [16]), можно представить в виде суперпозиции либо собственных колебаний резонатора, либо собственных волн волновода (отрезком которого является резонатор). При этом собственные ( $Y_{\alpha\alpha}^\pm; \nu n$ ), и наведенные ( $Y_{\alpha\beta; \nu n}$ ) проводимости представляются в виде сумм парциальных проводимостей, обусловленных отдельными колебаниями резонатора или волнами волновода, т. е. (см. [16], стр. 308)

$$Y_{\alpha\alpha}^\pm; \nu n = \sum_\mu y_{\mu; \nu n}^{(\pm\alpha)}, \quad Y_{\alpha\beta; \nu n} = \sum_\mu y_{\mu; \nu n}^{(\alpha\beta)} \quad (24)$$

где  $\mu$  — индекс типа колебания (волны), а  $(\pm\alpha)$  означает право-(+) и лево-(−) стороннюю собственную проводимость отверстия номера  $\alpha$ .

Приведем вывод расчетных формул для парциальных проводимостей, используя представление полей в виде собственных волн короткозамкнутого волновода, при котором получают более компактные формулы. Можно показать (см. [16], стр. 317), что поле, возбуждаемое отверстием в правом (относительно этого отверстия) резонаторе (см. рис. 1), представимо в виде

$$\begin{aligned} (\vec{E}, \vec{H})_1 = \sum_\mu A_\mu \{(\vec{E}_\mu, \vec{H}_\mu) + \Gamma_\mu (\vec{E}_{-\mu}, \vec{H}_{-\mu})\}, \\ A_\mu = -\frac{1}{(1 - \Gamma_\mu \Gamma_{-\mu}) N_\mu} \int_s [\vec{e} (\vec{H}_{-\mu} + \Gamma_{-\mu} \vec{H}_\mu)] \vec{n} ds, \\ N_\mu = \int_{S_\perp} \{[\vec{E}_\mu \vec{H}_{-\mu}] - [\vec{E}_{-\mu} \vec{H}_\mu]\} \vec{i}_z ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\vec{e}$  — поле в отверстии;  $\vec{E}_\mu, \vec{H}_\mu$  — распространяющаяся в сторону  $z > 0$  волна (индекса  $\mu > 0$ ) бесконечного волновода того же поперечного сечения, что и у рассматриваемого резонатора; индексами ( $-\mu$ ) отмечены аналогичные волны, распространяющиеся в сторону  $z < 0$ ;  $\Gamma_\mu, \Gamma_{-\mu}$  — коэффициенты отражения соответствующих волн от правой и левой торцовых стенок резонатора при условии металлизации отверстий, реально имеющих в этих стенках;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к объему резонатора (на  $s \vec{n} = -\vec{i}_z$ );  $S_\perp$  — поперечное сечение резонатора. Для левого резонатора имеют место аналогичные формулы:

$$(\vec{E}, \vec{H})_2 = \sum_{\mu} B_{\mu} \{(\vec{E}'_{-\mu}, \vec{H}'_{-\mu}) + \Gamma'_{-\mu}(\vec{E}'_{\mu}, \vec{H}'_{\mu})\}, \quad (26)$$

$$B_{\mu} = -\frac{1}{(1 - \Gamma'_{\mu}\Gamma'_{-\mu}) N_{\mu s}} \int [\vec{e}(\vec{H}'_{\mu} + \Gamma'_{\mu}\vec{H}'_{-\mu})] \vec{n} ds, \\ N'_{\mu} = \int_{S_{\perp}} \{[\vec{E}'_{\mu}\vec{H}'_{-\mu}] - [\vec{E}'_{-\mu}\vec{H}'_{\mu}]\} \vec{i}_z ds \quad (27)$$

(для левого резонатора на  $s \vec{n} = \vec{i}_z$ ).

Рассмотрим теперь одну из ячеек цепочки резонаторов, ограниченную отверстиями  $s_0$  и  $s_1$ . В общем случае  $s_0$  и  $s_1$  неодинаковы. Используя формулы (8), (24) — (26), найдем для парциальной проводимости, обусловленной волной типа  $\mu$

$$y_{\mu; \nu n}^{(01)} = y_{\mu; \nu n}^{(10)} = -\frac{1}{(1 - \Gamma_{\mu}\Gamma_{-\mu}) N_{\mu}} \int_{s_0} [\vec{\psi}_{0\nu}(\vec{H}_{-\mu} + \Gamma_{-\mu}\vec{H}_{\mu})] \vec{i}_z ds \cdot \\ \cdot \int_{s_1} [\vec{\psi}_{1n}(\vec{H}_{\mu} + \Gamma_{\mu}\vec{H}_{-\mu})] \vec{i}_z ds. \quad (28a)$$

Для правосторонней парциальной собственной проводимости отверстия  $s_0$  найдем

$$y_{\mu; \nu n}^{(+0)} = \frac{1}{(1 - \Gamma_{\mu}\Gamma_{-\mu}) N_{\mu}} \int_{s_0} [\vec{\psi}_{0\nu}(\vec{H}_{-\mu} + \Gamma_{-\mu}\vec{H}_{\mu})] \vec{i}_z ds \cdot \int_{s_0} [\vec{\psi}_{0n}(\vec{H}_{\mu} + \Gamma_{\mu}\vec{H}_{-\mu})] \vec{i}_z ds. \quad (28b)$$

Для левосторонней парциальной собственной проводимости отверстия  $s_1$  имеем, очевидно, формулу, аналогичную (28б), с заменой  $s_0$  на  $s_1$  и  $\vec{\psi}_0$  на  $\vec{\psi}_1$ . Формулы (28) можно упростить, поскольку для поперечных (т. е. лежащих в поперечных плоскостях  $S_\perp$ ) компонент  $H_\perp$  волн волновода справедливо соотношение

$$(\vec{H}_{-\mu})_\perp = -(\vec{H}_{\mu})_\perp e^{2i\gamma_{\mu}z} \quad (29)$$

( $\gamma_{\mu}$  — постоянная распространения волны индекса  $\mu$ ). Кроме того, поскольку отверстия в торцовых стенках металлизированы,

$$\Gamma_{\mu} = -e^{-2i\gamma_{\mu}z_{\text{пр}}}, \quad \Gamma_{-\mu} = -e^{+2i\gamma_{\mu}z_{\text{лв}}}, \quad \Gamma_{\mu}\Gamma_{-\mu} = e^{-2i\gamma_{\mu}d_1},$$

где  $z_{\text{пр}}, z_{\text{лв}}$  — координаты правого и левого торца;  $d_1 = z_{\text{пр}} - z_{\text{лв}}$  — длина

резонатора. При этом получим, помещая начало отсчета  $z$  на торце  $s_0$ :

$$y_{\mu; \nu n}^{(+0)} = \frac{2i \operatorname{ctg} \gamma_{\mu} L}{N_{\mu}} f_{\mu\nu}^{(0)} f_{\mu n}^{(0)}, \quad y_{\mu; \nu n}^{(01)} = y_{\mu; \nu n}^{(10)} = -\frac{2i \operatorname{csc} \gamma_{\mu} L}{N_{\mu}} f_{\mu\nu}^{(0)} f_{\mu n}^{(1)}, \quad (30)$$

$$y_{\mu; \nu n}^{(-1)} = \frac{2i \operatorname{ctg} \gamma_{\mu} L}{N_{\mu}} f_{\mu\nu}^{(1)} f_{\mu n}^{(1)}, \quad f_{\mu\nu}^{(0)} = \int_{s_0} [\vec{\psi}_{0\nu} \vec{H}_{\perp\mu}] \vec{i}_z ds, \quad f_{\mu n}^{(1)} = \int_{s_1} [\vec{\psi}_{1n} \vec{H}_{\perp\mu}] \vec{i}_z ds$$

(в формулу для  $f_{\mu n}^{(1)}$  подставляется значение  $\vec{H}_{\perp\mu}$ , взятое для  $z = 0$ ). Представляя поля при помощи однокомпонентных электрического и магнитного векторов Герца:

$$\vec{\Pi}_{\mu}^{(E, H)} = \Phi_{\mu}^{(E, H)}(x_1, x_2) e^{-i\gamma_{\mu}^{(E, H)} z} \vec{i}_z, \quad (31)$$

имеем для  $E$ -волн

$$N_{\mu}^{(E)} = 2k\gamma_{\mu}^{(E)} [\kappa_{\mu}^{(E)}]^2 \frac{1}{Z_0} \int_{S_{\perp}} [\Phi_{\mu}^{(E)}]^2 ds, \quad i_{\mu n}^{(m)} = i \frac{k}{Z_0} \int_{s_m} \vec{\psi}_{mn} \nabla_{\perp} \Phi_{\mu}^{(E)} ds, \quad (32)$$

для  $H$ -волн

$$N_{\mu}^{(H)} = 2k\gamma_{\mu}^{(H)} [\kappa_{\mu}^{(H)}]^2 Z_0 \int_{S_{\perp}} [\Phi_{\mu}^{(H)}]^2 ds, \quad f_{\mu n}^{(m)} = i\gamma_{\mu}^{(H)} \int_{s_m} [\vec{\psi}_{mn} \nabla_{\perp} \Phi_{\mu}^{(H)}] \vec{i}_z ds,$$

где  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,  $\Phi_{\mu}^{(E, H)}$  и  $\kappa_{\mu}^{(E, H)}$  — собственные функции и собственные значения соответствующих мембранных задач. Для прямоугольного волновода, например,

$$\kappa_{\mu}^{(E)} = \kappa_{\mu}^{(H)} = \kappa_{lp} = \pi \sqrt{(l/a)^2 + (p/b)^2}, \quad \Phi_{lp}^{(E)} = \sin \kappa_{l_0} x \sin \kappa_{0p} y,$$

$$\Phi_{lp}^{(H)} = \cos \kappa_{l_0} x \cos \kappa_{0p} y \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

( $a, b$  — размеры стенок волновода; индекс  $\mu$  заменен двумя индексами  $lp$ ). Полагая  $\vec{\psi}_{mn} = \psi_{mn} \vec{i}_y$ , найдем суммарную парциальную проводимость, обусловленную  $E$ - и  $H$ -волнами одних и тех же индексов  $lp$ , в виде

$$y_{lp; \nu n}^{(+0)} = -iB_{lp} \operatorname{ctg} \gamma_{lp} d_1 \Phi_{lp; \nu}^{(0)} \Phi_{lp; n}^{(0)}; \quad y_{lp; \nu n}^{(01)} = iB_{lp} \operatorname{csc} \gamma_{lp} d_1 \Phi_{lp; \nu}^{(0)} \Phi_{lp; n}^{(1)}; \quad (33)$$

$$\Phi_{lp; n}^{(m)} = \int_{s_m} \psi_{mn} \sin \kappa_{l_0} x \cos \kappa_{0p} y ds; \quad B_{lp} = 4(k^2 - \kappa_{l_0}^2)/Z_0 k a b \epsilon_l \epsilon_p \gamma_{lp};$$

$$\gamma_{lp} = \sqrt{k^2 - \kappa_{lp}^2}; \quad \epsilon_p = \begin{cases} 1, & p \neq 0, \\ 2, & p = 0. \end{cases}$$

Для нераспространяющихся волн ( $\kappa_{lp}^2 > k^2$ ) имеем

$$y_{lp; \nu n}^{(+0)} = iC_{lp} \operatorname{cth} \alpha_{lp} d_1 \Phi_{lp; \nu}^{(0)} \Phi_{lp; n}^{(0)}; \quad C_{lp} = 4(k^2 - \kappa_{l_0}^2)/Z_0 k a b \epsilon_l \epsilon_p \alpha_{lp}; \quad (34)$$

$$y_{lp; \nu n}^{(01)} = iC_{lp} \operatorname{csch} \alpha_{lp} d_1 \Phi_{lp; \nu}^{(0)} \Phi_{lp; n}^{(1)} \quad \alpha_{lp} = \sqrt{\kappa_{lp}^2 - k^2}$$

Для проводимостей  $y_{\mu; \nu n}^{(-0)}, y_{\mu; \nu n}^{(+1)}$  отверстий  $s_0$  и  $s_1$ , а также для собственных и наведенных проводимостей всех остальных отверстий можно написать аналогичные формулы. При этом надо будет только в формулы (30) — (34) подставить размеры и параметры соответствующих резонаторов и отверстий (т. е. величины  $a, b, d, \gamma_{\mu}, \kappa_{\mu}, \psi_{mn}, \Phi_{\mu}, s_m, S_{\perp}$ ).

### 5. О ВЫБОРЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Интегральные уравнения типа (4) рассматриваемой задачи при точном решении дают, вообще говоря, бесконечное число постоянных распространения  $h$  и соответствующих им законов распределения поля в отверстиях. Однако на практике приходится ограничиваться аппроксимацией распределений полей в отверстиях конечным числом функций; при этом мы находим лишь конечное число различных постоянных распространения и соответственно различных распределений в отверстиях (равное взятому числу функций), причем и те и другие находятся приближенно. При  $N \rightarrow \infty$  и полноте системы гармоник можно ожидать, что результаты будут стремиться к истинным. Какие из бесконечного набора собственных значений  $h$  мы найдем при конечном  $N$ , будет зависеть в значительной степени от выбора системы функций, аппроксимирующих поле в отверстиях. При этом, видимо, следует руководствоваться некоторыми данными о характере распределения поля в отверстиях. Например, если в случае круговых цилиндрических резонаторов использовать лишь осесимметричные аппроксимирующие функции, то, очевидно, при этом не удастся получить  $h$  для несимметричных волн. Для получения хороших результатов при малом  $N$  необходимо также, чтобы аппроксимирующие функции хорошо передавали особенности поля в отверстиях: компонента электрического поля, касательная к краю отверстия, должна обращаться на этом краю в нуль, а нормальная к нему компонента должна иметь особенность электростатического характера; например, в случае бесконечно тонких диафрагм эта особенность, как известно (см. [17]), имеет вид  $[1 - (2\xi/t)^2]^{-1/2}$ , а в случае диафрагм конечной толщины [19] —  $[1 - (2\xi/t)^2]^{-1/3}$  ( $t$  — ширина отверстия,  $-t/2 \leq \xi \leq t/2$ ). Желательно также, чтобы выражения для величин  $f_{\mu n}^{(m)}$  получались возможно более простыми. Так для прямоугольного диафрагмированного волновода с размерами сечения  $a \times b$  при линейных отверстиях связи шириной  $t$  и длиной  $a$ , параллельных стенкам волновода, эти функции можно взять в виде

$$\psi_0 = \frac{2}{\pi d} \frac{\sin(\pi x/a)}{\sqrt{1 - (2\xi/t)^2}}; \quad \psi_n = \cos \frac{2(n-1)\pi\xi}{t} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad -\frac{t}{2} \leq \xi \leq \frac{t}{2};$$

$$0 \leq x \leq a; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

где  $\sigma$  равно двум в случае бесконечно тонких диафрагм и трем — в случае диафрагм конечной толщины. В [11] предложены системы функций для цепочек круговых цилиндрических резонаторов с круглыми отверстиями связи, учитывающих электростатические особенности.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Примененный в настоящей работе обобщенный метод наведенных мдс позволяет простым путем получить удобные формулы для расчета фазовых скоростей волн в цепочках связанных резонаторов. Полученные характеристические уравнения имеют значительно более простой вид, нежели уравнения, получаемые при помощи метода наведенных эдс. Действительно, если сравнить, например, между собой характеристические уравнения, (22) и (30) из [12], соответствующие простейшим аппроксимациям распределений поля в отверстиях диафрагм и тока на стержнях, то увидим, что уравнение (22) фактически уже разрешено относительно фазовой постоянной ( $h$ ), тогда как (30) из [12] состоит из бесконечной

суммы членов, в каждый из которых входит неизвестная  $h$ . Объясняется это тем, что в первом случае взаимодействуют лишь соседние щелевые излучатели (поскольку при расчете наведенных проводимостей все отверстия полагаются металлизированными), тогда как во втором случае явно взаимодействуют между собой все излучатели структуры.

Обобщенный метод наведенных мдс, примененный для получения характеристического уравнения (12), по существу, аналогичен методу Галеркина. Упрощенные уравнения (20) — (22) соответствуют обычному методу наведенных мдс, представляющему собой частный случай метода Галеркина, когда решение ищется в виде первого члена ряда.

Решение уравнения (5), а следовательно и полученных из него уравнений (12), (13) и др., стационарно относительно вариаций распределения поля на отверстиях (см. Приложение). Вследствие этого примененный метод обеспечивает повышенную точность результатов расчета. Расчеты конкретных систем по полученным выше формулам в общем случае должны проводиться на электронной вычислительной машине.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем стационарность решения характеристического уравнения типа (12) относительно вариаций распределения электрического поля в отверстиях, связывающих отдельные резонаторы цепочки. При этом удобно ввести единую функцию  $\vec{\Phi} = \vec{E}_t$ , характеризующую распределение касательной составляющей электрического поля во всех отверстиях  $s_0, \dots, s_M$  в пределах периода цепочки. Рассмотрим выражение

$$\mathcal{L}\{\vec{\Phi}; h\} \equiv \int_S [\vec{E}^* (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] \vec{i}_z ds, \quad S = \sum_{m=0}^M s_m. \quad (36)$$

$\mathcal{L}\{\vec{\Phi}; h\}$  представляет собой функционал от  $\vec{\Phi}$  и обычную функцию от  $h$ . Для истинного поля, удовлетворяющего граничным условиям задачи, т. е. условиям непрерывности на отверстиях  $s_0, \dots, s_M$  (и вследствие периодичности структуры на остальных отверстиях),

$$\mathcal{L}\{\vec{\Phi}; h\} = 0. \quad (37)$$

Это равенство определяет  $h$  как некоторый функционал от  $\vec{\Phi}$ . Поэтому условием стационарности решения уравнения (37) относительно вариаций  $\vec{\Phi}$ , т. е.  $\delta h = 0$  является, как это было показано в [12], обращение в нуль вариации  $\mathcal{L}$ , вычисляемой при неизменном  $h$ . Обозначая такие вариации через  $\Delta$ , найдем

$$\Delta \mathcal{L} = \int_S [\Delta \vec{E}^* (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] \vec{i}_z ds + \int_S [\vec{E}^* (\Delta \vec{H}^+ - \Delta \vec{H}^-)] \vec{i}_z ds. \quad (38)$$

Выведем, прежде всего, соотношение, необходимое для дальнейшего. Для этого рассмотрим поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , заданные внутри рассматриваемой периодической системы. Пусть они удовлетворяют нулевым граничным условиям на металлических поверхностях, условиям квазипериодичности типа (1), а также условиям непрерывности  $\vec{E}_t$  на  $s_m$ . Условиям непрерывности  $\vec{H}_t$  на  $s_m$  эти поля, вообще, не удовлетворяют, т. е. в плоскости  $s_m$  находятся поверхностные электрические токи — источники, равные

$$\vec{K} = [(\vec{H}^+ - \vec{H}^-) \vec{n}], \quad \vec{n} = -\vec{i}_z. \quad (39)$$

Применяя сопряженную лемму Лоренца (см. [18]) к полям  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  внутри объема  $V$ , протяженностью в один период и ограниченного поверхностью  $\Sigma$  (см. рис. 3), имеем

$$\int_{\Sigma} \{[\vec{E}_1 \cdot \vec{H}_2] + [\vec{E}_2 \vec{H}_1 \cdot]\} \vec{n} ds = - \int_S (\vec{E}_1 \cdot \vec{K}_2 + \vec{E}_2 \vec{K}_1 \cdot) ds. \quad (40)$$



Так как на металлической части поверхности  $\Sigma$   $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = 0$ , а интегралы по торцовым сечениям  $S'$  и  $S''$  выделенного объема взаимно компенсируются вследствие условия квазипериодичности (1), то (40) примет вид

$$\int_S \{[\vec{E}_1^* (\vec{H}_2^+ - \vec{H}_2^-)] + [\vec{E}_2 (\vec{H}_1^+ - \vec{H}_1^-)^*]\} \vec{n} ds = 0. \quad (41)$$

Полагая  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  равным полю  $\vec{E}, \vec{H}$ , фигурирующему в (38), а  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  равным вариации  $\Delta\vec{E}, \Delta\vec{H}$  (соответствующей вариации  $\Delta\vec{\Phi}$  функции распределения электрического поля на отверстиях), получим

$$\int_S [\vec{E}^* (\Delta\vec{H}^+ - \Delta\vec{H}^-)] \vec{n} ds = - \int_S [\Delta\vec{E} (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)^*] \vec{n} ds. \quad (42)$$

Используя это соотношение, убеждаемся, что (см. формулу (38))

$$\Delta\mathcal{L} = 2i \int_S [\Delta\vec{E}^* (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] \vec{n} ds. \quad (43)$$

Следовательно (см. (4)), для истинного поля  $\Delta\mathcal{L} = 0$ , что и подтверждает стационарность уравнения (37). Доказанная стационарность функционала (36) для истинного поля может быть также использована для нахождения распределения  $\vec{\Phi}$ , а значит и  $h$ . Действительно, применяя метод Ритца для решения рассматриваемой задачи  $\Delta\mathcal{L} = 0$ , напишем выражение для  $\vec{\Phi}$  в виде (14). Подставляя (14) в формулу (36), получим выражение для функционала  $\mathcal{L}\{\vec{\Phi}; h\}$  в виде билинейной формы по отношению к  $V_{mn}$ . Условия стационарности последнего имеют вид

$$\partial\mathcal{L} / \partial V_{mn}^* = 0; \quad n = 1, \dots, N; \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (44)$$

Эти равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно  $V_{mn}$ , которые имеют нетривиальные решения только при равенстве нулю их определителя. Последнее условие и дает характеристическое уравнение для определения  $h$ . Система (44) полностью совпадает с системой (16), полученной при помощи метода наведенных мдс, эквивалентного методу Галеркина. Если в (14) ограничиться одним членом (что возможно, если заранее приближенно известен закон распределения поля в отверстиях), то мы придем к характеристическому уравнению (20).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Труды юбилейной научно-технической конференции ГКРЭ (1958 г.), Секция антенных систем, 1960.
2. В. В. Владимирский, Докл. АН СССР, 1946, 52, 3, 219; ЖТФ, 1947, 17, 11, 1277.
3. E. L. Chu, W. W. Hansen, J. Appl. Phys., 1947, 18, 11, 996; 1950, 21, 4, 454.
4. A. W. Lines, C. R. Nicoll, A. M. Woodward. Proc. I. E. E., 1950, pt. III, 97, 48, 263.
5. Г. Н. Рапопорт, ЖТФ, 1951, 21, 9, 1076; 1957, 38, 9, 2104.
6. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, ЖТФ, 1954, 24, 1697; 1955, 25, 9, 1597.
7. Ш. Е. Цимринг, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 1, 3; 1957, 2, 8, 969.
8. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 5, 800.
9. И. Ш. Белуга, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 3, 459; 1965, 10, 9, 1724.
10. Р. М. Леонтьева, Радиотехника, 1957, 12, 12, 36.
11. П. Е. Краснушкин, С. П. Ломнев, А. Г. Трагов, Докл. АН СССР, 1964, 159, 3, 528.
12. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 417.
13. Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 7, 1128.
14. Я. Н. Фельд, ЖЭТФ, 1943, 13, 3—4, 110.
15. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
16. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1959.
17. Я. Н. Фельд, Радиотехника, 1946, 1, 6, 3 (формула (32)).
18. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1947, 56, 5.
19. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948, стр. 320.
20. П. Е. Краснушкин, С. П. Ломнев, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 6, 1051.

УДК 535.4:517

## О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО РОДА

*Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский*

Дан метод сведения задач дифракции скалярных и векторных волн на незамкнутом криволинейном экране к интегральным уравнениям второго рода для «токов» на поверхности экрана или для поля на дополняющей поверхности (в отверстии). Предлагаемый подход позволяет получить целый класс интегральных уравнений, соответствующих рассматриваемой дифракционной задаче.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи дифракции скалярных или электромагнитных волн на незамкнутых бесконечно тонких экранах могут быть легко сведены к интегральным или интегродифференциальным уравнениям первого рода. Однако по многим причинам значительно удобнее иметь дело с интегральными уравнениями второго рода. К последним приведены некоторые задачи с плоскими экранами ([1, 2]). В работе [3] предложен общий метод вывода интегральных уравнений второго рода для токов, основанный на неполном обращении интегральных операторов.

В настоящей статье применен иной подход, весьма естественный, как в методическом, так и в физическом плане.

При конструировании ядер интегральных уравнений, выводимых ниже, могут быть использованы функции точечного источника для свободного пространства (этот метод применен в § 1, 2 и приводит к интегральным уравнениям, аналогичным уравнениям работы [3]) или же могут быть применены функции Грина для некоторых вспомогательных областей (этот подход применен в § 3, 4; он позволяет получить целый класс новых интегральных уравнений как для токов на экране, так и для поля в отверстии).

### 1. ПОСТАНОВКА СКАЛЯРНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЕЙ

Пусть первичное поле  $\psi_0(q)$  \* дифрагирует на незамкнутой поверхности  $S$ , краем которой служит контур  $L$  ( $S$  и  $L$  — достаточно гладкие). Искомое вторичное поле  $\psi(q)$  должно удовлетворять уравнению

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (k = 2\pi/\lambda), \quad (1)$$

во всем пространстве, кроме точек  $S + L$ , и граничным условиям на поверхности  $S$  [точки  $L$  не причисляются к  $S$ ):

$$\psi^+ = \psi^- = -\psi_0 \quad (\text{условие Дирихле}) \quad (2a)$$

\* Через  $q, p, g$  мы будем обозначать точки трехмерного пространства или их радиус-векторы.

или

$$\partial\psi^+ / \partial n = \partial\psi^- / \partial n = -\partial\psi_0 / \partial n^* \quad (\text{условие Неймана}). \quad (26)$$

Кроме того,  $\psi(q)$  нужно подчинить условиям типа Майкснера [1] на контуре  $L$  и условиям излучения на бесконечности.

Обозначим через  $S_0$  какую-либо из замкнутых (или же уходящих на бесконечность) поверхностей, содержащих  $S$ :  $S_0 = S + \Sigma$  (рис. 1).

Поверхность  $S_0$  разделяет пространство на две области  $V_i$  и  $V_e$ ; будем считать, что орт нормали  $\mathbf{n}$  направлен внутрь  $V_i$ .

По формулам Грина — Кирхгофа имеют место равенства

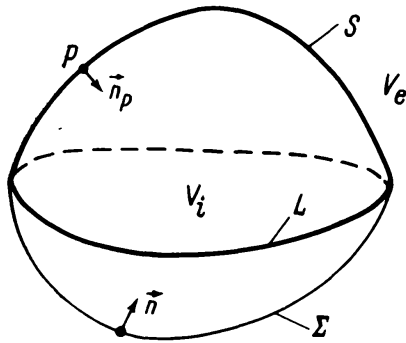


Рис. 1

$$a_i(q)\psi(q) = \oint_{S_0} \left( \psi^+ \frac{\partial f}{\partial n_p} - f \frac{\partial \psi^+}{\partial n_p} \right) dp, \quad (3)$$

$$a_e(q)\psi(q) = - \oint_{S_0} \left( \psi^- \frac{\partial f}{\partial n_p} - f \frac{\partial \psi^-}{\partial n_p} \right) dp^{**}, \quad (4)$$

где  $a_i(q)$ ,  $a_e(q)$  — характеристические функции областей  $V_i$ ,  $V_e$  (например,  $a_i$  равно единице в  $V_i$  и нулю в  $V_e$ );

$$f = f(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|}.$$

Сложив равенства (3) и (4) почленно и приняв во внимание непрерывность  $\psi$  и  $\partial\psi / \partial n$  при переходе через  $\Sigma$ , а также тождество  $a_i(q) + a_e(q) = 1$ , получим (при любом  $q$  из  $V_i$  или из  $V_e$ )

$$\psi(q) = \int_S \left( v \frac{\partial f}{\partial n_p} - wf \right) dp, \quad (5)$$

где

$$v = \psi^+ - \psi^-; \quad w = \frac{\partial\psi^+}{\partial n} - \frac{\partial\psi^-}{\partial n}.$$

В частности, в задаче Дирихле  $v(p) \equiv 0$  и

$$\psi(q) = - \int_S w(p) f(p, q) dp, \quad (5a)$$

а в задаче Неймана  $w(p) \equiv 0$  и

$$\psi(q) = \int_S v(p) \frac{\partial f(p, q)}{\partial n_p} dp. \quad (5b)$$

Функции  $v(p)$ ,  $w(p)$  по своей роли аналогичны поверхностным плотностям токов в электродинамике; в случае же цилиндрических экранов при  $E$ - или

\*  $\mathbf{n}$  — орт нормали, соответствующий одной из сторон поверхности  $S$ ;  $\psi^+$ ,  $\partial\psi^+ / \partial n$  — предельные значения при переходе на  $S$  с той стороны, куда направлен  $\mathbf{n}$ ;  $\psi^-$ ,  $\partial\psi^- / \partial n$  имеют аналогичный смысл при предельном переходе с противоположной стороны. В дальнейшем мы будем иногда употреблять символы вида  $F^\pm$ ,  $\partial F^\pm / \partial n$  в том случае, когда соответствующие предельные значения одинаковы с обеих сторон

\*\* Символами  $dp$ ,  $dq$  и т. д. мы обозначаем элемент (дифференциал) площади поверхности в соответствующей точке; точка  $q$  в равенствах (3) и (4) не принадлежит  $S_0$ .

$H$ -поляризации плотность токов на  $S$  в точности совпадает с  $w(p)$  или  $v(p)$  соответственно.

Формулы (5а), (5б) выражают, таким образом, поле  $\psi(q)$  во всем пространстве через распределение «токов»  $w, v$  на  $S$ .

## 2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ТОКОВ $w, v$

Пусть точка  $q$  расположена вблизи  $S$ .

Найдем разность производных от (3) и (4) по направлению нормали к  $S$ , проходящей через  $q$ :

$$[a_i(q) - a_e(q)] \frac{\partial \psi}{\partial n_q} = \oint_{S_0} \left[ (\psi^+ + \psi^-) \frac{\partial^2 f}{\partial n_q \partial n_p} - \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial n_p} + \frac{\partial \psi^-}{\partial n_p} \right) \frac{\partial f}{\partial n_q} \right] dp. \quad (6)$$

В задаче Дирихле имеем (учитывая (2а) и (5а))

$$\psi^+ + \psi^- = -2\psi_0 \text{ на } S; \quad \psi^+ + \psi^- = -2 \int_S w(g) f(p, g) dg \text{ на } \Sigma;$$

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial n_p} + \frac{\partial \psi^-}{\partial n_p} = -2 \int_S w(g) \frac{\partial f(p, g)}{\partial n_p} dg \text{ на } S + \Sigma.$$

Поэтому равенство (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [a_i(q) - a_e(q)] \frac{\partial \psi}{\partial n_q} = & - \frac{\partial}{\partial n_q} \int_S \psi_0(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp - \\ & - \int_S \frac{\partial^2 f(q, p)}{\partial n_q \partial n_p} dp \int_S w(g) f(p, g) dg + \int_{S_0} \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_q} dp \int_S w(g) \frac{\partial f(p, g)}{\partial n_p} dg. \end{aligned} \quad (7)$$

Взяв в равенстве (7)  $q$  сначала в  $V_i$ , а затем в  $V_e$ , устремив в каждом случае  $q$  к некоторой точке на  $S$  и сложив результаты, найдем\*

$$\frac{1}{4} w(q) = \int_S w(g) T(q, g) dg + \Phi(q), \quad q \in S, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T(q, g) = & - \int_S \frac{\partial^2 f(q, p)}{\partial n_p \partial n_q} f(p, g) dp + \int_{S+\Sigma} \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_q} \frac{\partial f(p, g)}{\partial n_p} dp, \\ \Phi(q) = & - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp \right)^\pm \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

— известные функции.

Равенство (8) представляет собой искомое интегральное уравнение второго рода для тока  $w$ . Ядро  $T$  содержит интегралы по  $\Sigma$ . Однако, как мы покажем сейчас, это ядро в действительности от выбора  $\Sigma$  не зависит. В самом деле, пусть ядро  $\tilde{T}(q, g)$  получено из  $T(q, g)$  путем замены  $\Sigma$  на  $\tilde{\Sigma}$  (рис. 2), причем ради простоты мы считаем, что  $\Sigma$  и  $\tilde{\Sigma}$  имеют общие

\* При этом нужно произвести изменение порядка интегрирований, которое нетрудно оправдать.

точки лишь на  $L$ . Тогда

$$\begin{aligned} T(q, g) - \tilde{T}(q, g) &= \oint_{\Sigma + \tilde{\Sigma}} \left\{ \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_q} \frac{\partial f(p, g)}{\partial n_p} - f(p, g) \frac{\partial^2 f(q, p)}{\partial n_q \partial n_p} \right\} dp = \\ &= \frac{\partial}{\partial n_q} \Omega(q, g), \end{aligned}$$

где

$$\Omega(q, g) = \oint_{\Sigma + \tilde{\Sigma}} \left\{ f(q, p) \frac{\partial f(p, g)}{\partial n_p} - f(p, g) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} \right\} dp.$$

Направления нормалей на  $\Sigma$  и  $\tilde{\Sigma}$  показаны на рис. 2. Так как  $q$  и  $g$  лежат на  $S$ , а значит обе расположены вне (или обе внутри) замкнутой поверхности  $\Sigma + \tilde{\Sigma}$ , то, в силу теоремы Грина,  $\Omega(q, g) \equiv 0$  и, следовательно,  $T(q, g) \equiv \tilde{T}(q, g)$ , что и утверждалось. Более того, ядро  $T$ , как нетрудно показать, может быть представлено только через интеграл по  $S$ . Чтобы получить это представление, будем непрерывным деформированием неограниченно приближать  $\Sigma$  к  $S$ , закрепив  $q$  и  $g$  на  $S$  ( $q \neq g$ ). При этом второй член в правой части формулы (9) исчезнет и в пределе получим

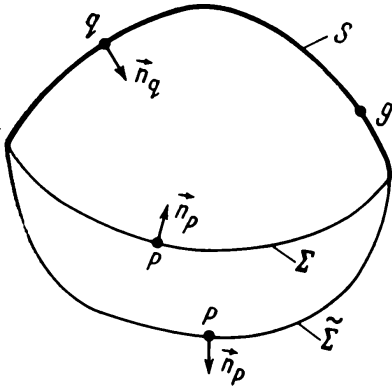


Рис. 2

$$T(q, g) = \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} f(p, g) dp \right)^{\pm}. \quad (10)$$

Предельные переходы, приведшие к формуле (10), могут быть обоснованы вполне строго.

Интегральное уравнение второго рода для  $v(p)$  (в случае задачи Неймана) можно получить вполне аналогичным путем: вычитаем почленно (4) из (3), заменяем в интегралах  $\psi^+ + \psi^-$  и  $(\partial\psi^+/\partial n) + (\partial\psi^-/\partial n)$  их выражениями, выводимыми из (2б) и (5б), и затем, устремив  $q$  на  $S$  из  $V_i$  и из  $V_e$ , складываем полученные равенства. В результате получаем искомое уравнение

$$\frac{1}{4} v(q) = \int_S v(g) T(g, q) dg + \Psi(q), \quad q \in S, \quad (11)$$

ядро которого  $T(g, q)$  отличается от ядра уравнения (8) лишь порядком аргументов, а  $\Psi(q) = \int (\partial\psi_0/\partial n_p) f(q, p) dp$  — известная функция.

Подобным же образом можно получить интегральное уравнение второго рода в случае краевого условия импедансного типа:

$$\frac{\partial\psi^+}{\partial n} + \alpha\psi^+ = \frac{\partial\psi^-}{\partial n} + \alpha\psi^- = - \left( \frac{\partial\psi_0}{\partial n} + \alpha\psi_0 \right) \text{ на } S, \quad (12)$$

где  $\alpha$  — задано. Вместо (5а) или (5б) при этом имеет место интегральное представление

$$\psi(q) = \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial n_p} + \alpha f \right) v dp, \quad (5в)$$

из которого и нужно исходить при выводе интегрального уравнения для функции  $v(p)$ .

Отметим еще, что в случае плоского экрана ядро  $T$  можно записать в каждом из следующих видов:

$$T(q, g) = (\nabla_{\perp q^2} + k^2) \int_S f(q, p) f(p, g) dp,$$

$$T(q, g) = -(\nabla_{\perp q^2} + k^2) \int_{\Sigma} f(q, p) f(p, g) dp,$$

где  $\nabla_{\perp}^2$  — двумерный оператор Лапласа, действующий в плоскости экрана.

### 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА С ЯДРАМИ, СВЯЗАННЫМИ С ФУНКЦИЯМИ ГРИНА. СКАЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ

В ряде приложений может представить интерес сведение дифракционных задач к интегральным уравнениям второго рода с ядрами, существенно зависящими от формы поверхности  $\Sigma$  и связанными с функциями Грина для областей  $V_i$  и  $V_e$ . Таким образом можно получить целый класс подобных уравнений. Для этого введем функции Грина  $G^i$  и  $G^e$  уравнения (1) для областей  $V_i$  и  $V_e$ . При этом, как обычно [4], эти функции должны удовлетворять на  $S + \Sigma$  граничным условиям\*

$$G^{i, e} = 0; \tag{13a}$$

$$\partial G^{i, e} / \partial n = 0. \tag{13б}$$

Заменив в формулах (3) и (4) функцию  $f$  на  $G^i$  и  $G^e$  соответственно и учитывая при этом (13), получим

$$\psi(q) = \int_{S+\Sigma} \psi^+ \frac{\partial G^i}{\partial n_p} dp, \quad q \in V_i; \quad \psi(q) = - \int_{S+\Sigma} \psi^- \frac{\partial G^e}{\partial n_p} dp, \quad q \in V_e, \tag{14a}$$

$$\psi(q) = - \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \psi^+}{\partial n_p} G^i dp, \quad q \in V_i; \quad \psi(q) = \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \psi^-}{\partial n_p} G^e dp, \quad q \in V_e. \tag{14б}$$

В нашем случае

$$\psi^+ = \psi^- = \psi \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \psi^+}{\partial n} = \frac{\partial \psi^-}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \text{ на } \Sigma \tag{15}$$

и

$$\psi^+ = \psi^- = -\psi_0 \text{ на } S; \tag{16a}$$

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial n} = \frac{\partial \psi^-}{\partial n} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial n} \text{ на } S. \tag{16б}$$

Поэтому, подставляя (14a) в выражение  $w = (\partial \psi^+ / \partial n) - (\partial \psi^- / \partial n)$  и (14б) в выражение  $v = \psi^+ - \psi^-$ , найдем

$$w(q) = \int_{\Sigma} \psi(p) \frac{\partial^2 (G^i + G^e)}{\partial n_q \partial n_p} dp + M(q), \quad q \in S; \tag{17a}$$

$$v(q) = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n_p} (G^i + G^e) dp + N(q), \quad q \in S. \tag{17б}$$

\* Как и выше, формулы, относящиеся только к задачам Дирихле или Неймана, нумеруются цифрами с добавлением буквы а или б соответственно.

Здесь  $M$  и  $N$  — известные функции:

$$M(q) = - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0(p) \frac{\partial(G^i + G^e)}{\partial n_p} dp \right)^\pm; \quad (18a)$$

$$N(q) = \int_S \frac{\partial \psi_0}{\partial n_p} (G^i + G^e) dp. \quad (18b)$$

Найдем прежде всего интегральные уравнения второго ряда для токов  $w$  и  $v$  на  $S$ . Для этого подставим в (17а) и (17б) выражения для  $\psi$  и  $\partial\psi/\partial n_p$  из (5а) и (5б), предварительно продифференцировав последнее,

$$w(q) = - \int_\Sigma \frac{\partial^2(G^i + G^e)}{\partial n_p \partial n_q} \int_S w(g) f(g, p) dg dp + M(q), \quad q \in S, \quad (19a)$$

$$v(q) = - \int_\Sigma (G^i + G^e) \int_S v(g) \frac{\partial^2 f}{\partial n_g \partial n_p} dg dp + N(q), \quad q \in S. \quad (19b)$$

Меняя здесь, на основании теоремы Фубини [4], порядок интегрирования, найдем искомые уравнения

$$w(q) = \int_S w(g) K(g, q) dg + M(q), \quad q \in S; \quad (20a)$$

$$v(q) = \int_S v(g) Q(g, q) dg + N(q), \quad q \in S. \quad (20b)$$

Ядра определяются формулами

$$K(g, q) = - \int_\Sigma \frac{\partial^2(G^i + G^e)}{\partial n_p \partial n_q} f(g, p) dp; \quad (21a)$$

$$Q(g, q) = - \int_\Sigma \{G^i(p, q) + G^e(p, q)\} \frac{\partial^2 f}{\partial n_g \partial n_p} dp. \quad (21b)$$

Легко также получить интегральное уравнение второго рода для поля  $\psi$  на  $\Sigma$  в случае задачи Дирихле и для производной  $\partial\psi/\partial n$  на  $\Sigma$  в случае задачи Неймана.

Действительно, подставляя выражения (17а) и (17б) в правые части формул (5а) и (5б), предварительно продифференцировав последнюю по  $n$ , найдем для  $g \in \Sigma$ ,

$$\psi(g) = - \int_S f(q, g) \int_\Sigma \psi(p) \frac{\partial^2(G^i + G^e)}{\partial n_p \partial n_q} dp dq - \int_S f(q, g) M(q) dq; \quad (22a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_g} = - \int_S \frac{\partial^2 f}{\partial n_q \partial n_g} \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial n_p} \{G^i(p, q) + G^e(p, q)\} dp dq + \int_S N(q) \frac{\partial^2 f}{\partial n_q \partial n_g} dq. \quad (22b)$$

Меняя порядок интегрирования, получим искомые уравнения

$$\psi(g) = \int_\Sigma \psi(p) X(p, g) dp + A(g), \quad g \in \Sigma; \quad (23a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_g} = \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial n_p} Y(p, g) dp + B(g), \quad g \in \Sigma. \quad (23b)$$

Здесь

$$X(p, g) = - \int_S f(q, g) \frac{\partial^2 (G^i + G^e)}{\partial n_p \partial n_q} dq; \quad A(g) = - \int_S f(q, g) M(q) dq; \quad (24a)$$

$$Y(p, g) = - \int_S \{G^i(p, q) + G^e(p, q)\} \frac{\partial^2 f}{\partial n_q \partial n_g} dq; \\ B(g) = \int_S N(q) \frac{\partial^2 f}{\partial n_q \partial n_g} dq. \quad (24b)$$

Таким образом, зная функции Грина (задач Дирихле или Неймана), можно написать интегральные уравнения второго рода как для  $w$  или  $v$  на  $S$  (см. (20)), так и для  $\psi$  или  $\partial\psi/\partial n$  на  $\Sigma$  (см. (23)). Ядра  $K, Q, X$  и  $Y$  полученных уравнений существенно зависят от формы вспомогательной поверхности  $\Sigma$ . Рациональный выбор последней, в частных задачах, может позволить упростить эти ядра. Как легко видеть, они имеют существенные особенности только на контуре  $L$ , разделяющем  $S$  и  $\Sigma$ .

#### 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА С ЯДРАМИ, СВЯЗАННЫМИ С ФУНКЦИЯМИ ГРИНА. СЛУЧАЙ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Изложенная выше методика получения интегральных уравнений второго рода легко переносится и на случай дифракции электромагнитной волны на незамкнутом идеально проводящем экране  $S$ .

Роль формул Грина (14) играет теперь известная лемма Лоренца. Первичная волна  $E^0, H^0$  возбуждает на экране  $S$  поверхностный ток, двухстороннюю плотность которого обозначим буквой  $J$ . Вторичное поле  $E, H$  нетрудно выразить через распределение тока  $J$  на  $S$ . В частности [5]

$$E(p) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \int_S \{k^2 J(g) - (J(g) \nabla_g) \nabla_p\} f(g, p) dg. \quad (25)$$

Роль функции Грина в областях  $V_i$  и  $V_e$  (рис. 1) будут теперь играть вспомогательные поля  $E^i, H^i$  и  $E^e, H^e$ , возбуждаемые магнитным диполем с моментом  $m$ , расположенным в  $V_i$  и  $V_e$  соответственно. При определении этих полей, которые естественно называть полями Грина, замкнутая поверхность  $S + \Sigma$  (рис. 1) предполагается идеально проводящей, т. е. поля Грина удовлетворяют условию  $E_t^i = 0, E_t^e = 0$  на границе соответствующей области. Само собой разумеется, что если область простирается на бесконечность, то поля Грина удовлетворяют там принципу излучения. Применяя к полям  $E, H$  и  $E^i, H^i$  в области  $V_i$  и полям  $E, H$  и  $E^e, H^e$  в области  $V_e$  лемму Лоренца, получим [6] формулы, аналогичные (3) и (4):

$$mH(q) = - \frac{1}{i\omega} \int_{S+\Sigma} \{[EH^i] - [E^iH]\} dp, \quad q \in V_i, \\ mH(q) = - \frac{1}{i\omega} \int_{S+\Sigma} \{[EH^e] - [E^eH]\} dp, \quad q \in V_e \quad (dp = ndp)$$



Учитывая граничные условия  $E_t^i = E_t^e = 0$  на  $S + \Sigma$  и  $E_t = -E_t^0$  на  $S$ , приведем их к виду

$$\mathbf{mH}(q) = -\frac{1}{i\omega} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}(p) \mathbf{H}^i(p, q; \mathbf{m})] dp + \frac{1}{i\omega} \int_S [\mathbf{E}^0(p) \mathbf{H}^i(p, q; \mathbf{m})] dp, \quad (26)$$

$$\mathbf{mH}(q) = \frac{1}{i\omega} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}(p) \mathbf{H}^e(p, q; \mathbf{m})] dp - \frac{1}{i\omega} \int_S [\mathbf{E}^0(p) \mathbf{H}^e(p, q; \mathbf{m})] dp,$$

У полей Грина поставлены три аргумента, так как они зависят от точки наблюдения  $p$  и точки  $q$ , где расположен источник — магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}$ . Так как  $q$  и  $\mathbf{m}$  произвольны, то формулы (26) определяют магнитный вектор  $\mathbf{H}$  во всем пространстве. Определим при помощи (26) скачок  $\mathbf{mH}$  при переходе через  $S$ :

$$\mathbf{m}(\mathbf{H}^+(q) - \mathbf{H}^-(q)) = -\frac{1}{i\omega} \int_{\Sigma} \mathbf{E}(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{m}) dp + \frac{1}{i\omega} \left( \int_S \mathbf{E}^0(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{m}) dp \right)^{\pm}, \quad q \in S. \quad (27)$$

Здесь использовано обозначение

$$\mathbf{I}(p, q; \mathbf{m}) = [\{\mathbf{H}^i(p, q; \mathbf{m}) + \mathbf{H}^e(p, q; \mathbf{m})\} \mathbf{n}_p]. \quad (28)$$

Введем на  $S$  ортогональную криволинейную систему координат  $u_1, u_2$  с коэффициентами Ляме  $h_1, h_2$ . Обозначим через  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_2$  единичные орты, касательные к координатным линиям  $u_1$  и  $u_2$ , образующие с нормалью  $\mathbf{n}$  правую тройку. Тогда, учитывая, что ток  $\mathbf{J}$ , индуцированный на  $S$ , равен  $[\mathbf{n}(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)]$ , получим при помощи (27) составляющие тока  $J_1$  и  $J_2$  в координатах  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\left. \begin{aligned} J_1(q) &= \frac{1}{i\omega} \int_{\Sigma} \mathbf{E}(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_2) dp - \frac{1}{i\omega} \left( \int_S \mathbf{E}^0(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_2) dp \right)^{\pm}, \\ J_2(q) &= -\frac{1}{i\omega} \int_{\Sigma} \mathbf{E}(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_1) dp + \frac{1}{i\omega} \left( \int_S \mathbf{E}^0(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_1) dp \right)^{\pm}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Подставляя сюда значение  $\mathbf{E}$  из (25), найдем

$$\left. \begin{aligned} J_1(q) &= -\frac{1}{\varepsilon\omega^2} \int_{\Sigma} \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_2) \int_S \{k^2 \mathbf{J}(g) - (\mathbf{J}(g) \nabla_g) \nabla_p\} f(g, p) dg dp + A_1(q), \\ J_2(q) &= \frac{1}{\varepsilon\omega^2} \int_{\Sigma} \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_1) \int_S \{k^2 \mathbf{J}(g) - (\mathbf{J}(g) \nabla_g) \nabla_p\} f(g, p) dg dp + A_2(q), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{i\omega} \left( \int_S \mathbf{E}^0(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_2) dp \right)^{\pm}; \\ A_2 &= \frac{1}{i\omega} \left( \int_S \mathbf{E}^0(p) \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_1) dp \right)^{\pm} - \text{известные величины.} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Дифференциальный оператор, стоящий в правой части (30), можно записать в виде

$$(\mathbf{J}(g) \nabla_g) = \left( J_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + J_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right)_g.$$

Поэтому, меняя порядок интегрирования в (30), приходим к искомым интегральным уравнениям для  $\mathbf{J}$  на  $S$

$$\left. \begin{aligned} J_1(q) &= \int_S \{J_1(g) G_{11}(g, q) + J_2(g) G_{12}(g, q)\} dg + A_1(q), \\ J_2(q) &= \int_S \{J_1(g) G_{21}(g, q) + J_2(g) G_{22}(g, q)\} dg + A_2(q), \end{aligned} \right\} \quad q \in S \quad (32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_{1v}(g, q) &= -\frac{1}{\varepsilon\omega^2} \int_{\Sigma} \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_2) \left( k^2 \mathbf{i}_{vg} - \frac{1}{h_{vg}} \frac{\partial}{\partial u_{vg}} \nabla_p \right) f(g, p) dp, \\ G_{2v}(g, q) &= \frac{1}{\varepsilon\omega^2} \int_{\Sigma} \mathbf{I}(p, q; \mathbf{i}_1) \left( k^2 \mathbf{i}_{vg} - \frac{1}{h_{vg}} \frac{\partial}{\partial u_{vg}} \nabla_p \right) f(g, p) dp. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$v = 1, 2.$

Если ввести вектор  $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$  и тензор-матрицу  $G = \|G_{v\mu}\|$ , то систему (32) можно записать в виде одного уравнения

$$\mathbf{J}(q) = \int_S G(g, q) \mathbf{J}(g) dg + \mathbf{A}(q), \quad q \in S. \quad (32a)$$

Перейдем теперь к нахождению аналогичного уравнения для  $\mathbf{E}_t = \mathbf{i}_1 E_1 + \mathbf{i}_2 E_2$  на  $\Sigma$ . Для этого подставим (29), с учетом (31), в правую часть (25) и, производя преобразования, аналогичные проделанным выше, найдем

$$\mathbf{E}_t(g) = \int_{\Sigma} \mathcal{L}(p, g) \mathbf{E}_t(p) dp + \mathbf{B}(g), \quad g \in \Sigma. \quad (34)$$

Здесь  $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$  — вектор с компонентами

$$B_{\mu}(g) = -\frac{i}{\omega\varepsilon} \mathbf{i}_{\mu g} \sum_{v=1}^2 \int_S A_v(q) \left( k^2 \mathbf{i}_{vq} - \frac{\partial}{h_{vq} \partial u_{vq}} \nabla_g \right) f(q, g) dq, \quad \mu = 1, 2,$$

а  $\mathcal{L} = \|\mathcal{L}_{v\mu}\|$  — тензор-матрица с компонентами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v\mu}(p, g) &= -\frac{1}{\varepsilon\omega^2} \mathbf{i}_{vg} \int_S \left\{ I_{\mu}(p, q; \mathbf{i}_2) \left( k^2 \mathbf{i}_{1q} - \frac{1}{h_{1q}} \frac{\partial}{\partial u_{1q}} \nabla_g \right) - \right. \\ &\quad \left. - I_{\mu}(p, q; \mathbf{i}_1) \left( k^2 \mathbf{i}_{2q} - \frac{1}{h_{2q}} \frac{\partial}{\partial u_{2q}} \nabla_g \right) \right\} f(q, g) dq. \end{aligned}$$

Решения всех полученных в данной статье интегральных уравнений следует искать в классах функций, удовлетворяющих соответствующим условиям типа Майкснера на  $L$ . Если при этом области интегрирования конечны, то, как можно показать, интегральные операторы в найденных уравнениях вполне непрерывны в соответствующих классах функций и уравнения принадлежат типу Рисса — Шаудера [7].

При помощи интегральных уравнений второго рода, полученных выше, можно построить устойчивые и эффективные вычислительные схемы для расчетов на электронной вычислительной машине. Кроме того, эти уравнения можно использовать для решения задач дифракции на экранах при помощи тех или иных итерационных процедур.

В частности, как показывают расчеты, даже приняв в качестве приближенных выражений искоемых функций (токов на  $S$  или полей на  $\Sigma$ ) свободные члены соответствующих интегральных уравнений, можно получить в ряде случаев лучшую аппроксимацию, чем при помощи приближения Кирхгофа.

Отметим, кроме того, что ядра интегральных уравнений, построенных при помощи функций Грина, весьма существенным образом учитывают геометрию экрана  $S$ , что может оказаться полезным при отыскании коротковолновых асимптотических представлений полей или токов при помощи интегральных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хёнл, Мауэ, Вестпфаль, Теория дифракции, Изд. Мир, 1964.
2. М. Д. Хаскинд, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 10, 1800.
3. А. Я. Повзнер, И. В. Сухаревский, Докл. АН СССР, 1959, 127, 2, 291.
4. Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применения, ГИТТЛ, 1953.
5. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. 1, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
6. Я. Н. Фельд, ЖЭТФ, 1943, 3—4.
7. С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, ГИФМЛ, 1959.

Поступила в редакцию  
15 III 1966

-----

УДК 621.396.67.095

## ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ В ПЛОСКИХ ПЕРИСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Я. Н. Фельд

Рассматривается задача о нахождении оптимального распределения источников (поля или тока) в плоском раскрыве излучающей антенны, являющейся частью перископической системы. Последняя состоит из указанной антенны и переотражающего плоского зеркала.

Изучается плоская задача, когда протяженность системы в одном направлении бесконечна. Даны формулы для амплитудно-фазового распределения, обеспечивающего максимальный коэффициент направленного действия (кнд), и выражения для диаграммы направленности и кнд. Построены характерные кривые.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Перископические системы широко используются в различных радиотехнических устройствах [1]. Основное их достоинство заключается в том, что наличие переотражающего (вторичного) зеркала позволяет конструктивно удобно размещать основную часть антенной системы, например, у основания мачты на земле или на палубе, в то время как вторичное переотражающее зеркало размещается на ее вершине. Специфика работы перископической системы состоит в том, что отражающее зеркало расположено в зоне Френеля основного излучающего устройства, и все основные размеры таковы, что имеют место условия, характерные для квазиоптических систем [2]. При этом естественно возникает вопрос об оптимальном амплитудно-фазовом распределении поля (или тока) в раскрыве основного излучающего устройства, при котором обеспечивается максимальный коэффициент направленного действия (кнд) системы в целом. Разберем этот вопрос на примере идеализированной бесконечнопротяженной, в направлении оси  $z$ , перископической системы, изображенной на рис. 1. Слева расположен плоский основной излучающий раскрыв шириной  $2a$ , в котором распределено линейно поляризованное поле  $E$  (электрический вектор, касательный к раскрыву). Справа — переотражающее плоское зеркало ширины  $2b$ , образующее угол  $\alpha$  с осью  $x$ . Расстояние между центрами раскрыва и зеркала  $d$ . Основные геометрические размеры и длина волны  $\lambda$  удовлетворяют неравенствам, характерным для подобных систем:

$$a/\lambda \gg 1, b/\lambda \gg 1, d/a \gg 1, d/b \gg 1, d < (a+b)^2/\lambda. \quad (1)$$

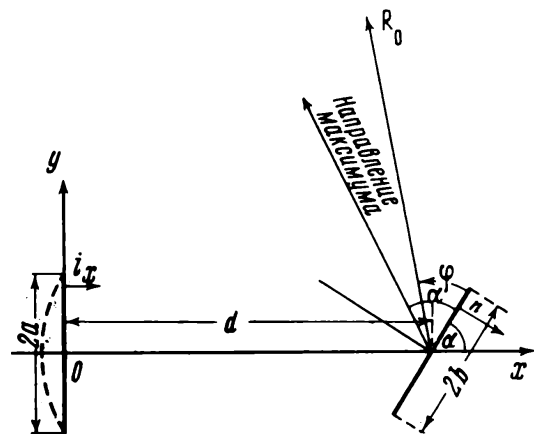


Рис. 1

Поскольку при выполнении (1) поляризационные свойства поля практически не сказываются, мы ограничимся рассмотрением одной простейшей поляризации, когда  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_y$ .

Как известно [3], при большом раскрытии ( $a \gg \lambda$ ) излучаемое им поле может быть, с достаточной точностью, найдено как поле поверхностных магнитных токов  $\mathbf{I} = [\mathbf{E}i_x]$ , распределенных в плоскости раскрытия.

В рассматриваемом случае

$$I = I_z = -\mathcal{E} = -\mathcal{E}_y. \quad (2)$$

Магнитный вектор поля, возбуждаемого этим током, равен [3]

$$\mathbf{H} = (\text{grad div} + k^2)\mathbf{\Pi}, \text{ где } \mathbf{\Pi} = -(1/4\omega\mu) \int_{-a}^a \mathbf{I} H_0^{(2)}(kR) dy. \quad (3)$$

Здесь  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $R$  — расстояние между точкой интегрирования  $(0, y)$  и точкой наблюдения;  $\omega = k/\sqrt{\epsilon\mu}$ ;  $\epsilon, \mu$  — параметры среды. Учитывая (2) и независимость всех величин от координаты  $z$ , найдем

$$H = H_z = (\omega\epsilon/4) \int_{-a}^a \mathcal{E}(y) H_0^{(2)}(kR) dy. \quad (4)$$

Эта формула определяет, таким образом, магнитную составляющую поля основного излучателя. Найдем теперь электрический поверхностный ток  $\mathbf{K}$ , индуцированный этим полем на переотражающем плоском зеркале. Сделаем это в приближении Кирхгофа, т. е. учтем только «равномерную» составляющую тока, пренебрегая краевыми эффектами, что вполне допустимо в нашем случае (см. (1)). При этом получим

$$\mathbf{K} = 2[\mathbf{Hn}]; \quad K = (\omega\mathcal{E}/2) \int_{-a}^a \mathcal{E}(y) H_0^{(2)}(kR) dy. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — нормаль к зеркалу (рис. 1);

$$R = \sqrt{(d + \xi \cos \alpha)^2 + (\xi \sin \alpha - y)^2}, \quad -b \leq \xi \leq b. \quad (5a)$$

Зная распределение тока на переотражателе, легко определить поле, создаваемое им в дальней зоне [4]:

$$\hat{H} = \hat{H}_z = \frac{k}{\sqrt{8\pi}} e^{i(\pi/4)} \frac{e^{-ikR_0}}{\sqrt{kR_0}} F(\varphi), \quad (6)$$

где

$$F(\varphi) = \sin \varphi \int_{-b}^b K(\xi) e^{ik\xi \cos \varphi} d\xi \quad (6a)$$

— диаграмма направленности;  $R_0$  — расстояние от центра переотражателя до точки наблюдения;  $\varphi$  — угол между плоскостью переотражателя и радиус-вектором  $\mathbf{R}_0$ .

Подставляя в (6a) значение  $K$  из (5), найдем, меняя порядок интегрирования,

$$F(\varphi) = (\omega\epsilon/2) \sin \varphi \int_{-a}^a \mathcal{E}(y) \int_{-b}^b H_0^{(2)}(kR) e^{ik\xi \cos \varphi} d\xi dy.$$

Вводя обозначение

$$G(y, \varphi) = (\omega \varepsilon / 2) \int_{-b}^b H_0^2(kR) e^{ikh\xi \cos \varphi} d\xi, \quad (7)$$

где  $R$  определяется формулой (5а), запишем диаграмму в окончательном виде:

$$F(\varphi) = \sin \varphi \int_{-a}^a \mathcal{E}(y) G(y, \varphi) dy. \quad (8)$$

Формула (8) определяет диаграмму направленности, создаваемую токами, индуцированными на переотражателе. Для того чтобы получить полную диаграмму всей системы в целом, к (8) необходимо добавить диаграмму первичного излучающего раскрыва (приведенную к соответствующему масштабу). Однако поскольку мы интересуемся здесь главным сектором, в котором поле, излученное непосредственно первичным раскрывом, пренебрежимо мало, можно ограничиться выражением (8).

Максимум модуля (8), т. е. главное направление этой диаграммы, зависит от закона изменения комплексной величины поля  $\mathcal{E}(y)$  в интервале  $-a < y < a$ . Так как нашей задачей является нахождение  $\mathcal{E}(y)$  из соображений получения максимума кнд в некотором направлении, то необходимо задать это направление. Естественно задать его в соответствии с геометрической оптикой, т. е. потребовать, чтобы главный максимум (8) лежал в направлении  $\varphi = \alpha$  (см. рис. 1). Из соображений симметрии такой же максимум выражение (8) будет иметь и в направлении  $\varphi = -\alpha$ , однако там он будет скомпенсирован излучением основного раскрыва  $2a$ .

Мощность, излучаемая в главном направлении, пропорциональна  $|F(\alpha)|^2$ . Полная мощность, излученная основным излучающим раскрывом, пропорциональна величине\*

$$W = \int_{-a}^a |\mathcal{E}(y)|^2 dy.$$

Очевидно, величина

$$L\{\mathcal{E}\} \equiv \frac{|F(\alpha)|^2}{W} = \sin^2 \alpha \frac{\left| \int_{-a}^a \mathcal{E}(y) G(y, \alpha) dy \right|^2}{\int_{-a}^a |\mathcal{E}(y)|^2 dy}, \quad (9)$$

являющаяся функционалом от  $\mathcal{E}$ , пропорциональна коэффициенту направленного действия всей телескопической системы в главном направлении.

Применяя неравенство Коши — Буняковского к числителю правой части (9), напишем цепь неравенств

$$L\{\mathcal{E}\} \leq \frac{\sin^2 \alpha \left\{ \int_{-a}^a |\mathcal{E}(y) G(y, \alpha)| dy \right\}^2}{\int_{-a}^a |\mathcal{E}(y)|^2 dy} \leq \sin^2 \alpha \int_{-a}^a |G(y, \alpha)|^2 dy.$$

\* При условии, что поле в раскрыве локально плоское.

Таким образом.

$$L\{\mathcal{E}\} \leq \sin^2 \alpha \int_{-a}^a |G(y, \alpha)|^2 dy.$$

Равенство здесь реализуется при

$$\mathcal{E}(y) = AG^*(y, \alpha), \quad (10)$$

где  $A$  — произвольная постоянная; звездочка — знак комплексного сопряжения. Простая подстановка (10) в выражение (9) для  $L\{\mathcal{E}\}$  убеждает нас в справедливости сказанного. Следовательно, (10) есть оптимальное распределение поля в раскрыве основного излучателя, обеспечивающее максимум функционала  $L$ , а значит и кнд системы.

Подставляя (7) и (5а) в (10), получим развернутое выражение для оптимального распределения

$$\mathcal{E}_{\text{опт}} = A \int_{-b}^b H_0^{(1)}(k \sqrt{(d + \xi \cos \alpha)^2 + (y - \xi \sin \alpha)^2}) e^{-ik\xi \cos \alpha} d\xi. \quad (11)$$

Следует подчеркнуть, что это распределение зависит от угла наклона  $\alpha$  переотражателя. Значение  $L\{\mathcal{E}_{\text{опт}}\}$  найдем, подставляя (10) в (9),

$$L\{\mathcal{E}_{\text{опт}}\} = \sin^2 \alpha \int_{-a}^a |G(y, \alpha)|^2 dy. \quad (12)$$

Определим также  $L$  для обычного синфазного спадающего к краям распределения

$$\mathcal{E}_0 = A \cos \beta y. \quad (13)$$

При этом получим

$$L\{\mathcal{E}_0\} = \frac{2\beta \sin^2 \alpha}{2\beta a + \sin(2\beta a)} \left| \int_{-a}^a \cos(\beta y) G(y, \alpha) dy \right|^2. \quad (14)$$

Относительный кнд телескопической системы с оптимальным распределением по сравнению с системой с распределением (13) очевидно равен

$$D = \frac{L\{\mathcal{E}_{\text{опт}}\}}{L\{\mathcal{E}_0\}} = \frac{2\beta a + \sin(2\beta a)}{2\beta} \frac{\int_{-a}^a |G(y, \alpha)|^2 dy}{\left| \int_{-a}^a \cos(\beta y) G(y, \alpha) dy \right|^2}. \quad (15)$$

Для того чтобы перейти в полученных выражениях к приближению, которое обычно применяется в зоне Френеля, используем асимптотические формулы для  $H_0^{(1)}(kR)$  и  $H_0^{(2)}(kR)$ , положив в фазе вместо (5а)

$$R \simeq d + \xi \cos \alpha - \xi \frac{y}{d} \sin \alpha + \frac{\xi^2}{2d} \sin^2 \alpha + \frac{y^2}{2d},$$

а в знаменателе  $R \simeq d$ .

Тогда получим после элементарных выкладок \*

$$H_0^{(1,2)}(kR) \simeq A e^{\pm ik[(\xi \sin \alpha - y)^2/2d]} e^{\pm ik\xi \cos \alpha}, \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_{\text{опт}} = A \int_{-\hat{b}}^{\hat{b}} e^{ik[(\xi - y)^2/2d]} d\xi; \quad \hat{b} = b \sin \alpha; \quad (17)$$

\* Буквой  $A$  обозначаются различные не существенные для наших расчетов постоянные.

$$D = \frac{2\beta a + \sin(2\beta a)}{2\beta} \frac{\int_{-a}^a \left| \int_{-\hat{b}}^{\hat{b}} e^{-ik[(\xi-y)^2/2d]} d\xi \right|^2 dy}{\left| \int_{-a}^a \cos(\beta y) \int_{-\hat{b}}^{\hat{b}} e^{-ik[(\xi-y)^2/2d]} d\xi dy \right|^2}. \quad (18)$$

Интегралы по  $\xi$  выражаются через интегралы Френеля

$$\int_{-\hat{b}}^{\hat{b}} e^{\mp ik[(\xi-y)^2/2d]} d\xi = \sqrt{\pi d/k} \{ [C(t_2) + C(t_1)] \mp i[S(t_2) + S(t_1)] \}, \quad (17a)$$

где

$$C(x) + iS(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x e^{it^2} dt;$$

$$t_1 = \sqrt{k/2d}(\hat{b} + y); \quad t_2 = \sqrt{k/2d}(\hat{b} - y).$$

Из формулы (17) (или (17a)) следует, что характер оптимального распределения  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$  зависит от размера переотражающего зеркала  $2b$  и от его угла наклона  $\alpha$ , так как  $\hat{b} = b \sin \alpha$ . Поэтому при повороте зеркала следует, вообще говоря, менять распределение источников на основном излучающем раскрыве. С другой стороны легко видеть, что распределение (17) на последнем не зависит от его размера  $2a$ . Это следует понимать в том смысле, что увеличение раскрыва не меняет характера распределения  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$  на его первоначальной части.

## 2. ВТОРОЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В «ПРИБЛИЖЕНИИ ФРЕНЕЛЯ»

Основные результаты (в приближении, справедливом для зоны Френеля) могут быть получены также при несколько иной, отличной от предыдущей, постановке задачи. Для перископической системы выходным излучающим раскрывом является переотражающее зеркало. Будем рассматривать последнее как самостоятельную антенну с плоским раскрывом. Для таких систем, как известно, оптимальным для получения максимального кнд является (если исключить «сверхнаправленный» режим) равномерное синфазное распределение источников в плоском раскрыве антенны, когда максимум нормален к нему, и линейное распределение фазы  $\psi = -k\xi \cos \alpha$  ( $-b \leq \xi \leq b$ ), когда максимум образует с нормалью угол ( $90^\circ - \alpha$ ). Поэтому можно сразу написать оптимальное распределение для тока  $K$  на переотражателе:

$$K = A e^{-ik\xi \cos \alpha}. \quad (19)$$

Отличие от постановки задачи, данной в § 1, заключается по существу в том, что в § 1 кнд нормируется к полной мощности, излучаемой основным раскрывом  $2a$ , а здесь — к мощности, перехватываемой переотражающим зеркалом  $2b$ . Подставляя в (19) вместо  $K$  его значение из формулы (5), получим интегральное уравнение для оптимального распределения поля



$\mathcal{E}$  в раскрытие первичного излучателя

$$\int_{-a}^a \mathcal{E}(y) H_0^{(2)}(kR) dy = A e^{-ik\xi \cos \alpha}, \quad -b \leq \xi \leq b.$$

В приближении (16) придадим этому уравнению вид

$$\int_{-a}^a \mathcal{E}(y) e^{-i(k/2d)(\xi \sin \alpha - y)^2} dy = A, \quad -b \leq \xi \leq b. \quad (20)$$

Вводя обозначения

$$\Phi(y) = \mathcal{E}(y) e^{-i(k/2d)y^2}, \quad \hat{b} = b \sin \alpha, \quad (21)$$

сведем (20) к уравнению, аналогичному фигурирующему в теории синтеза линейной антенны

$$\int_{-a}^a \Phi(y) e^{i(k/d)\xi y} dy = A e^{i(k/2d)\xi^2}, \quad -\hat{b} \leq \xi \leq \hat{b}. \quad (22)$$

Так как правая часть его не принадлежит к классу  $W_\sigma$  ( $\sigma = ka/d$ ), то оно, вообще говоря, не имеет решения [5]. Однако можно все же говорить о его решении, например, в следующем смысле. Будем называть

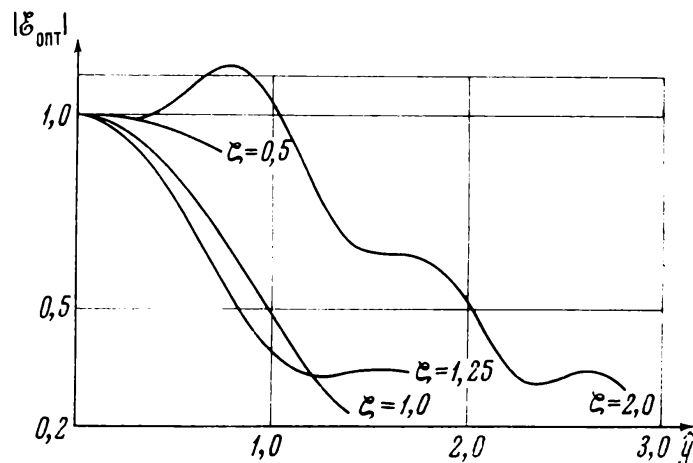


Рис. 2

«решением» (22) функцию  $\Phi(y)$ , для которой левая часть (22) наилучшим образом аппроксимирует правую в смысле среднеквадратичного приближения на всей действительной оси. При этом мы будем считать, что правая часть продолжена нулем на всю действительную ось, левая же часть, как это видно из (22), имеет смысл для любых  $\xi$ . Как известно [5], такое решение получается в результате применения обратного преобразования Фурье к правой части (22)

$$\Phi(y) = A \int_{-\hat{b}}^{\hat{b}} e^{i(k/2d)(\xi^2 - 2\xi y)} d\xi. \quad (23)$$

Переходя здесь к прежним обозначениям (см. (21)), найдем окончательно

$$\mathcal{E}(y) = A \int_{-\hat{b}}^{\hat{b}} e^{i(k/2d)(y-\xi)^2} d\xi.$$

Мы получили выражение для оптимального распределения поля, тождественное найденному выше (формула (17)) при несколько иной постановке задачи. Таким образом, в рассматриваемом приближении оптимальное

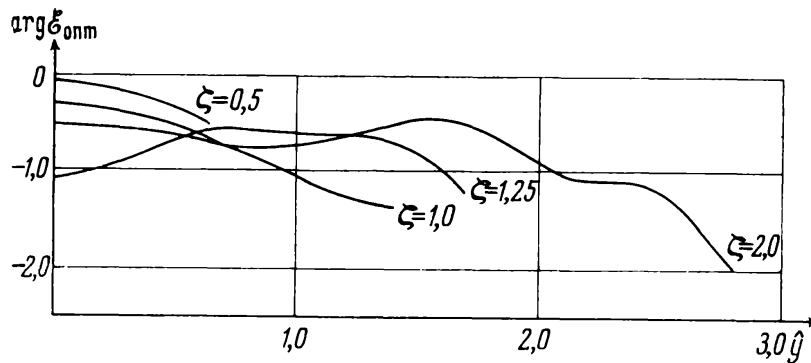


Рис. 3

распределение источников на основном излучающем раскрыве должно обеспечивать равномерное распределение тока с линейным законом изменения фазы (19) на переотражающем зеркале.

По формулам (17) и (17а) построены кривые модуля и фазы оптимального распределения  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$  в функции аргумента  $\hat{y} = \sqrt{k/2d} y$  для различных значений параметра  $\zeta = \sqrt{k/2d} \hat{b}$  (рис. 2 и 3). На рис. 4, 5, 6 при-

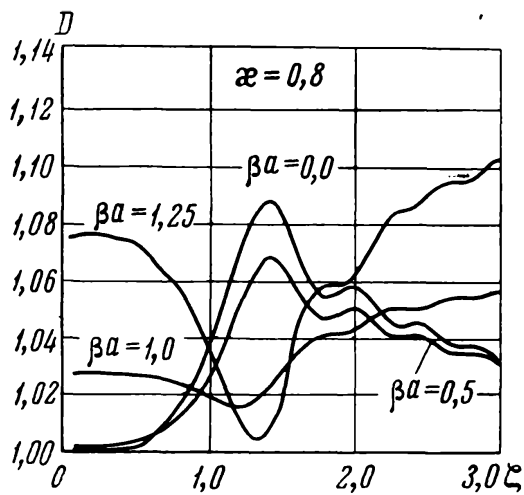


Рис. 4

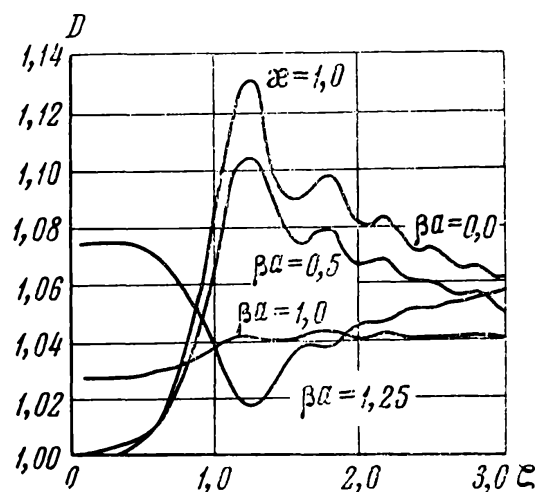


Рис. 5

ведены кривые для относительного кнд (формула (18)) в функции параметра  $\zeta$  для различных значений  $\beta$  и  $\kappa = a/\hat{b}$ .

Все кривые рассчитаны\* на электронной вычислительной машине «Урал-2».

Кривые для  $|\mathcal{E}_{\text{опт}}|$  приведены к единице в центре раскрыва ( $\hat{y} = 0$ ), и поскольку  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$  — четная функция  $\hat{y}$  (см. (17) и (17а)), на рис. 2 и 3 изображены только половины распределений  $|\mathcal{E}_{\text{опт}}|$  и  $\arg \mathcal{E}_{\text{опт}}$ , соответствующие положительным значениям  $\hat{y}$ . Интервал изменения аргумента

\* Расчетами руководила М. Г. Белкина, за что автор выражает ей свою признательность.

$\hat{y}$ , для которого построены законы распределения  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$ , выбран разным для кривых, соответствующих различным параметрам  $\zeta$ . Это явилось следствием того, что максимальное значение  $\kappa$  принято при расчете всех кривых (рис. 2, 3) постоянным и равным 1,4. Поскольку  $\hat{y}_{\text{макс}} = \sqrt{k/2da}$ , учитывая, что  $\zeta = \sqrt{k/2d\hat{b}}$ , найдем  $\hat{y}_{\text{макс}} = \kappa\zeta$ , и при разных  $\zeta$  и  $\kappa = 1,4$  получим разные интервалы  $0 \leq \hat{y} \leq \hat{y}_{\text{макс}}$ . Ход всех кривых для модуля

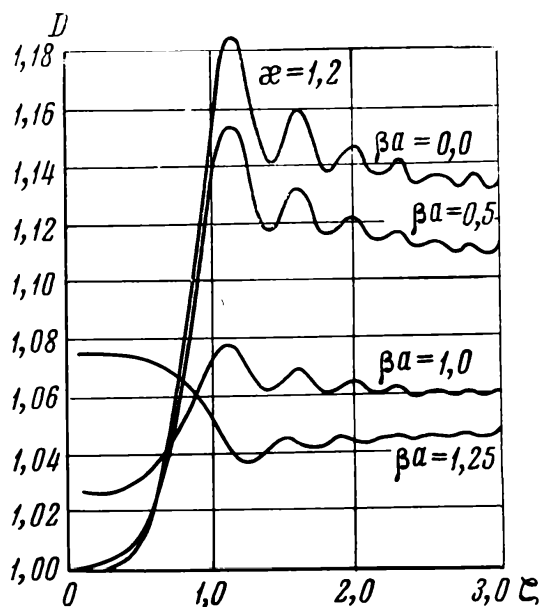


Рис. 6

и фазы  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$  достаточно плавный и в общем спадающий от центра к краям раскрыва (с небольшими осцилляциями).

Напомним, что, как уже говорилось выше, каждой кривой, изображенной на рис. 2 и 3, можно пользоваться при соответствующей  $\zeta$  для различных значений  $\sqrt{k/2d}a$ , удовлетворяющих условию  $\sqrt{k/2d}a \leq 1,4\zeta$ . При этом часть кривой, лежащей вне отрезка  $0 \leq \hat{y} \leq \sqrt{k/2d}a$ , следует просто отбрасывать. Анализируя кривые для относительного кнд (рис. 4, 5, 6), легко видеть, что при выборе в качестве эталона перископической системы с косинусоидальным, резко спадающим к краям, распределением  $\beta a = 1$  и  $\beta a = 1,25$  выигрыш при использовании оптимального распределения оказывается меньше 8—10%. Это

объясняется тем, что оптимальное распределение также является спадающим.

Для эталона с равномерным распределением или близким к нему ( $\beta a = 0$  и  $\beta a = 0,5$ ) выигрыш получается, естественно, более значительным и растет по мере увеличения  $\kappa$ . Так при  $\kappa = 1,2$  он достигает 16—19%. При дальнейшем увеличении  $\kappa (= a/\hat{b})$  выигрыш будет увеличиваться, поскольку растет размер основного раскрыва  $2a$  по сравнению с вертикальной проекцией переотражателя  $2\hat{b}$ . У эталона с равномерным распределением при этом значительная часть мощности пройдет мимо переотражателя, и применение оптимального распределения, при котором почти вся мощность фокусируется на переотражателе, приведет к дальнейшему росту относительного кнд. Кривые  $D(\hat{\zeta})$ , соответствующие  $\beta a = 0$  и  $\beta a = 0,5$ , для всех  $\kappa$  приближаются к единице \* при  $\zeta \rightarrow 0$ , так как  $\mathcal{E}_{\text{опт}}$  стремится при этом к равномерному.

Методами, примененными в предыдущих двух параграфах, может быть рассмотрена также задача о трехмерной перископической системе, например о круглом излучающем раскрыве и круглом плоском переотражающем зеркале.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Покрас, Перископические антенны и беспроводные линии, Связьиздат, 1963.
2. Б. З. Каценеленбаум, Успехи физ. наук, 1964, 83, 1, 81.
3. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. I, Изд. ВВИА им. Жуковского, 1955.
4. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, Изд. ВВИА им. Жуковского, 1959.
5. Я. Н. Фельд, Л. Д. Бахрах, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 2, 187.

Поступила в редакцию  
8 VII 1966

\* Для  $\beta a = 0$  точно, а для  $\beta a = 0,5$  почти к единице.

УДК 534.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
(ВТОРОГО РОДА) ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ  
НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 20 II 1967)

В работе (1) дан метод сведения задач дифракции волн на незамкнутых бесконечно тонких экранах к интегральным уравнениям второго рода

$$w(q) = \int_S K(g, q) w(g) dg + \Phi(q), \quad q \in S. \quad (1)$$

Здесь  $S$  — поверхность экрана (в общем случае состоящая из нескольких достаточно гладких поверхностей);  $q$  и  $g$  — точки на  $S$ ;  $dg$  — элемент площади в точке  $g$ ;  $w$  — неизвестный «ток» на  $S$ ;  $K$  и  $\Phi$  — заданные функции. Решение  $w(q)$  ищется в классе функций, непрерывных на открытой поверхности  $S$ , поведение которых при стремлении к краю  $S$  соответствует условиям Майкснера на ребре для соответствующей задачи.

Из вывода уравнения (1) следует, что ток  $w$  на  $S$  исходной дифракционной задачи удовлетворяет ему. Поэтому, учитывая, что последняя однозначно разрешима, для доказательства эквивалентности задачи решения уравнения (1) и исходной достаточно показать, что (1) имеет только одно решение. Для этого следует доказать, что соответствующее однородное уравнение

$$w(q) = \int_S K(g, q) w(g) dg, \quad q \in S, \quad (2)$$

имеет только нулевое решение.

§ 1. Скалярная задача с краевыми условиями Дирихле. Если первичное поле  $\psi_0(q)$  дифрагирует на  $S$ , краем которой является контур  $L$ , то вторичное поле  $\psi(q)$  удовлетворяет уравнениям\*

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0, \quad \psi^+ = \psi^- = -\psi_0 \text{ на } S, \quad (3)$$

принципу излучения и условиям Майкснера на  $L$ . Для этой задачи (см. (1), (9) и (10))

$$\Phi(q) = -4 \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp \right)^\pm, \quad w = \frac{\partial \psi^+}{\partial n} - \frac{\partial \psi^-}{\partial n}; \quad (4)$$

$$K(g, q) = 4 \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} f(p, g) dp \right)^\pm, \quad f(q, p) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|}. \quad (5)$$

Докажем, что (2) при  $\Phi$  и  $K$ , определяемых выражениями (4) и (5), имеет только нулевое решение.

Рассуждая от обратного, будем считать, что (2) имеет некоторое решение  $w_0(q)$ . Введем функцию

$$\Phi(q) \equiv - \int_S w_0(p) f(p, q) dp. \quad (6)$$

\*  $\psi^+$ ,  $\partial\psi^+/\partial n$  и  $\psi^-$ ,  $\partial\psi^-/\partial n$  — предельные значения при переходе на  $S$  со стороны, куда направлен  $n$ , и с противоположной. Если они одинаковы, то иногда будем писать  $F^\pm$ ,  $\partial F^\pm/\partial n$ .

Она, очевидно, удовлетворяет уравнению  $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$  и условию  $\varphi^+ = \varphi^- = \varphi$  на  $S$  (ср. с (3))\*. Поэтому, повторяя преобразования, проделанные в (1), для получения (1), найдем

$$w_0(q) = \int_S K(g, q) w_0(g) dg + \Phi_1(q), \quad q \in S. \quad (7)$$

Здесь  $\Phi_1$  отличается от  $\Phi$  заменой  $\varphi_0(p)$  на  $-\varphi(p)$ , поскольку в этом заключается различие между краевыми условиями для  $\psi$  и  $\varphi$  на  $S$  (см. выше). Так как  $w_0(q)$  по определению удовлетворяет уравнению (2), то из (7) следует, что (см. (4))

$$\Phi_1(q) \equiv 4 \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \varphi(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp \right)^\pm = 0, \quad q \in S. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$V(q) \equiv \int_S \varphi(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp. \quad (9)$$

Для нее справедливы, как это следует из (8), условия  $\partial V^+ / \partial n = \partial V^- / \partial n = 0$  на  $S$ . Таким образом,  $V$  является волновым потенциалом двойного слоя с нулевым краевым условием типа Неймана на  $S$  и вследствие теоремы единственности  $V(q) \equiv 0$ . Отсюда следует, что и  $\varphi(p) = 0$  на  $S$ , поскольку скачок (9) при переходе через  $S$  равен  $\varphi$  в точке перехода. Функция  $\varphi(q)$  — волновой потенциал простого слоя (см. (6)) и, как только что было показано, удовлетворяет краевым условиям  $\varphi^+ = \varphi^- = \varphi = 0$  на  $S$ . Поэтому, на основании теоремы единственности  $\varphi(q) \equiv 0$  всюду. Из последнего немедленно вытекает, что  $w_0(q) = 0$  на  $S$ , ибо  $w_0(q)$  равно скачку нормальной производной (6) при переходе через  $S$ . Таким образом, (2) не имеет решения, отличного от нуля.

§ 2. Скалярная задача с краевыми условиями Неймана. Эта задача отличается от предыдущей только заменой условий (3) на следующие:

$$\partial \psi^+ / \partial n = \partial \psi^- / \partial n = -\partial \psi_0 / \partial n \quad \text{на } S \quad (10)$$

и тем, что теперь  $w = \psi^+ - \psi^-$ . Уравнение (1) для этой задачи имеет ядро, отличающееся от ядра (5) только перестановкой аргументов, и свободный член вида (см. (1))

$$\Phi(q) = 4 \int_S \frac{\partial \psi_0}{\partial n_p} f(q, p) dp. \quad (11)$$

Полагая что (2) для рассматриваемой задачи имеет решение  $w_0(q)$ , введем функцию

$$\varphi(q) \equiv \int_S w_0(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp. \quad (12)$$

$\varphi(q)$  — волновой потенциал двойного слоя и, следовательно, удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию

$$\partial \varphi^+ / \partial n = \partial \varphi^- / \partial n = \partial \varphi / \partial n \quad \text{на } S. \quad (13)$$

Поэтому для  $w_0$  также справедливо уравнение (1), с тем отличием, что в свободном члене (11)  $\partial \psi_0 / \partial n_p$  заменено на  $-\partial \varphi / \partial n_p$ , в соответствии с аналогичным отличием (10) и (13). Так как  $w_0$ , кроме того, по определению, удовлетворяет (2), то соответствующий свободный член (см. (11)) должен обращаться в нуль

$$-4 \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n_p} f(q, p) dp = 0 \quad \text{на } S. \quad (14)$$

\* Функция  $\varphi(q)$  удовлетворяет также принципу излучения и условию Майксна на  $L$ . Это всегда будет иметься в виду ниже при рассмотрении волновых потенциалов простого и двойного слоев.

$$V(q) = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n_p} f(q, p) dp, \quad (15)$$

являющуюся волновым потенциалом простого слоя и удовлетворяющую, учитывая (14), условию  $V^+ = V^- = 0$  на  $S$ .

На основании соответствующей теоремы единственности отсюда следует, что  $V(q) \equiv 0$  всюду. Из последнего заключаем, что  $\partial \varphi / \partial n = 0$  на  $S$ , поскольку скачок нормальной производной (15) при переходе через  $S$  равен  $\partial \varphi / \partial n$ . Функция  $\varphi(q)$  (см. (12)) является волновым потенциалом двойного слоя и, как только что было показано, удовлетворяет (см. (13)) условию

$$\partial \varphi^+ / \partial n = \partial \varphi^- / \partial n = \partial \varphi / \partial n = 0 \quad \text{на } S.$$

Поэтому, на основании теоремы единственности,  $\varphi(q) \equiv 0$  всюду. Из этого следует, что  $w_0(q) = 0$  на  $S$ , так как  $w_0$  равно скачку  $\varphi(q)$  (см. (12)) при переходе через  $S$ . Следовательно, и для настоящей задачи (2) не имеет решения, отличного от нуля.

§ 3. Скалярная задача с краевыми условиями Дирихле; интегральное уравнение с ядром, связанным с функциями Грина. Эта задача, тождественная рассмотренной в § 1, может быть также сведена к уравнению (1) с ядром и свободным членом (см. (1) (18a) и (21a))

$$K(g, q) = - \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 (G^i + G^e)}{\partial n_p \partial n_q} f(g, p) dp, \quad \Phi(q) = - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0(p) \frac{\partial (G^i + G^e)}{\partial n_p} dp \right)^{\pm}. \quad (16)$$

Здесь  $\Sigma$  — некоторая поверхность, дополняющая  $S$  до замкнутой, в частности она может уходить на бесконечность. Поверхность  $S + \Sigma$  делит пространство на две области  $v_i$  (куда направлен  $\mathbf{n}$ ) и  $v_e$ .  $G^i(p, q)$  и  $G^e(p, q)$  — функции Грина уравнения Гельмгольца для этих областей с нулевыми граничными условиями. Полагая, что и в этом случае (2) имеет решение  $w_0(q)$ , построим функцию типа (6). Тогда, повторяя рассуждения § 1, придем к равенству типа (8), которое теперь, учитывая выражение (16) для свободного члена, запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \varphi(p) \frac{\partial (G^i + G^e)}{\partial n_p} dp \right)^{\pm} = 0, \quad q \in S. \quad (17)$$

Определим в  $v_i + v_e$  функцию  $V(q)$  при помощи равенств

$$V(q) = \int_S \varphi(p) \frac{\partial G^i}{\partial n_p} dp, \quad q \in v_i; \quad V(q) = - \int_S \varphi(p) \frac{\partial G^e}{\partial n_p} dp, \quad q \in v_e. \quad (18)$$

Она, очевидно, удовлетворяет в  $v_i + v_e$  уравнению Гельмгольца и условиям

$$V^+ = V^- = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad V^+ = V^- \quad \text{на } S, \quad \partial V^+ / \partial n = \partial V^- / \partial n \quad \text{на } S.$$

Первые два следуют из того, что  $G^i$  и  $G^e$  являются функциями Грина для областей  $v_i$  и  $v_e$ , а последнее вытекает из (17). Поэтому, учитывая теорему единственности,  $V(q) \equiv 0$  всюду. С другой стороны, из (18) следует, что  $V^+ = V^- = \varphi$  на  $S$ , значит, и  $\varphi(q) = 0$  при  $q \in S$ . Повторяя теперь рассуждения последнего раздела § 1, убеждаемся что и  $w_0(q) = 0$  на  $S$ , т. е. и в рассматриваемом случае (2) имеет только нулевое решение.

§ 4. Дифракция электромагнитной волны. Для этой задачи ток  $w$  на  $S$  удовлетворяет векторному уравнению типа (1), в котором

$$\Phi(q) = \frac{1}{i\omega} \left[ n_q \int_S \{H^i(q, p; P) + H^e(q, p; P)\} dp \right]. \quad (19)$$

Здесь  $P = [n_p E^0(p)]$ ;  $E^0$  — электрический вектор первичной, падающей на  $S$  волны;  $H^i(q, p; P)$  и  $H^e(q, p; P)$  — магнитные векторы вспомогательных полей, возбуждаемых в  $v_i$  и  $v_e$  (см. § 3) соответственно; три аргумента у них означают:  $q$  — точку наблюдения,  $p$  — точку, где расположен источник — магнитный диполь с моментом  $P$ . При расчете этих полей поверхность  $S + \Sigma$  предполагается идеально проводящей. Полагая вновь, что (2) имеет решение  $w_0$ , введем вектор

$$\vec{\mathcal{E}}(q) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \int_S \{k^2 w_0(g) - (w_0(g) \nabla_g) \nabla_p\} f(g, p) dg. \quad (20)$$

Для него, очевидно, справедливы условия  $[n\vec{\mathcal{E}}^+] = [n\vec{\mathcal{E}}^-] = [n\vec{\mathcal{E}}]$  на  $S$ . Поэтому, повторяя рассуждения § 4 работы (1), можно показать, что  $w_0$  удовлетворяет (1) с тем отличием, что в свободном члене (19)  $E^0$  должно быть заменено на  $-\vec{\mathcal{E}}$ . Учитывая, кроме того, что  $w_0$  удовлетворяет (2), получим (см. (19)) равенство

$$\left[ n_q \int_S \{H^i(q, p; P_1) + H^e(q, p; P_1)\} dp \right] = 0, \quad q \in S, \quad P_1 = -[n_p \vec{\mathcal{E}}(p)]. \quad (21)$$

Определим теперь в  $v_i + v_e$  поле  $e, h$ :

$$\begin{aligned} e(q) &= \int_S E^i(q, p; P_1) dp, & h(q) &= \int_S H^i(q, p; P_1) dp, & q \in v_i; \\ e(q) &= - \int_S E^e(q, p; P_1) dp, & h(q) &= - \int_S H^e(q, p; P_1) dp, & q \in v_e. \end{aligned} \quad (22)$$

Оно, очевидно, удовлетворяет краевым условиям

$$[ne^+] = [ne^-] = 0 \text{ на } \Sigma, \quad [ne^+] = [ne^-] \text{ на } S, \quad [nh^+] = [nh^-] \text{ на } S.$$

Первые два являются следствием специального выбора полей  $E^i, H^i$  и  $E^e, H^e$ , а последнее вытекает из (21). Поэтому, на основании теоремы единственности, поле  $e(q) = h(q) \equiv 0$  всюду. Отсюда сразу заключаем, что и  $[n\vec{\mathcal{E}}] = 0$  на  $S$ , поскольку из верхней строки (22) следует (2), что  $[ne^+] = [ne^-] = -i\omega P_1 = i\omega [n\vec{\mathcal{E}}]$  на  $S$ .  $\vec{\mathcal{E}}$  (см. (20)) есть электрический вектор поля, регулярного всюду вне  $S$  и удовлетворяющего условию  $[n\vec{\mathcal{E}}] = 0$  на  $S$ . Следовательно, это поле тождественно равно нулю, а значит, и ток  $w_0(q) = 0$  на  $S$ , так как он совпадает со скачком магнитного вектора при переходе через  $S$ .

Центральный научно-исследовательский  
радиотехнический институт

Поступило  
13 II 1967

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 11, 7, 1159 (1966). <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ЖЭТФ, 14, в. 9, 330 (1944).

\* Формулы (31) из (1) легко приводятся к виду (19).

УДК 621.396.67(091)

**РАЗВИТИЕ ТЕХНИКИ АНТЕННЫХ УСТРОЙСТВ***Л. Д. Вахрах, А. А. Пистолькорс, Я. Н. Фельд*

Дается краткий обзор достижений советской науки и техники в области антенн за 50 лет. В первой части рассматривается развитие теории антенн, в которую советским ученым удалось внести существенный вклад.

В связи с наличием обзорной статьи по теории за 40 лет [1] преимущественное внимание уделяется работам, выполненным за последние 10 лет. Во второй части излагаются основные этапы развития советской техники антенных устройств в области радиовещательных и телевизионных антенн и антенн для радиоастрономии.

Описание этих антенн достаточно ярко характеризует общий уровень советской антенной техники и темпы ее развития.

Вместе с бурным ростом советской радиотехники быстро развивалась и отечественная техника антенных устройств. Необходимой предпосылкой для успешного развития этой области радиотехники является овладение теорией антенн. Здесь советские ученые имеют немалые заслуги. Велика роль наших ученых и инженеров и в разработке и строительстве новых, подчас уникальных, антенных сооружений. Цель настоящей статьи — дать сжатый обзор наших достижений в области теории и техники антенн за 50 лет, прошедших со дня Великой Октябрьской социалистической революции.

**I. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ АНТЕНН**

Исключительно большой объем материала и наличие работы [1], освещающей достижения советской теоретической науки в области антенн за период до 1957 г., побудили авторов уделить преимущественное внимание развитию теории антенн за последнее десятилетие.

В статье в первую очередь рассматриваются разделы теории, имеющие общий характер. Таковы разделы: проблема синтеза антенн, прямые и вариационные методы теории антенн, вопросы дальнейшей разработки теории тонких и толстых вибраторов. Затем излагаются основные достижения теории антенн, находящих сейчас наибольшее применение. К ним относятся зеркальные антенны и фазированные решетки. К этой группе вопросов примыкает и теория антенных обтекателей. Специальный раздел посвящен статистической теории антенн, играющей большую роль в вопросах создания современных антенн с их высокими техническими показателями. Далее рассматриваются вопросы теории антенн, основанных на обработке информации, полученной от составляющих их элементов, и методы такой обработки.

В заключение этой части дается обзор работ по теории перископических антенных систем, открытых линий, резонаторов и антенн оптического диапазона волн.



## ТЕОРИЯ СИНТЕЗА АНТЕНН

Синтезом антенн, как известно, принято считать класс задач, связанных с нахождением законов распределения излучающих источников — токов и полей в антенне, обеспечивающих создание заданной диаграммы направленности. Вопросы синтеза антенн всегда находились в центре внимания отечественных ученых. Достаточно указать на основополагающие работы Рамма, Пистолькорса, Вольмана, Фрадина, которые еще в конце тридцатых — сороковых годах сформулировали математически основные задачи синтеза, наметили методы их решения, такие, как метод парциальных диаграмм, метод интеграла Фурье, а также выявили некоторые характерные моменты, с которыми приходится иметь дело при решении проблемы синтеза, например, явлением «сверхнаправленности». В дальнейшем поток работ по решению общих и частных задач синтеза не ослабевал ни у нас, ни за рубежом. Примечательно, что многие работы последнего времени посвящены уточнению принципиальных положений теории синтеза, но, пожалуй, основное внимание все же было направлено на решение новых задач синтеза, ибо сама проблема синтеза сильно расширилась. Во-первых, ставились задачи синтеза не только применительно к линейным антеннам, но и к антеннам других конфигураций: криволинейным, поверхностным и даже объемным. Очевидно, что эти задачи имеют большое значение не только научное, но и практическое. Не менее важный комплекс задач синтеза антенн был связан в последнее время с созданием оптимальных диаграмм направленности, наилучшим образом удовлетворяющим различным практическим требованиям. Эти задачи особенно актуальны в связи с оптимизацией радиотехнических и радиолокационных устройств. Наконец, в самое последнее время были сформулированы задачи синтеза, существенно отличающиеся от тех, с которыми имели дело раньше. Речь идет о синтезе фазовых диаграмм и о так называемых смешанных задачах синтеза, когда задано в антенне либо распределение амплитуд токов (полей) либо фазовое их распределение. В статьях Я. Н. Фельда, Л. Д. Бахраха [2] и А. А. Пистолькорса [3] дан обзор современного состояния синтеза антенн. В превосходной монографии Е. Г. Зелкина [4] отражены многие актуальные вопросы современной теории синтеза антенн. Для линейной антенны с непрерывным распределением тока вдоль нее найдены условия точно реализуемых диаграмм и развиты методы расчета распределения тока, обеспечивающие их создание. Е. Г. Зелкин [4], Л. Б. Тартаковский [5] и В. П. Яковлев [6] установили, что для точной реализации при помощи линейной антенны диаграмма направленности должна быть представлена целой функцией конечной степени с интегрируемым квадратом вдоль действительной оси. Весьма интересная работа, посвященная этому же вопросу, опубликована Ковачем и Солимаром [176]. Заданная реализуемая диаграмма определяет не только распределение тока, но и длину антенны. В. И. Поповкин [7] получил в явном виде выражение для длины антенны, формирующей заданную диаграмму. Однако диаграммы часто задаются в пределах вещественных углов, исходя из технических требований, и, как правило, не принадлежат к классу точно реализуемых. В этих случаях возникает задача хорошей аппроксимации заданной диаграммы реализуемой. Здесь задача не однозначна, и для ее решения применяются различные методы. Л. Б. Тартаковский [5], например, использует в основе метода преобразование Фурье и строит затем соответствующий итерационный процесс. Е. Г. Зелкин [8] последовательно использует систему парциальных диаграмм, каждая из которых просто реализуется, В. П. Яковлев [9] задачу решает с позиций теории целых функций. Продолжаются попытки

предложить новые системы функций для парциальных диаграмм (Б. М. Минкович [10, 11]). В то же время собственные функции интегрального уравнения линейной антенны — функции Матье, конечный ряд которых обеспечивает контролируемое минимальное среднеквадратичное отклонение от заданной диаграммы, используются еще мало из-за того, что они недостаточно протабулированы. В последние годы за рубежом для синтеза антенн применяются аналогичные функциям Матье сфероидальные функции [177].

На пути аппроксимации заданной диаграммы нас может подстергать неприятное явление сверхнаправленности, характеризуемое быстропеременным распределением токов с большими значениями амплитуд. Ряд последних работ [12, 13] показывает, что с явлением сверхнаправленности мы сталкиваемся не только тогда, когда стремимся чрезмерно увеличить кнд или сузить ширину диаграммы направленности, но и когда хотим неоправданно уменьшить боковые лепестки или чрезвычайно приблизиться к заданной (нереализуемой) диаграмме направленности. Для исключения «сверхнаправленных решений» интегрального уравнения антенн могут быть использованы методы теории некорректно поставленных задач математической физики [14].

Что касается синтеза диаграммы при помощи линейной системы дискретных излучателей, то условия, накладываемые на точно реализуемую диаграмму, достаточно просты. Для аппроксимационной задачи Е. Г. Зелкиным разработан метод, использующий интерполяционный полином [15], а В. И. Поповкин [16] путем исследования полксов соответствующих аналитических функций находит местоположение излучателей и комплексные амплитуды токов в них.

Вообще говоря, указанные методы синтеза дискретных линейных решеток применимы и для синтеза неэквидистантных решеток, которые в последнее время привлекают большое внимание [3]. Это обусловлено тем обстоятельством, что в случае неэквидистантных решеток при небольшом числе излучателей можно достаточно хорошо приблизиться к заданной диаграмме. Надо в этой связи выделить интересные работы Е. В. Бакланова, В. А. Покровского и Г. И. Сурдутовича [17], в которых предлагается рассчитывать неэквидистантную решетку при помощи соответствующей эквидистантной решетки, параметры которой известны, и работу Ю. М. Жидко [18]. За рубежом теории и расчетам неэквидистантных решеток уделяется большое внимание; развиты численные методы расчета таких решеток, изложенные, например, в работе Брюса и Инза [178].

Перейдем к задачам синтеза антенн других конфигураций и прежде всего к синтезу плоской антенны, теория которой была разработана в последние годы. В частности, Б. М. Минкович [19] при помощи теории целых функций определил условия, которым должна удовлетворять диаграмма направленности для того, чтобы она могла быть реализована плоским раскрывом, и показал, что она определяет и форму раскрыва. Метод расчета антенн с плоским раскрывом с учетом поляризации поля разработал Е. Г. Зелкин [20]. Законченный вид приобрела теория синтеза антенн с круглым раскрывом: она в большой мере аналогична теории синтеза линейной антенны. Л. Д. Бахрах и В. М. Гришина [21] решили задачу синтеза для осесимметричного случая, в дальнейшем Б. М. Минкович [22] и Е. Г. Зелкин [4] получили решение для общего случая. Задача синтеза плоского криволинейного излучателя для диаграмм, заданных в сечениях, перпендикулярных к плоскости излучателя, также решена Е. Г. Зелкиным [23] и С. Д. Кременецким [24]. Хуже обстоит дело с синтезом криволинейной антенны, для которой диаграмма задана в ее плоскости (задача синтеза направляющей цилиндрической антенны). Здесь являются обна-

деживающими работы В. И. Поповкина [25]; они основываются на использовании свойств аналитических функций, ибо сама задача синтеза антенны рассматривается им как граничная задача теории аналитических функций. Полезная работа выполнена Э. И. Крупицким [26] по синтезу круговых решеток. Вопросы синтеза объемного распределения тока по заданной диаграмме затронуты в работе В. Н. Дымского [27]. Однако общие задачи синтеза поля или тока на криволинейной поверхности исследованы еще мало.

Вопросам, посвященным синтезу оптимальных диаграмм направленности, в последние годы уделяется много внимания. Первая группа задач, связанных с нахождением оптимальных диаграмм, относится к определению диаграмм, обеспечивающих наименьший уровень бокового излучения при заданной ширине главного лепестка, и наоборот. Первая работа Дольфа [179]; использующая полиномы Чебышева для расчета таких диаграмм, относилась к случаю синфазных дискретных излучателей, когда расстояние между ними больше или равно полволны. Для случая, когда излучатели расположены на меньших расстояниях, была разработана методика расчета таких оптимальных диаграмм В. Л. Покровским [28], им же построена теория так называемых дольф-чебышевских антенн для общего случая, когда излучатели несинфазны [29, 30]. При создании теории синтеза оптимальных антенн были в полной мере использованы методы конструктивной теории функций, разработанные советской математической школой; в свою очередь работы по синтезу стимулировали чисто математические исследования, например, важный класс полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на двух отрезках, был исследован В. Л. Покровским [31]. Для антенн с непрерывным распределением тока — линейных и плоских — были исследованы так называемые квазиоптимальные диаграммы, обеспечивающие оптимизацию в смысле Дольфа — Чебышева и в то же время не приводящие к сверхнаправленности. Первыми работами были статьи И. Ф. Соколова и Д. Е. Вакмана [32] и Тейлора [180], позднее интересные исследования квазиоптимальных в дольф-чебышевском смысле диаграмм проведены Б. М. Минковичем с сотрудниками [33] и В. П. Яковлевым [9]. К теоретическим работам, посвященным проблеме уменьшения лепестков, относятся статьи В. И. Бекетова [34], В. Д. Кузнецова, В. К. Парамонова [35] и других.

За последние годы задачи синтеза оптимальных антенн были сильно расширены. Условия оптимизации касались и величины кнд, ставились условия оптимизации при неравномерном уровне боковых лепестков в различных угловых секторах, оптимизации диаграмм направленности специальной формы и т. д. Например, Л. Д. Бахрах [36] рассмотрел задачу наилучшего приближения к диаграмме косеканского типа при заданном кнд. Ю. М. Жидко решил несколько интересных задач по синтезу оптимальных антенн с различным уровнем боковых лепестков [37], антенн оптимизирующих отношения сигнала к шуму [38] и оптимизирующих определение угловой координаты объектов [39]. Теории синтеза оптимальной разностной диаграммы, используемой в моноимпульсной радиолокации, посвящена работа Э. И. Крупицкого [26]. Как видим, все эти задачи непосредственно связаны с практикой.

До последнего времени в основном интересовались амплитудными диаграммами направленности. Сейчас внимание исследователей привлекают также фазовые диаграммы. Выяснению свойств фазовых диаграмм и их синтезу посвящены работы А. Р. Вольперта [40], Е. Г. Зелкина [8], Л. Д. Бахраха [41] и других. В частности, в работах [44,5] показано, что, варьируя фазовую диаграмму, можно упростить распределение тока при синтезе антенны с заданной амплитудной диаграммой. Л. Б. Тар-

таковским и В. К. Тихоновой [42] была рассмотрена задача синтеза для случая, когда заданы амплитудная диаграмма направленности и распределение амплитуды поля в раскрыве. Эта задача относится к так называемым смешанным задачам синтеза антенн. Как уже было сказано, в случае смешанных задач синтеза задаются одна из характеристик диаграммы направленности (амплитудная или фазовая) и одно из распределений поля (амплитудное или фазовое) в антенне. Математически задачи эти весьма сложны, так как они сводятся к решению нелинейных интегральных уравнений. Некоторые вопросы теории смешанных задач синтеза даны в работах Л. Д. Бахраха, С. Д. Кременецкого, В. И. Троицкого [43, 175]. В последней работе решение смешанных задач синтеза производится вариационным методом с использованием последовательных приближений. Вариационный метод использовался и за рубежом в работе Проктора и Аблова [181]. Надо заметить, что разработка методов смешанных задач синтеза еще только начата.

### ПРЯМЫЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ АНТЕНН И ВОЛНОВОДОВ

К прямым методам относится широко применяемый в антенной технике (главным образом к вибраторным системам) метод наведенных эдс (см. обзорную статью [1]). Для щелевых систем в работах Я. Н. Фельда [78] был развит метод наведенных мдс.

Эти методы, в которых в качестве неизвестных фигурируют электрические или магнитные токи (напряжения) в клеммных сечениях вибраторов или щелей, являются, по существу, частными случаями прямого метода Галеркина, когда в последнем ограничиваются первым членом ряда. Методы наведенных эдс и мдс получили свое естественное развитие, применительно к антенным и волноводным задачам, в ряде работ, где они часто называются обобщенными методами наведенных эдс и мдс. По существу это методы типа Галеркина (Ритца), в которых неизвестное распределение токов или напряжений ищется в виде ряда по подходящей полной системе функций.

Применительно к системе отверстий или щелей, прорезанных в боковой поверхности волновода, возбуждаемого изнутри, обобщенный метод наведенных мдс подробно изложен в книге [79]. Ключевая часть задачи определения поля в подобной системе сводится к решению линейной алгебраической системы из  $M$  уравнений с  $M$  неизвестными. Последними являются амплитуды первых  $M$  распределений (некоторой бесконечной полной системы функций), при помощи которых аппроксимируется тангенциальная составляющая электрического поля на отверстиях. Коэффициенты при неизвестных имеют физический смысл наведенных проводимостей, а правые части уравнений — магнитодвижущих сил, что и обусловило название метода. Каждое распределение задается на всех отверстиях; в частном случае оно может отличаться от нуля только на одном из них. Число  $M$  может быть значительно больше числа отверстий  $N$ . При  $M \rightarrow \infty$  в ряде случаев можно получить точное решение задачи.

Подобный же прием был применен в работах [80—84] для нахождения характеристического уравнения фазовой скорости в диафрагмированных волноводах и цепочках резонаторов. При этом в работах [81, 84] доказана стационарность решения характеристического уравнения относительно вариаций распределения поля в отверстиях связи, а в работах [82, 83] применены разложения поля на отверстиях, каждый член которых удовлетворяет условиям Майкснера на контуре отверстий, что резко улучшает сходимость процесса. Таким способом в последних работах решена задача о симметричных волнах в круглом диафрагмированном волноводе и

получен большой расчетный материал, позволивший установить основные закономерности поведения фазовой скорости. Простой и обобщенный методы наведенных эдс применялись [85, 86] и для расчета фазовой скорости в трехмерных решетках металлических стержней (искусственный металлодиэлектрик). Интересно отметить, что в методе наведенных эдс и мдс переход от основного интегрального уравнения задачи к конечной системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами может быть произведен двумя способами:

1) подстановкой вместо тока его разложения в ряд по системе аппроксимирующих функций  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) с последующим умножением на одну из них  $\varphi_m$  ( $1 \leq m \leq M$ ) и интегрированием по основной области,

2) проведением тех же операций с тем отличием, что вместо умножения на  $\varphi_m$  производится умножение на комплексно-сопряженную величину  $\overline{\varphi_m}$ .

В первом случае мы приходим к системе уравнений с постоянными коэффициентами — наведенными сопротивлениями (или проводимостями), удовлетворяющими принципу взаимности  $Z_{mn} = Z_{nm}$  ( $Y_{mn} = Y_{nm}$ ), но не имеющими четкого энергетического смысла, т. е. не совпадающими с наведенными сопротивлениями (проводимостями), фигурирующими в формулах для мощности излучения.

Во втором случае эти коэффициенты имеют четкий энергетический смысл, но не удовлетворяют принципу взаимности. Очевидно, в случае, когда все функции  $\varphi_n$  вещественны, оба метода совпадают. Для комплексных  $\varphi_n$  преимущество одного из этих способов может быть установлено только в результате исследования вопросов сходимости решения при  $M \rightarrow \infty$ .

В теории антенно-волноводных систем применяются также вариационные методы. При этом используются два различных приема. Первый из них заключается в сведении рассматриваемой задачи к некоторой вариационной, т. е. к построению функционала, стационарное значение которого достигается на функции, являющейся решением исходной задачи. Эта функция находится обычно одним из прямых методов, чаще всего методом Ритца.

Для внешних и внутренних задач электродинамики подобный стационарный функционал был впервые построен Г. В. Кисунько [87]. При этом он исходил из интегрального уравнения рассматриваемой задачи. Различные стационарные функционалы для внутренних задач электродинамики (полые резонаторы, регулярные и периодические волноводы) с изотропными и анизотропными средами, а также при наличии потерь получены в работах Ш. Е. Цимринга, В. В. Никольского, Э. Л. Куликова и И. Ш. Белуги [88—91].

Замена исходной задачи (формулируемой обычно в терминах дифференциального или интегрального уравнения) эквивалентной вариационной с последующим решением последней при помощи какого-либо прямого метода не дает существенных преимуществ по сравнению с применением прямых методов, например метода Галеркина, непосредственно к исходному уравнению. При этом по существу не используются до конца возможности, связанные с наличием стационарного функционала, и сходимость процессов получается относительно медленной.

В теории антенных и волноводных систем обычно интересуются различными параметрами задачи, такими, например, как КНД антенны, коэффициент отражения, сопротивление, диаграмма направленности\* и т. п.

\* Последнюю можно рассматривать как параметр, поскольку она не зависит от основных переменных, функцией которых является ток на металле или поле в раскрыве.

Все эти параметры являются интегральными характеристиками распределения тока (или поля), точнее — линейными функционалами тока. Приближенное вычисление распределения тока и последующее нахождение по этому току указанных параметров приводит к малой точности или требует учета большого числа членов ряда в выражении для тока. Гораздо лучший результат, в смысле точности расчетов, дает следующий прием, предложенный Швингером и использовавшийся в работах его сотрудников [92].

Строится функционал от тока (или поля), удовлетворяющий двум требованиям: 1) он должен достигать стационарного значения на функции, являющейся решением исходного уравнения задачи, т. е. сводить последнюю к вариационной, 2) стационарное значение этого функционала должно совпадать с искомым параметром.

Подставляя в такой функционал приближенное значение тока, найдем соответствующий параметр со значительно большей точностью. Повышение ее может быть достигнуто путем увеличения числа членов ряда в выражении для тока, определяемого, например, при помощи метода Рунца, примененного к рассматриваемой вариационной задаче. Таким образом, найденный функционал используется дважды — один раз для нахождения тока, а другой — для расчета искомого параметра.

Если требуется определить различные параметры рассматриваемой задачи, то необходимо уметь строить различные стационарные функционалы, соответствующие, в указанном выше смысле (требование 2), этим параметрам. Ток можно при этом определять, используя только один из них, а сами параметры вычислять при помощи различных функционалов.

Значение плотности тока в некоторой фиксированной точке  $x_0$  очевидно можно также рассматривать как некоторый параметр задачи, являющийся линейным функционалом распределения тока  $I(x)$  на поверхности металла  $s$ . Чтобы убедиться в этом, следует, используя обобщенную дельта-функцию Дирака, представить ток в точке  $x_0$  при помощи интеграла

$$I(x_0) = \int_s I(x) \delta(x - x_0) ds.$$

Таким образом, описанная выше вариационная методика позволяет также определять ток в любой точке  $x_0$ .

Стационарный функционал, удовлетворяющий требованиям 1) и 2) для параметра, совпадающего с  $I(x_0)$ , был дан в интересной работе Л. А. Вайнштейна [93] и применен им для уточнения закона распределения тока вдоль тонкого вибратора. При этом в качестве первого приближения для тока использовалось выражение, получаемое в результате приближенного решения известного интегрального уравнения для вибратора путем выделения быстро осциллирующих множителей и нахождения медленно меняющихся амплитуд (метод, аналогичный методу параболического уравнения).

В статье Фельда [94] описан общий прием построения стационарных функционалов, удовлетворяющих требованиям 1) и 2) для любого параметра  $h$ , являющегося линейным функционалом решения исходной задачи, т. е. представляемого формулой

$$h = (I, F).$$

Здесь справа стоит билинейная форма переменных  $I$  и  $F$ ;  $I$  — решение основного уравнения исходной задачи вида  $GI = f$  ( $G$  — линейный оператор,  $f$  — заданная функция), а  $F$  — произвольная заданная функция. При этом

результаты работы [93] обобщены в двух направлениях: на случай уравнений с несимметричным оператором  $G$  (когда  $(Gu, v) \neq (u, Gv)$ ) и на случай гильбертовой метрики (когда  $(u, v) = (v, u)$ , черта — знак комплексного сопряжения).

Вариационные методы расчета различных параметров применялись в ряде работ, посвященных вопросам антенноволноводной техники. Из них отметим статью В. С. Ильина и В. М. Дашенкова [95], в которой определялись параметры элементов эквивалентной схемы для диафрагм конечной толщины в волноводе, и работы И. Б. Левинсона и П. Ш. Фридберга [96] по расчету элементов матрицы рассеяния в системе волноводов со щелевой связью.

### ТЕОРИЯ ТОНКИХ И ТОЛСТЫХ ВИБРАТОРОВ

Состояние теории вибраторов на 1957 г. освещено в обзорной статье [1]. Поэтому мы остановимся только на отечественных работах, выполненных за последние 10 лет.

Группа работ Л. А. Вайнштейна [97, 93], которые уже частично отмечались в связи с вариационными методами, посвящена изучению распределения тока в тонких цилиндрических вибраторах. В них рассматривались приемные и передающие вибраторы с «идеальными» и импедансными граничными условиями. Исследовался также входной импеданс передающего вибратора. Методика, используемая в [97], отличается от обычной. Сущность ее заключается в том, что выражение для распределения тока «конструируется» так, как это следует из теории длинных линий, с той только разницей, что постоянные амплитуды у бегущих волн заменяются медленно меняющимися функциями координат.

Близко к рассмотренным примыкает работа П. Я. Уфимцева [98]. В ней методом краевых волн изучается дифракция плоской волны на тонком цилиндрическом вибраторе. При этом метод краевых волн применяется непосредственно к полям, а не к токам. Даны явные выражения для рассеянного поля, пригодные для любых направлений облучения и наблюдения, с учетом всех краевых волн.

Задачу о тонком вибраторе рассматривает также А. Т. Филалковский [99] методом, аналогичным развитому М. Д. Хаскиндом и Л. А. Вайнштейном [100].

При этом составляются два функциональных уравнения для некоторой функции, через которую выражается поле. Используя метод факторизации, удается перейти от них к интегральному уравнению, аналогичному уравнению второго рода. Последнее решается методом итераций. Результат совпадает с полученным П. Я. Уфимцевым [98] методом краевых волн и позволяет, таким образом, обосновать и оценить его погрешность.

Исследованию вопросов, связанных с законностью идеализаций и приближений, допускаемых в теории тонких вибраторов, таких, как «дельта-возбуждение» передающего вибратора, влиянием статической емкости на входной импеданс и ряда других, посвящена обстоятельная работа М. И. Конторовича и Н. О. Соколовой [101]. В ней, в частности, показано, что аппроксимация сингулярного ядра в уравнении Халлена регулярным приводит к его неразрешимости, если сторонняя приложенная эдс не принадлежит к классу аналитических функций.

Следует отметить, что в одной из своих последних работ [204] Халлен дал строгое решение интегрального уравнения для тока в вибраторе в виде ряда волн, близких к краевым.

Наряду с тонкими вибраторами продолжалось также интенсивное изучение так называемых «толстых» вибраторов, поперечное сечение которых не мало по сравнению с длиной волны. Предложенные для этого мето-

ды не привели (к сожалению) к обзорным аналитическим результатам, анализируя которые можно было бы качественно нарисовать общую картину имеющих здесь место закономерностей. Большинство из этих методов требует для установления указанных закономерностей и получения численных результатов серьезных расчетов с применением электронной вычислительной машины. Так, например, в работе Фельда [102] развит метод для нахождения токов на системе из  $N$  металлических тел, возбуждаемых падающей волной или сторонней эдс, приложенной к их поверхности. Решение дается в виде рядов по специальным ортонормированным функциям с окончательно определенными коэффициентами. Метод проиллюстрирован на примере системы из  $N$  параллельных трубчатых вибраторов. Однако для построения указанной системы функций необходимо произвести специальную ортонормировку, которая требует расчетов на электронной вычислительной машине.

Несмотря на отсутствие эффективных чисто аналитических методов современное состояние электронно-вычислительной техники позволяет успешно решать различные задачи, связанные с толстыми вибраторами. Для решения на электронной вычислительной машине задач о возбуждении вибраторов особенно удобным оказался аппарат интегральных уравнений для плотности тока на вибраторе. В работах Н. Н. Говоруна [103, 104] и, особенно, Е. Н. Васильева и его сотрудников [105—109] решен целый ряд подобных задач для вибраторов типа цилиндра, конечного конуса и т. п. При этом наряду с обычными интегральными уравнениями первого и второго рода применялись уравнения первого рода с разными областями изменения для точек интегрирования и наблюдения. Такие уравнения получаются, если потребовать, чтобы поле обращалось в нуль на некоторой линии [104] или поверхности [108, 109], проведенной внутри вибратора. В случае несимметричного возбуждения вибратора двумерное интегральное уравнение сводилось к нескольким независимым одномерным уравнениям для азимутальных гармоник плотности тока [104, 105, 108], которые решались численными методами на машинах. Составлены универсальные программы для электронной вычислительной машины, пригодные для любых тел вращения. Проведенные расчеты показали, что подобные численные методы эффективны для вибраторов длиной не более десяти волн. К указанному классу задач примыкают вопросы о возбуждении металлического шара большого диаметра и вытянутой сфероидальной импедансной антенны, исследованные Г. Т. Марковым и его сотрудниками [110, 111]. В обоих случаях используется разложение составляющих поля по полной системе собственных функций; основное внимание уделяется возбуждению указанных тел кольцевой целью и вопросам получения желаемой диаграммы направленности.

### ТЕОРИЯ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

Зеркальные антенны были и продолжают оставаться наиболее распространенным типом остронаправленных антенн в сантиметровом и дециметровом диапазонах волн. Это объясняется главным образом принципиальной простотой их радиотехнической схемы, возможностью получения высокой направленности, широкополосностью, малыми активными потерями, простотой конструкции. При помощи зеркальных антенн удобно создавать диаграммы направленности различной формы и управлять ими. В последнее время теория зеркальных антенн развивалась, главным образом, в следующих двух направлениях: исследовались вопросы, связанные с тонкой структурой диаграммы направленности, прежде всего, с уровнем бокового излучения зеркальных антенн; большое внимание уде-



лялось исследованию новых типов зеркальных антенн, главным образом, многозеркальных.

Что касается уровня бокового излучения зеркальных антенн, то до последнего времени более или менее удовлетворительно рассчитывались и обосновывались только ближайšie к главному максимуму боковые лепестки. Дело в том, что широко распространенный апертурный метод расчета, когда поверхность антенны заменяется эквивалентной апертурой и поля на ней определяются приближенно в основном геометрикооптическим путем, дает удовлетворительное описание поля только в области главного лепестка и прилегающих к нему первых боковых лепестков.

В последние годы Л. Б. Тартаковский и Б. Е. Кинбер провели обширные и довольно успешные исследования, позволившие выяснить природу бокового излучения и зависимость его уровня от различных факторов.

В работах Л. Б. Тартаковского и его сотрудников [112, 113, 114] для определения бокового излучения и вообще тонкой структуры поля антенны используется токовый метод, т. е. по токам на поверхности зеркала рассчитывается поле в дальней зоне. Основную трудность здесь представляет определение истинных токов на поверхности зеркала. Для этого предлагается учитывать поправки к распределению токов, вызванные: ближним полем облучателя, кривизной отражателя, краевым эффектом кромки отражателя, взаимодействием краевых волн противоположных кромок. Метод краевых волн в физической теории дифракции, развитый П. Я. Уфимцевым [98], учитывает многократную дифракцию волн на кромках и на ребрах тел, эти дифракционные волны проникают в область тени и полутени. За рубежом для исследования подобных вопросов использовались работы Келлера [182].

Токовый метод и сам по себе без дифракционных поправок дает значительно бóльшую информацию, чем апертурный метод, однако можно отметить случаи, когда без дифракционных поправок он дает мало нового по сравнению с апертурным. Наименьший уровень дальнего бокового и заднего излучения можно получить в случае реализации в апертуре плавного распределения поля с нулем первого порядка на краях раскрытия. В области тени краевые токи, перпендикулярные кромке, несколько увеличивают заднее излучение, а токи, параллельные кромке, его уменьшают. В работах Б. Е. Кинбера [116, 117, 118] дается физически наглядная интерпретация явлений, обуславливающих боковое излучение антенн. Метод краевых волн он применяет непосредственно для определения структуры поля в дальней зоне. Интерференция краевых волн, в основном, вызывает боковое излучение зеркальных антенн. Из работ Кинбера следует, что при слабом уровне облучения краев зеркала — порядка  $-10$  дБ и менее — ответственными за рассеяние энергии (боковое излучение) являются тяги и облучатели. В работах Б. Е. Кинбера [118] и В. П. Нарбута [119] получены соотношения между диаграммами по основной и кросс-поляризации компонентам излучения. Для зеркальных антенн типа параболюидов вращения в последние годы был детально выяснен вопрос об искажении диаграммы направленности при небольших смещениях излучателя из фокуса. В этой связи следует отметить монографию В. М. Гинзбург и И. Н. Беловой [120], которыми, кстати, впервые были использованы быстродействующие вычислительные машины для расчета диаграмм зеркальных антенн. Зеркальные антенны специальной формы применяются также для создания веерных диаграмм, диаграмм косекансного вида и т. д. Однако зеркала двойной кривизны, рассчитанные для этих целей методами геометрической оптики, давали значительные осцилляции в диаграмме направленности. Л. Б. Тартаковскому удалось существенно усовершенствовать методику расчета зеркал двойной кривизны [115] путем уточне-

ния расчета кривой центрального сечения зеркала двойной кривизны. При этом осцилляции амплитуды и фазы поля в раскрыве уменьшаются и, в результате, значительно улучшается приближение к заданной диаграмме направленности.

Важный этап в развитии зеркальных антенн за последние 10—15 лет связан с появлением и быстрым развитием многозеркальных антенн. У нас первые публикации по многозеркальным антеннам появились в начале 50-х годов, например, работы [183]. Позже и за рубежом появились статьи, посвященные многозеркальным антеннам; одна из наиболее обстоятельных — статья Ханнана, опубликованная в 1961 г. [184]. Многозеркальные антенны имеют большее число степеней свободы, позволяют решать более широкий класс задач. Отметим несколько важных свойств многозеркальных антенн. Первое, имеющее принципиальное значение, состоит в том, что многозеркальные антенны позволяют достаточно точно реализовать заданную диаграмму направленности. Многозеркальные антенны открывают новые возможности для более широкоугольного и удобного способов управления лучом. То обстоятельство, что облучатель у этих антенн можно располагать непосредственно у вершины главного зеркала, оказывается исключительно благоприятным для упрощения конструкции антенн различного назначения, а для малолучащих антенн — радиотелескопов это обстоятельство является принципиальным, так как отпадает необходимость в длинном фидерном тракте, являющемся основным источником шумов. Исследование многозеркальных антенн проводилось как в общетеоретическом плане, так и применительно к отдельным конкретным типам многозеркальных антенн. К общим вопросам теории многозеркальных антенн относится рассмотрение возможности обеспечения заданного распределения амплитуды и фазы поля в раскрыве при помощи двух зеркал. В работах Л. Д. Бахраха [121, 41] и Б. Е. Кинбера [122, 123] не только выявлены принципиальные возможности многозеркальных антенн с точки зрения решения задач синтеза, но и разработаны конструктивные методы расчета двухзеркальных антенн, обеспечивающих, в частности, оптимальные характеристики, например, большой кнд. К общим вопросам теории многозеркальных антенн относится также исследование корректности геометрикооптических методов расчета этих антенн и дифракционных поправок. Эти вопросы отражены в упомянутой выше работе [41] и в статье А. Е. Саломоновича и Н. С. Соболевой [124]. Из зарубежных работ в этой связи следует упомянуть работу Раша [185]. В определенном смысле задачи переизлучения от одного зеркала к другому в многозеркальной антенне родственны задачам квазиоптики. Из отдельных типов многозеркальных антенн следует упомянуть о двухзеркальной антенне с большим зеркалом сферической формы (рис. 1). В такой системе качание осуществляется перемещением малого зеркала, и сектор качания и коэффициент использования поверхности большого зеркала не зависят ни от ширины диаграммы направленности, ни от длины волны, как это показано в работе Л. Д. Бахраха и И. В. Вавиловой [125], в которой дана теория антенн такого типа. Из работы Холта и Бауха [186] видно, что этот класс антенн привлекает внимание и за рубежом.

Антенны со сферическим зеркалом могут быть использованы в качестве радиотелескопов; возможности их с этой точки зрения исследованы П. М. Геруни [126].

Большое распространение получили двухзеркальные антенны с поворотом плоскости поляризации (рис. 2). Такие системы расширяют возможности многозеркальных антенн, поскольку ограничения на размеры переднего зеркала, связанные с его экранирующим влиянием, отпадают, если зеркало сделано решетчатым. Теоретические исследования подобных

систем касались расчета поляризационного фильтра на переднем зеркале и устройства, обеспечивающего поворот плоскости поляризации на большом зеркале. В работах [41, 127] дан анализ таких зеркал.

Одним из вариантов двухзеркальных антенн с поворотом плоскости поляризации являются двухзеркальные антенны с управляющим плоским

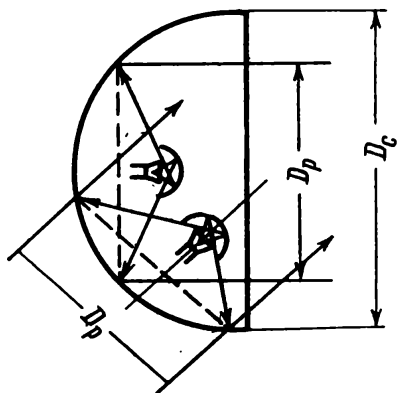


Рис. 1.

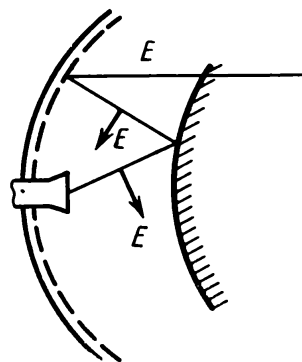


Рис. 2.

Рис. 1. Схема двухзеркальной сферической антенны

Рис. 2. Схема двухзеркальной антенны с поворотом плоскости поляризации

зеркалом, которые позволяют удобно качать луч при неподвижном и предельно простом волноводном тракте. Весьма интересны апланатические, бифокальные и многолучевые двухзеркальные антенны, которые значительно расширяют возможности качания луча. В апланатических двухзеркальных антеннах, например, можно путем выноса облучателя из фокуса системы значительно отклонить диаграмму направленности при минимальных искажениях последней. В работе В. И. Пономарева [128] и в работе [41] рассмотрена теория таких систем и методы расчета зеркал. Особое место занимают работы, относящиеся к расчету многозеркальных антенн, предназначенных для целей радиоастрономии и дальней космической связи. Дело в том, что такие антенны должны иметь не только большую действующую площадь, но и низкую шумовую температуру, поскольку они работают совместно с малошумящими усилителями. В работе Л. Д. Бахраха и К. И. Могильниковой [129] выяснены основные аспекты работы малошумящих антенн с большой действующей площадью и показано, что оптимальные характеристики с этой точки зрения имеют многозеркальные антенны, в частности, потому, что значительная часть мощности рассеивается в малошумящую часть пространства (вверх), тогда как у обычных параболических однозеркальных антенн диаграмма направлена вверх, а облучатель часть мощности рассеивает в сторону земли, что обуславливает заметную шумовую температуру.

В заключение этого раздела следует упомянуть о теоретических работах, посвященных сетчатым зеркалам. Здесь интересная работа выполнена М. И. Конторовичем, М. Н. Астраханом и М. Н. Спириной [130], в которой при помощи усредненных граничных условий рассматривается дифракция электромагнитных волн на сетках и решетках.

Следует отметить детально разработанную теорию антенны переменного профиля, предложенную С. Э. Хайкиным и Н. Л. Кайдановским [131]. Такая система, описанная ниже во II части, позволяет осуществить радиотелескоп высокой разрешающей силы. Путем перемещения отражающих элементов и облучателя максимум диаграммы радиотелескопа

может быть ориентирован в любом направлении. В работах Н. А. Есепкиной и других [132] исследованы облучатели для преобразования сферической волны в цилиндрическую и затем в плоскую при помощи зеркала переменного профиля.

Создание больших зеркальных антенн потребовало разработки новых методов измерений их параметров. Были обоснованы и исследованы радиоастрономические методы измерений параметров антенн. Эти работы обобщены в монографиях А. Д. Кузьмина, А. Е. Саломоновича [133] и Н. М. Цейтлина [134]. Особо следует отметить оригинальный метод измерения диаграммы направленности зеркальных антенн в зоне Френеля путем перефокусировки облучателя, предложенный Н. А. Есепкиной [135], а также метод исследования антенн по радиоизлучению искусственных источников типа «черного» диска, предложенный В. С. Троицким и Н. М. Цейтлиным [136].

### АНТЕННЫ ТИПА ФАЗИРОВАННЫХ РЕШЕТОК

Синфазно возбуждаемые решетки излучателей — полуволновых вибраторов — начали применяться в качестве высокоэффективных направленных антенн еще в 20-х годах для диапазона коротких волн. Однако поскольку они использовались в основном как антенны без качания луча, то вследствие сложной системы питания и настройки, относительно малой диапазонности и дороговизны они не могли конкурировать, например, с ромбическими антеннами в диапазоне коротких волн и зеркальными в сантиметровом и дециметровом диапазонах.

В последнее время решетки излучателей переживают свою вторую молодость, но уже в качестве антенн с быстрым электрическим качанием луча. Возможность возбуждения или съема энергии с отдельных элементов решетки позволяет управлять фазой тока в них и осуществлять качание луча, создавать оптимальные диаграммы, применять различные способы обработки сигнала, самонастройку (самонаведение) и направленное переизлучение, а также повышать излучаемую мощность за счет установки в каналах отдельных излучателей СВЧ-усилителей.

Одним из простых способов качания луча в решетках является частотное качание, т. е. перемещение луча за счет изменения частоты в антенных решетках, выполняемых на базе частотно-чувствительных элементов — замедляющих структур резонансного типа с высокой дисперсией, либо структур с высоким эквивалентным коэффициентом замедления, обусловленным большой длиной фидера между излучателями. Этот способ предложен [67, 68] и достаточно обстоятельно разработан [69] Л. Н. Дерюгиным, Л. Д. Бахрахом, А. И. Ардабьевским и М. Г. Кузнецовым.

Частотный метод позволяет осуществлять не только одномерное качание луча в широком секторе углов, но и двумерный строчный обзор пространства. Для этого необходимо обеспечить высокую частотную чувствительность фидеров, питающих отдельные ряды излучателей решетки, и согласованную с ней несколько меньшую частотную чувствительность общего фидера, питающего ряды. При этом главный максимум диаграммы, прочертив одну строку, уходит в область мнимых углов, а на смену ему появляется следующий главный дифракционный максимум и чертит следующую строку [70]. Подобные системы, особенно для двумерного качания, имеют относительно низкий КПД и слабую помехозащищенность. Поэтому в последнее время при построении приемных антенн с частотным качанием частотно-чувствительные элементы используются на промежуточной частоте, что резко снижает потери. При двукратном преобразова-

нии частоты удается также сделать диаграммы частотно-нечувствительными.

Более перспективным, позволяющим качать луч как в приемных, так и в передающих решетках, является метод управления фазой тока в отдельных излучателях при помощи фазовращателей. Этому вопросу посвящена обширная литература за рубежом [196, 197] и у нас.

Наиболее простой способ управления фазой предложен [71] и исследован [69] Л. Н. Дерюгиным и его сотрудниками. Это так называемый дискретно-коммутационный метод, суть которого заключается в дискретности установки фазы при небольшом числе градаций и в применении фазовращателей, в которых фаза может принимать только необходимые дискретные значения, а переход от одного значения к другому осуществляется методом коммутации. Особенно перспективен и прост этот способ в случае осесимметричных решеток, когда неизменное фазовое распределение должно просто поворачиваться вокруг оси решетки.

При разработке фазированных решеток основные трудности связаны не только с созданием управляющих элементов, но и с отличием фаз, реально устанавливающихся в излучателях, от необходимых. Действительно, фазовращатели управляют лишь фазой падающих волн в питающих фидерах, тогда как фазы излучающих токов или полей вследствие отражений и взаимной связи между элементами решетки будут иными. Для того чтобы учесть эти факторы при определении необходимого сдвига фаз в фазовращателях для обеспечения неискаженного качания луча, необходимо уметь рассчитывать входное сопротивление отдельного излучателя и его диаграмму с учетом влияния остальных излучателей. Это весьма сложная задача, которой посвящен в последнее время ряд работ [72, 73, 198, 199, 100]. К сожалению, в большинстве из них не учитываются краевые эффекты, т. е. решетки предполагаются состоящими из бесконечного числа излучателей типа вибраторов, щелей и волноводов. Несколько особняком стоит работа [74], в которой изучается взаимодействие двух плоских волноводов.

В связи с тем, что в настоящее время проектируются и применяются антенные решетки с качанием луча и весьма высокой направленностью, возникает весьма существенный вопрос о минимально необходимом для этого числе управляющих элементов. Первое исследование этого вопроса было проведено в работе Вендика [75], который, исходя из заданных сектора качания  $\theta_0$  и ширины луча  $\Delta\theta$ , получил следующую формулу для минимально необходимого числа элементов, независимо управляемых по фазе (в случае линейной равномерной решетки):

$$N = \frac{\theta_0}{\Delta\theta} + 1.$$

В интересной работе М. И. Конторовича и В. Ю. Петрунькина [76] число  $N$  связывается с величиной телесного угла  $\Omega$ , в пределах которого происходит качание луча, и значением коэффициента усиления антенны  $D$  в этом угле при помощи формулы

$$N = (1/4\pi) \int_{\Omega} D d\Omega,$$

справедливой для любой антенны. Она переходит в  $N = D\Omega/4\pi$ , если  $D$  постоянно в пределах угла  $\Omega$ .

До последнего времени применялись только эквидистантные антенные решетки. При этом остронаправленные системы содержат очень большое

число элементов — излучателей. Применение неэквидистантного размещения излучателей, при заданном общем размере решетки, позволяет резко сократить их число. Коэффициент усиления, который пропорционален числу излучателей, у таких систем падает, а общий фон боковых лепестков несколько возрастает. Однако главный лепесток сохраняется почти неизменным. Поэтому неэквидистантное размещение имеет смысл применять, главным образом, в приемных антеннах, когда для повышения разрешающей способности необходимо сузить главный лепесток, не увеличивая числа излучателей. Для передающих систем неэквидистантное размещение менее приемлемо вследствие более низкого усиления. Из ряда работ по неэквидистантным решеткам следует отметить статьи М. Б. Закона и В. В. Меркулова [77]. В них рассмотрены линейные и двумерные решетки со случайно расположенными элементами. Найдены вероятностные характеристики диаграмм направленности при различных законах распределения элементов на единицу длины или площади решетки. Неэквидистантным решеткам посвящено также большое количество зарубежных работ, обзор которых дан в гл. 3 книги [201].

### ТЕОРИЯ ОБТЕКАТЕЛЕЙ

Диэлектрические колпаки — обтекатели — широко используются для укрытия антенн как наземных, так и самолетных, причем в последнем случае к обтекателям предъявляются серьезные требования в отношении их аэродинамической формы. Разработка теории обтекателей, проводившаяся у нас в последнее время, включала исследование диэлектрических стенок обтекателя и вопросов, относящихся к взаимодействию волн, излучаемых антенной, с обтекателем. За рубежом теории и технике обтекателей уделяется значительное внимание. В этой связи следует упомянуть работу Туреля [187].

Для расчета многослойных диэлектрических стенок В. А. Каплун использовал методы теории передающих линий [137]. Им же были исследованы диэлектрические стенки с согласующими решетками в виде проводов и вибраторов [138, 139, 140]. Такой метод «просветления» стенок обтекателя может применяться и при согласовании линзовых антенн. При разработке методов расчета слоистых структур стенок обтекателя существенно выяснить фазовые характеристики электромагнитных волн, прошедших через эти диэлектрические слои. Этот вопрос исследован в работе [141].

Наиболее трудным является выяснение влияния обтекателя на диаграмму направленности антенны. Точное решение этого вопроса до сих пор не получено. Исследования отдельных вопросов теории обтекателей помогают выяснить механизм явлений. К этим теоретическим работам следует отнести исследование Ю. Г. Гукасова и И. В. Сухаревского [142], которые получили асимптотическое решение для волн, проходящих через тонкие диэлектрические слои. В работе А. А. Пистолькорса, В. А. Каплуна, Л. В. Князевой [143] рассмотрен вопрос дифракции на диэлектрической полуплоскости и клине. Дело в том, что учет дифракционных явлений на этих простых телах позволяет сделать некоторые выводы о характере влияния обтекателя.

Для сравнительно простых форм обтекателей влияние их на диаграммы направленности выяснено достаточно подробно. Примером могут служить обтекатели доплеровских навигационных станций, представляющие собой корытообразные диэлектрические короба [144].

## ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНТЕНН

Статистическая теория антенн сформировалась в последнее десятилетие. Появился ряд работ у нас и за рубежом, посвященных проблеме статистики антенн. Например, большое влияние на развитие этого направления имели работы Робье [188], Рондинелли [189]. Развитие статистических методов стимулировалось разработкой больших зеркальных антенн, а также многоэлементных антенн (фазируемых решеток с разветвленной системой питания и коммутацией отдельных элементов). В больших антенных полотнах флуктуации параметров антенн, обусловленные, прежде всего, неточностью изготовления, установки и настройки, ограничивают возможности антенны. Весьма важным фактором при сооружении больших антенн является их стоимость, которая связана с допусками на изготовление. Поэтому обоснование разумных допусков на изготовление антенн имеет первостепенное значение; сделано же это может быть лишь статистическими методами. Основные вопросы статистической теории антенн связаны с определением характеристик антенн: кнд, ширины диаграммы направленности, уровня боковых лепестков и т. д. в зависимости от статистических параметров амплитудно-фазового распределения. Статистика амплитудно-фазового распределения обычно предполагается заданной или каким-либо образом известной. Теоретическое же определение статистики амплитудно-фазового распределения поля в антенне требует решения внутренних антенных задач, которые весьма сложны и практически решены только для нескольких частных случаев. У нас общая теория статистики поля антенны многим обязана работам Я. С. Шифрина и его сотрудников [145, 146].

В монографии [147], посвященной статистике линейных антенн, по существу дается общая теория статистики антенн. Первая задача статистики антенн связана с определением средних характеристик антенн — средней диаграммы, среднего кнд, ширины средней диаграммы. Зарубежные исследования в основном ограничиваются рассмотрением именно средних характеристик антенн и определением допусков в предположении, что ошибки в амплитудно-фазовом распределении малы. Радиус корреляции ошибок также считается малым по сравнению с линейными размерами антенны. В работах Я. С. Шифрина таких ограничений нет.

Первые его исследования были посвящены статистике синфазных антенн, для которых радиус корреляции постоянен [145]. Для антенн бегущей волны радиус корреляции ошибок меняется вдоль антенны, и исследования усложняются. В работе В. И. Таланова и Н. М. Шероновой [148], затем и в других работах рассматривалась статистика антенн бегущей волны.

В работах Я. С. Шифрина рассматриваются не только средние характеристики антенн, но дается анализ флуктуаций амплитуды и фазы поля в определенных направлениях, флуктуаций кнд и главного максимума. Для некоторых задач потребовалось рассмотреть более тонких статистических характеристик антенны — корреляционных функций поля антенны [149]. Создание единообразного аппарата для исследования статистики антенн и родственных вопросов позволило использовать его для анализа работы различных антенн, например, с синтезированным раскрывом, фазируемых решеток, антенн оптического диапазона и приемных антенн, работающих в случайном поле. Интересная работа по статистике антенн выполнена А. Е. Саломоновичем [150], который статистическим путем оценил влияние точности и жесткости антенны радиотелескопа на ее параметры. При этом использовалось то обстоятельство, что статистиче-

ские характеристики распределения фазовых ошибок из-за неточности изготовления и из-за деформаций, как правило, существенно отличаются друг от друга. В работе Б. В. Брауде, Н. А. Есепкиной, Н. Л. Кайдановского, С. Э. Хайкина [151] исследовано влияние случайных ошибок на электрические характеристики остронаправленных зеркальных антенн с отражателем переменного профиля.

Для фазированных антенных решеток были применены статистические методы анализа в связи с тем, что вероятность выхода из строя отдельных фазовращателей при большом их числе велика. В отличие от статистической теории допусков антенн здесь локальные ошибки в распределении амплитуды и фазы поля на антенне значительны. Рассмотрению этого вопроса посвящена работа Л. Г. Содина [152]. Статистические оценки смещения луча системы излучателей получены в статье О. Г. Вендика [153]. Для очень больших антенн, в частности радиотелескопов, возникает вопрос, сколь большими их имеет смысл делать, поскольку неоднородности в атмосфере могут уже влиять на эффективность таких антенн. В свое время высказывались опасения, что флуктуации показателя преломления атмосферы лимитируют возможности создания очень больших антенн. Исследования, проведенные статистическими методами Я. С. Шифриным и Л. Г. Корниенко [154] с одной стороны и Н. А. Есепкиной, Б. Г. Кузнецовым, С. Э. Хайкиным [155] с другой, выяснили истинную картину «опасности», которая грозит сооружению очень больших антенн.

Выводы оказались обнадеживающими, т. е. в сантиметровом диапазоне волн антенны с апертурами, составляющими несколько сотен метров и единицы километров, строить еще целесообразно.

### ТЕОРИЯ АНТЕНН С ОБРАБОТКОЙ СИГНАЛОВ

В последнее время за рубежом и у нас уделяется значительное внимание вопросам обработки сигналов, поступающих от различных элементов антенны. Наиболее полную информацию можно получить, отдельно обрабатывая эти сигналы. Наблюдается тенденция рассматривать антенну не изолированно, а в общей цепи обработки информации. Этим же вопросам родственны методы оптической обработки и голографии, которые начали применяться в антенной технике. Надо сказать, что по нелинейным методам обработки, таким, как перемножение или корреляционная обработка сигналов, поступающих с различных частей антенны, у нас опубликовано мало работ, в то время как за рубежом внимание к этим вопросам велико. Достаточно указать на работы Ксиенского, Вилсби и Цукера, Линдера [190, 191, 192]. Все же целесообразность применения нелинейных методов обработки сигналов не ясна, исключая, пожалуй, радиоастрономические задачи. Большое внимание у нас привлекают линейные методы обработки сигналов. К ним, в частности, относятся вопросы создания многоканальных, многолучевых антенн, в которых информация принимается одновременно с различных направлений. Принципиальным вопросам энергетики многоканальных антенн посвящена работа Л. Д. Бахраха и С. Ф. Брянцева [156]. В частности, в этой работе исследуются зависимости уровня пересечения соседних диаграмм от коэффициента усиления по каждому каналу.

Несколько лет тому назад большие надежды возлагались на антенны с изменяющимися во времени параметрами и последующей обработкой сигналов: из зарубежных публикаций можно указать статьи Шенкса [193] и Хевиса [194]. Однако возможности этих устройств оказались не столь велики, как это вначале казалось. Интересная работа Н. Г. Понома-



рева [157] посвящена исследованию диаграммы направленности при очень быстром изменении распределения тока вдоль антенны, сравнимом со скоростью распространения волны вдоль раскрыва. Представляют интерес исследования, относящиеся к рассмотрению пространственно-временных распределений сигналов и шумов.

В работе Л. М. Прокунина [158] рассматриваются частотные диаграммы направленности, которые характеризуются тем, что каждому направлению соответствует определенная частота колебаний; показана эквивалентность частотных диаграмм, возникающих при движении антенны и при переключениях элементов в решетке.

Следует отметить также работу В. Г. Пошехонова [159], в которой рассматриваются вопросы построения антенн для приема широкополосных сигналов.

Весьма перспективны для целей радиолокации и радионавигации антенны с так называемым синтезированным раскрывом. Теория таких систем вначале развивалась за рубежом, например, в работе Катроны [195]. Антенны с синтезированным раскрывом представляют интерес и для радиоастрономии, где они применяются.

В этих антеннах осуществляется последовательный прием сигналов отдельными элементами антенны. В конечном счете ряд из идентичных элементов заменяется одним перемещающимся, последовательно выполняющим функции каждого. Сигналы, принимаемые им при его отдельных положениях, затем когерентно обрабатываются. Вопросы теории антенн с синтезированным раскрывом рассмотрены в статье С. Г. Рудневой [160]. Обработку сигналов, принятых станцией с синтезируемой апертурой, целесообразно вести оптическими методами.

Вообще применение методов когерентной оптики и голографии к задачам антенной техники оказалось перспективным [161]. Так, например, эти методы уже применяются для моделирования антенн СВЧ и используются для восстановления диаграмм направленности антенн СВЧ по измерениям поля в зоне Френеля [162].

### ПЕРИСКОПИЧЕСКИЕ АНТЕННЫЕ СИСТЕМЫ, ОТКРЫТЫЕ ЛИНИИ И РЕЗОНАТОРЫ

В последнее десятилетие широкое развитие получили так называемые квазиоптические системы; эти системы строятся, исходя из геометрикооптических принципов, однако действие их существенно зависит также от явлений дифракции, т. е. от волновой природы поля.

Пользуясь геометрикооптической терминологией, можно сказать, что поле в подобных системах имеет вид длинных и узких пучков  $l/a \gg 1$ , диаметр сечения которых  $a$  на много больше волны ( $a/\lambda \gg 1$ ). Отношение этих параметров  $a^2/\lambda l$  может быть вообще говоря любым, однако в большинстве практических случаев оно порядка единицы, т. е. для квазиоптических систем характерно расположение одного элемента в зоне Френеля соседнего. Типичным примером квазиоптической системы в антенной технике является перископическая антенна. Она широко применяется в ретрансляционных станциях, позволяя размещать основную часть антенной системы и аппаратуру у земли, а поднимать на мачту только (вторичное) переотражающее зеркало. Ряд статей [44—47] по анализу работы таких систем, расчету электрических параметров и выбору формы и размеров излучателя и переизлучателя опубликован А. М. Покрасом, Б. Е. Кинбером и Л. Б. Тартаковским. Результаты этих и других работ по перископическим системам обобщены в книге А. М. Покраса [48].

Можно отметить также работу Я. Н. Фельда [49], в которой изучены оптимальные амплитудно-фазовые распределения в раскрыве основного излучателя, обеспечивающие максимальный кнд системы в целом.

При переходе к миллиметровым и субмиллиметровым волнам обычные канализирующие устройства становятся неприемлемыми из-за больших потерь и ювелирной сложности изготовления волноводов и узлов для них.

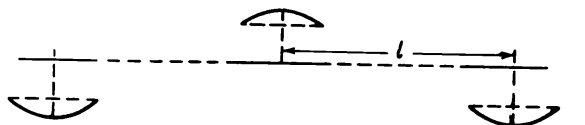


Рис. 3. Зеркальная линия передачи

На смену им приходят квазиоптические линии. Такая линия впервые предложена в 1948 г. Е. Н. Майзелем и А. В. Даниловым [50]. Она состоит из ряда расположенных вдоль некоторой оси длиннофокусных линз. Каждая линза фокусирует падающий на нее пучок волн и направляет его к следующей линзе. При этом пучок вначале сходится, а затем

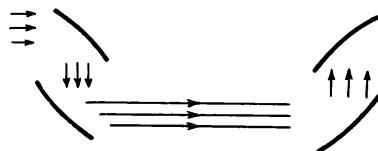


Рис. 4. Перископическая зеркальная система

вновь расходится и часть энергии проходит мимо линзы, приводя к радиационным потерям. В указанной заявке [50] для крепления линз предлагалась металлическая труба, при этом естественно расширение пучка приводило бы не к радиационным, а к тепловым потерям в трубе. Аналогичные линии были независимо предложены в США [202, 203]. Б. З. Каценеленбаум [51] и Н. Г. Бондаренко и В. И. Таланов [52] предложили вместо диэлектрических линз применять для построения линии металлические зеркала, переотражающие и фокусирующие волны вдоль линии. Существует большое число схем построения зеркальных линий. Простейшая из них изображена на рис. 3. Форма зеркал выбирается такой, чтобы наряду с переотражением пучка волн обеспечивалась фазовая коррекция, исправляющая фронт падающей на зеркало волны. Весьма интересная схема перископической зеркальной линии (рис. 4) предложена в работе [53]. Она обладает повышенной устойчивостью и менее критична относительно небольших отклонений формы и положения зеркал.

Весьма близкими к открытым линиям, как по характеру физических процессов, так и по методам расчета, являются открытые резонаторы; их предложили одновременно А. М. Прохоров [54] и Шавлов и Таунс [55]. Появление открытых резонаторов (как и открытых линий) вызвано тем, что при переходе к субмиллиметровому и особенно оптическому диапазонам обычные закрытые полые резонаторы неприменимы. Требования электрической прочности, высокого кнд и возможности практического изготовления приводят к необходимости резкого увеличения размеров резонатора по сравнению с длиной волны. При этом приходится работать на колебаниях высших типов, в области которых спектр собственных частот закрытого резонатора резко сгущается, резонансные кривые «наезжают» друг на друга и избирательные свойства резонатора практически теряются.

В отличие от этого открытые резонаторы, представляющие собой систему из двух расположенных друг против друга плоских или криволинейных зеркал, апертуры которых параллельны (рис. 5), обладают существенно разрешенным спектром. Объясняется это тем, что радиационное затухание, вследствие излучения наружу, для большинства типов



Рис. 5. Оптические резонаторы

колебаний весьма велико и резонансные свойства у них практически отсутствуют. Только относительно небольшое число типов колебаний с малым радиационным затуханием является высокодобротным. Это те колебания, для которых, в случае плоских зеркал, коэффициент отражения от края по модулю близок к единице, а в случае криволинейных зеркал образуются каустические поверхности, за пределами которых поле экспоненциально убывает.

При изучении открытых систем, так же, как и в случае закрытых, основной задачей является нахождение собственных колебаний (волн) и соответствующих им частот.

Существуют различные методы решения указанной задачи. Один из них, впервые примененный в работе Фокса и Ли [56], проще всего пояснить на примере открытой линзовой линии. Поле на выходной апертуре одной линзы выражается через поле на выходной апертуре предыдущей. Этот переход проводится в два этапа. Сначала находится, при помощи интегральной формулы Гюйгенса — Кирхгофа, поле на входной апертуре линзы через поле на выходной апертуре предыдущей. Затем поле с входной апертуры пересчитывается чисто геометрическим методом на выходную апертуру той же линзы. С другой стороны поскольку линзовая линия является периодической системой, то поля в соответствующих точках соседних линз должны отличаться только постоянным (комплексным) множителем  $\chi$ . Учитывая эти два вида связи между полями в выходных апертурах соседних линз, легко написать интегральное однородное уравнение второго рода. Его собственные функции определяют распределение поля в апертуре линзы для различных типов собственных волн в линии, а соответствующие им значения собственных чисел  $\chi$  характеризуют фазовую скорость и затухание этих волн вдоль линии. В общем случае решение интегрального уравнения проводится при помощи электронной вычислительной машины. Этот метод широко использовался в работах Б. З. Каценеленбаума [57] и его сотрудников при изучении различных типов открытых линий, и ими были получены важные принципиальные и практические результаты [58, 59].

Иные методы решения аналогичных задач, главным образом применительно к теории открытых резонаторов, были развиты в работах Л. А. Вайнштейна [60, 61].

Не имея возможности подробно останавливаться на них, отметим только, что в основном из них эллиптическое волновое уравнение для компонент поля приближенно заменяется более простым параболическим уравнением. Решая последнее уравнение, с учетом соответствующих гранич-

ных условий, непосредственно или сводя его к эквивалентному интегральному уравнению, Л. А. Вайнштейн исследовал ряд открытых резонаторов с различными формами зеркал.

Свои многочисленные работы по открытым системам, а также некоторые работы других авторов, он подытожил в недавно вышедшей обстоятельной монографии [62].

Ряд важных результатов по теории открытых систем был получен В. И. Талановым и его сотрудниками [63]. Отметим один из них, относящийся к оптимальным свойствам конфокального резонатора, зеркала которого представляют собой части сферических поверхностей с центрами, расположенными в середине противоположных зеркал. Ими показано, что подобный резонатор формирует пучок с наименьшими возможными радиационными потерями при заданных частоте, апертуре зеркал и расстоянии между ними.

Если задачи о нахождении собственных колебаний (волн) открытых линий и резонаторов хорошо разработаны в приближении, вполне достаточном для практики, то значительно хуже обстоит дело с задачами о вынужденных колебаниях. При нахождении полей, возбуждаемых заданными источниками в открытых системах, нельзя представить их в виде разложения в ряд по собственным колебаниям дискретного спектра, как это имеет место в случае закрытых систем. Объясняется это тем, что собственные колебания открытых систем (обладающие вследствие излучения комплексными частотами) не образуют полной системы функций. Поэтому приходится вводить так называемые собственные функции непрерывного спектра, и задача сильно усложняется. Попытка создания такого метода решения задач о возбуждении предпринята в работе [64] (см. также [62], где приводится ряд примеров). По-видимому, можно ограничиться более привычным аппаратом для решения подобных задач, если искать не поле во всем пространстве, а токи на металле или вектор поляризации в диэлектрике линз. При этом для них могут быть составлены неоднородные интегральные уравнения второго рода [65, 66], методика решения которых более разработана.

К рассмотренным выше вопросам примыкают задачи, касающиеся теории антенн оптического диапазона, которые начали развиваться в связи с появлением лазеров. В работе Ю. В. Тыжнова и Г. Х. Фридмана [163] отражены специфические вопросы разработки антенн оптического диапазона.

Настоящий обзор естественно не является исчерпывающим и его можно было бы дополнить рядом работ из других разделов теории антенн, кроме уже рассмотренных. Не имея возможности увеличивать и так уже большой объем статьи, ограничимся упоминанием лишь некоторых из них. Так можно указать на работы Г. Т. Маркова и его сотрудников [164, 165] по возбуждению импедансных полос на полуплоскости и клине и О. Н. Терешина [166, 167], касающиеся синтеза плоских и рельефных импедансных антенн по заданной структуре поля.

На этом мы закончим обзор работ в области теории антенн.

## II. АНТЕННАЯ ТЕХНИКА ЗА 50 ЛЕТ

В этом разделе авторы хотели бы кратко охарактеризовать развитие советской антенной техники за истекшие 50 лет. В сжатом очерке невозможно подытожить всю большую работу, которая была проведена по антенным системам в различных областях радиотехники, таких, как коротковолновая или радиорелейная связь, радиолокация, радионавигация, радиооборудование самолетов, ракет, искусственных спутников Земли и кос-

мических кораблей. Поэтому мы ограничимся несколько более подробным рассмотрением лишь трех областей антенной техники, по нашему мнению достаточно ярко характеризующих общий уровень отечественной антенной техники и темпы ее развития. Это — антенны радиовещательных станций, телевизионные антенны и радиотелескопы.

### АНТЕННЫ ТЕЛЕВИЗИОННЫХ СТАНЦИЙ \*

К антеннам радиовещательных станций предъявляются следующие специфические требования: 1) иметь достаточно высокое сопротивление излучения для того, чтобы обеспечить хорошую частотную характеристику станции и избежать перенапряжений на концах проводов антенны, 2) на средних волнах иметь диаграмму направленности, прижатую к земле, в целях ослабления фэдинга (замирания), вызываемого волнами, отраженными от нижних ионизированных слоев атмосферы, и ненаправленную или слабо направленную диаграмму в горизонтальной плоскости (если этого требует география обслуживаемой области).

Первая советская радиовещательная станция (мощностью 12 *квт*), построенная по прямому указанию В. И. Ленина, начала работать на волне 3000 *м* в 1922 г. Она находилась в Москве, недалеко от Курского вокзала. Антенна у нее была *T*-образная, подвешенная на двух деревянных мачтах высотой 150 *м*. В 1927 г. вошла в строй новая радиовещательная станция («Большой Коминтерн») мощностью 40 *квт*, установленная в Москве на Шаболовке; ее рабочая волна была 1450 *м*. Одной опорой *T*-образной антенны служила башня высотой 150 *м*, построенная в 1921 г. В. Г. Шуховым, второй — деревянная мачта высотой 120 *м*. Характерным для антенны являлся подвешенный на уровне двух этажей развитой противовес, имевший целью защитить от токов высокой частоты расположенные под ним пути сообщения и здания.

Обе эти радиостанции были созданы Нижегородской радиолaborаторией под руководством М. А. Бонч-Бруевича при непосредственном участии П. А. Острякова и А. М. Кугушева.

Дальнейшим шагом на пути создания мощных радиовещательных передатчиков явилась вступившая в эксплуатацию в 1929 г. под Москвой 100 *кв* радиовещательная станция им. ВЦСПС, построенная под руководством А. Л. Минца. *T*-образная антенна этой станции была подвешена на двух деревянных мачтах высотой 150 *м*. При длине волны порядка 1500 *м* такая антенна обладала достаточно большим сопротивлением излучения для того, чтобы избежать перенапряжений на концах проводов и обеспечить станции хорошую частотную характеристику.

Такая же антенна была принята для серии 100 киловаттных радиостанций, построенных затем в различных городах Советского Союза.

В 1931—1933 г.г. под руководством А. Л. Минца была создана 500 *квт* радиовещательная станция им. Коминтерна. Большая мощность передатчика потребовала специальных мер для увеличения сопротивления излучения антенны. Решение было найдено в виде подвешенной на четырех двухсотметровых мачтах антенны с большой горизонтальной частью и тремя одинаково настраиваемыми снижениями (рис. 6). Три снижения за счет наводимых друг на друга электродвижущих сил позволили поднять сопротивление излучения антенны до 80 *ом*. Правда, одновременно они придали излучению антенны слегка направленный характер, который пришлось учесть при расположении антенны на местности.

В 1942—1943 г.г. в тяжелых условиях военного времени под руководством А. Л. Минца была построена 1200 *квт* радиовещательная станция, являющаяся до сих пор самой мощной в мире. Ее антенна, разработан-

ная М. С. Нейманом и Б. В. Брауде, представляет собой две системы, каждая из четырех изолированных от земли стальных башен высотой 200 м в системе для более длинных и 150 м для более коротких волн (рис. 7). Когда все башни питаются синфазно, антенна работает как ненаправленная. Для направленного излучения питание подают на две башни, а дру-

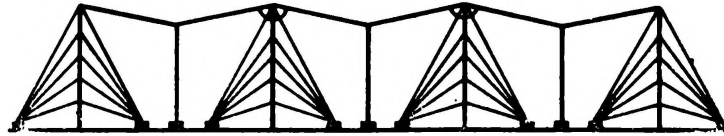


Рис. 6. Антенна 500 кВт радиовещательной станции

гие две выполняют роль пассивного рефлектора. Как активные, так и пассивные башни имеют каждая свои элементы настройки, рассчитанные на диапазон волн 750—1500 м и управляемые дистанционно.

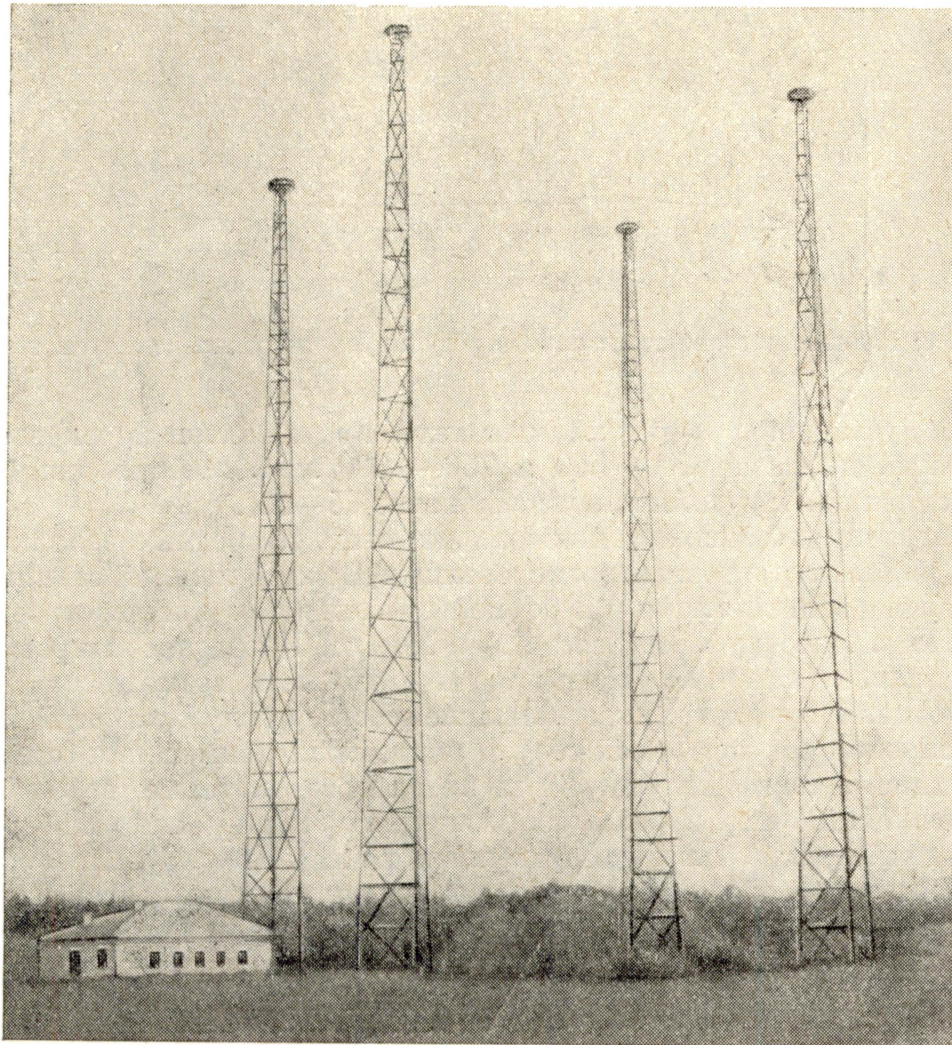


Рис. 7. Антенна 1200 кВт радиовещательной станции

Параллельно с созданием уникальных антенн для сверхмощных радиовещательных станций совершенствовались и антенны для радиовещательных передатчиков средней мощности, работающих на средних и длинных волнах. Для борьбы с ближним фэдингом надо было решить задачу регулирования распределения тока в антенне, обеспечивающего преиму-

щественное излучение вдоль земли. Эту задачу решает разработанная в 50-х годах под руководством Г. З. Айзенберга антенна [168], схема которой показана на рис. 8. Регулирование распределения тока производится в ней путем перемещения короткозамыкателя  $K$ , соединяющего внешний экран питающего коаксиального кабеля с землей. При изолированных от земли мачтах высотой 250—300 м можно соответствующим выбо-

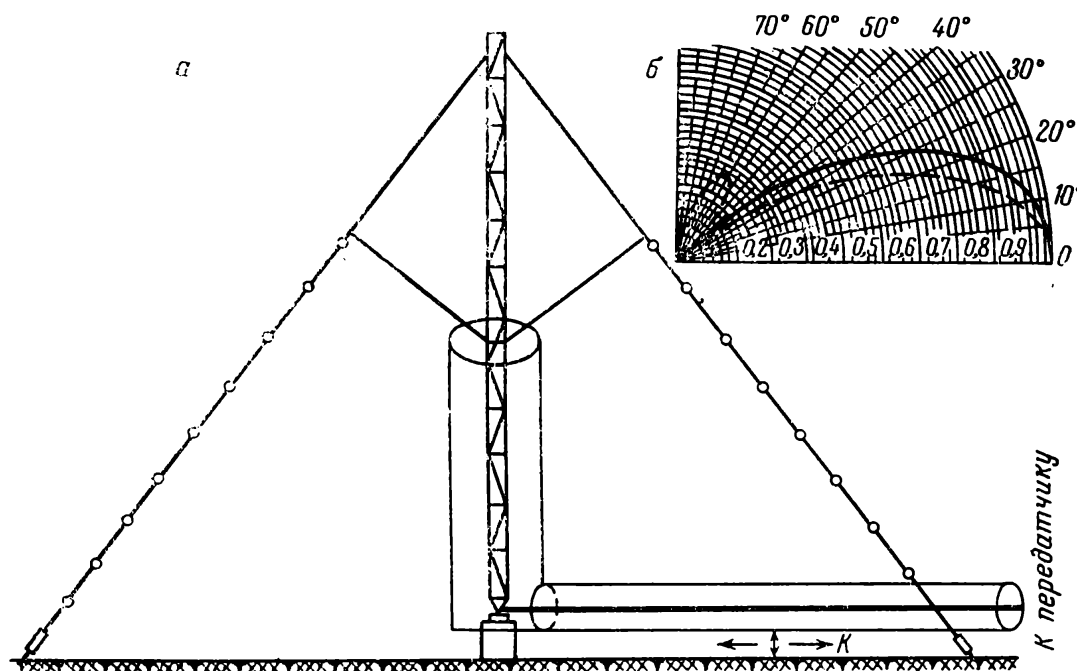


Рис. 8. Радиовещательная антенна с регулируемым распределением тока

ром места установки короткозамыкателя практически перекрыть весь вещательный диапазон 200—550 и 750—2000 м, обеспечив для средних волн подавление излучения под углами выше 45—55°.

Параллельно с радиовещанием на длинных и средних волнах развивалось и радиовещание на коротких волнах. Первой мощной станцией этого рода была радиостанция РВ-96 мощностью в 120 кВт, построенная в 1936—1938 г.г. под руководством А. Л. Минца. Перед проектировщиками антенн для нее была поставлена задача обеспечить возможность перемещения по азимуту диаграммы направленности, обслуживающей сравнительно широкий сектор. Такой сектор потребовал применения относительно небольшого числа полуволновых вибраторов, которые во избежание перенапряжений было предложено выполнить в виде алюминиевых цилиндров диаметром в 1 м с закругленным концом (рис. 9). Поворот диаграммы достигался сложением с соответствующим сдвигом фаз излучения от систем излучателей, укрепленных на двух отдельно стоящих опорах.

В течение послевоенных лет техника коротковолновых радиовещательных антенн получила у нас дальнейшее развитие.

В последние годы для вещания на коротких волнах широкое распространение получили диапазонные многоэтажные синфазные горизонтальные антенны с аперриодическим рефлектором [169]. Такой рефлектор допускает подвеску двух антенных полотен по обеим сторонам от него. Антенны с аперриодическим рефлектором могут эффективно использоваться в двукратном диапазоне волн.

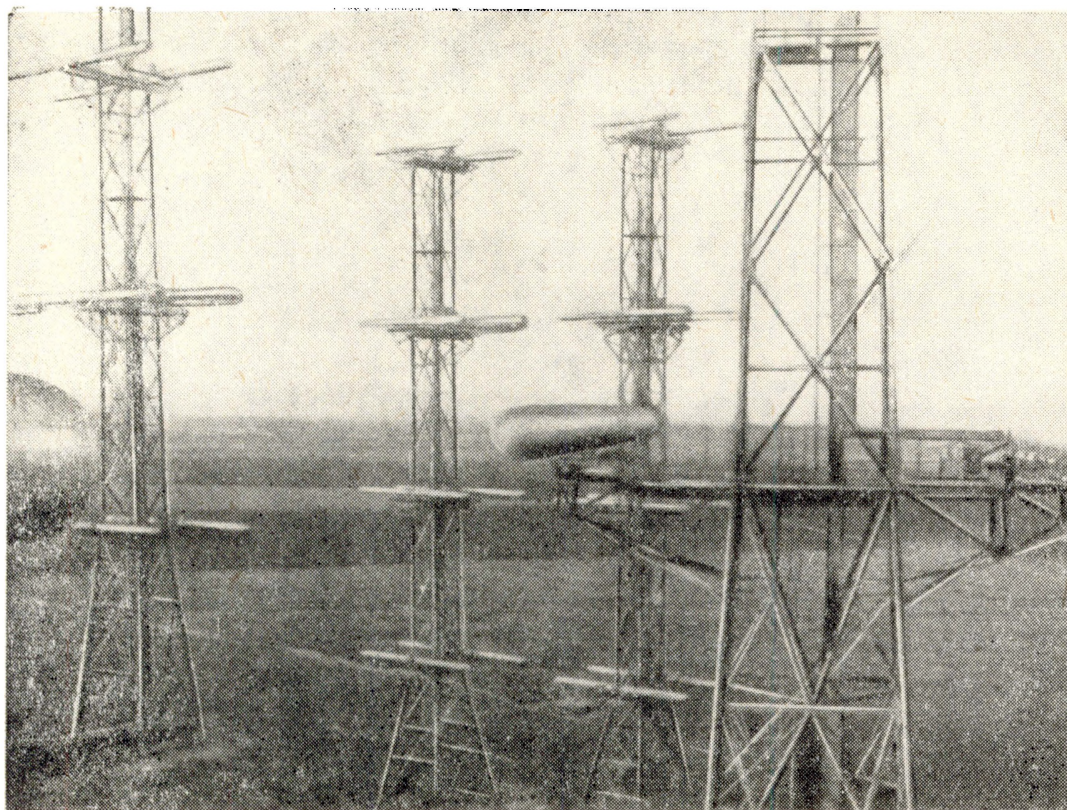


Рис. 9. Антенны 120 кет коротковолновой радиовещательной станции

#### АНТЕННЫ ТЕЛЕВИЗИОННЫХ СТАНЦИЙ \*

Хотя первые телевизионные станции начали работать в Советском Союзе в 1938 г. (сперва в Ленинграде и затем в Москве), однако практически разработка техники антенн для этих станций началась только после Великой Отечественной войны.

В начале 1946 г. Б. В. Брауде был предложен плоскостной вибратор для телевизионных антенн, обеспечивающий высокое согласование с фидером в широкой полосе частот [171]. В 1948 г. вибраторы этого типа были использованы в трехэтажной антенне Московского телевизионного центра [170] (рис. 10), обслуживавшей при помощи разделительных фильтров одновременно телевизионный и звуковой передатчики.

Для ненаправленного излучения в горизонтальной плоскости была применена, как обычно, турникетная схема (со сдвигом фаз между плечами в  $90^\circ$ ), еще в 1929 г. предложенная советскими авторами [172].

К началу 50-х годов в СССР были введены в эксплуатацию еще два телевизионных центра: в Киеве и Ленинграде, оборудованные такими же антеннами; их коэффициент направленности был порядка трех. По своим широкополосным свойствам и вмещающей мощности эти антенны опережали зарубежную технику.

В дальнейшем, по мере развития многопрограммного вещания и увеличения высоты опор, на которых ставились телевизионные антенны, приходилось решать две основные задачи: устранять фидерное эхо и обеспечивать хорошую диаграмму направленности при большом сечении телевизионных башен.

\* При составлении этого раздела авторами в значительной степени была использована работа Д. М. Трусканова [170].



При плохом согласовании антенны с фидером излучается только часть подводимой к антенне энергии, а другая часть отражается. Отраженная энергия идет обратно к передатчику и возвращается к антенне через некоторый промежуток времени после отражения от передатчика. В резуль-

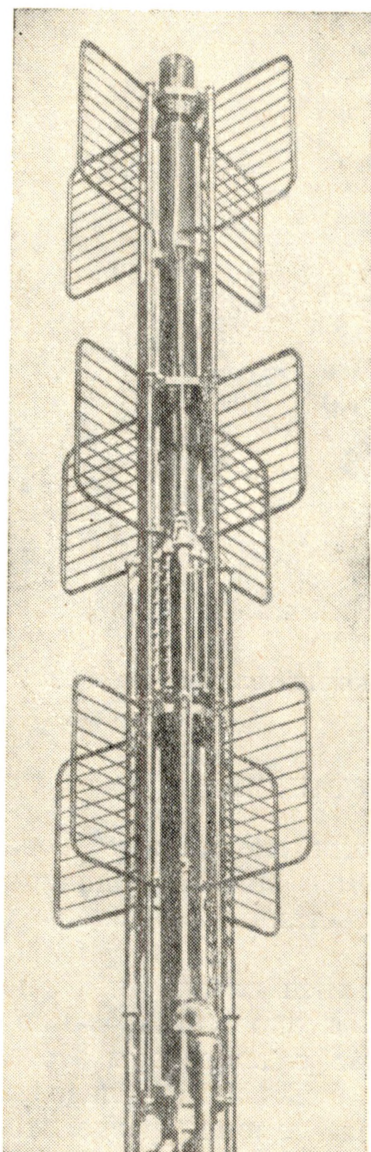


Рис. 10

Рис. 10. Трехэтажная антенна Московского телевизионного центра с широкополосными вибраторами Б. В. Брауде

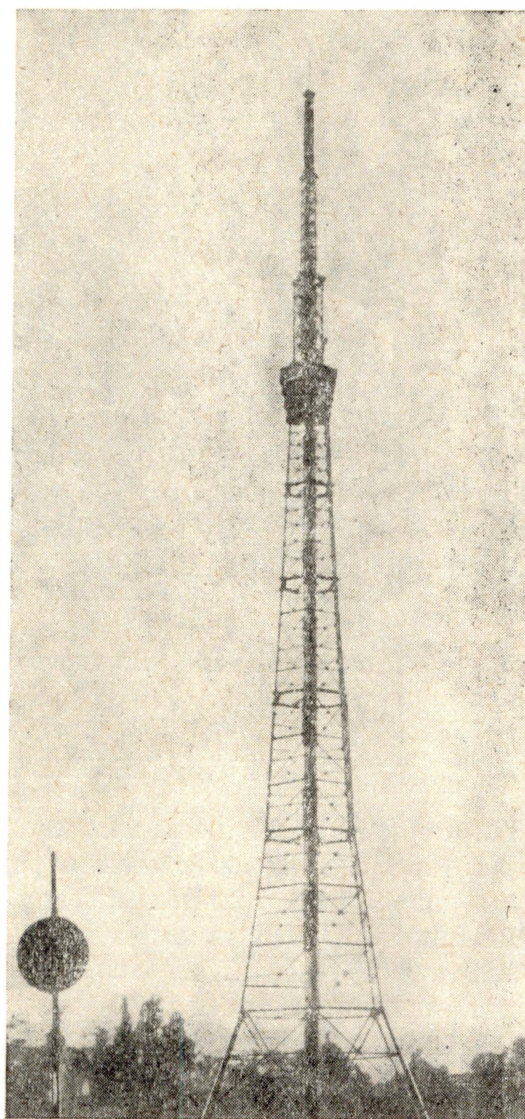


Рис. 11

Рис. 11. Антенна Ленинградского телецентра

тате этого явления, еще в 1939 г. предсказанного М. С. Нейманом [173] и называемого «фидерным эхо», на приеме получается двухконтурное изображение. В настоящее время устранение фидерного эхо достигается применением специальной схемы питания вибраторов, обеспечивающей такое соединение излучателей различных этажей, при котором достигается многократная компенсация отражений подводимой энергии [170]. Такой способ позволяет получать кбв, равный 0,9 в тридцатипроцентной полосе частот.

Что касается диаграммы направленности, то ее форма в горизонтальной плоскости зависит от разноса излучателей, а разнос этот растет вместе

с увеличением сечения опоры, несущей вибраторы, выбираемого из соображений механической прочности. При многопрограммном телевидении, когда ряд антенн располагается на общей опоре одна над другой, отпадает возможность применения одних только турникетных антенн и приходится иметь дело подчас с очень большими сечениями несущих конструкций, определяющих разнос вибраторов. Различные типы антенн, разработанные для таких случаев, должны учитывать также необходимость создания прижатой к земле и лишенной побочных лепестков диаграммы направленности косекансного типа в вертикальной плоскости.

Примерами антенн, отражающих современный уровень развития отечественной телевизионной техники, являются введенный в действие в 1962 г. комплекс антенн Ленинградского телецентра и комплекс антенн только что введенной в эксплуатацию уникальной Останкинской телевизионной станции в Москве.

В Ленинграде общая высота башни с антеннами (рис. 11) составляет 316 м, из которых 116 м заняты антеннами, расположенными снизу вверх в следующем порядке. На призме сечением  $6 \times 6 \text{ м}^2$  (что соответствует  $1,4\lambda \times 1,4\lambda$ ) смонтирована антенна для УКВ ЧМ вещания, далее на призмах сечением  $3,5 \times 3,5 \text{ м}^2$  и  $2,3 \times 2,3 \text{ м}^2$  установлены антенны 1-го и 3-го каналов телевидения, работающие в диапазонах 48,5—56,5 и 76—84 Мгц. На самом веру башни на трубчатом основании диаметром 245 мм смонтирована турникетная антенна 8-го канала (190—198 Мгц). Все антенны имеют по 8 этажей, разнесенные на  $0,75 \lambda$ . В антенне ЧМ вещания применены волновые вибраторы, питаемые синфазно; в антеннах 1-го и 3-го диапазонов — полуволновые вибраторы при квадратурном питании по схеме с многократной компенсацией отражений. Кбв для всех антенн порядка 0,92—0,94, неравномерность горизонтальной диаграммы направленности  $\pm 2 \text{ дб}$ .

Комплекс антенн станции телевидения в Останкине установлен на свободстоящей железобетонной башне общей высотой 525 м (вместе с антеннами). Антенны укреплены на цилиндрическом основании высотой

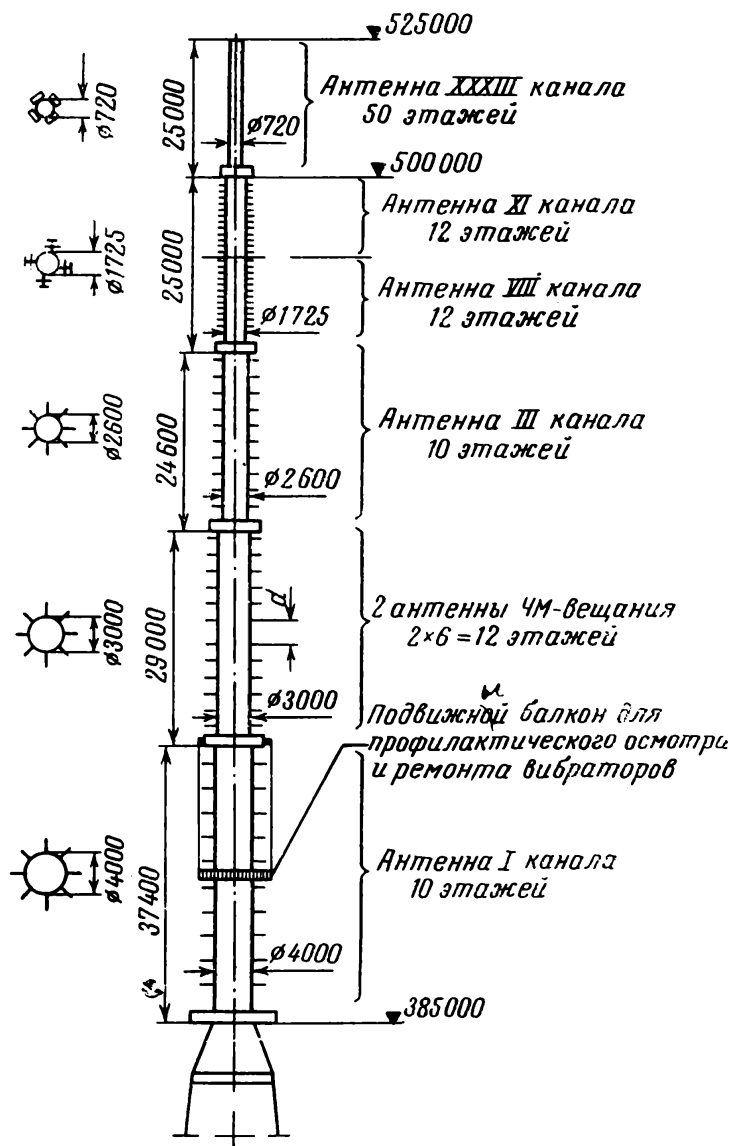


Рис. 12. Схема расположения антенн на башне телевизионной станции в Останкино

140 м, состоящем из ряда ступеней диаметрами 4,0; 3,0; 2,6; 1,725 и 0,72 м (рис. 12). Антенны Останкинской башни обслуживают 1-й, 3-й, 8-й, 11-й (214—222 Мгц) и 33-й (566—574 Мгц) каналы телевидения и шесть программ ЧМ вещания (в диапазоне 67—73 Мгц). Первые три ступени несущего цилиндра заняты антеннами УКВ вещания, 1-го и 3-го каналов. Ввиду большого диаметра ступеней здесь применены новые антенны — из радиальных вибраторов — по 8 вибраторов в этаже. Число этажей в антеннах указано на рисунке. Антенны 8-го и 11-го каналов смонтированы на четвертой ступени цилиндра. Они составлены из четырех полуволновых вибраторов с настроенным рефлектором, расположенных вокруг опоры с тангенциальным сдвигом. Антенна 33-го канала содержит 50 этажей по четыре волновых вибратора в каждом. Все ее вибраторы заключены в 28 панелей, покрытых кожухами из стеклопластика для защиты от атмосферных осадков и гололеда.

Схемы питания всех антенн обеспечивают многократную компенсацию отражений, необходимый наклон максимума излучения и устранение нулей в вертикальной диаграмме направленности.

Главные фидеры, длиной 450—500 м, соединяющие антенны с передатчиками, выполнены герметизированными с подкачкой сухого очищенного воздуха. Внутри свободностоящей башни имеется лифт, доходящий до отметки 500 м (до антенны 33-го канала).

Высота свободностоящей опоры, протяженность антенн и их коэффициент усиления делают антенный комплекс телевизионной станции в Останкино уникальным сооружением. Достаточно сказать, что общая высота телевизионной башни телецентра в Монреале, построенного в 1967 г. к открытию Всемирной выставки и рассчитанного, как и Московский телецентр, на 5 телевизионных и 6 УКВ вещательных программ, составляет всего 110 м.

### РАДИОТЕЛЕСКОПЫ

Перед антеннами для радиоастрономии ставится задача получения большой эффективной площади, острой направленности и низкой шумовой температуры. Эффективная площадь зависит не только от размеров антенны, но и от тщательности выполнения ее зеркальной поверхности; от-

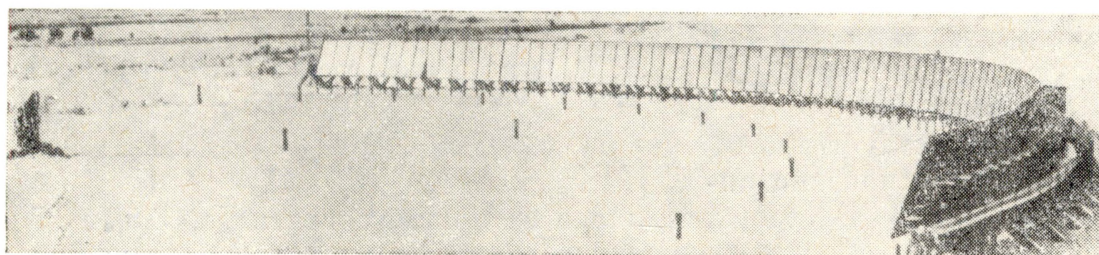


Рис. 13. Большой Пулковский радиотелескоп

клонения этой поверхности от расчетной на величину, превышающую 0,1 длины принимаемой волны, уже сильно снижают эффективную площадь. Недостаточно тщательное изготовление зеркала повышает также шумовую температуру антенны вследствие возрастания уровня побочных лепестков.

Одним из путей повышения точности воспроизведения заданной поверхности зеркала является конструктивная привязка антенны к земле.

На этом принципе основан Большой Пулковский радиотелескоп (БПР) Главной астрономической обсерватории, построенный в 1955 г. по проекту С. Э. Хайкина и Н. Л. Кайдановского [174]. Он представляет собой систему из 90 установленных на бетонном фундаменте плоских отражающих щитов (высотой 3 и шириной 1,5 м), образующую узкую ленту, вырезанную из поверхности параболоида вращения (рис. 13). Форма этой ленты меняется в зависимости от угла над горизонтом, который образует наблюдаемый источник, проходя через меридиан. При установке радиотелескопа на определенный угол места приходится перемещать щиты в радиальном направлении и менять их угол наклона, а также перемещать облучатель, устанавливая его в фокусе соответствующего параболоида.

На этом радиотелескопе, дающем на сантиметровых волнах нежевидную диаграмму, шириной в 1—2 мин по азимуту при эффективной площади 60—100 м<sup>2</sup>, был получен ряд замечательных результатов, касающихся строения Галактики. В настоящее время, после замены плоских щитов цилиндрическими, БПР приспособлен для приема миллиметровых волн.

В 1958 г. был введен в действие полноповоротный зеркальный радиотелескоп РТ-22 Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР (рис. 14), сооруженный по проекту П. Д. Калачева. Как известно, минимальная рабочая волна подобных радиотелескопов определяется точностью воспроизведения поверхности зеркала и жесткостью конструкции. РТ-22 является одним из

наиболее точных радиотелескопов в мире. Он представляет собой 22-метровый параболоид с угломестно-азимутальной подвеской, работающий в диапазоне сантиметровых и коротких дециметровых волн. Точность изготовления зеркала обеспечивает эффективную площадь антенн на волне 3 см 170 м<sup>2</sup> и позволяет работать даже на волне 8 мм с уникальной для этой волны эффективной площадью порядка 100 м<sup>2</sup>.

Второй радиотелескоп типа РТ-22 введен в эксплуатацию в 1966 г. в Крымской астрофизической обсерватории.

Появление у нас искусственных спутников Земли и быстрый прогресс техники дистанционно-управляемых космических кораблей поставили на очередь срочное создание антенн с большой эффективной площадью для приема сигналов телеметрии и другой информации, передаваемых с этих кораблей.

В 1960 г. для этой цели была построена специальная приемная антенна. Для ускорения ее сооружения были использованы разработанные ранее антенны с параболическим зеркалом диаметром 16 м и фокусным расстоянием 7,17 м. 8 таких антенн, вращающихся по углу места, расположены в 2 этажа на опоре, позволяющей поворачивать антенну по азимуту. Параболические антенны соединены синфазно; такая схема соединения позволяет обслуживать лишь сравнительно узкий диапазон в районе фиксированной волны, в качестве каковой была взята волна 32 см. В дальнейшем

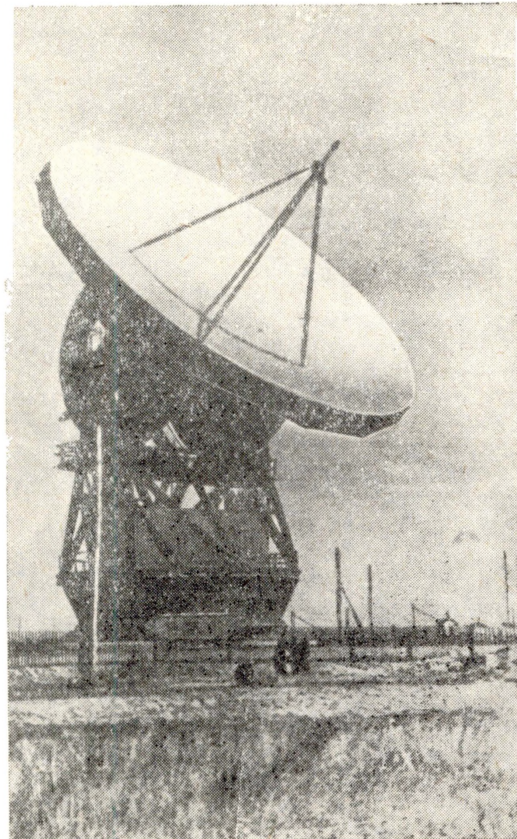


Рис. 14. 22-метровый радиотелескоп Физического института

были построены еще одна такая же приемная антенна, образующая с первой интерферометр с базой 471 м, и одна передающая того же типа.

Указанные антенны успешно использовались не только для космических линий связи, но и для радиолокации планет.

Радиоастрономические наблюдения в диапазоне метровых волн проводятся у нас на крестообразном интерферометре Физического института им. П. Н. Лебедева близ Серпухова. Линия восток — запад этого интерфе-



Рис. 15. Линия восток — запад крестообразного интерферометра Физического института

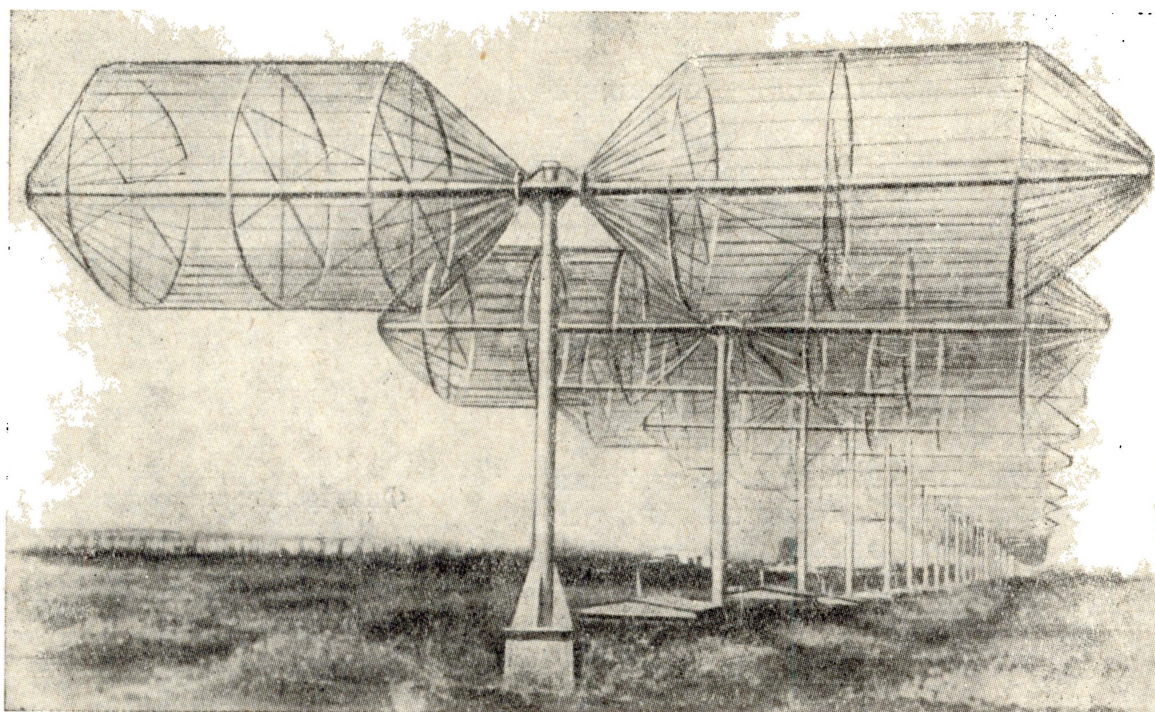


Рис. 16. Северное плечо декаметрового радиотелескопа УТР-1

рометра (рис. 15) была введена в строй в 1965 г. Она представляет собой систему из 288 синфазных вибраторов, расположенных совместно с контррефлектором вдоль фокальной линии цилиндрического параболического зеркала с раскрытием в 40 м. Это зеркало — длиной в 1008 м — может вращаться вокруг горизонтальной оси.

Линия север — юг — длиной 1000 м — состоит из 626 вибраторов. Перемещение в вертикальной плоскости луча, создаваемого этой линией, осуществляется методами частотного сканирования совместно с системой фазовращателей. Интерферометр рассчитан на работу в диапазоне 2,5—10 м и по сравнению с другими аналогичными антеннами является уникальным как по своей диапазонности, так и по эффективной площади (порядка нескольких тысяч квадратных метров). На волне 3 м сечение

главного луча по половинной мощности определяется телесным углом  $10' \times 10'$ .

Декаметровые радиотелескопы, работающие в диапазоне 10—40 *Мгц*, созданы Институтом радиофизики и электроники Украинской академии наук. Первый такой радиотелескоп-интерферометр площадью в 8000  $\text{м}^2$ , построенный вблизи Харькова, начал работать в 1961 г. в диапазоне 20—40 *Мгц*. С 1965 г. в эксплуатации находится радиотелескоп УТР-1 диапа-

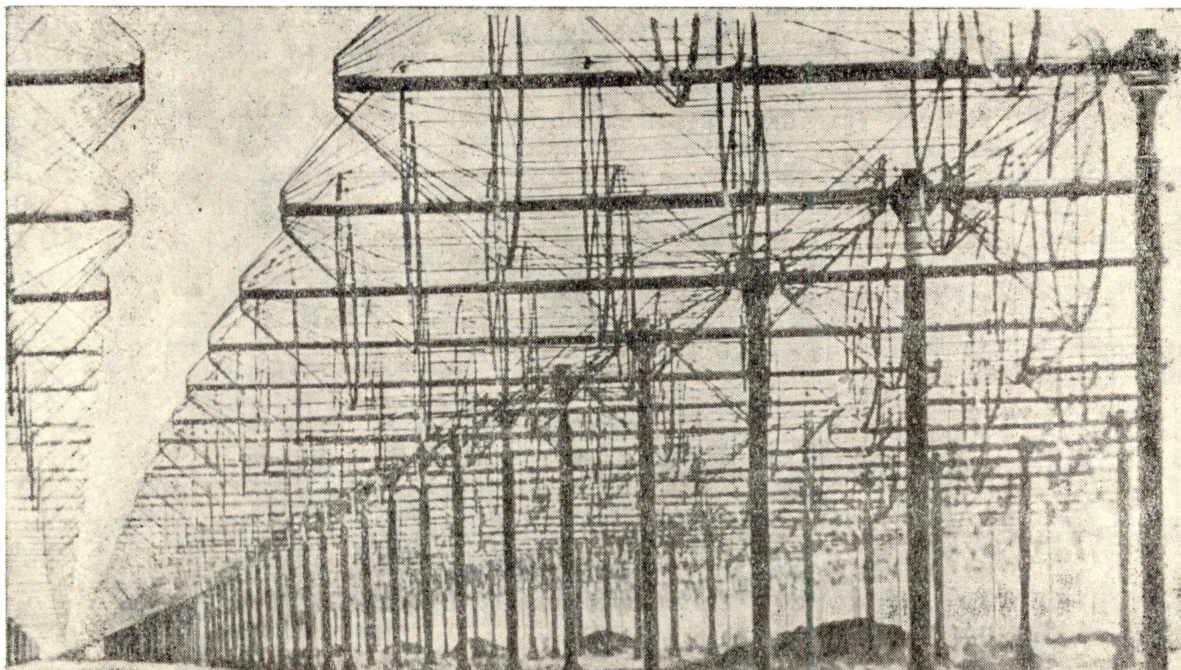


Рис. 17. Южное плечо декаметрового радиотелескопа УТР-2

зона 10—25 *Мгц*. Он состоит из двух антенн общей площадью 15 000  $\text{м}^2$ , образующих букву Т: антенны С — Ю (однорядной) длиной 600 м из 80 широкополосных излучателей (рис. 16) и антенны В — З (двурядной) длиной также 600 м из 128 излучателей. Перемещение главного луча производится дистанционно в течение долей секунды. Для обеспечения широкополосности применяется временная система фазирования с дискретными двоичными фазовращателями. Луч перемещается скачкообразно, занимая одно из положений, предусмотренных программой. Радиотелескоп УТР-1 имеет 512 положений луча по склонению в секторе  $\pm 90^\circ$  и 7 положений по прямому восхождению в секторе  $\pm 20^\circ$ .

В настоящее время находится в процессе наладки грандиозный радиотелескоп УТР-2 площадью 150 000  $\text{м}^2$ , работающий в том же диапазоне 10—25 *Мгц*. Он также состоит из двух антенн размерами  $54 \times 1800 \text{ м}^2$  (С — Ю) и  $45 \times 900 \text{ м}^2$  (В — З) с общим числом 2040 излучателей (рис. 17). Число фиксированных положений луча составляет 2048 по склонению (в секторе  $\pm 90^\circ$ ) и 1024 по прямому восхождению (в секторе  $\pm 56^\circ$ ). Антенна может управляться вручную или от специализированной электронно-вычислительной машины, обеспечивая слежение за любым космическим источником радиоизлучения в течение нескольких часов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Пистолькорс, Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 11, 1390.
2. Я. Н. Фельд, Л. Д. Бахрах, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 2, 187.
3. А. А. Пистолькорс, Сб. 100 лет со дня рождения А. С. Попова, Изд. АН СССР, 1960.
4. Е. Г. Зелкин, Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности, ГЭИ, 1963.
5. Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 12, 1463.
6. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, ГИФМЛ, 1962.
7. В. И. Поповкин, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 4, 705.
8. Е. Г. Зелкин, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 1, 42.
9. В. П. Яковлев, Научные труды Радиотехнического института, 1965, 7, 1.
10. Б. М. Минкович, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 4, 708.
11. Б. М. Минкович, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 6, 1073.
12. П. В. Блюх, И. Л. Вербицкий, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 10, 1783.
13. В. П. Яковлев, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 1, 13.
14. А. Н. Тихонов, Докл. АН СССР, 1963, 151, 3.
15. Е. Г. Зелкин, Сб. Антенны, НТОРиЭ им. А. С. Попова, Изд. Связь, 1966.
16. В. И. Поповкин, Труды Казанского авиационного института, вып. 82, 1964.
17. Е. В. Бакланов, В. А. Покровский, Г. И. Сурдутович, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 6, 963.
18. Ю. М. Жидко, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 8, 1473.
19. Б. М. Минкович, Ю. И. Давидчевский, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 9, 1482.
20. Е. Г. Зелкин, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 12, 1980.
21. Л. Д. Бахрах, В. М. Гришина, Труды НИИ, вып. 1 (95), 1957.
22. Б. М. Минкович, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 9, 1712.
23. Е. Г. Зелкин, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 1, 24.
24. С. Д. Кременецкий, Некоторые актуальные вопросы теории синтеза излучающих систем, Кандидатск. диссертация, 1967.
25. В. И. Поповкин, Труды Казанского авиационного института, вып. 85, 1965.
26. Э. И. Крупицкий, Некоторые вопросы математической теории синтеза, Кандидатск. диссертация.
27. В. Н. Дымский, Труды Казанского авиационного института, вып. 82, 1964.
28. В. Л. Покровский, Докл. АН СССР, 1956, 103, 3.
29. В. Л. Покровский, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 4, 389.
30. В. Л. Покровский, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 12, 1550.
31. В. Л. Покровский, Матем. сб., 1959, 48/90, 3.
32. И. Ф. Соколов, Д. Е. Вакман, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 1, 46.
33. Ю. М. Давидчевский, Б. М. Минкович, В. А. Калинин, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 9, 1545.
34. В. И. Бекетов, Радиотехника, 1961, 16, 3.
35. В. Д. Кузнецов, В. К. Парамонов, Электросвязь, 1961, 2.
36. Л. Д. Бахрах, Труды НИИ, 1957, вып. 6 (50).
37. Ю. М. Жидко, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1964, 7, 6.
38. Ю. М. Жидко, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 3, 564.
39. Ю. М. Жидко, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1962, 5, 8.
40. А. Р. Вольперт, Радиотехника, 1961, 16, 3.
41. Л. Д. Бахрах, Многозеркальные антенны. Докторск. диссертация, 1958.
42. Л. Б. Тартаковский, В. К. Тихонова, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 12, 2016.
43. Л. Д. Бахрах, С. Д. Кременецкий, Сб. Антенны, НТОРиЭ им. А. С. Попова, в. 1, Изд. Связь, 1966.
44. Л. Б. Тартаковский, А. М. Покрас, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 2, 186.
45. А. М. Покрас, Радиотехника, 1957, 12, 11.
46. Б. Е. Кинбер, А. М. Покрас, Радиотехника, 1957, 12, 7, 30.
47. А. М. Покрас, Б. Е. Кинбер, Электросвязь, 1961, 6, 22.
48. А. М. Покрас, Перископические антенны и беспроводные линии передачи, Связьиздат, 1963.
49. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1967, 12, 2, 229.
50. Е. Н. Майзельс, А. В. Данилов, Описание изобретения к авторск. свидетельству 189047, заявлено 23 II 1948 г. (№ 362112/26-9), Бюлл. изобретений и открытий, 1966, 23.

51. Б. З. Каценеленбаум, Авторск. свидетельство 21а4, 4868, № 146362 от 26 V 1961, Бюлл. изобретений и открытий, 1962, 8, 30.
52. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Аннотации докладов на 2-м Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, г. Горький, 7—13 июня 1962 г., Изд. АН СССР.
53. Р. Б. Ваганов, А. Б. Догадкин, Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 9, 1672.
54. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 1958, 34, 6, 1658.
55. A. L. Schawlow, C. H. Townes, Phys. Rev., 1958, 112, 6, 1940.
56. A. Fox, T. Li, Bell System Techn. J., 1961, 40 (2), 453.
57. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 9, 1516.
58. Б. З. Каценеленбаум, Успехи физ. н., 1964, LXXXIII, 1.
59. Р. Б. Ваганов, Б. З. Каценеленбаум, Сб. Антенны, в. 1, Связьиздат 1966, 22.
60. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 1963, 44, 3, 1050.
61. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 1963, 45, 3(9), 683.
62. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, Изд. Советское радио, 1966.
63. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1964, 7, 2, 313.
64. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1964, 34, 9, 1541.
65. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 1966, 12, 7, 1159.
66. Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Радиотехника и электроника, 1967, 12, 7, 1184.
67. А. И. Ардабьевский, Л. Д. Бахрах, Л. Н. Дерюгин, Авторск. свидетельство № 110610 от 5 X 1956 г.
68. А. И. Ардабьевский, Л. Д. Бахрах, Л. Н. Дерюгин, Авторск. свидетельство № 110198 от 5 X 1956 г.
69. Сканирующие антенны СВЧ, Труды МАИ, в. 159, под ред. Л. Н. Дерюгина, Изд. Машиностроение, 1964.
70. Б. А. Егорычев, Труды МФТИ, в. 8, Оборонгиз, 1962.
71. Л. Н. Дерюгин, Авторск. свидетельство № 662481 от 11 IV 1960 г.
72. Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 6, 926.
73. Е. В. Бакланов, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 1, 183.
74. Л. Б. Тартаковский, А. И. Рубинштейн, Тезисы докладов 3-го Всесоюзного симпозиума по дифракции волн, стр. 65—67, Тбилиси, 1964.
75. О. Г. Вендик, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1960, 3, 1, 77; 1961, 4, 1, 64; 1963, 7, 2, 105.
76. М. И. Конторович, В. Ю. Петрунькин, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 12, 1982.
77. М. Б. Заксон, В. В. Меркулов, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 1, 7; 1966, 11, 6, 1128.
78. Я. Н. Фельд, Радиотехника, 1946, 1, 6; ЖТФ, 1948, 18, 10, 1267.
79. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1959, стр. 298.
80. Г. Н. Рапопорт, ЖТФ, 1957, 38, 9, 2104.
81. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Труды юбилейной научно-технической конференции ГКРЭ (1958). Секция антенных систем, 1960.
82. П. Е. Краснушкин, С. П. Ломнев, А. Г. Трагов, Докл. АН СССР, 1964, 159, 3, 528.
83. П. Е. Краснушкин, С. П. Ломнев, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 6, 1051.
84. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 10, 1759.
85. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 417.
86. Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 7, 1128.
87. Г. В. Кисунько, Докл. АН СССР, 1949, 66, 5, 863.
88. Ш. Е. Цимринг, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 1, 3; 1957, 2, 8, 969.
89. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 9, 1207; 1960, 5, 11, 1802; 1961, 6, 9, 1583; 1962, 7, 4, 604; 1962, 7, 7, 1249.
90. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 7, 1091; 1963, 8, 4, 713; 1964, 9, 5, 800; 1965, 10, 3, 559.
91. И. Ш. Белуга, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 3, 459; 1965, 10, 9, 1724.
92. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, 1964.
93. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1961, 31, 1, 29.
94. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 1, 53.
95. В. М. Дашенков, В. С. Ильин, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 2, 269.



96. И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 2, 260; 1966, 11, 5, 831; 1966, 11, 6, 1076.
97. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1959, 29, 6, 673; 1959, 29, 6, 689; 1961, 31, 1, 45.
98. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, Изд. Советское радио, 1962, стр. 194.
99. А. Т. Фялковский, ЖТФ, 1966, 36, 10, 1744.
100. М. Д. Хаскинд, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 10, 1800.
101. М. И. Конторович, Н. О. Соколова, Радиотехника, 1965, 20, 12, 34.
102. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 12, 2004.
103. Н. Н. Говорун, Докл. АН СССР, 1959, 126, 1, 132; 1960, 1.
104. Н. Н. Говорун, Интегральные уравнения теории антенн, Кандидатск. диссертация, ОИЯИ, гор. Дубна. 1962.
105. Е. Н. Васильев, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1959, 2, 4, 588; 1963, 6, 3, 591.
106. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 12, 1972.
107. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, ЖТФ, 1965, 35, 10, 1817.
108. Е. Н. Васильев, Интегральные уравнения в задачах возбуждения тел вращения, Докторск. диссертация, 1966.
109. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалушин, ЖТФ, 1967, 37, 4.
110. Г. Т. Марков, А. Н. Коноваленко, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1966, 9, 5, 967.
111. Г. Т. Марков, Д. А. Дупленков, Н. Ф. Осипович, Изв. вузов МВССО СССР (Радиотехника), 1965, 8, 1, 142.
112. Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 6, 920.
113. Л. Б. Тартаковский, Докл. на секции НТОРиЭ им. А. С. Попова, 1958.
114. Л. Б. Тартаковский, В. Л. Тандит, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 6, 918.
115. Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1821.
116. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 9, 1407.
117. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 5, 720.
118. Б. Е. Кинбер, Развитие и применение физической теории дифракции к расчету антенн, Докторск. диссертация, 1965.
119. В. П. Нарбут, Изв. вузов МВССО СССР (Радиотехника), 1965, 8, 6.
120. В. М. Гинзбург, П. Н. Белова, Расчет параболических антенн, Изд. Советское радио, 1959.
121. Л. Д. Бахрах, В. М. Гришина, Докл. на научной сессии НТОРиЭ им. А. С. Попова, 1959.
122. Б. Е. Кинбер, Акуст. ж., 1955, 1, 3.
123. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 6, 973.
124. А. Е. Саломонович, Н. С. Соболева, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 5, 799.
125. Л. Д. Бахрах, И. В. Вавилова, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 7, 1146.
126. П. М. Геруни, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 1, 3.
127. А. И. Адонина, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 1, 190.
128. Н. Г. Пономарев, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 2, 214.
129. Л. Д. Бахрах, К. И. Могильникова, Изв. вузов МВССО СССР (Радиотехника), 1964, 6, 4.
130. М. И. Конторович, М. Н. Астрахан, М. Н. Спирина, 3-й Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Изд. Наука, 1964.
131. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Приборы и техника эксперимента, 1959, 2.
132. Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, Б. Г. Кузнецов, Г. В. Кузнецова, С. Э. Хайкин, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 12, 1947.
133. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Радиоастрономические методы измерения параметров антенн, Изд. Советское радио, 1964.
134. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, Изд. Советское радио, 1966.
135. Н. А. Есепкина, Докл. АН СССР, 1957, 113, 1.
136. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1961, 4, 3.
137. В. А. Каплун, Труды НИИ, 1955, вып. 4 (39).
138. В. А. Каплун, А. А. Пистолькорс, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 11, 1948.
139. В. А. Каплун, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1965, 4.
140. В. А. Каплун, Радиотехника и электроника, 1967, 12, 2, 253.
141. В. А. Каплун, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 7, 1311.

142. Ю. Г. Гукасов, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 5, 765.
143. А. А. Пистолькорс, В. А. Каплун, Л. В. Князева, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 6, 911.
144. В. А. Каплун, Радиотехника, 1965, 20, 9.
145. Я. С. Шифрин, Труды АРТА, 1959, 44.
146. Я. С. Шифрин, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 3, 400.
147. Я. С. Шифрин, Статистика поля линейной антенны, Изд. АРТА, 1961.
148. В. И. Таланов, Н. М. Шеронова, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2.
149. Я. С. Шифрин, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 11, 1846.
150. А. Е. Саломонович, Труды ФИАН СССР, им. П. Н. Лебедева, 1961, XXVIII.
151. Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, С. Э. Хайкин, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 4, 584.
152. Л. Г. Содин, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 7, 1179.
153. О. Г. Вендик, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 7, 1130.
154. Я. С. Шифрин, Л. Г. Корниенко, Радиотехника и электроника, 1967, 12, 2, 237.
155. Н. А. Есепкина, Б. Г. Кузнецов, С. Э. Хайкин, Изв. ГАО, XXIII, вып. 3, № 172, 1961.
156. Л. Д. Бахрах, С. Ф. Брянцев, Сканирующие антенны сверхвысоких частот, Труды МАИ, вып. 159, Изд. Машиностроение, 1964.
157. Н. Г. Пономарев, Радиотехника и электроника, 1962, 7, 6, 949.
158. Л. М. Прокуин, Радиотехника и электроника, 1965, 10, 2, 360.
159. В. Г. Пошеонов, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 12, 2232.
160. С. Г. Руднева, Современные проблемы антенно-волноводной техники, Изд. Наука, 1967.
161. Л. Д. Бахрах, О. Н. Владимирова, А. П. Курочкин, Г. А. Соболев, Г. Х. Фридман, Сб. Антенны, НТОРиЭ им. А. С. Попова, Изд. Связь, вып. 2, 1967.
162. Л. Д. Бахрах, А. П. Курочкин, Докл. АН СССР, 1966, 171, 6.
163. Ю. В. Тыжнов, Г. Х. Фридман, Современные проблемы антенно-волноводной техники, Изд. Наука, 1967.
164. Г. Т. Марков, Б. П. Петров, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1965, 8, 3.
165. Г. Т. Марков, Б. П. Петров, Изв. вузов МВССО СССР (Радиотехника), 1965, 8, 6.
166. О. Н. Терешин, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 4, 715.
167. О. Н. Терешин, Радиотехника и электроника, 1964, 9, 8, 1338.
168. Г. З. Айзенберг, С. П. Белоусов, А. Х. Линдберг, В. Г. Ямпольский, Радиотехника, 1961, 16, 12, 21.
169. Г. З. Айзенберг, Статья «Антенная техника», в сб. «Радио 70 лет», Изд. Связь, 1965, стр. 190—215.
170. Д. М. Трусканов, Развитие отечественной техники телевизионных передающих антенн, Сб. Антенны, вып. 2, Изд. Связь, 1967, стр. 2.
171. Б. В. Брауде, Радиотехника, 1947, 2, 7.
172. П. Н. Рамлау, А. А. Пистолькорс, Советский патент № 17427, опубликованный в Вестнике по делам изобретений, 1930, 9.
173. М. С. Нейман, Электросвязь, 1939, 4.
174. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина, О. Н. Шиврис, Изв. главной астрономической обсерватории в Пулкове, XXI, вып. 5, № 164, 3, 1959.
175. Л. Д. Бахрах, В. И. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1967, 12, 3, 437.
176. R. Kovacs, L. Solimor, Acta Physica Acad. Sci. Hungary, 1956, 6, 2, 161.
177. D. Slepian, H. O. Pollock, Bell System Techn. J., 1961, 40, Jan.
178. I. D. Bruce, H. Unz, Proc. I.R.E., 1962, 50, 2128.
179. G. L. Dolph, Proc. I.R.E., 1946, 34, 6, 335.
180. T. T. Taylor, IRE Trans, 1955, AP-3, 1, 16.
181. E. K. Proctor, C. M. Ablow, Theory and Antennas, pt 2, Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1953.
182. J. V. Keller, J. Appl. Phys., 1957, 28, 4, 5.
183. Л. Д. Бахрах, Труды НИИ, 1953, вып. 3 (30).
184. P. W. Hannan, IRE Trans., 1961, AP-9, 2, 140.
185. W. V. T. Ransch, IEEE Trans., 1963, AP-11, 4, 414.
186. F. S. Holt, E. L. Vouche, IEEE Trans., 1964, AP-12, 1, 44.
187. Thourel Radomes Conj., de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique, 1959.
188. I. Robieux, Ann. radioélectr., 1956, 11, 43, 29.
189. C. A. Rondinelli, IRE Nat. Convent. Rec., 1959, pt. 1, 7, 174.

190. A. Kcienski, G. G. Comissar, O. R. Price, IRE Wescon Convent. Rec., pt 1, 1959, p. 32.
191. V. E. Welsby, D. G. Tucker, J. Brit. I.R.E., 1959, 19, 6, 369.
192. I. W. Linder, J. Res. N.D.S., 1961, May — June, 65D, 245.
193. H. E. Shanks, IRE Trans., 1961, AP-9, 2, 162.
194. A. Hewish, IRE Trans., 1962, AP-10, 1, 97.
195. L. J. Cutrona, G. O. Hall, IRE Trans., 1962, MIL-6, 2, 119.
196. W. Aulock, Proc. I.R.E., 1960, 10, 1715.
197. H. Shnitkin, Microwave J., Dec., 1960, 3, 67; 1961, 4, 57.
198. R. Carter, IRE Trans., 1960, AP-8, 3, 276.
199. I. Allen, IRE Trans., 1962, AP-10, 5, 566.
200. L. Kurtz, R. Elliott, S. Wehn, W. Flock, IRE Trans., 1961, AP-9, 5.
201. Антенные решетки (обзор зарубежных работ), под ред. Л. С. Бененсона, Изд. Советское Радио, 1966.
202. G. Goubau, F. Schwing, IRE Trans., 1961, AP-9 (3), 248.
203. I. Christian, G. Goubau, IRE Trans., 1961, AP-9 (3), 256.
204. E. Hallen, Transaction of the Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden, 1961, 2, 183.

Поступила в редакцию  
18 IV 1967

---

УДК 538.566

## ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ

*Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский*

Показано, в каких классах функций следует искать решение интегральных уравнений второго рода, к которым могут быть сведены [1] задачи дифракции волн на незамкнутых экранах с граничными условиями типа Дирихле и Неймана.

Проведена частичная регуляризация этих уравнений, позволившая получить новые уравнения, отличающиеся от исходных тем, что их свободные члены принадлежат к указанному классу функций, а интегральные операторы преобразуют этот класс функций в себя. На примере двумерных задач исследованы ядра новых уравнений и их особенности. Приведены соображения о методах эффективного решения указанных уравнений.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] задача дифракции волн на незамкнутом экране была сведена к различным типам интегральных уравнений второго рода.

Ядра и свободные члены этих уравнений имеют в ряде случаев существенные особенности на крае экрана.

Выяснение характера этих особенностей, приведение уравнений к возможно более «регулярной» форме и установление класса функций, в котором следует отыскивать решение, — все это играет важную роль для эффективного решения рассматриваемых дифракционных задач при помощи уравнений работы [1].

Изучению перечисленных вопросов и посвящена настоящая статья, которую можно рассматривать как продолжение работы [1]. Ниже используются обозначения и некоторые формулы последней; при ссылках на эти формулы перед их номерами ставится цифра 1.

### 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим прежде всего уравнение (1.8) с ядром и свободным членом (1.9) (задача Дирихле), содержащими существенные особенности.

Выведем сначала одно вспомогательное соотношение. Изучим интеграл

$$\mathbf{I} = \oint_L f(p, q) U(p) dL_p, \quad (1)$$

где, как и в [1]

$$f(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|}$$

а функция  $U(p)$  определена во всем пространстве и удовлетворяет всем условиям, которые необходимы для дальнейших преобразований. Введем произвольную поверхность  $\Sigma$ , опирающуюся на контур  $L$ . Тогда при

$q \in \Sigma + L$

$$\mathbf{I} = \int_{\Sigma} [\mathbf{n} \nabla (Uf)] dp = \int_{\Sigma} [\mathbf{n} \{f \nabla U + U \nabla f\}] dp^*,$$

причем орт нормали  $\mathbf{n}$  образует с направлением обхода контура  $L$  правый винт.

Пусть  $\mathbf{n}_q$  — какой-либо единичный вектор, определенный в точке  $q$  и переходящий в орт нормали к  $\Sigma$  при стремлении  $q$  к точке этой поверхности. Тогда при  $q \in \Sigma + L$

$$\mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \mathbf{I} = \int_{\Sigma} \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \{[\mathbf{n} \nabla U] f\} dp + \int_{\Sigma} U \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q [\mathbf{n} \nabla f] dp. \quad (2)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \{[\mathbf{n} \nabla U] f\} &= \mathbf{n}_q [\nabla_q f [\mathbf{n} \nabla U]] = [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla U]] \nabla f; \\ \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q [\mathbf{n} \nabla f] &= \mathbf{n}_q \{ \mathbf{n} \operatorname{div}_q \nabla f - (\mathbf{n} \nabla_q) \nabla f \} = \\ &= \mathbf{n}_q \{ k^2 \mathbf{n} f - (\mathbf{n} \nabla) \nabla_q f \} = k^2 f \mathbf{n} \mathbf{n}_q - \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial n_q}, \end{aligned}$$

так как

$$\operatorname{div}_q \nabla f = -\nabla_q^2 f = k^2 f \quad (q \neq p).$$

Поэтому (2) можно записать в виде

$$\mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \mathbf{I} = \int_{\Sigma} [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla U]] \nabla f dp + k^2 \int_{\Sigma} U f \mathbf{n} \mathbf{n}_q dp - \int_{\Sigma} U \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial n_q} dp.$$

Разрешая это равенство относительно последнего интеграла, одновременно подставляя вместо  $\mathbf{I}$  выражение (1), найдем интересующее нас соотношение:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} U \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial n_q} dp &= \int_{\Sigma} [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla U]] \nabla f dp + k^2 \int_{\Sigma} U f \mathbf{n} \mathbf{n}_q dp - \\ &- \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \oint_L U f d\mathbf{L}_p \quad (q \in \Sigma + L). \end{aligned} \quad (3)$$

При  $q$  стремящемся к  $\Sigma$ , будем иметь в пределе

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial n_q} \int_{\Sigma} U \frac{\partial f}{\partial n} dp \right)^{\pm} &= \left( \int_{\Sigma} [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla U]] \nabla f dp \right)^{\pm} + k^2 \int_{\Sigma} U f \mathbf{n} \mathbf{n}_q dp - \\ &- \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \oint_L U f d\mathbf{L}_p \quad (q \in \Sigma). \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразуем теперь уравнение (1.8) так, чтобы сократились существенно сингулярные части, содержащиеся в ядре и свободном члене. Для этого прежде всего перепишем выражение (1.9) для ядра  $T(q, g)$ , заменив в нем первый член по формуле (3), причем в последней следует положить  $U(p) \equiv f(p, g)$ , рассматривая  $g$  как некоторый фиксированный параметр ( $g \in \Sigma + L$ ). Тогда получим

$$T(q, g) = \hat{T}(q, g) + \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \oint_L f(p, g) f(q, p) d\mathbf{L}_p, \quad (5)$$

\* Здесь и в дальнейшем мы условимся не ставить индексов у операторов дифференцирования по координатам точки интегрирования, а также не указывать аргумента у функций, зависящих только от точки интегрирования; у функции  $f$  мы не указываем аргументы там, где это не может вызвать недоразумений.

где

$$\begin{aligned} \hat{T}(q, g) = & - \int_{\Sigma} [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla f(p, g)]] \nabla f(q, p) dp - \\ & - k^2 \int_{\Sigma} f(p, g) f(q, p) \mathbf{nn}_q dp + \int_{S+\Sigma} \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_q} \frac{\partial f(p, g)}{\partial n} dp. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразуем теперь свободный член  $\Phi(q)$  [см. (1.9)]. Для этого запишем его в виде

$$\Phi(q) \equiv - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0 \frac{\partial f}{\partial n} dp \right)^{\pm} = \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial n_q} \psi_0 dp - \int_{S+\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n_q} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} dp. \quad (7)$$

Справедливость последнего равенства устанавливается так:

1) сначала доказывается, что правая часть его не зависит от выбора поверхности  $\Sigma$ , опирающейся на  $L$ ; делается это методом, тождественным изложенному в [1] для ядра  $T(q, g)$  в форме (1.9), с учетом уравнения  $(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$ ;

2) затем непрерывным деформированием приближаем  $\Sigma$  к  $S$  и убеждаемся, что правая часть (7) переходит в левую. Заменяя теперь предпоследний интеграл в (7) по формуле (3), где следует при этом положить  $U(p) = \psi_0(p)$ , найдем

$$\Phi(q) = \hat{\Phi}(q) - \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \oint_L \psi_0 f d\mathbf{L}_p. \quad (8)$$

Здесь

$$\hat{\Phi}(q) = \int_{\Sigma} [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla \psi_0]] \nabla f dp + k^2 \int_{\Sigma} \psi_0 f \mathbf{nn}_q dp - \int_{S+\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n_q} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} dp. \quad (9)$$

Подставляя теперь в уравнение (1.8) вместо ядра  $T(q, g)$  выражение (5), а вместо  $\Phi(q)$  его значение (8), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} w(q) = & \int_S w(g) \hat{T}(q, g) dg + \hat{\Phi}(q) - \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \oint_L \psi_0 f d\mathbf{L}_p + \\ & + \mathbf{n}_q \operatorname{rot}_q \int_S w(g) \oint_L f(p, g) f(q, p) d\mathbf{L}_p dg. \end{aligned}$$

Меняя в последнем члене порядок интегрирования и учитывая формулу (1.5a), а также условие  $\psi = -\psi_0$  на  $L$ , убеждаемся, что последние два члена сокращаются, и мы приходим к интегральному уравнению

$$\frac{1}{4} w(q) = \int_S w(g) \hat{T}(q, g) dg + \hat{\Phi}(q) \quad (q \in S). \quad (10)$$

Поскольку  $T(q, g)$  и  $\Phi(q)$  не зависят от выбора вспомогательной поверхности  $\Sigma$  (см. (1.10) и (1.9)), то на основании соотношений (5) и (8)  $\hat{T}(q, g)$  и  $\hat{\Phi}(q)$  также не зависят от выбора  $\Sigma$ . Поэтому можно, приближая  $\Sigma$  к  $S$ , получить вместо (6) и (9) следующие выражения:

$$\hat{T}(q, g) = k^2 \int_S \mathbf{nn}_q f(q, p) f(g, p) dp + \left( \int_S [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla f(g, p)]] \nabla f(q, p) dp \right)^{\pm}, \quad (11)$$

$$\hat{\Phi}(q) = -k^2 \int_S \mathbf{nn}_q \psi_0 f dp - \left( \int_S [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla \psi_0]] \nabla f dp \right)^{\pm}. \quad (12)$$

Этот результат можно было бы получить сразу, применив формулу (4) для преобразования  $T$  и  $\Phi$ , записанных в форме (1.10) и (1.9).

Очевидно, решения всех рассматриваемых здесь интегральных уравнений следует отыскивать среди функций, удовлетворяющих условиям Майкснера на  $L$ . Однако, как оказывается, интегральный оператор с ядром  $T(q, g)$  (в уравнении (1.8)) не преобразует, вообще говоря, такие функции в функции того же класса. В преобразованном же уравнении (10) оператор с новым ядром  $\hat{T}(q, g)$  отображает указанный класс функций в себя (это будет показано на примере двумерной задачи ниже).

Кроме того, и ядро  $\hat{T}(q, g)$ , и свободный член  $\hat{\Phi}(q)$  получены из  $T(q, g)$  и  $\Phi(q)$  исключением главных сингулярных членов и, следовательно, имеют менее существенные разрывы на  $L$ , чем  $T(q, g)$  и  $\Phi(q)$ .

Что касается интегрального уравнения (1.11), соответствующего задаче Неймана, то его преобразование к нужной нам форме осуществляется вполне элементарно и будет проведено ниже (в § 3) на примере двумерной задачи. Аналогичным образом могут быть преобразованы (регуляризованы) и все остальные интегральные уравнения, полученные в [1].

## 2. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЯДЕР И РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В двумерных дифракционных задачах интегральное уравнение (10) имеет ядро  $\hat{T}(q, g)$  и свободный член  $\hat{\Phi}(q)$ , выражаемые прежними формулами (11), (12), в которых под  $f(p, q)$  следует понимать поле нитевидного источника:

$$f(p, q) = (1/4i) H_0^{(2)}(k|p - q|),$$

а под  $S$  и  $\Sigma$  — сечения рассматриваемых цилиндрических поверхностей плоскостью, перпендикулярной к их образующим.

Пусть на линии  $S$  дуговая координата  $l$  изменяется от  $-1$  (на одном конце) до  $+1$  (на другом конце дуги). Тогда, введя обозначения

$$l_q = x, \quad l_g = \xi, \quad l_p = l, \tag{13}$$

имеем при  $p$  и  $q$  на  $S$

$$f(p, q) = -(1/2\pi) \ln|x - l| + f_0(x, l), \tag{14}$$

где  $f_0(x, l)$  — непрерывно-дифференцируемая функция.

Воспользовавшись формулой (6) и приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}\nabla f(p, g)] &= [\mathbf{n}\tau] \frac{\partial f(p, g)}{\partial l}, \\ [\mathbf{n}_q \nabla f(q, p)] &= -[\mathbf{n}_q \tau_q] \frac{\partial f(q, p)}{\partial x}, \\ [\mathbf{n}_q \tau_q] &= [\mathbf{n}\tau], \end{aligned}$$

где  $\tau$  — орт касательной к линии  $S$ , получаем

$$\hat{T}(q, g) = - \int_{\Sigma} \frac{\partial f(q, p)}{\partial x} \frac{\partial f(p, g)}{\partial l} dl + \dots$$

Здесь многоточием заменены непрерывные члены. В силу (14)

$$\begin{aligned}\hat{T}(q, g) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Sigma} \frac{1}{x-l} \frac{1}{l-\xi} dl + \hat{T}_0(x, \xi) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2(x-\xi)} \ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right] + \hat{T}_0(x, \xi),\end{aligned}\quad (15)$$

где  $\hat{T}_0$  — непрерывное ядро.

Аналогично, из (9) следует

$$\hat{\Phi}(q) = \frac{1}{2\pi} \psi_0'(x) \ln \frac{1+x}{1-x} + \hat{\Phi}_0(x) \quad (15a)$$

( $\hat{\Phi}_0$  — непрерывная функция). Таким образом, формулами (15), (15a) завершено выделение особых членов из  $\hat{T}(q, g)$  и  $\hat{\Phi}(q)$ .

Перейдем теперь к изучению того, как воздействует оператор  $\hat{T}$  (интегральный оператор с ядром  $\hat{T}(q, g)$ ) на функции, удовлетворяющие условиям Майкснера.

Так как этими условиями функции  $w(q) \equiv w(x)$  разрешено иметь лишь интегрируемые особенности на краях, то естественно рассматривать классы  $M_\alpha[-1, 1]$  функций  $w(x)$ , представимых в виде

$$w(x) = \omega(x) / (1-x^2)^\alpha, \quad (16)$$

где  $\alpha < 1$ , а  $\omega(x)$  — функция, непрерывная при  $-1 \leq x \leq 1$  ( $\omega(x) \in C[-1, 1]$ ).

Покажем, что если  $w(x) \in M_\alpha[-1, 1]$ , то и

$$\hat{T}w \in M_\alpha[-1, 1]$$

при том же значении  $\alpha$ .

Вследствие (15) достаточно рассмотреть лишь оператор  $\hat{T}_1$  с ядром

$$\hat{T}_1(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2(x-\xi)} \ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right]. \quad (17)$$

При помощи замены переменных

$$(1+x)/(1-x) = y, \quad (1+\xi)/(1-\xi) = y\eta$$

можно получить

$$\hat{T}_1 w = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \left( \frac{y\eta+1}{y+1} \right)^{2\alpha-1} \frac{\ln \eta}{(\eta-1)\eta^\alpha} \omega \left( \frac{y\eta-1}{y\eta+1} \right) d\eta. \quad (18)$$

Так как  $|\omega| \leq C$ , то, как нетрудно показать, модуль подынтегральной функции мажорируется функцией

$$C \ln \eta / (\eta-1)\eta^\beta,$$

где  $\beta = \alpha$  при  $\eta \leq 1$  и  $\beta = 1 - \alpha$  при  $\eta > 1$ . Таким образом, интеграл в (18) сходится равномерно при  $y \geq 0$  (что соответствует  $x \in [-1, 1]$ ) и, следовательно, представляет собой функцию, непрерывную по  $x$  на  $[-1, 1]$ . Этим доказано, что

$$\hat{T}w \in M_\alpha[-1, 1].$$

Нетрудно показать, что уравнение (10) может иметь решение лишь при  $\alpha = 1/2$ . Допустив, что существует решение  $w(x)$  в классе  $M_\alpha$  при некотором  $\alpha$  и представив  $w(x)$  по формуле (16), домножим обе части (10) на  $(1-x^2)^\alpha$  и устремим  $x$  к 1 либо  $-1$ . После соответствующих выкладок получим

$$\omega(\pm 1) [1 - \rho(\alpha)] = 0, \quad (19)$$



где

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\ln \eta}{(\eta - 1)\eta^\alpha} d\eta.$$

Функция  $\rho(\alpha)$ , как легко установить, принимает значение 1 лишь при  $\alpha = 1/2$ , и поэтому, если  $\omega(\pm 1) \neq 0$ , лишь при  $\alpha = 1/2$  имеет место равенство (19), вытекающее из (10).

Заметим теперь, что равенство (5) в двумерном случае имеет вид

$$T(q, g) = \hat{T}(q, g) + \frac{\partial f(q, p)}{\partial l_q} f(p, g) \Big|_{l_p = +1}^{l_p = -1}.$$

Отсюда и из (15) следует

$$T(q, g) = \hat{T}_1(x, \xi) + T_2(x, \xi) + T_0(x, \xi), \quad (20)$$

где  $T_0(x, \xi)$  — непрерывное ядро,  $\hat{T}_1(x, \xi)$  определяется выражением (17), а

$$T_2(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{1+x} \ln(1+\xi) - \frac{1}{1-x} \ln(1-\xi) \right]. \quad (20a)$$

Вполне очевидно, что интегральный оператор с ядром  $T_2(x, \xi)$  переводит функции класса  $M_\alpha$  в функции с разрывами неинтегрируемого порядка  $1/(1 \mp x)$ . Отсюда вытекает, что, в отличие от  $\hat{T}$ , оператор  $T$  переводит функции из  $M_\alpha$  в функции с более сильными особенностями на краях.

Перейдем к обсуждению возможных подходов к эффективному нахождению решений уравнения (10).

Прежде всего заметим, что оператор  $\hat{T}_1$  ограничен (его норма в метрике пространства  $M_\alpha$ , как можно показать, равна  $1/4$ ) \*.

Однако, как оказывается, вполне непрерывным этот оператор не является \*\*, и, следовательно (см. (15), (17)), ядро  $\hat{T}(q, g)$  уравнения (10) не может быть аппроксимировано с любой точностью вырожденным. Таким образом, нужно искать иные приемы решения этого уравнения.

Легко видеть, что интегральный оператор  $(1/4)E - \hat{T}_1$  ( $E$  — единичный оператор) имеет обратный  $((1/4)E - \hat{T}_1)^{-1}$ , который можно записать в явном виде (при помощи решения электростатической задачи для ленты). Это позволяет сделать в уравнении (10) частичное обращение интегрального оператора, что приводит уже к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором.

Другой метод, применимый непосредственно к уравнению (10), состоит в следующем. Искомое решение  $w(x)$  приближенно представляется линейной комбинацией конечного числа функций из системы функций, полной в  $M_{1/2}[-1, 1]$ , а коэффициенты этой комбинации определяются из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты последней системы представляют собой некоторые несобственные интегра-

\* Норма функций  $w(x) \in M_\alpha[-1, 1]$  определяется по формуле

$$\|w\| = \max_{|x| \leq 1} |(1-x^2)^\alpha w(x)|.$$

\*\* Замечание, сделанное в конце статьи [1] о том, что оператор  $T$  вполне непрерывен, является неверным.

лы вида

$$\int_{-1}^1 \hat{T}(q, g) \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} F(\xi) d\xi, \quad (21)$$

где  $F(\xi)$  — непрерывная функция. В связи с вычислением этих интегралов заметим, что, как это видно из (15), (17), подынтегральная функция в (21) имеет в основном квадрате ( $-1 \leq x, \xi \leq 1$ ) разрывы лишь на линиях  $\xi = \pm 1$ ; эти разрывы при  $x \neq \pm 1$  имеют интегрируемый порядок

$$\ln(1 \pm \xi) / \sqrt{1 \pm \xi}. \quad (22)$$

Это обстоятельство делает целесообразным применение весовых квадратурных формул с весами типа (22).

### 3. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА

Так как ядро  $T(g, q) \equiv T(\xi, x)$  интегрального уравнения (1.11) отличается от ядра уравнения (1.10) лишь порядком аргументов, то сингулярную часть этого ядра можно получить из (20) перестановкой  $\xi$  и  $x$ . Таким путем, учитывая (17) и (20а), находим

$$\begin{aligned} \hat{T}_1(\xi, x) + T_2(\xi, x) = & \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{1-\xi} \left[ \frac{(1-x)\ln(1-x) - (1-\xi)\ln(1-\xi)}{\xi-x} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{1+\xi} \left[ \frac{(1+\xi)\ln(1+\xi) - (1+x)\ln(1+x)}{\xi-x} \right]. \right. \end{aligned} \quad (23)$$

Свободный же член  $\Psi(q) \equiv \Psi(x)$  уравнения (1.11) представим в виде

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| \frac{\partial \psi_0(\xi)}{\partial n} d\xi + \Psi_0(x), \quad (24)$$

где  $\Psi_0(x)$  — непрерывная на  $[-1, 1]$  функция.

Из (23) видно, что величины  $T(\xi, \pm 1)$  имеют при  $|\xi| < 1$  конечные значения. Точно так же  $\Psi(x)$  конечна при  $x = \pm 1$ .

Положив в уравнении (1.11) сначала  $x = 1$ , а затем  $x = -1$ , домножив первое из полученных равенств на  $(1+x)/2$ , а второе на  $(1-x)/2$ , сложим почленно результаты и вычтем полученное равенство почленно из исходного уравнения (1.11). При этом примем во внимание, что на основании условий Майкснера  $v = 0$  на концах дуги  $S$ .

В итоге получаем уравнение

$$\frac{1}{4} v(x) = \int_{-1}^1 v(\xi) \check{T}(\xi, x) d\xi + \check{\Psi}(x), \quad -1 < x < 1, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \check{T}(\xi, x) = & T(\xi, x) - \left[ T(\xi, 1) \frac{1+x}{2} + T(\xi, -1) \frac{1-x}{2} \right]; \\ \check{\Psi}(x) = & \Psi(x) - \left[ \Psi(1) \frac{1+x}{2} + \Psi(-1) \frac{1-x}{2} \right]. \end{aligned}$$

Оператор  $\check{T}$  с ядром  $\hat{T}(\xi, x)$ , так же, как и  $\hat{T}$ , отображает класс  $M_\alpha [-1, 1]$  в себя (при фиксированном  $\alpha$ ). Уравнение же (25) может иметь решение лишь при  $\alpha = -1/2$  \*.

\* Доказательства аналогичны проведенным в § 2.

Таким образом,

$$v(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x),$$

где

$$\gamma(x) \in C[-1, 1].$$

Заметим, наконец, что ядро

$$\check{T}(\xi, x) \sqrt{(1-\xi^2)/(1-x^2)}$$

интегрального уравнения относительно  $\gamma(x)$

$$\frac{1}{4} \gamma(x) = \int_{-1}^1 \check{T}(\xi, x) \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-x^2}} \gamma(\xi) d\xi + \frac{\check{\Psi}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

при  $x$  вблизи 1 и  $x$  вблизи  $-1$  имеет главные сингулярные члены, в точности совпадающие с главными членами ядра

$$\hat{T}(x, \xi) \sqrt{(1-x^2)/(1-\xi^2)},$$

входящего в уравнение для функции  $\omega(x)$ .

Отсюда следует, что все соображения об эффективном решении рассматриваемых интегральных уравнений, приведенные в § 2 применительно к задаче Дирихле, справедливы и в отношении уравнения (25).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника 1966, 11, 7, 1159.

Поступила в редакцию  
28 IV 1967

# СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ АНТЕНН

*Я. Н. ФЕЛЬД, Л. С. БЕНЕНСОН*

в кн. Современные проблемы антенно-волноводной техники, М. Наука, 1967, стр.5-21.

## 1. Введение

Обширный круг задач, решаемых современной радиотехникой, приводит к необходимости разработки антенн различного назначения. Одна из областей применения современных антенн — радиоастрономия, где требуются приемные антенны с предельно высокой разрешающей способностью, обеспечивающие возможность просматривать узким лучом широкий телесный сектор (вплоть до полушферы). Для этих антенн-радиотелескопов первостепенной является задача повышения отношения сигнал/шум на их выходе, т. е. максимальное снижение уровня шума и увеличение коэффициента усиления. Это требует снижения уровня боковых лепестков и потерь. В радиоастрономии применяются также методы повышения разрешающей способности антенн за счет специальной обработки сигнала, при этом коэффициент усиления или не меняется, или же несколько падает.

Требование просмотра широкого пространственного сектора приводит к необходимости разработки антенн с управляемым лучом. Благодаря отсутствию жестких временных ограничений в радиоастрономии здесь возможно применение механических методов управления; однако в столь больших и громоздких системах, какими являются радиотелескопы, эти методы не всегда применимы. Поэтому разрабатываются и внедряются методы электромеханического и электрического управления (первые — преимущественно в зеркальных антеннах, вторые — в решетках).

Другой важной областью современной радиотехники является разработка систем сверхдальней (космической) связи. Здесь, как правило, необходимы антенны с предельно высоким коэффициентом усиления (КУ). Поскольку и в отношении остальных параметров требования к этим антеннам и радиотелескопам близки, то зачастую большие антенны строятся для решения обеих задач.

Ряд проблем возникает при разработке антенн для радиолокационных систем (РЛС). Эти антенны, прежде всего, должны иметь высокий коэффициент усиления, низкий уровень боковых лепестков (ввиду необходимости повышения помехозащищенности) и, в отличие от антенн для целей радиоастрономии и космической связи, высокую скорость сканирования (качания луча).

Механическое управление положением луча в современных РЛС, как правило, неприемлемо; необходимо применять чисто электрическое управление при сохранении высоких требований к параметрам антенн.

Разрабатываются также методы управления при помощи самонастройки и временной модуляции распределения тока в антенне. Последний метод позволяет улучшить отдельные характеристики антенн и совместить несколько функций в одной системе.

Большинство перечисленных вопросов относится к наземным антеннам. Однако имеется ряд важных задач, касающихся бортовых антенн. Некоторые из них конструктивно-технологического характера, другие — принципиальные, как, например, разработка антенн с синтезированным раскрывом, получающимся при последовательном перемещении малой антенны за счет когерентной обработки принимаемого ею сигнала. Точно так же важны задачи разработки антенн с диаграммами, максимально приближающимися к ненаправленным, и маловыступающих бортовых антенн.

Теория антенн до последнего времени основывается на использовании метода Гюйгенса — Кирхгофа в совокупности с методами геометрической оптики. Однако эти методы дают удовлетворительную картину поля только в пределах главного лепестка и ближайших к нему боковых лепестков диаграммы направленности.

Для исследования тонкой структуры дальних боковых лепестков, а следовательно, и определения зависящих от них КУ и шумовой температуры антенны эти методы явно недостаточны. Между тем теория дифракции в настоящее время пополнилась большим количеством эффективных методов, таких как, например, методы кривых волн, параболического уравнения (метод поперечной диффузии), дифракционных лучей и ряд других асимптотических методов. Использование этих методов в теории антенн в настоящее время является актуальной задачей.

## 2. Основные типы

### современных остро-направленных антенн

Большинство современных остро-направленных антенн может быть отнесено к одной из двух основных групп — *антеннам оптического типа* и *антенным решеткам*.

Антенны оптического типа (преимущественно зеркальные) получили широкое распространение благодаря простоте конструкции и несложности настройки. В настоящее время применяется много

различных модификаций этих антенн, например двух- и трехзеркальные, позволяющие улучшить коэффициент использования поверхности зеркала, уменьшить габариты и облегчить реализацию электромеханического качания луча. В последнее время разработаны также большие зеркальные антенны переменного профиля, выполняемые в виде набора плоских элементов, положением которых можно управлять. Эти антенны позволяют производить качание луча в широком секторе в обеих плоскостях. Благодаря тому, что они состоят из отдельных элементов, которые могут выставляться геодезическими способами, точность выдерживания необходимой поверхности у них на один — два порядка выше, чем у обычных сплошных антенн; это позволяет резко увеличить оптимальные размеры антенны в одной плоскости.

Антенные решетки — давно известный тип антенны. Однако до последнего времени они использовались главным образом как антенны без качания луча и, вследствие сложности системы питания и трудностей при настройке, не могли конкурировать, например, с зеркальными антеннами.

В настоящее время фазированные решетки начинают широко применяться благодаря тому, что посредством их легко осуществлять быстрое (электрическое) качание луча, создавать оптимальные диаграммы направленности, применять различные способы обработки сигнала, самонастройку (самонаведение) и направленное переизлучение сигнала, а также повышать излучаемую мощность путем установки в каналах отдельных излучателей относительно маломощных СВЧ усилителей.

### **3. Проблемы, связанные с разработкой методов синтеза**

Основная задача построения антенны, это — по сути дела — задача синтеза, так как на практике по заданным выходным параметрам необходимо сначала синтезировать, а затем реализовать распределение источников. Однако полностью эта задача, как правило, не решается, и обычно ограничиваются лишь первой ее частью, т. е. получением требуемого распределения источников. Реализация этого распределения представляет собой задачу синтеза схемы антенны и включает в себя как выбор конструкции антенны, так и расчет параметров ее элементов по заданным токам. Например, в случае антенных решеток последний сводится главным образом к расчету сопротивления излучателей. Однако ценность такого, весьма трудоемкого расчета невелика из-за малой точности расчета реактивных компонент сопротивлений. Поэтому эта, вторая часть задачи построения антенны обычно решается при помощи различных инженерных приемов и методов, зачастую полуэмпирических.

Следует отметить, что в случае рассеивающих антенн оптического типа можно, применяя методы геометрической оптики, рас-

считать не только распределение по раскрыву, но и конфигурацию самой антенны, т. е. решить задачу синтеза антенны практически до конца.

В задачу синтеза входит прежде всего определение классов реализуемых диаграмм направленности для антенн различных конфигураций.

Поскольку диаграммы направленности, задаваемые на практике, зачастую не являются точно реализуемыми, возникает задача получения распределения источников, диаграмма которых в том или ином смысле близка к заданной. Это может быть сделано, например, при помощи некоторой аппроксимации заданной реализуемой диаграммы, после чего распределение можно найти, в случае линейных и плоских раскрывов, простым преобразованием Фурье. В ряде случаев можно сразу получить распределение источников, реализующих диаграмму, близкую к заданной. Так, продолжая диаграмму нулем в область мнимых углов и преобразуя ее по Фурье, получим распределение источников, обеспечивающее наилучшее приближение к заданной диаграмме в смысле среднеквадратичного.

Диаграмма, принадлежащая к классу реализуемых, определяет не только распределение источников, но также форму и размер излучающего раскрыва. Однако приближенно можно реализовать любую непрерывную диаграмму при помощи раскрыва произвольной величины. При решении задачи синтеза диаграмма может оказаться весьма критичной по отношению к распределению источников. Такая, сверхнаправленная, антенна оказывается чрезмерно узкополосной и обладает большими потерями. В случае реализуемых диаграмм это имеет место, когда нормированная диаграмма принимает большие значения вне интервала вещественных углов. Аналогичный эффект возникает и в ряде других случаев, в частности, при попытках сузить главный лепесток при заданных размерах раскрыва и уровне боковых лепестков; снизить уровень боковых лепестков в антенне при заданных раскрыве и ширине диаграммы; создать диаграмму, приближающуюся к всенаправленной в антенне заданных размеров и фиксированной поляризации; улучшить аппроксимацию нереализуемой диаграммы реализуемой и т. п.

При синтезировании антенн по заданной, обычно нереализуемой диаграмме, предварительно определяют размер антенны (например, по известным дифракционным формулам, учитывая форму заданной диаграммы — ширину главного лепестка, крутизну скатов и т. п.), а затем решают задачу синтеза, т. е. находят распределение источников на выбранном раскрыве, аппроксимирующее заданную диаграмму. Для того чтобы при этом, увеличивая точность аппроксимации, не прийти к сверхнаправленности, необходимо с самого начала ввести определенные ограничения, задавая допустимыми потерями диапазонностью антенны и т. п.

Однако методы оптимального приближения к заданным диаграммам еще не разработаны в должной мере.

Большинство работ по синтезу относится к антеннам с линейными и плоскими раскрытиями. В настоящее время актуально решение задач синтеза для антенн с раскрытием произвольной формы, поскольку последняя представляет собой дополнительную степень «свободы», которую можно использовать для придания антенне каких-либо новых свойств. В частности, очевидно, что для антенн с качанием луча в широком секторе, в том числе на  $360^\circ$ , наиболее подходящими являются антенны с раскрытием в виде поверхности вращения.

Представляют практический интерес и более частные задачи, как, например, получение амплитудных и фазовых диаграмм различной специальной формы.

Для антенных решеток задача синтеза имеет свою специфику в связи с тем, что помимо распределения токов, необходимо, в общем случае, синтезировать и расположение источников. В настоящее время опубликовано большое число работ, посвященных методам построения таких, неэквидистантных решеток. Однако в этих работах рассматриваются лишь отдельные математические приемы; в результате распределение источников получается не оптимальное, а навязанное используемым методом. Поэтому общая задача оптимального синтеза неэквидистантных решеток еще ждет своего решения.

#### 4. Задачи теории антенных решеток

До последнего времени на практике применялись лишь эквидистантные антенные решетки (линейные, плоские и кольцевые) с различными распределениями тока, в том числе оптимальными или квазиоптимальными (обеспечивающими минимальный уровень боковых лепестков при заданной ширине главного лепестка).

Были изучены также различные методы управления лучом, в том числе за счет изменения частоты (антенны с частотным качанием луча) и при помощи управления фазой токов в излучателях решетки (фазированные решетки). В последнем случае требования к фазовращателям существенно упрощаются при переходе к дискретно-коммутационному способу фазирования.

Охарактеризуем основные направления, по которым в настоящее время развивается теория антенных решеток.

а) Исследование новых конфигураций решеток как с целью реализации новых качеств (например, качание луча в широком секторе и т. п.), так и в связи с необходимостью размещения антенн на криволинейных поверхностях летающих объектов. Расположение излучателя на криволинейной поверхности специального профиля может быть использовано также для упрощения амплитудно-фазового распределения при создании диаграмм сложной формы.

б) Исследование характеристик неэквидистантных решеток и разработка методов их расчета. Актуальность этой задачи связана



с тем, что современные остронаправленные решетки с управляемым лучом должны состоять, при обычном эквидистантном расположении, из весьма большого числа излучателей и управляющих устройств. Применение неэквидистантного размещения излучателей позволяет резко сократить их число при сохранении почти неизменным главного лепестка (естественно, что при этом возрастает общий фон боковых лепестков). Отметим, что неэквидистантное размещение излучателей целесообразно применять главным образом в приемных антеннах, когда боковые лепестки не должны превосходить определенного уровня, а главный лепесток желательно сузить (не увеличивая число излучателей) для повышения разрешающей способности системы. Поскольку для передающих антенн наиболее важным параметром является коэффициент усиления (а он пропорционален числу излучателей), применение неэквидистантного размещения излучателей не дает в этом случае существенного эффекта.

Большинство известных методов расчета неэквидистантных решеток являются численными и требуют применения машинной вычислительной техники. В связи с этим заслуживает внимания более простой, статистический метод, когда решетка рассматривается как эквидистантная, часть элементов которой изъята по случайному закону. Поскольку получаемые при этом характеристики являются ожидаемыми с определенной вероятностью, такой метод дает практически полезный результат, если вероятность достаточно велика.

Отметим, что в случае широкополосных сигналов оказывается возможным более разреженное (по сравнению с обычным) размещение излучателей (вследствие возрастания эффективного раскрытия отдельных излучателей решетки).

Практически важны также работы по изысканию простых и легко реализуемых распределений, хорошо аппроксимирующих различные оптимальные диаграммы. Так, например, диаграмма, соответствующая чебышевскому распределению в линейной решетке, может быть приближенно получена путем изменения амплитуд токов в одной — двух крайних парах излучателей.

в) Оптимальные методы управления диаграммами направленности решеток. Наиболее простым методом является частотное качание луча, т. е. качание луча за счет изменения частоты в антеннах, выполняемых на базе частотно-чувствительных элементов. Теоретически показана возможность осуществления одномерного качания в широком секторе углов, а также двумерного строчного обзора полусферы. Однако системы такого типа, особенно для двумерного качания, оказываются громоздкими и имеют довольно высокие потери (в этих системах должны применяться замедляющие структуры резонансного типа с высокой дисперсией или структуры с высоким эквивалентным коэффициентом замедления, обусловленным большой длиной фидера между излучателями). Кроме того, частотная чувствительность диаграмм направленности и прием с каждого

направления сигналов лишь определенной частоты не всегда приемлемы, так как резко снижают помехозащищенность станции.

За последние годы предложены схемы построения приемных антенн с частотным качанием луча, в которых в результате применения преобразования частоты удается существенно снизить потери, поскольку частотно-чувствительные элементы выполняются на промежуточной частоте (в некоторых схемах — на частоте местного гетеродина); при двукратном преобразовании частоты удается устранить также частотную чувствительность диаграммы направленности.

Практическое применение этих схем построения антенн требует достаточной идентичности и стабильности фаз во всех элементах схемы. Поэтому исследование высокочастотных частотно-чувствительных элементов остается актуальной задачей. Необходимо теоретически исследовать связь между замедлением, дисперсией и потерями, установить предельные соотношения между этими параметрами, изыскать методы снижения потерь.

Управление решеткой методом фазирования излучателей требует разработки фазовращателей, достаточно быстродействующих, с малыми потерями, стабильными характеристиками, необходимой пропускаемой мощностью и т. п. Кроме того, при быстром переборе луча в произвольное направление осложняется управление фазовращателями. В настоящее время вопрос создания элементов управления, полностью отвечающих всем перечисленным выше требованиям, еще далек от окончательного решения.

Наиболее простой способ фазирования — так называемый дискретно-коммутационный способ, суть которого заключается, с одной стороны, в дискретности установки фазы при минимальном числе градаций (например,  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ), а с другой стороны, в применении таких конструкций фазовращателей, в которых фаза может принимать только необходимые дискретные значения, а переход от одного значения к другому происходит путем коммутации.

Особенно перспективен и прост этот способ в случае осесимметричных антенн, когда неизменное распределение фаз должно просто переноситься вдоль (кольцевого) раскрыва. Этот метод еще недостаточно разработан и должен совершенствоваться (в сочетании с поисками оптимальных распределений).

Необходимо найти оптимальные приближения к заданным диаграммам при различных величинах дискретов на основании критериев, соответствующих каким-либо выходным характеристикам антенны. Эти критерии, в частности, должны учитывать возрастание уровня боковых лепестков, имеющее место при ступенчатом распределении фазы.

Необходимо создать высокочастотные фазовращатели коммутационного типа. Следует отметить, что хотя принципиально фаза в таких фазовращателях должна устанавливаться в соответствии с выбранным дискретом, при недостаточной развязке между каналами

коммутатора фазовращателя, соответствующими разным дискретным значениям фазы, будут иметь место заметные отклонения от номиналов.

Существенные трудности при разработке фазированных решеток вызывает отличие фаз, реально устанавливаемых в излучателях, от значений, указанных на фазовращателях. Действительно, фазовращатели определяют лишь фазы падающих волн в фидерах, тогда как фазы излучающих токов или полей, вследствие взаимной связи между излучателями, будут иными. Лишь для кольцевых решеток, возбуждаемых на своих нормальных модах, т. е. со сдвигом фаз  $2\pi n/N$  ( $N$  — число излучателей,  $n$  — номер моды), отличие фаз между соседними излучателями будет одинаковым для всех излучателей и, таким образом, окажется несущественным. Во всех остальных случаях взаимное влияние излучателей приводит к отклонению закона распределения фаз в излучателях от требуемого, т. е. к фазовым ошибкам, а стало быть, к искажениям диаграммы направленности.

В случае фазированных решеток с управляемым лучом положение усугубляется тем, что фазовые ошибки будут изменяться при качании луча. Введение корректировки фазы представляет трудную задачу уже хотя бы потому, что весьма нелегко произвести расчет взаимодействий при сколько-нибудь существенном числе излучателей. Кроме того, подобная коррекция, видимо, должна быть индивидуальной для антенны каждого типа.

В больших решетках можно оценить взаимное влияние при качании луча, принимая число излучателей бесконечным.

Учет краевых эффектов (связанных с конечным числом излучателей) остается наиболее трудным и нерешенным до сих пор вопросом. Мыслимы два пути преодоления трудностей, вызываемых взаимным влиянием излучателей: 1) увеличение развязки между излучателями; 2) решение задачи нахождения фаз падающих волн, обеспечивающих требуемое распределение фаз вдоль решетки. Последнее позволило бы, при наличии соответствующих программ управления фазовращателями, осуществить неискаженное качание луча.

Большой интерес представляют также схемы построения фазовых решеток, позволяющие осуществить направленную ретрансляцию и самонастройку.

Направленный ретранслятор представляет собой приемно-передающую решетку, переизлучающую проходящий сигнал в обратном направлении, причем необходимая для этого фазировка излучателей осуществляется автоматически. При этом обеспечивается мгновенность ответа.

Если при падении сигнала на решетку в ее излучателях устанавливается фазовое распределение, описываемое функцией  $\exp(in\varphi)$  ( $n$  — номер излучателя), то для переизлучения сигнала в том же направлении необходимо сопряженное распределение  $\exp(-in\varphi)$ .

Очевидно, требуемый закон будет устанавливаться автоматически самим высокочастотным сигналом, если, в случае линейных решеток, соединить между собой излучатели, расположенные симметрично относительно центра решетки, трактами равной длины (аналогичные переотражатели можно выполнить также на базе плоских, двумерных кольцевых и сферических решеток). Схема такого ретранслятора, весьма простая принципиально, требует для своей реализации идентичности трактов отдельных каналов (по фазовым характеристикам) и уменьшения взаимодействия излучателей, приводящего к искажению фазового распределения, самовозбуждению и т. п.

Известны также схемы, не требующие соединения излучателей; в них изменение распределения фазы на сопряженное осуществляется при помощи гетеродинирования сигналов в тракте каждого излучателя (например, при смешивании проходящего сигнала частоты  $\omega_0$  с сигналом местного гетеродина частоты  $2\omega_0$  сигнал первой разностной гармоники будет иметь требуемые частоту и фазу). Однако высокие требования к идентичности электрических длин отдельных трактов при этом по-прежнему сохраняются.

Теория подобных ретрансляторов разработана недостаточно. В частности, необходимо установить требования к идентичности элементов ретранслятора (расчет допусков и ошибок). Весьма актуально также проведение расчетов взаимного влияния излучателей и вызываемых им искажений.

Самонастраивающиеся системы представляют собой приемные фазируемые решетки, в которых установка фазовращателей происходит автоматически при помощи элементов обратной связи так, чтобы сигнал на выходе антенны был максимален: это соответствует, очевидно, ориентации главного максимума диаграммы в направлении на источник излучения. Конечно, при этом не фиксируются соответствующие угловые координаты цели, да и время, затрачиваемое на самонастройку, должно быть довольно значительным.

Вопросы практической реализации самонастройки в решетках нуждаются в дальнейшей детальной проработке.

## 5. Динамические антенны

Поскольку в антеннах с управлением лучом происходит изменение управляющего параметра (частоты, фазы и т. п.) во времени, то излучаемый антенной сигнал уже не является строго монохроматическим.

Однако если эти изменения достаточно медленны, то спектр излучаемого сигнала будет весьма узким, и в каждый момент времени антенна имеет такие же характеристики, как если бы она работала в чисто монохроматическом режиме. При этом все характеристики

антенны могут рассчитываться, как при постоянной частоте, а временная зависимость может вводиться в окончательные формулы.

При быстром управлении такой упрощенный подход неправилен; в этом случае необходимо разложить в интеграл или ряд Фурье (по времени) заданное распределение возбуждающих источников (например, модулированные по амплитуде, фазе или частоте токи в излучателях, напряжение на клеммах антенны и т. п.), затем для каждой гармонической составляющей найти обычным образом все интересующие нас характеристики (например, поле в дальней зоне) и просуммировать их по частоте. При этом, очевидно, вместо обычных «статических» необходимо вводить динамические характеристики — мгновенную диаграмму направленности (мгновенную картину распределения поля излучения антенны по углам) и динамическую диаграмму направленности (изменение во времени сигнала, излучаемого антенной в фиксированном направлении). Графики обеих диаграмм, построенные как функции своих аргументов — угла и времени, совпадают лишь в том случае, если мгновенная диаграмма при качании луча не изменяет своей формы.

Возрастание скорости перемещения луча при сканировании ограничивается, в обычных антеннах, происходящим расширением спектра излучаемых частот и связанным с ним искажением диаграммы направленности. Эти искажения становятся заметными, когда период изменения управляющего параметра становится соизмеримым со временем распространения сигнала вдоль антенны. Мгновенная диаграмма направленности, как отмечено выше, может быть представлена в виде суперпозиции «парциальных» диаграмм, соответствующих различным гармоникам излучаемого спектра. При медленном изменении параметров эти парциальные диаграммы направленности практически сливаются в один качающийся лепесток. При большой скорости изменения они расходятся так, что мгновенная диаграмма направленности рассыпается и представляет собой систему лепестков, заполняющих весь сектор обзора (наподобие веера).

Так, например, если на вход линейной решетки, состоящей из  $M$  ненаправленных излучателей с расстоянием между ними по воздуху, равным  $d$ , и по линии передачи —  $l$ , подаются частотно-модулированные колебания вида

$$\exp(i\omega_0 t + i\beta \sin \Omega_0 t),$$

то парциальные диаграммы, соответствующие частотам  $\omega_n = \omega_0 + n\Omega_0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , будут иметь вид

$$f(\theta) = J_n(\beta) \frac{\sin \frac{M\psi_n}{2}}{\sin \frac{\psi_n}{2}} \exp i \frac{M-1}{2} \psi_n; \quad \psi_n = knd \left( \sin \theta - \frac{l}{d} \right),$$

аналогичный диаграмме обычной решетки с направлениями главных максимумов 497

$$(\sin \theta_{гл})_{np} = \frac{2\pi p}{k_n d} + \frac{l}{d}, \quad p = 0, -1, -2, \dots \quad \left( k_n = \frac{\omega_n}{c} \right).$$

Если  $\Omega_0$  достаточно велико, то главные лепестки парциальных диаграмм, очевидно, не перекрываются, и мгновенная диаграмма решетки рассыпается.

Однако может быть решена задача синтезирования распределения источников в раскрыве антенны, обеспечивающего заданное сколь угодно быстрое неискаженное качание луча. При этом возникают вопросы, подобные рассматриваемым при синтезе обычных антенн.

Расширение спектра излучаемого сигнала в динамических антеннах дает возможность использовать различные спектральные составляющие для улучшения информативных способностей антенн. Можно выполнить антенну таким образом, чтобы ее парциальные диаграммы на различных частотах отличались формой, ориентацией и т. п.

Если выделять гармоники спектра сигнала при помощи частотных фильтров, то можно получить такой же эффект, как при наличии соответствующего числа отдельных антенн. Например, многолепестковая диаграмма, получающаяся при сверхбыстром качании, может быть использована для мгновенной пеленгации и т. п. При помощи временных изменений параметров антенны можно также улучшить диаграмму направленности на несущей частоте. Так, при периодическом изменении эффективной длины антенны (например, за счет включения и выключения излучателей) по закону

$$l = l_0 [1 + \beta f(t)], \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2, \\ -1, & T/2 < t < T \end{cases}$$

диаграмма направленности на несущей частоте

$$g(\theta) = \frac{\sin(kl_0 \sin \theta)}{\sin \theta} \cos(kl_0 \beta \sin \theta)$$

соответствует антенне, элементы которой обладают направленностью, соответствующей множителю  $\cos(kl_0 \beta \sin \theta)$ . Это приводит к уменьшению уровня боковых лепестков.

С целью практического внедрения этих методов необходимо провести более глубокий анализ подобных антенн, изучить различные варианты их построения, обращая особое внимание на энергетику и учет шумов.

## 6. Антенны с обработкой сигнала; логический синтез диаграмм направленности; синтезированные антенны

При приеме используется обычно далеко не вся информация, содержащаяся в падающей на антенну волне, поскольку сигналы, поступающие в отдельные элементы антенны (излучатели решетки или участки раскрыва антенны оптического или акустического типа), в дальнейшем просто складываются в одном общем канале. Это может оказаться достаточным для измерения лишь отдельных параметров проходящей волны.

В антенных решетках, вообще говоря, принципиально возможна раздельная обработка сигналов, поступающих от отдельных вибраторов, представляющих собой  $N$  (по числу вибраторов) выборки из пространственного распределения проходящей волны. Наиболее полную информацию можно получить, обрабатывая эти выборки.

В ряде случаев в зависимости от назначения антенны, т. е. от того, какие параметры проходящей волны необходимо измерять, применяются различные методы обработки сигналов, поступающих в антенну.

Рассмотрим сначала методы линейной обработки.

С целью использования информации, содержащейся в сигналах, проходящих к антенне с различных направлений, применяются многоканальные (многолучевые) антенные решетки. В этих антеннах возбуждение излучателей осуществляется при помощи так называемой «диаграммообразующей» схемы, которая представляет собой многополюсник с  $M$  входами и  $N$  выходами (в общем случае  $M \neq N$ ,  $N$  — число излучателей). При возбуждении антенны с отдельных входов в излучателях решетки реализуются различные распределения амплитуд и фаз, соответствующие определенным парциальным диаграммам, которые могут отличаться между собой формой, положением в пространстве, фазовой диаграммой или поляризацией. Существенным при этом является возможность формирования независимых диаграмм, обладающих КУ, соответствующим всему раскрыву антенны. Максимальное число таких независимых парциальных диаграмм, реализуемых в решетке, равно  $N$  — числу излучателей. В настоящее время известен ряд практических схем линейных многолучевых решеток и предложены критерии для оценки их характеристик.

Актуальными являются задачи построения общей теории многолучевых антенн, изыскание путей улучшения их параметров (более высокие уровни пересечения соседних лучей при сохранении их независимости), исследование антенн с криволинейным раскрывом, а также учет взаимодействия излучателей при построении диаграммообразующих схем. Для использования информации, содержащейся в различных частотных составляющих спектра проходящих сиг-

налов, можно применять схемы построения решеток, аналогичные многолучевым. Для этого выходы отдельных излучателей должны разбиваться на ряд каналов, в которые вводятся частотно-избирательные фильтры.

В части общей теории подобных антенн должна быть поставлена задача построения оптимальных диаграммообразующих схем и оптимальной фильтрации (обработки) с учетом шумов применительно к измерениям отдельных параметров падающих на антенну волн.

Кроме антенн с линейной обработкой сигнала, применяют также (приемные) антенны с корреляционной обработкой, в которых сигналы, поступающие с отдельных излучателей, обрабатываются нелинейно. Один из применяемых способов нелинейной обработки — перемножение сигналов двух излучателей с последующим усреднением, т. е. нахождение корреляционной функции сигналов. Это дает возможность сузить диаграмму направленности (т. е. повысить разрешающую способность). В многоэлементных решетках такой способ позволяет заменить операцию сложения многократным попарным умножением с соответствующим усреднением. При этом возможны различные схемы построения таких систем в зависимости от способа комбинирования излучателей, сигналы которых попарно перемножаются.

Если расстояния между излучателями значительны, то в подобных системах возникают большие боковые лепестки, которые можно устранить методами логического синтеза (см. ниже).

На практике применяются и более сложные способы обработки, в частности, сочетание перемножения с обычным сложением (если в качестве излучателей, сигналы которых перемножаются, используются решетки, построенные обычным образом). Все эти способы дают возможность значительно уменьшить число элементов, требуемых для получения заданной диаграммы. Например, известный крест Миллса, образованный двумя взаимно перпендикулярными линейными решетками по  $N$  элементов в каждой, имеет в главных плоскостях такие же диаграммы направленности, как и квадратная решетка из  $N^2$  элементов. Далее, двухэлементная «корреляционная антенна», образованная обычной решеткой и двухэлементным интерферометром той же длины, будет иметь такую же диаграмму направленности, как и равномерная решетка учетверенной длины. При этом многочисленные лепестки интерферометра при перемножении уничтожаются диаграммой линейной решетки.

В настоящее время разрабатываются методы формирования диаграмм направленности при помощи операций вычитания, сравнения, выбора и т. п., которые могут быть сопоставлены с простыми логическими действиями «да — нет», «или», «и», «больше — меньше». Применение этих операций (называемых «логическим синтезом») позволяет срезать боковые лепестки и дифракционные максимумы высших порядков, а также создавать диаграммы специальной формы и т. п. Для этой цели применяется вспомогательная переключающая



или управляющая антенна, сигнал на выходе которой сравнивается с сигналом, принятым основной антенной. Срезание боковых лепестков, например, осуществляется запиранием основного приемного канала для всех сигналов ниже установленного (при помощи вспомогательной антенны) уровня; диаграмма специальной формы может быть образована из частей диаграмм различных антенн при помощи операции выбора, осуществляемой переключающей антенной.

Следует иметь в виду, что при нелинейных способах обработки не достигается выигрыша в коэффициенте усиления, несмотря на сужение диаграммы; больше того, он будет снижаться из-за потерь при различных операциях обработки. В силу этого такие способы лучше всего пригодны в радиоастрономии, где, к тому же, можно применять усреднение и накопление сигналов, поскольку излучаемые в радиоастрономии цели перемещаются весьма медленно и излучают непрерывно.

Недостатками нелинейных методов обработки являются: а) подавление слабых сигналов сильными; б) появление ложных целей, если число реальных целей превышает единицу.

Анализ антенн с обработкой сигнала должен проводиться с учетом шумов как внутренних, т. е. присущих антенне и фидерному тракту, так и внешних. Учет внутренних шумов дает возможность оценить чувствительность системы и выбрать оптимальную схему ее построения (в том числе места включения усилителей сигнала). При учете внешних шумов источники шума и полезного сигнала в общем случае следует считать протяженными, причем как шумы, так и сигналы, приходящие с различных направлений, могут быть в различной степени коррелированными между собой.

Расчеты дают возможность по заданным характеристикам сигнала и шума (угловое распределение, частотный спектр, угловые корреляционные функции) найти оптимальные амплитудно-фазовые характеристики приемных каналов. Так, в простейшем случае равномерно распределенных по углам некогерентных шумов оптимальной будет обычная равномерная решетка с максимумом в направлении сигнала.

Представляют большой интерес дальнейшие исследования в этой области, которые позволили бы найти оптимальные методы обработки сигналов, поступающих от отдельных излучателей, для различных пространственно-временных распределений шумов и сигналов.

Для целей радиолокации и радионавигации перспективны антенны с так называемым «синтезированным» раскрытием, представляющие собой один из вариантов антенны с обработкой сигнала. Используя сравнительно небольшую антенну, размещенную по борту прямолинейно летящего самолета, и обрабатывая сигналы на ее выходе во время полета методом когерентного накопления, можно получить эффект, соответствующий раскрытию длиной порядка сотен и более метров. Эту антенну можно рассматривать как антенну

с последовательным съемом информации с раскрыва, в отличие от обычных антенн, где применяется метод одновременного съема. Однако если при этом ограничиться только запоминанием последовательно снимаемых сигналов с последующим сложением, то значительное увеличение эффективного раскрыва будет нецелесообразно, поскольку обычные антенны (т. е. фокусирующие на бесконечность) разрешают цели разнесенные не меньше, чем на размер антенны. Это ограничение становится существенным при расположении целей в промежуточной и ближней зонах, т. е. при больших размерах эффективного раскрыва. Повысить линейную разрешающую способность антенны можно путем введения, при запоминании сигналов, дополнительного фазового сдвига, обусловленного конечностью расстояния до цели и обеспечивающего фокусирование в точку, находящуюся в районе расположения цели (т. е. в зоне Френеля по отношению к эффективному раскрыву). При этом линейное разрешение может быть сделано равным диаметру фокального пятна.

С аналогичной задачей фокусировки в точку, расположенную в ближней или промежуточной зоне, приходится иметь дело при измерениях параметров очень больших антенн, у которых граница дальней зоны находится столь далеко, что для измерения диаграммы направленности обычным способом приходится использовать вземные источники. Это, безусловно, приводит к усложнению процесса измерения и в ряде случаев невозможно из-за больших угловых размеров таких источников. Взамен этого можно применить указанный выше прием фокусировки антенны в промежуточную зону. Распределение поля в окрестности фокального пятна при этом будет описывать диаграмму направленности нормально сфокусированной антенны. Действительно, если декартовы координаты точки в линейном раскрыве антенны  $x' = 0$ ,  $y'$ , а точки наблюдения  $x = d$ ,  $y$ , то для поля антенны имеем приближенно

$$E(y) \sim \frac{A}{d} \int_L J(y') \exp[ik \sqrt{d^2 + (y - y')^2}] dy' \sim \frac{A}{d} \exp\left[ik\left(d + \frac{ky^2}{2d}\right)\right] \int_L J(y') \exp\left(i \frac{ky'^2}{2d}\right) \exp\left(-i \frac{ky'}{d} y'\right) dy'.$$

Таким образом, при  $I(y') = J(y') \exp\left(-i \frac{ky'^2}{2d}\right)$  зависимость поля от аргумента  $\left(-\frac{y}{d}\right)$  в плоскости  $x = d$  будет такая же, как и зависимость диаграмм направленности первоначального тока  $J(y')$  от угловой координаты  $\cos \theta$  в дальней зоне.

## 7. Разработка вариационных методов расчета параметров антенн

Прямые методы вариационного исчисления широко применяются при решении различных задач математической физики. Заменяя дифференциальные или интегральные уравнения эквивалентным

вариационным принципом и используя те или иные прямые методы, находят приближенные решения в виде рядов, которые обычно сходятся довольно медленно.

Значительно лучшие результаты получаются, если требуется определить какой-либо параметр задачи, например собственную частоту колебаний резонатора или мембраны. Необходимо только сформулировать эквивалентный вариационный принцип так, чтобы стационарное значение функционала, фигурирующего в нем, совпадало с искомым параметром. При этом уже в первом приближении может быть получена достаточная для практики точность. В настоящее время разработаны общие приемы построения различных функционалов, позволяющие формулировать вариационные принципы, эквивалентные заданному линейному операторному уравнению. Эти приемы пригодны также и в случае несимметричных (несамосопряженных) операторов. Большинство характеристических параметров антенно-фидерных устройств обычно являются линейными функционалами от тока или поля в антенне (если это параметры антенны) или в волноводе (если это параметры волновода). К таким параметрам, в частности, относятся входные, собственные и наведенные сопротивления излучателей, коэффициенты отражения и трансформации волн на препятствии в волноводе, коэффициент рассеяния и диаграмма направленности (диаграмма направленности является функционалом от тока; углы, определяющие направление на точку наблюдения, следует рассматривать как параметры, от которых он зависит).

Подставляя в функционал значение тока или поля, взятое в первом приближении, получаем величину искомого параметра в следующем приближении. Дальнейшее его уточнение можно получить, рассматривая выражение для тока по методу Ритца или Галеркина.

В качестве примера, поясняющего вышесказанное, построим стационарное выражение для диаграммы направленности цилиндрического зеркала, возбуждаемого линейным источником, первичное поле которого  $E^0 = H_0^{(2)}(kR) \psi(\varphi)$  поляризовано параллельно отражающим зеркалам. Здесь  $\psi(\varphi)$  — диаграмма первичного источника,  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля,  $R, \varphi$  — полярные координаты с центром на оси источника. Поверхностная плотность тока  $K$ , возбуждаемого на зеркале, удовлетворяет интегральному уравнению

$$GK = E^0, \text{ где } G = 30 \pi k \int_l dl H_0^{(2)}(kr).$$

Интегрирование идет по контуру  $l$  сечения зеркала,  $r$  — расстояние между точками интегрирования и наблюдения, лежащими на  $l$ .

Диаграмма направленности зеркала определяется известной формулой

$$F(\varphi_0) = \int_l K \exp(ikRn) dl, \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $\varphi_0$ . Нетрудно убедиться, что величина  $F(\varphi_0)$  совпадает со стационарным значением следующего функционала:

$$L = \frac{(K, \exp(ikR\mathbf{n})) (J, E^0)}{(GK, J)}, \quad (2)$$

где  $J$  — вспомогательная функция, удовлетворяющая уравнению  $GJ = \exp(ikR\mathbf{n})$ , совпадающая с распределением токов на зеркале, возбуждаемых плоской волной  $\exp(ikR\mathbf{n})$ , и принято обозначение:

$$(u, v) = \int (uv) dl.$$

Функционал  $L$  стационарен при  $K$  и  $J$ , являющихся точными решениями соответствующих интегральных уравнений, и, как легко видеть, при этом  $L_{\text{стац}} = F(\varphi_0)$ .

Если величина  $K$  точно неизвестна, то расчет диаграммы следует проводить по формуле (2) (а не (1)), подставляя туда, например, выражения для  $K$  и  $J$  в приближении геометрической оптики.

Необходима дальнейшая разработка вариационных методов расчета параметров антенн как в направлении решения конкретных задач, так и в направлении развития общей теории. В частности, представляет большой интерес построение двух вещественных функционалов, экстремальные значения которых совпадали бы с искомым (вещественным) параметром (или с его вещественной или мнимой частью, если он — комплексный), но явились бы решением задачи на максимум и на минимум соответственно. Это позволило бы при приближенном расчете получать значения искомого параметра с избытком и недостатком и оценить степень приближения. Подобного рода оценки известны в настоящее время лишь для частных случаев.

### 3. Применение статистических методов в теории антенн

Статистические методы применяются для расчета допусков на изготовление антенн и учета влияния случайных ошибок, вызываемых неточностью изготовления, установки и настройки, а также ветровыми нагрузками на параметры антенн (уровень боковых лепестков, КУ, ориентация максимума диаграммы и т. п.). При помощи статистических методов удалось оценить также предельно достижимый КУ больших антенн, соответствующий заданной точности изготовления, и определить их оптимальные размеры.

Статистический метод первоначально использовался для оценки средних значений интересующих нас величин; в дальнейшем были разработаны методы расчета более тонких статистических характеристик (например, вероятностей распределения боковых лепестков, флуктуаций параметров и т. п.).

За последнее время статистические методы находят применение и для решения другого круга задач. Следует упомянуть статистический метод расчета неэквидистантных решеток, а также метод расчета характеристик линий связи со случайными изменениями параметров среды (флуктуация диэлектрической постоянной) при случайной взаимной ориентации корреспондирующих антенн, наличии случайных провалов в их диаграммах направленности. На эксплуатационные параметры больших антенн существенное влияние оказывают флуктуации электрических параметров среды, непосредственно окружающей антенну. За последнее время был проведен ряд исследований, позволивших оценить влияние таких флуктуаций на КУ антенн и определить предельные размеры антенн, ограниченные этими явлениями.

Статистические методы могут найти широкое применение в задачах, в постановке которых остается некоторый произвол. К таким задачам, в частности, относятся задачи расчета рассеяния на телах со случайной ориентацией, а также вопросы, связанные с частично когерентными и частично поляризованными волнами. Этими терминами принято характеризовать волны, частота и поляризация которых содержит хаотически изменяющуюся компоненту. Появление задач подобного рода в значительной степени связано с развитием техники оптического диапазона волн. Представляет практический интерес рассмотрение задач дифракции рассеяния таких, частично поляризованных и частично когерентных волн (в частности, с учетом флуктуаций рассеивающего тела).

Развитие антенной техники происходит за последние годы главным образом не за счет создания принципиально иных типов антенн, а за счет улучшения и новых методов использования известных систем. При этом имеет место объединение «антенных приемов» с чисто схемными методами. Непосредственное встраивание усилителей, смесителей и различной другой аппаратуры для преобразования и управления сигналами привело к качественному скачку в антенной технике.

Новые области науки и техники, такие как радиоастрономия, космическая связь, необходимость получать почти оптическое изображение местности и объектов, а также освоение оптического диапазона волн, в значительной мере содействуют внедрению схемных методов и дальнейшему развитию антенной техники.

В настоящей статье мы не ставили целью полностью обрисовать все аспекты современного состояния антенной техники и наметить все теоретические проблемы, стоящие перед ней, да это и невозможно в рамках одной статьи. Ряд важных направлений, таких как, например, антенны для оптического диапазона и т. п., остались незатронутыми, другие освещены недостаточно. Эти пробелы восполняются в специальных статьях настоящего сборника, посвященных отдельным вопросам современной антенной техники.

УДК 534.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**О СВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ПЕРВОГО РОДА К УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО РОДА**

(Представлено академиком В. А. Фоком 31 I 1969)

Рассмотрим следующий класс двумерных уравнений первого рода, к которому сводится ряд задач математической физики:

$$\int_S w(g) f(g, p) dg = \psi(p), \quad p \in S. \quad (1)$$

Здесь  $S$  некоторая незамкнутая поверхность\* (Ляпунова) в трехмерном пространстве, ограниченная контуром  $L$ ;  $w(g)$  — неизвестная функция;  $\psi(p)$  — заданный свободный член, имеющий правильно\*\* непрерывные первые производные вдоль  $\bar{S}$ ;  $\bar{S} = S + L$ ;  $dg$  — элемент площади поверхности в точке  $g$ ;  $f$  — ядро вида:

$$f(g, p) = Q(g, p) / R_{gp} \quad (Q(g, p) \neq 0, \quad g \in \bar{S}), \quad (2)$$

где  $Q(g, p)$  — функция, непрерывная на  $\bar{S}$  по  $g$  и имеющая правильно непрерывные первые производные по координатам  $p$  вдоль  $\bar{S}$ , а  $R_{gp}$  — расстояние между точками  $g$  и  $p$ .

Цель настоящей работы — преобразование (1) к интегральному уравнению второго рода с ограниченным линейным оператором и ядром, содержащим произвольную (достаточно гладкую) функцию двух переменных. Для этого введем вспомогательное ядро

$$\hat{f}(q, p) = \hat{Q}(q, p) / R_{qp} \quad (\hat{Q}(q, p) \neq 0, \quad q \in \bar{S}), \quad (3)$$

где  $\hat{Q}(q, p)$  определена в некотором объеме  $V_S$ , содержащем  $\bar{S}$  ( $q, p \in V_S$ ), и имеет в нем непрерывные первые смешанные производные по координатам обеих переменных, в остальном она произвольна.

Умножим (1) на производную от  $\hat{f}$  по нормали к  $S$  в точке  $p$  и проинтегрируем по  $S$

$$\int_S \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} \int_S w(g) f(g, p) dg dp = \int_S \psi(p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp, \quad (4)$$

при этом предполагается, что  $q$  находится вне  $\bar{S}$  ( $q \notin \bar{S}$ ). Так как двойной интеграл, стоящий слева, конечен, то (теорема Фубини) в нем можно изменить порядок интегрирования, после чего (4) имеет вид

$$\int_S w(g) \int_S f(g, p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp dg = \int_S \psi(p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp, \quad q \notin \bar{S}. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$G(q, g) = \int_S f(g, p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp, \quad g \in S, \quad g \in V_S. \quad (6)$$

\* Она может состоять также из конечного числа отдельных поверхностей.

\*\* Удовлетворяющие условиям Гельдера.

Поскольку  $f$  и  $\hat{f}$  определены выражениями (2) и (3), их можно пред- 506  
ставить в виде

$$f(g, p) = Q(g, g) / R_{gp} + u(g, p), \quad \hat{f}(q, p) = \hat{Q}(q, q) / R_{qp} + \hat{u}(q, p), \quad (7)$$

где  $u$  и  $\hat{u}$  элементарно выражаются через  $Q$  и  $\hat{Q}$ .

Подставляя (7) в (6), найдем

$$G(q, g) = Q(g, g) \hat{Q}(q, q) \int_S \frac{1}{R_{gp}} \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}_p \mathbf{R}_{pq}})}{R_{qp}^2} dp + G_0(q, g). \quad (8)$$

Здесь  $G_0$  — ограниченная функция.

Так как

$$\left| \int_S \frac{1}{R_{gp}} \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}_p \mathbf{R}_{pq}})}{R_{qp}^2} dp \right| \ll \frac{A}{R_{qg}},$$

( $A$  — постоянная), то

$$G(q, g) = \xi_0(q, g) / R_{qg} + G_0(q, g) \equiv \xi(q, g) / R_{qg}, \quad (9)$$

где  $\xi_0$  и  $\xi$  — ограниченные функции.

При фиксированном  $g$  (6) есть выражение типа потенциала двойного слоя и, следовательно, представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию  $q$  вплоть до  $S$ , терпит на  $S$  (при  $q \neq g$ ) разрыв первого рода, а при  $q \rightarrow g$  растет как  $R_{qg}^{-1}$ . Учитывая сказанное, можно заключить (см. (9)), что  $\xi$ , как функция  $q$ , непрерывно дифференцируема вплоть до  $S$  и терпит разрыв при переходе через  $S$ . Предельные значения  $\xi$  при стремлении  $q$  к  $S$  с положительной и отрицательной стороны равны, учитывая (8) и (9),

$$(\xi(q, g))^{\pm} = Q(g, g) \hat{Q}(q, q) \left\{ R_{qg} \int_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}_p \mathbf{R}_{pq}})}{R_{gp} R_{qp}^2} dp \pm 2\pi \right\} + R_{qg} (G_0(q, g))^{\pm}.$$

Легко также видеть, что при  $q = g$

$$(\xi(q, q))^{\pm} = \pm \eta(q) / 2\pi; \quad \eta(q) \equiv 4\pi^2 Q(q, q) \hat{Q}(q, q). \quad (10)$$

Возвращаясь к равенству (5), продифференцируем его по направлению нормали к  $S$ , проходящей через  $q$ , предварительно подставив в (5) вместо внутреннего интеграла выражение (9),

$$\frac{\partial}{\partial n_q} \int_S w(g) \frac{\xi(q, g)}{R_{qg}} dg = \frac{\partial}{\partial n_q} \int_S \psi(p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp, \quad q \in \bar{S}. \quad (11)$$

Слева здесь стоит нормальная производная выражения типа потенциала простого слоя, а справа — нормальная производная выражения типа потенциала двойного слоя. Поэтому, стремя  $q$  к  $S$  с разных сторон, найдем, учитывая поведение этих потенциалов и разрывность  $\xi$  на  $S^*$ ,

$$\int_S w(g) \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \frac{\xi(q, g)}{R_{qg}} \right)^{\pm} dg \mp 2\pi w(q) (\xi(q, q))^{\pm} = \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi(p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp \right)^{\pm}, \quad q \in S. \quad (12)$$

Сопоставим (6) и (9) и введем обозначения

$$\eta(q) T_{\pm}(q, g) = \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \frac{\xi(q, g)}{R_{qg}} \right)^{\pm} = \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S f(g, p) \frac{\partial \hat{f}(q, p)}{\partial n_p} dp \right)^{\pm}, \quad (13)$$

\* Здесь и ниже под  $\frac{\partial}{\partial n_q} (F)^{\pm}$  принимается предел  $\frac{\partial}{\partial n_q} F$ , когда  $q$  стремится к  $S$  с положительной или отрицательной стороны соответственно.

$$\eta(q) \Phi_{\pm}(q) = - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi(p) \frac{\partial f(q, p)}{\partial n_p} dp \right)^{\pm} \quad (14) \quad 507$$

Используя их и учитывая (10), придадим равенствам (12) вид

$$w(q) = \int_S w(g) T_{\pm}(q, g) dg + \Phi_{\pm}(q), \quad q \in S. \quad (15)$$

Таким образом получено два интегральных уравнения второго рода. Легко показать, что при  $w$ , удовлетворяющем (1), правые части обоих уравнений (15) равны, хотя их ядра и свободные члены различны. Когда  $\frac{\partial}{\partial n_q} \hat{Q}(q, q) = 0$ ,  $q \in S$ , оба уравнения (15) тождественно совпадают.

Если уравнение (1) имеет одно решение, то полная эквивалентность (1) и (15) следует из единственности решения (15). Последнее можно доказать приемом, аналогичным данному в (1), если вспомогательная функция взята, например, в виде  $\hat{Q} = \text{const}$ ,  $\hat{Q} = \exp(-ikR_{qp})$  и т. п.

Как показано в (2), ядру типа (13) соответствует неограниченный оператор. Можно, однако, перейти от уравнений (15) к уравнениям с ограниченным оператором, поскольку существенные особенности содержит как член с ядром, так и свободный член, а они могут быть выделены и взаимно сокращены. Для этого следует воспользоваться соотношением (4) (2). Из него сразу следует равенство \*

$$\frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm} = \left( \int_S [n_q [n \nabla U]] \nabla \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm} - n_q \text{rot}_q \oint U \frac{1}{R_{qp}} dL_p. \quad (16)$$

Оно, как и (4) (2), справедливо также для многосвязных поверхностей  $S$ , если под  $L$  понимать суммарную границу. Из этого вытекает, что (16) выполняется и для функций  $U(p)$ , имеющих изолированные особые точки на  $S$ , если только контурный интеграл (см. (16)), взятый вокруг такой точки, стремится к нулю при стягивании к ней. Например, для  $U(p) \equiv f(g, p)$ , где  $g \in S$  рассматривается как фиксированный параметр, (16) справедливо. Не представляет труда записать при помощи (16) выражения (13) и (14) в виде

$$T_{\pm}(q, g) = \hat{T}_{\pm}(q, g) - \frac{1}{4\pi^2 Q(q, q)} n_q \text{rot}_q \oint_L \frac{f(g, p)}{R_{qp}} dL_p, \\ \Phi_{\pm}(q) = \hat{\Phi}_{\pm}(q) + \frac{1}{4\pi^2 Q(q, q)} n_q \text{rot}_q \oint_L \frac{\psi}{R_{qp}} dL_p. \quad (17)$$

Здесь

$$\hat{T}_{\pm}(q, g) = \frac{1}{\eta(q)} \int_S f(g, p) \frac{\partial^2 \hat{u}(q, p)}{\partial n_q \partial n} dp + \frac{1}{\eta(q)} \frac{\partial \hat{Q}(q, q)}{\partial n_q} \left( \int_S f(g, p) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm} + \\ + \frac{1}{4\pi^2 Q(q, q)} \left( \int_S [n_q [n \nabla f(g, p)]] \nabla \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm}, \quad (18)$$

$$\hat{\Phi}_{\pm}(q) = - \frac{1}{\eta(q)} \int_S \psi \frac{\partial^2 \hat{u}(q, p)}{\partial n_q \partial n} dp - \frac{1}{\eta(q)} \frac{\partial \hat{Q}(q, q)}{\partial n_q} \left( \int_S \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm} - \\ - \frac{1}{4\pi^2 Q(q, q)} \left( \int_S [n_q [n \nabla \psi]] \nabla \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm}. \quad (19)$$

\* Здесь и ниже мы не ставим индексов у операторов дифференцирования по координатам точки интегрирования, а также не выписываем аргументов у функций, зависящих только от точки интегрирования.



$$w(q) = \int_S w(g) \hat{T}_{\pm}(q, g) dg + \hat{\Phi}_{\pm}(q), \quad q \in S. \quad (20)$$

При этом члены с контурными интегралами, фигурирующими в (17), взаимно сократились благодаря тому, что  $w$  и  $\psi$  связаны соотношением (1). Вспомогательная функция  $\hat{Q}(q, p)$ , входящая в ядра и свободные члены уравнений (15) и (20), может быть выбрана довольно произвольно. Этим можно воспользоваться для упрощения самих уравнений и ускорения сходимости процессов, используемых для их решения. Например, положив ее равной единице ( $\hat{Q} = 1$ , а значит  $\hat{u} \equiv 0$ ), получим вместо (18) и (19) следующие упрощенные выражения для ядра и свободного члена \*

$$\hat{T}(q, g) = \frac{1}{4\pi^2 Q(q, g)} \left( \int_S [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla f(g, p)]] \nabla \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm}, \quad (18a)$$

$$\hat{\Phi}(q) = - \frac{1}{4\pi^2 Q(q, q)} \left( \int_S [\mathbf{n}_q [\mathbf{n} \nabla \psi]] \nabla \frac{1}{R_{qp}} dp \right)^{\pm}. \quad (19a)$$

Возможен и другой выбор функции  $\hat{Q}$ .

При  $Q = \frac{1}{4\pi} \exp(-ik R_{gp})$  к уравнению (15), а следовательно и (20), сводится задача дифракции скалярной волны на экране  $S$  при граничных условиях типа Дирихле. Если кроме этого положить  $Q = Q$ , то уравнение (15) совпадает с уравнением (8) <sup>(3)</sup>, полученным для этой задачи другим методом. Однако найденные здесь ядро (18a) и свободный член (19a) уравнения с ограниченным оператором значительно проще, чем данные в <sup>(2)</sup>.

Приемом, аналогичным использованному в <sup>(2)</sup>, можно показать, что решение уравнений (20) следует искать в классе функций, непрерывных на  $S$  и удовлетворяющих условиям Майкснера (для «тока» в задаче Дирихле) на контуре  $L$ . Оператор  $\hat{T}$ , соответствующий ядру  $\hat{T}(q, g)$ , преобразует функции этого класса в себя.

Полученные здесь результаты элементарно распространяются на одномерные интегральные уравнения первого рода, в которых интегрирование идет по некоторой разомкнутой кривой, а ядро имеет логарифмическую особенность.

Поступило  
31 I 1969

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 177, № 4 (1967). <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 12, № 10 (1967). <sup>3</sup> Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 11, № 7 (1966).

\* Оба ядра и свободных члена теперь совпадают, поэтому мы опускаем индексы  $\pm$  у них.

УДК 538.574.6

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕРЕЗОНАНСНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА К ПОСТРОЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ

*Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский*

Построены и исследованы интегральные уравнения второго рода для задач дифракции на незамкнутом экране, ядра которых выражены через функции Грина вспомогательных краевых задач. Эти краевые задачи поставлены так, что ядра оказываются нерезонансными, а соответствующие интегральные операторы — ограниченными в естественном классе функций.

### ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] задачи дифракции на незамкнутых экранах были приведены к интегральным уравнениям второго рода различных типов: в уравнениях первого типа ядра конструировались при помощи функций Грина для свободного пространства; ядра же уравнений второго типа выражены через функции Грина  $G^i$ ,  $G^e$  внутренней и внешней областей, возникающих при дополнении экрана  $S$  до замкнутой поверхности, причем на всей замкнутой поверхности ставилось то же краевое условие, что и на  $S$ .

В данной статье речь идет о построении и исследовании интегральных уравнений, родственных упомянутым уравнениям второго типа в том смысле, что их ядра также связаны с функциями Грина некоторых вспомогательных краевых задач. Однако предлагаемые ниже уравнения имеют по сравнению с ними ряд важных преимуществ. Прежде всего функции Грина  $G^i(p; q; k)$  и вместе с ними соответствующие ядра в [1] обладали резонансными частотами (дискретный спектр), которым соответствуют полюсы функций  $G^i$  в  $k$ -плоскости. В настоящей же статье ядра сконструированы при помощи функций Грина, удовлетворяющих на дополнительных поверхностях импедансным условиям диссипативного типа, и, вследствие этого, в полуплоскости  $\text{Im } k^2 \leq 0$  не существует особых точек у рассматриваемых ядер. Это обстоятельство имеет особенно важное значение для изучения дифракционных задач в коротковолновой области — при больших  $ka$  ( $a$  — характерный размер) полюсы функций Грина  $G^i$  работы [1] расположены на вещественной оси через весьма малые интервалы.

Упомянутые импедансные условия на вспомогательных поверхностях, кроме того, физически более естественны, чем идеальные условия Дирихле или же Неймана. Отметим еще и такое немаловажное обстоятельство.

Метод работы [1] приводил непосредственно к уравнениям, в которых интегральный оператор и свободный член содержали сингулярные части; лишь после ряда преобразований [2] мы приходим к уравнениям с ограниченным оператором, действующим в естественном (майксерновском) классе функций. Интегральные же уравнения, выводимые ниже, обладают этим свойством сразу, без дополнительных преобразований. Наконец,

примененный здесь метод предусматривает независимый выбор двух вспомогательных поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  (расположенных с различных сторон экрана  $S$ ); это может позволить упростить эффективное нахождение функций Грина в соответствующих областях.

Проводимые ниже рассуждения относятся лишь к скалярным дифракционным задачам типа Дирихле и типа Неймана. Однако распространение результатов данной статьи на электродинамические, векторные задачи не связано с какими-либо принципиальными трудностями.

### 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Она состоит в нахождении вторичного поля  $\psi$ , возникающего при падении первичной волны  $\psi_0$  на незамкнутый экран (достаточно гладкую поверхность  $S$  с гладким или кусочно-гладким краем  $L$ ), причем на  $S$

$$\psi^+ = \psi^- = -\psi_0^*, \quad (1)$$

а во всем пространстве (кроме точек поверхности  $S$ )

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Кроме этого  $\psi$  должна удовлетворять условию Майкснера на контуре  $L$  и принципу излучения на бесконечности.

Введем в рассмотрение вспомогательные поверхности  $\Sigma_1, \Sigma_2$  — конечные или же уходящие на бесконечность, опирающиеся на контур  $L$  и расположенные с разных сторон от  $S$ . Области, ограниченные поверхностями  $S + \Sigma_1$  и  $S + \Sigma_2$  соответственно, обозначим через  $V_1$  и  $V_2$ .

Эти области, равно как и выбор орта нормали на  $S, \Sigma_1, \Sigma_2$ , показаны на рис. 1.

Обозначим, далее, через  $G_1, G_2$  функции Грина, представляющие собой решения следующих краевых задач:

$$(\nabla_p^2 + k^2) G_m(p, q) = -\delta(p - q) \quad (3)$$

$$(p, q \in V_m; \quad m = 1, 2),$$

$$\left. \begin{aligned} G_m(p, q) &= 0 \quad \text{при } p \in S, q \in V_m, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial n_p} - \alpha_m(p) \right] G_m(p, q) &= 0 \quad \text{при } p \in \Sigma_m, q \in V_m, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\alpha_1(p), \alpha_2(p)$  — заданные соответственно на  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  функции, причем  $\text{Im } \alpha_1(p) > 0, \text{Im } \alpha_2(p) < 0$ . Если поверхность  $S + \Sigma_m$  кусочно-гладкая (с линиями излома), то на линиях излома  $G_m$  должна удовлетворять условиям Майкснера; в случае, когда  $V_m$  бесконечна, должны выполняться условия излучения или аналогичные им требования на бесконечности. Оставляя пока в стороне вопрос о существовании и аналитичности функций  $G_1, G_2$  в комплексной  $k$ -плоскости, перейдем к построению интегрального уравнения для задачи (1), (2).

\* Здесь и везде далее мы следуем обозначениям работ [1, 2]; в частности,  $\psi^+$  и  $\psi^-$  — предельные значения функции  $\psi$  на двух сторонах ориентированной поверхности ( $\psi^+$  — предельное значение с той стороны, куда направлен орт нормали).

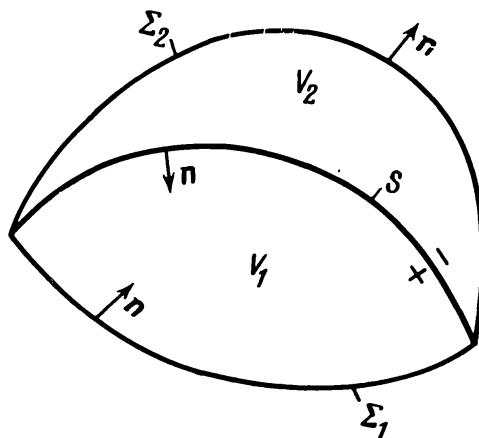


Рис. 1

Применив к искомой функции  $\psi$  и к  $G_m(p, q)$  теорему Грина в области  $V_m$  ( $m = 1, 2$ ) и приняв во внимание соотношения (1) — (4), получим

$$(-1)^m \psi(q) = \int_S \psi_0 \frac{\partial G_m(p, q)}{\partial n} dp + \int_{\Sigma_m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} - \alpha_m \psi \right) G_m(p, q) dp$$

$$(q \in V_m; \quad m = 1, 2). \quad (5)$$

Здесь и ниже мы не ставим аргумента у функций, зависящих только от точки интегрирования;  $\partial / \partial n$  — символ нормальной производной в точке интегрирования;  $dp$  — элемент площади поверхности в точке  $p$  (аналогичный смысл будут иметь в последующем символы  $dq, dg$  и т. п.).

Как показано в [1], имеет место интегральное представление

$$\psi(p) = - \int_S w(g) f(g, p) dg, \quad (6)$$

где

$$w = \frac{\partial \psi^+}{\partial n} - \frac{\partial \psi^-}{\partial n} \quad (7)$$

— функция, играющая роль поверхностного «тока», а

$$f(g, p) = e^{-ik|g-p|} / 4\pi |g-p|. \quad (8)$$

Почленным дифференцированием равенств (5) по направлению нормали к  $S$ , проходящей через  $q$ , и предельным переходом на  $S$  из  $V_1$  и  $V_2$  можно найти выражения  $\partial \psi^+ / \partial n$ ,  $\partial \psi^- / \partial n$  и затем, по формуле (7), «ток»  $w$ . Таким путем находим

$$w(q) = - \sum_{m=1}^2 \int_{\Sigma_m} \frac{\partial G_m(p, q)}{\partial n_q} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} - \alpha_m \psi \right) dp + M(q), \quad q \in S, \quad (9)$$

где \*

$$M(q) = - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0 \frac{\partial G_1(p, q)}{\partial n} dp \right)^+ - \frac{\partial}{\partial n_q} \left( \int_S \psi_0 \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial n} dp \right)^-. \quad (10)$$

С другой стороны, из формулы (6) следует, что

$$\frac{\partial \psi(p)}{\partial n_p} = - \int_S w(g) \frac{\partial f(g, p)}{\partial n_p} dg, \quad p \in \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (11)$$

Подставив (11) и (6) в подынтегральное выражение правой части формулы (9), получим

$$w(q) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Sigma_m} \frac{\partial G_m(p, q)}{\partial n_q} dp \times$$

$$\times \int_S w(g) \left( \frac{\partial}{\partial n_p} - \alpha_m(p) \right) f(g, p) dg + M(q), \quad q \in S.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, найдем искомое интегральное уравнение второго рода для  $w$

$$w(q) = \int_S w(g) K(g, q) dg + M(q), \quad q \in S. \quad (12)$$

\* Напомним, что  $\partial(F)^+ / \partial n_q$  и  $\partial(F)^- / \partial n_q$  являются пределами  $\partial F / \partial n_q$  при стремлении  $q$  к  $S$  из областей  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

Ядро этого уравнения имеет вид

$$K(g, q) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Sigma_m} \frac{\partial G_m(p, q)}{\partial n_q} \left( \frac{\partial}{\partial n_p} - \alpha_m(p) \right) f(g, p) dp. \quad (13)$$

Выражение (10) для свободного члена  $M(q)$  может быть преобразовано к виду, аналогичному (13). Для этого применим к функциям  $\psi_0(p)$  и  $G_m(p, q)$  теорему Грина в области  $V_m$  ( $m = 1, 2$ ). Таким путем, учитывая граничные условия (4) и то, что  $\psi_0$  удовлетворяет уравнению  $(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$  внутри  $V_m$ , найдем

$$(-1)^m \psi_0(q) = - \int_S \psi_0 \frac{\partial G_m(p, q)}{\partial n} dp + \int_{\Sigma_m} G_m(p, q) \left( \frac{\partial}{\partial n} - \alpha_m \right) \psi_0 dp$$

$(q \in V_m; \quad m = 1, 2).$

Продифференцировав почленно это равенство по направлению нормали к  $S$ , проходящей через точку  $q$ , совершив затем предельные переходы (по  $q$ ) из  $V_m$  на  $S$  и сложив результаты, полученные для  $m = 1$  и  $m = 2$ , придем (учитывая (10)) к выражению

$$M(q) = - \sum_{m=1}^2 \int_{\Sigma_m} \frac{\partial G_m(p, q)}{\partial n_q} \left( \frac{\partial}{\partial n} - \alpha_m \right) \psi_0 dp. \quad (14)$$

Этим же приемом можно преобразовать ядро (13) к виду, отличающемуся от (10) только заменой  $\psi_0$  на  $-f(p, g)$ .

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Постановка этой задачи отличается от предыдущей только заменой граничного условия (1) на следующее:

$$\partial\psi^+ / \partial n = \partial\psi^- / \partial n = -\partial\psi_0 / \partial n \quad \text{на } S. \quad (15)$$

Приведение задачи Неймана к интегральному уравнению мы осуществим при помощи функций Грина  $G_1, G_2$ , представляющих собой решение краевых задач (3), (4), но с заменой краевого условия

$$G_m(p, q) = 0 \quad (p \in S; \quad q \in V_m)$$

условием

$$\partial G_m(p, q) / \partial n_p = 0 \quad (p \in S; \quad q \in V_m).$$

Применив теорему Грина в области  $V_m$  к паре функций  $\psi, G_m$  и приняв во внимание граничные свойства этих функций, получаем

$$(-1)^m \psi(q) = - \int_S \frac{\partial \psi_0}{\partial n} G_m(p, q) dp +$$

$$+ \int_{\Sigma_m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} - \alpha_m \psi \right) G_m(p, q) dp \quad (q \in V_m). \quad (16)$$

Вторичное поле  $\psi$ , с другой стороны, выражается через «ток»

$$v = \psi^+ - \psi^- \quad \text{на } S, \quad (17)$$

по формуле [1]

$$\psi(p) = \int_S v(g) \frac{\partial f(g, p)}{\partial n_g} dg. \quad (18)$$

Исключив из правой части (16)  $\psi$  при помощи (18), определим  $\psi^+$  и  $\psi^-$  на  $S$ . Подставляя последние в (17) и меняя порядок интегрирования, приходим к интегральному уравнению

$$v(q) = \int_S v(g) Q(g, q) dg + N(q), \quad q \in S, \quad (19)$$

где

$$Q(g, q) = - \sum_{m=1}^2 \int_{\Sigma_m} G_m(p, q) \left( \frac{\partial}{\partial n} - \alpha_m \right) \frac{\partial f(g, p)}{\partial n_g} dp; \quad (20)$$

$$N(q) = \int_S \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \{G_1(p, q) + G_2(p, q)\} dp. \quad (21)$$

Уравнения (12) и (19) и были целью нашего вывода. Ниже будут описаны некоторые свойства ядер и решений этих уравнений.

### 3. НЕРЕЗОНАНСНЫЙ ХАРАКТЕР ФУНКЦИЙ ГРИНА

Существование и аналитичность по  $k$  функций Грина  $G_1, G_2$  в полуплоскости  $\text{Im } k^2 \leq 0$  есть прямое следствие следующего предложения (теорема единственности) \*.

**Теорема.** Пусть  $V$  — конечная область пространства, граница которой — простая замкнутая гладкая либо кусочно-гладкая поверхность  $S + \Sigma$  (рис. 2). Пусть, далее,  $n$  — орт внешней нормали и  $\alpha(p)$  — заданная на  $\Sigma$  функция, у которой  $\text{Im } \alpha < 0$ . Тогда при  $\text{Im } k^2 \leq 0$  краевая задача

$$\nabla^2 u(p) + k^2 u(p) = 0, \quad p \in V; \quad (22)$$

$$u(p) = 0, \quad p \in S; \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha u = 0, \quad p \in \Sigma \quad (24)$$

имеет лишь нулевое решение ( $u \equiv 0$ ).

**Доказательство.** Пусть  $u(p)$  — какое-либо решение задачи (22) — (24) и  $u^*(p)$  — величина, комплексно сопряженная с  $u(p)$ . Тогда

$$\int_V u^* (\nabla^2 u + k^2 u) dV = 0, \quad (25)$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_V u^* (\nabla^2 u + k^2 u) dV &= \int_V k^2 |u|^2 dV + \int_V \{ \nabla (u^* \nabla u) - |\nabla u|^2 \} dV = \\ &= \int_V (k^2 |u|^2 - |\nabla u|^2) dV + \int_{S+\Sigma} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS = \\ &= \int_V (k^2 |u|^2 - |\nabla u|^2) dV + \int_{\Sigma} \alpha |u|^2 dS. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует

$$\text{Im } k^2 \int_V |u|^2 dV = - \int_{\Sigma} \text{Im } \alpha |u|^2 dS.$$

\* Ради определенности мы будем рассматривать задачу Дирихле.

При  $\text{Im } k^2 \leq 0$  и  $\text{Im } \alpha < 0$  это равенство осуществимо лишь при

$$\int_{\Sigma} \text{Im } \alpha |u|^2 dS = 0,$$

откуда  $u = 0$  на  $\Sigma$ . Таким образом,  $u = 0$  на  $S + \Sigma$  (см. (23)) и, следовательно,  $u \equiv 0$  внутри  $V$ , что и утверждалось.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ОСОБЕННОСТЕЙ ЯДРА $K(g, q)$ И СВОЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЭТИМ ЯДРОМ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

Пусть  $G(p, q)$  и  $G_0(p, q)$  — функции Грина краевой задачи (22) — (24) при данной функции  $\alpha(p)$  и при  $\alpha(p) \equiv 0$  соответственно. Тогда из формулы Грина непосредственно следует соотношение

$$G(g, q) - G_0(g, q) = \int_{\Sigma} \alpha(p) G(q, p) G_0(g, p) dp \quad (g, q \in V). \quad (27)$$

В свою очередь из (27) нетрудно заключить, что главные члены особенностей  $G$  и  $G_0$  вблизи концов дуги  $S$  одинаковы. Кроме того, по аналогичным соображениям можно заменить при оценке особенностей  $K(g, q)$  уравнение Гельмгольца уравнением Лапласа. Таким образом, нас будет интересовать поведение (вблизи точек стыка дуг  $S$  и  $\Sigma$ ) функции Грина  $\hat{G}(p, q)$ , представляющей собой решение следующей задачи:

$$\nabla_p^2 \hat{G}(p, q) = -\delta(p - q) \quad (p, q \in V); \quad (28)$$

$$\hat{G}(p, q) = 0 \quad \text{при } p \in S; \quad q \in V; \quad (29)$$

$$\partial \hat{G}(p, q) / \partial n_p = 0 \quad \text{при } p \in \Sigma; \quad q \in V. \quad (30)$$

Обозначив

$$\frac{1}{2\pi} \ln |p - q| = \hat{f}(p, q),$$

будем исследовать ядро

$$\hat{K}(g, q) = \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{G}(p, q)}{\partial n_q} \frac{\partial \hat{f}(g, p)}{\partial n_p} dp, \quad (31)$$

аналогичное по конструкции  $K(g, q)$  и, очевидно, имеющее такой же главный член интересующей нас особенности. Как оказывается, ядро  $\hat{K}(g, q)$  и соответствующий интегральный оператор обладают всеми характерными свойствами, которыми обладали ядро  $\hat{T}(g, q)$  и оператор  $\hat{T}$  интегральных уравнений, построенных в [2]. Во-первых, интегральный оператор

$$\hat{K}\psi = \int_S \hat{K}(g, q)\psi(g) dg \quad (32)$$

отображает множество функций  $\psi$ , удовлетворяющих условиям Майкснера с показателем  $1/2$  (класс  $M_{1/2}$ , по терминологии статьи [2]) в это же множество. Во-вторых, этот оператор является ограниченным, причем норма его сингулярной части равна единице. В-третьих, вполне непрерывным этот оператор не является. Доказательств этих утверждений мы здесь приводить не будем, так как они сопряжены с громоздкой математической техникой и в то же время по всем основным пунктам аналогичны рассмотренным, проведенным в [2]. Заметим лишь, что при этом используется явное выра-

жение функции Грина электростатической задачи для угла с прямолинейными сторонами при краевых условиях:  $u = 0$  на одной стороне и  $\partial u / \partial n = 0$  на другой. Отсутствие полной непрерывности оператора установлено при помощи сконструированного контрпримера. Исследование ядра  $Q$  (в задаче Неймана) и соответствующего интегрального оператора приводит к аналогичным результатам. Введенные выше функции  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , так же как и вспомогательные поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , выбираются из соображений максимального упрощения задачи нахождения функций Грина  $G_1, G_2$ . Например, когда  $S$  имеет вид дуги окружности (двумерная задача),  $\Sigma_1, \Sigma_2$  и области  $V_1, V_2$  можно выбрать так, как показано на рис. 3.

В заключение укажем, что, кроме тех подходов к эффективному (численному) решению предлагаемых интегральных уравнений, которые были

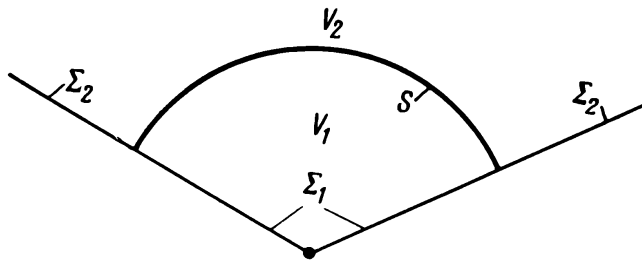


Рис. 3

описаны в [2], представляется еще одна возможность. Именно, выделив (в случае двумерной задачи) из  $S$  две достаточно малые дуги  $S_1, S_2$ , примыкающие к концам  $S$ , представим  $S$  в виде суммы:  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , и в соответствии с этим разобьем оператор  $K$  (или  $Q$ ) на два:

$$K = K_{1,2} + K_3,$$

где  $K_3$ , например, — интегральный оператор с ядром  $K(g, q)$  и с интегрированием по дуге  $S_3$ . Тогда ограниченный оператор  $K_{1,2}$  обладает нормой, меньшей единицы, и, следовательно, его можно обратить методом итераций, а  $K_3$  — оператор вполне непрерывный, сколь угодно точно аппроксимируемый конечномерными операторами (с вырожденными ядрами). Отсюда по схеме, хорошо известной из теории интегральных уравнений, можно привести и первоначальное уравнение к уравнению с вырожденным ядром, т. е. к системе линейных алгебраических уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 7, 1159.
2. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 1967, 12, 10, 1713.

Поступила в редакцию  
10 II 1969



УДК 534.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 XII 1969)

1. Идея метода. Подавляющее большинство задач математической физики сводится к нахождению решения  $w$  ( $w$  может быть скаляром, вектором, матрицей и т. д.), удовлетворяющего некоторым  $N$  условиям. Эти условия таковы, что решение существует и единственно. Одним из этих условий обычно является дифференциальное уравнение, а остальные имеют характер начальных или граничных условий, условий на бесконечности и т. п. Как уже говорилось, решение, удовлетворяющее всем этим условиям, единственно, однако, если исключить хотя бы одно из них, то существует (обычно) бесконечное множество решений, удовлетворяющих оставшимся условиям. Это обстоятельство позволяет наметить следующий путь решения задачи. Исключим одно\* из заданных  $N$  условий, например,  $n$ -е. Решение, удовлетворяющее оставшимся  $(N - 1)$  условиям, обозначим  $w_n$ . Таких решений будет множество, обозначим его через  $A_n$  ( $w_n \in A_n$ ). Если исключить любое другое  $m$ -е ( $m \neq n$ ) условие, то решения  $w_m$ , удовлетворяющие оставшимся  $(N - 1)$  условиям, будут составлять некоторое новое множество  $A_m$ . Множества  $A_n$  и  $A_m$  замкнуты, если операторы, при помощи которых формулируются все  $N$  условий задачи, непрерывны. Очевидно, оба эти множества имеют одну общую точку, которая и является решением исходной задачи. Следовательно, его можно искать как пересечение указанных множеств  $w = A_n \cap A_m$ . Успех этого пути зависит от умения найти общие аналитические выражения для элементов функциональных множеств  $A_n$  и  $A_m$ . Обычно их можно представить при помощи выражений типа  $G_n\varphi$  и  $G_m\psi$ , где  $G_n$  и  $G_m$  — некоторые операторы, а  $\varphi$  и  $\psi$  — функции, принадлежащие соответствующим классам  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$ , т. е.

$$w_n = G_n\varphi, \varphi \in \mathcal{L}_n; \quad w_m = G_m\psi, \psi \in \mathcal{L}_m. \quad (\text{I})$$

Когда  $\varphi$  и  $\psi$  пробегает  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$ ,  $w_n$  и  $w_m$  пробегает множества  $A_n$  и  $A_m$  соответственно. Из существования единственной общей точки у  $A_n$  и  $A_m$  следует, что имеется фиксированная пара  $\varphi$  и  $\psi$ , для которой справедливо равенство:

$$G_n\varphi = G_m\psi. \quad (\text{II})$$

Эти функции и определяют общую точку, являющуюся искомым решением исходной задачи.

В ряде случаев, например при рассмотрении электродинамических или акустических задач, анализ и выкладки могут быть значительно упрощены, если перейти от общих решений — полей  $w$ ,  $w_n$ ,  $w_m$  (и соответствующих им множеств  $A_n$ ,  $A_m$ ) к их асимптотическим выражениям при  $R \rightarrow \infty$ , справедливым в дальней зоне:  $w \propto v$ ,  $w_n \propto v_n$ ,  $w_m \propto v_m$  ( $A_n \propto a_n$ ,  $A_m \propto a_m$ ). При этом равенства (I) и (II) перейдут в следующие:

$$v_n = g_n\varphi, \varphi \in \mathcal{L}_n; \quad v_m = g_m\psi, \psi \in \mathcal{L}_m; \quad (\text{Ia})$$

$$g_n\varphi = g_m\psi. \quad (\text{IIa})$$

\* Можно также исключить два или более условий.

Здесь  $g_n, g_m$  — операторы, в которые переходят  $G_n, G_m$  в дальней зоне. Выражение для поля  $v$  в дальней зоне значительно проще и в то же время оно однозначно определяет  $w$  во всем пространстве за исключением некоторой области, содержащей источники.

Равенство (II) или (IIa) может быть использовано для нахождения  $\phi$  и  $\psi$ , после чего искомое решение определяется выражениями

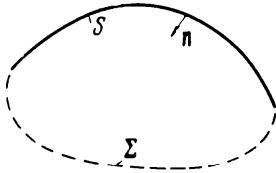


Рис. 1

$$w = G_n \phi = G_m \psi; \quad v = g_n \phi = g_m \psi. \quad (III)$$

В зависимости от характера задачи уравнения (II) и (IIa) могут быть различного типа и сложности и решаться различными приемами. Однако можно указать общий метод решения, базирующийся на том, что  $w$  ( $v$ ) является единственной общей точкой двух множеств  $A_n$  и  $A_m$  ( $a_n$  и  $a_m$ ).

Вводя некоторое метрическое пространство  $M$ , содержащее оба эти множества, легко построить \* итерационный процесс, приводящий к искомому решению. Для этого, взяв произвольный элемент  $w_n^0 \in A_n$ , находим ближайший к нему элемент  $w_m^{(1)} \in A_m$ , затем найдем ближайший к последнему элемент  $w_n^{(2)} \in A_n$  и т. д. Если этот процесс сходится, то

$$w = \lim_{v \rightarrow \infty} w_n^{(2v)} = \lim_{v \rightarrow \infty} w_m^{(2v+1)}, \quad (IV)$$

аналогично находится  $v$ .

Проиллюстрируем эти общие рассуждения конкретными примерами.

2. Дифракция электромагнитной волны на металлическом экране. Пусть на металлический идеально проводящий экран  $S$  (рис. 1) падает первичная волна  $E^0, H^0$ , вторичное — дифрагированное — поле обозначим через  $E, H$ . Оно однозначно определяется следующими условиями: 1)  $E, H$  — поле, создаваемое токами, распределенными на  $S$ ; 2)  $E, H$  — поле, не имеющее источников вне поверхности  $S + \Sigma$  и удовлетворяющее на внешней стороне  $S$  равенству  $[n(E + E^0)] = 0$ . Здесь  $\Sigma$  — поверхность, дополняющая  $S$  до замкнутой (рис. 1), в частности, она может замыкаться на бесконечности, а  $n$  — нормаль к  $S + \Sigma$ . В данном случае  $N = 2$ . Множество  $A_1$  состоит из всех полей, удовлетворяющих условию 2, а  $A_2$  — из полей, удовлетворяющих условию 1. В качестве  $M$  удобно рассматривать линейное пространство, элементами которого являются электромагнитные поля  $w = \{E, H\}$ , источники которых находятся внутри поверхности  $S + \Sigma$  или на ней. Введем в  $M$  норму

$$\|w\| = \left( \operatorname{Re} \int_{S_0} [EH^*] ds \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь  $S_0$  — произвольная поверхность, охватывающая  $S + \Sigma$ .

Тогда  $\|w_1 - w_2\|$  — расстояние между элементами  $w_1$  и  $w_2$  пространства  $M$ .

Произведем дальнейшую конкретизацию задачи. Будем считать экран  $S$  частью бесконечного вдоль образующей  $z$  цилиндра. Если поле  $E^0, H^0$  не зависит от координаты  $z$ , а вектор  $E^0$  поляризован параллельно оси  $z$ , то задача сводится к плоской скалярной задаче с граничными условиями Дирихле на  $S$ , причем под  $S$  следует понимать теперь дугу, образующуюся при пересечении экрана плоскостью  $z = \text{const}$ . Исходные соотношения при этом таковы:

$$E = E_z; \quad (\nabla^2 + k^2)E = 0; \quad E = -E^0 \text{ на } S. \quad (2)$$

Для  $E$  должны также выполняться условия излучения и условия Майксона на краях экрана. Так как задача формулируется (см. (2)) только при помощи составляющей  $E_z = E$ , в дальнейшем удобно полагать  $w \equiv E$ , сохраняя для  $\|w\|$  формулу (1).

\* Аналогичный процесс применяется в работе (1), где находятся ближайшие элементы двух непересекающихся множеств.

$$w_1 = \int_S E^0 \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad (3)$$

$$w_2 = \int_S \psi H_0^{(2)}(kr) ds, \quad (4)$$

где  $G$  — функция Грина уравнения Гельмгольца для области  $V_e$ , внешней к  $S + \Sigma$ , обращающаяся в нуль на  $S + \Sigma$ ; формула (3) справедлива только для  $V_e$ ;  $r$  — расстояние между точками интегрирования и наблюдения;  $\varphi$  и  $\psi$  произвольные \* функции, имеющие следующий физический смысл:  $\varphi$  — значение  $E$  на  $\Sigma$ , а  $\psi$  — ток \*\* на  $S$ ;  $ds$  — элемент дуги. Уравнение (II) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\int_S \psi H_0^{(2)}(kr) ds + \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_S E^0 \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (5)$$

и должно выполняться для любой точки  $V_e$ .

Проверим эффективность предлагаемого метода на простом примере, когда  $S$  — отрезок прямой  $b_- \leq x \leq b_+$  (лента), а  $\Sigma$  дополняет его до всей оси  $x$ ;  $V_e$  — полуплоскость. Функция Грина при этом имеет вид

$$G(p, q) = \frac{1}{4i} \{H_0^{(2)}(kr_{pq}) - H_0^{(2)}(kr_{pq*})\}, \quad (6)$$

где  $q$  и  $q^*$  — точки, зеркальные относительно оси  $x$ , а  $r_{pq}$  ( $r_{pq*}$ ) — расстояние между точками  $p$  и  $q$  ( $p$  и  $q^*$ ). Равенство (5) теперь запишется так:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \varphi(p) H_1^{(2)}(kr_{pq}) \sin \alpha dx_p - \frac{2i}{k} \int_S \psi(p) H_0^{(2)}(kr_{pq}) dx_p = \\ = \int_S E^0(p) H_1^{(2)}(kr_{pq}) \sin \alpha dx_p, \quad (q \in V_e), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha$  — угол между  $r_{pq}$  и осью  $x$ . Помещая точку наблюдения  $q$  в дальнюю зону и заменяя  $H_0^{(2)}$ ,  $H_1^{(2)}$ ,  $r_{pq}$  и  $\alpha$  их асимптотическими выражениями, получим вместо (7) уравнение типа (IIa)

$$\sin \beta \int_{\Sigma} \varphi(x) e^{ikx \cos \beta} dx - \frac{2}{k} \int_S \psi(x) e^{ikx \cos \beta} dx = \sin \beta \int_S E^0(x) e^{ikx \cos \beta} dx. \quad (8)$$

Здесь  $\beta$  — угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку наблюдения, и осью  $x$ . Вводя аналитические функции

$$F(u) = 2 \int_{b_-}^{b_+} \psi(x) e^{iux} dx; \quad f(u) = \int_{b_-}^{b_+} E^0(x) e^{iux} dx, \quad (9)$$

$$\Phi_+(u) = \int_{b_+}^{\infty} \varphi(x) e^{iux} dx, \quad \text{Im } u \geq 0; \quad \Phi_-(u) = \int_{-\infty}^{b_-} \varphi(x) e^{iux} dx, \quad \text{Im } u \leq 0,$$

где  $F$  и  $f$  — целые при  $|b_+| < \infty$  и  $|b_-| < \infty$ , а  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  голоморфны в соответствующих полуплоскостях, сведем (8) (используя обозначение  $u = k \cos \beta$ ) к функциональному уравнению

$$-F(u) + \sqrt{k^2 - u^2} (\Phi_+(u) + \Phi_-(u)) = \sqrt{k^2 - u^2} f(u). \quad (10)$$

Вследствие аналитичности всех входящих в (10) выражений оно должно выполняться на всей плоскости  $u$ . Это уравнение можно точно решить, например, для случая, когда  $b_- = 0$ ,  $b_+ = \infty$  (полуплоскость). Действительно, при этом  $\Phi_+(u) = 0$ , а  $F(u) = F_+(u)$  и  $f(u) = f_+(u)$ , т. е. оказываются голоморфными только в верхней полуплоскости. Равенство (10)

\* Они должны быть достаточно гладкими, причем  $\psi$  может иметь особенность на концах дуги  $S$ , допускаемую условиями Майкснера.

\*\*  $\psi$  отличается от тока постоянным множителем.

$$-F_+(u) + \sqrt{k^2 - u^2} \Phi_-(u) = \sqrt{k^2 - u^2} f(u). \quad (11)$$

Это уравнение элементарно решается по известному методу <sup>(2)</sup>. Полагая временно  $\text{Im } k < 0$ , получим

$$\Phi_-(u) = \frac{i}{2\pi \sqrt{k+u}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sqrt{k+t}}{t-u} dt, \quad \text{Im } u < 0. \quad (12)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, следует задать поле  $E^0$ . Если  $E^0 = \exp[-ikR \cos(\beta - \beta_0)]$  — плоская волна и  $\cos \beta_0 > 0$ , то (см. (9))

$$f(t) = i(t - k \cos \beta_0)^{-1}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение в (12), получим

$$\Phi_-(u) = 1/i(k_1 - u) + i \sqrt{k+k_1}/\sqrt{k+u}(k_1 - u); \quad k_1 = k \cos \beta_0. \quad (14)$$

Зная  $\Phi_-$  и  $f$ , найдем при помощи (11) диаграмму направленности  $F_+(u)$  ( $u = k \cos \beta$ )  $F \equiv F_+ = (2i \sin \beta / 2 \cos \beta_0 / 2) / (\cos \beta_0 - \cos \beta)$ .

Она соответствует цилиндрической волне, исходящей из края полуплоскости. Для получения тока  $\psi(x)$  достаточно взять преобразование Фурье от  $F(u)$ . В случае конечной ленты ( $b = b_+ = -b_-$ ) уравнение (10) можно решить, используя указанный выше итерационный процесс. Несколько обобщая его, введем две нормы \*

$$\|v\|_1 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |v(u) - v(0) - c_+(e^{ibu} - 1) - c_-(e^{-ibu} - 1)|^2 \frac{du}{u^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|v\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{v(u)}{\sqrt{k^2 - u^2}} \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

где

$$c_+ = \mathcal{F}_{b-0} \frac{v(u) - v(0)}{iu}; \quad c_- = \mathcal{F}_{-b+0} \frac{v(u) - v(0)}{-iu}; \quad \mathcal{F}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-iux}.$$

Первой из них будем пользоваться для определения  $v_2 \in a_2$ , ближайшего к заданному  $v_1$ , а второй для нахождения  $v_1 \in a_1$ , ближайшего к заданному  $v_2$ . Элементами  $a_2$  и  $a_1$  являются теперь функции (см. (9))

$$v_2 = F(u), \quad v_1 = \sqrt{k^2 - u^2} \{\Phi_+(u) + \Phi_-(u) - f(u)\}. \quad (16)$$

Итерационный процесс определяется условиями

$$\|v_2^{(2v)} - v_1^{(2v-1)}\|_1 = \min; \quad \|v_1^{(2v+1)} - v_2^{(2v)}\|_2 = \min.$$

Отсюда следуют, учитывая (15), (16), (9), рекуррентные формулы

$$v_2^{(2v)}(u) = v_2^{(2v)}(0) + u \int_{-b}^b e^{iux} \mathcal{F}_x \{ [v_1^{(2v-1)}(\xi) - v_1^{(2v-1)}(0)] \xi^{-1} \} dx -$$

$$- c_+^{(2v-1)}(e^{ibu} - 1) - c_-^{(2v-1)}(e^{-ibu} - 1),$$

$$v_1^{(2v+1)}(u) = \sqrt{k^2 - u^2} \left[ \left( \int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{\infty} \right) e^{iux} \mathcal{F}_x \left\{ \frac{v_2^{(2v)}(\xi)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \right\} dx - f(u) \right].$$

Здесь  $\mathcal{F}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i\xi x}$ ;  $v_2^{(2v)}(0)$  находится из условия  $v_2^{(2v)}(u) \rightarrow 0$

при  $u \rightarrow \pm \infty$  вдоль действительной оси.

Поступило  
3 XII 1969

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Д. Е. Ва к м а н, Регулярный метод синтеза ФМ сигналов, М., 1967. <sup>2</sup> Н. И. М у с х е л и ш в и л и, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.

\*  $[v(u) - v(0)] u^{-1} \in L_2[-\infty, \infty]$ ,  $\text{Im } k < 0$ .

УДК 621.396.673.061

## СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН С АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ТОКАМИ

*Я. Н. Фельд, Г. А. Свистунов*

Рассматривается теория синтеза линейной антенны с суммируемым током  $J (J \in L_1)$ . Приводятся необходимые и достаточные условия реализуемости диаграммы направленности линейной антенны с током из  $L_1$ . Рассматривается задача аппроксимации заданной нереализуемой диаграммы реализуемой и нахождения искомого тока из  $L_1$ . Вводится коэффициент сверхнаправленности для характеристики реактивных свойств таких антенн. Приводится пример нахождения линейного тока  $J \in L_1 (J \notin L_2)$  по заданной диаграмме.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1, 2, 3], задача синтеза токов  $J(x)$  линейной антенны по заданной диаграмме направленности  $* F(u)$  сводится к решению интегрального уравнения первого рода:

$$(1) \quad F(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} J(x) e^{iux} dx,$$

где  $\sigma = kl = (2\pi/\lambda)l$ ;  $u = \sin \theta$ ;  $2l$  — длина антенны;  $\theta$  — угол, отсчитываемый от нормали к антенне.

Обычная теория синтеза линейных антенн опирается на известную теорему Винера — Пэли, которая требует, чтобы  $J(x) \in L_2[-\sigma, \sigma]$ . Предположение о конечности  $\|J\|_{L_2} = \int_{-\sigma}^{\sigma} |J(x)|^2 dx$  естественно, поскольку такой

интеграл пропорционален мощности потерь в антенне. Поэтому для большинства антенн это требование выполняется. Однако в некоторых случаях оно несправедливо \*\*.

Приведем примеры излучающих систем с неограниченной нормой тока  $\|J\|_{L_2}$ . При возбуждении идеально проводящих экранов с кромками (щелями) поверхностные токи, поляризованные параллельно кромкам, имеют вблизи последних особенность вида [4]

$$(2) \quad J(x) = O(1/x^{1/2}),$$

где  $x$  — расстояние, отсчитываемое от кромки. Очевидно, что функция распределения тока  $J(x)$  с особенностью (2) лишь абсолютно интегрируема, но не интегрируема с квадратом, т. е.

$$(3) \quad J(x) \in L_1[a, b], \quad \text{но} \quad J(x) \notin L_2[a, b],$$

где  $[a, b]$  — область, занимаемая экраном.

\* Точнее, здесь и ниже  $F(u)$  — отношение диаграммы антенны к диаграмме элементарного излучателя.

\*\* Заметим, что здесь под линейной антенной понимается любая система, синтез которой сводится к уравнению типа (1).

Рассмотрим второй пример. При синтезе азимутального кольцевого тока  $I(\alpha)$  по заданной «вертикальной» диаграмме направленности  $F(u)$ , (т. е. в плоскости  $\varphi = \text{const}$ , где  $\varphi$  — азимутальная координата, измеряемая в плоскости кольца) последняя определяется формулой

$$(4) \quad F(u) = \int_{-\pi}^{\pi} I(\alpha) \cos \alpha e^{iu \cos \alpha} d\alpha,$$

где  $u = ka \sin \theta$ ;  $k = 2\pi / \lambda$ ;  $a$  — радиус кольца;  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси кольца;

$$\varphi = 0, \quad I(\alpha) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Формулу (4) заменой  $x = \cos \alpha$  легко преобразовать к виду (1), где  $\sigma = 1$  и

$$J(x) = 4xI_r(\arccos x) / \sqrt{1-x^2}$$

( $I_r(\alpha)$  — четная часть функции  $I(\alpha)$ ). Из условия  $I_r(\alpha) \in L_2[0, \pi]$  вытекает, что

$$\int_{-1}^1 \frac{|I_r(\arccos x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty,$$

откуда следует, что  $J(x) \in L_1[-1, 1]$ . Однако, как легко видеть, не для любых  $I(\alpha) \in L_2[-\pi, \pi]$  справедливо условие  $J(x) \in L_2[-1, 1]$ . Таким образом, задача синтеза криволинейной антенны по заданной диаграмме сводится к решению уравнения (1), в котором распределение «тока»  $J(x)$  в общем случае не включено в  $L_2$ .

Вследствие сказанного возникает необходимость рассмотреть задачи синтеза линейных антенн, в которых токи абсолютно интегрируемы, но могут быть не интегрируемы с квадратом.

#### 1. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ КЛАССУ $L_1$

1. Рассмотрим задачу определения тока  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ , удовлетворяющего уравнению (1). Прежде всего определим для такой постановки задачи класс реализуемых диаграмм направленности, т. е. функций  $F(u)$ , для которых существует ток  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ , удовлетворяющий уравнению (1).

Из (1) следует [7], что  $F(u) \in B_\sigma$  (класс целых функций конечной степени  $\leq \sigma$ , ограниченных на действительной оси). Из условия  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$  и теоремы Римана — Лебега вытекает, что  $F(u) \rightarrow 0$  при  $|u| \rightarrow \infty$  вдоль действительной оси. Скорость убывания  $F(u)$  зависит от дифференциальных свойств тока  $J(x)$ . Например [5], для интересного в физическом плане вида тока

$$(5) \quad J(x) = \varphi(x) / (x-c)^\mu,$$

где  $\varphi(x)$  — функция ограниченной вариации,

$$0 < \mu < 1, \quad c \in [-\sigma, \sigma],$$

диаграмма направленности ведет себя при  $u \rightarrow \pm \infty$  так:

$$(6) \quad F(u) = O(1/|u|^{1-\mu}).$$

Вообще же для произвольного тока  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$  скорость убывания правой части (1) до нуля при  $u \rightarrow \pm \infty$  может быть сколь угодно малой (например, логарифмической).

Известно [7], что любая функция  $F(u) \in B_\sigma$  может быть представлена в виде

$$(7) \quad F(u) = F(0) + u \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi(x) e^{iux} dx,$$

где

$$\psi(x) \in L_2[-\sigma, \sigma].$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Для представимости  $F(u) \in B_\sigma$  в виде (1), где  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\psi(x)$  в формуле (7) удовлетворяла следующим условиям:

а)  $\psi(x)$  — функция ограниченной вариации, непрерывна на  $[-\sigma, \sigma]$  всюду, кроме точки  $x=0$ , где она может иметь скачок

$$(8) \quad \psi(+0) - \psi(-0) = iF(0) \equiv i \int_{-\sigma}^{\sigma} J(x) dx,$$

$$(9) \quad \text{б) } \frac{d\psi}{dx} \in L_1[-\sigma, \sigma],$$

$$\text{в) } \psi(\sigma) = \psi(-\sigma) = 0.$$

При выполнении этих условий

$$(10) \quad J(x) = i \frac{d\psi}{dx}.$$

Докажем сначала необходимость условий а), б), в). Пусть  $F(u) \in B_\sigma$  представима в виде (1), где  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ . При этом справедлива формула (7). Тогда из (1) и (7) следует, что

$$\hat{F}(u) \equiv \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi(x) e^{iux} dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} J(x) \frac{e^{iux} - 1}{u} dx.$$

Так как  $\hat{F}(u) \in W_\sigma$  (класс целых функций конечной степени  $\leq \sigma$ , интегрируемых с квадратом на всей оси), то справедливо выражение

$$(11) \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\sigma}^{\sigma} J(x) \frac{e^{iux} - 1}{u} dx \right] e^{-iux} du,$$

где сходимость внешнего интеграла понимается, вообще говоря, в среднеквадратичном смысле.

Благодаря абсолютной интегрируемости функции  $J(x) [(e^{iux} - 1) / u]$  в формуле (11) законна перестановка порядка интегрирования:

$$(12) \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} J(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut} - 1}{u} e^{-iux} du \right] dt.$$

Внутренний интеграл в (12) легко вычисляется и равен

$$(13) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut} - 1}{u} e^{-iux} du = \begin{cases} 0 & \text{для } t < x \text{ или } x < 0; t > 0; \\ i & \text{для } t \geq x \geq 0; \\ 0 & \text{для } t > x \text{ или } x > 0; t < 0; \\ -i & \text{для } t \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$$(14) \quad \psi(x) = \begin{cases} i \int_x^\sigma J(t) dt & \text{для } 0 \leq x \leq \sigma, \\ -i \int_{-\sigma}^x J(t) dt & \text{для } -\sigma \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Так как по условию  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ , то по теореме Лебега [8] интегралы в (14) представляют собой непрерывные функции ограниченной вариации и имеют почти всюду производные, равные  $\mp J(x)$ . Таким образом, из (14) следует, что почти всюду справедливо выражение (10) и, следовательно,  $(d\psi/dx) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ . При  $x=0$  функция  $\psi(x)$ , определяемая формулой (14), имеет скачок (8). Наконец, при  $x = \pm\sigma$  из (14) вытекает условие (9), чем и закончено доказательство необходимости условий теоремы 1.

**Достаточность.** Пусть теперь выполнены условия а), б) и в). Так как  $F(u) \in B_\sigma$ , то справедлива формула (7). Условия а), б) и в) теоремы позволяют взять интеграл в правой части формулы (7) по частям. В результате справедливо равенство

$$(15) \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi(x) e^{iux} dx = -\frac{F(0)}{u} + \frac{i}{u} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{d\psi}{dx} e^{iux} dx.$$

Подставляя затем (15) в (7), имеем

$$F(u) = i \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{d\psi}{dx} e^{iux} dx,$$

т. е.  $F(u)$  представима в виде (1), где  $J(x)$  определяется формулой (10). Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 1 может быть сформулирована несколько иначе, а именно, справедлива

**Т е о р е м а 2.** Условия  $F(u) \in B_\sigma$  и а), б) и в) теоремы 1 для функции

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - F(0)}{u} e^{-iux} du$$

(сходимость интеграла понимается в среднеквадратичном смысле) являются необходимыми и достаточными для принадлежности заданной функции  $F(u)$  классу реализуемых диаграмм направленности линейной антенны с током  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ .

Таким образом, теорема 1 или 2 полностью определяет класс реализуемых диаграмм линейной антенны с суммируемым током.

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ С ТОКОМ ИЗ $L_1$

Приведем теперь некоторые методы нахождения токов  $J(x) \in L_1$  линейной антенны по заданной диаграмме направленности. Если диаграмма  $F(u)$  реализуема, то искомый ток, как это следует из теоремы 1, может быть найден по формуле

$$(16) \quad J(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - F(0)}{u} e^{-iux} du.$$



Существуют, однако, подклассы функций  $F(u) \in B_\sigma$ , для которых ток  $J(x)$  находится путем обычного преобразования Фурье заданной диаграммы (сходимость интеграла понимается в обычном смысле).

Перечислим эти подклассы, опираясь на теоремы из [5, 6].

1) Подкласс функций  $F(u)$ , монотонно убывающих до нуля на интервалах  $(a, \infty)$  и  $(-a, -\infty)$ , где  $a > 0$  — достаточно большое число (либо  $F(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \pm\infty$  и имеет абсолютно интегрируемую производную на интервале  $(-\infty, \infty)$ ).

2) Подкласс функций вида  $F(u) = g(u) \sin(pu + q)$ , где  $p$  и  $q$  — постоянные, а  $g(u)$  монотонно убывает до нуля при  $u \rightarrow \pm\infty$  (либо  $g(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \pm\infty$  и имеет абсолютно интегрируемую производную на  $(-\infty, \infty)$ ).

3) Подкласс функций вида  $F(u) = g(u)h(u)$ , где  $g(u)$  удовлетворяет условию пункта 2), а  $h(u)$  — асимптотически (начиная с достаточно большого  $u_0$ ) периодическая целая функция конечной степени, интегрируемая на каждом конечном интервале.

**Справедлива следующая**

**Теорема 3** Если  $F(u) \in B_\sigma$  и принадлежит одному из введенных выше подклассов 1), 2), 3), то  $F(u)$  представима в виде (1), где  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$  (и, следовательно,  $F(u)$  принадлежит классу реализуемых диаграмм направленности линейной антенны с токами из  $L_1$ ).

**Доказательство.** Функция  $F(u) \in B_\sigma$ , принадлежащая одному из подклассов 1), 2), 3), на основании теорем из [5, 6] имеет почти всюду преобразование Фурье

$$(17) \quad J(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-iux} du.$$

В возможных сингулярных точках  $x$  интеграл (17) понимается в смысле главного значения. На интервалах, не содержащих сингулярные точки, интеграл сходится равномерно по  $x$ . Докажем, что  $J(x)$ , определяемая формулой (17), удовлетворяет уравнению (1). Для этого построим функцию

$$(18) \quad F_1(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} J(x) e^{iux} dx.$$

Подставив (17) в (18) и изменив порядок интегрирования (что возможно благодаря равномерной сходимости интеграла (17) почти всюду), получим

$$(19) \quad F_1(u) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \frac{\sin(u-v)\sigma}{(u-v)\sigma} dv.$$

Известно [2, 3], что при заданной  $F(v) \in B_\sigma$  интеграл (19) равномерно сходится по переменной  $u$  и определяет ее же, т. е.  $F_1(u) \equiv F(u)$ . Следовательно,  $F(u)$  представима в виде (1), где ток определяется формулой (17). Заметим, что для  $F(u) = O(1/|u|^{(1-\mu)})$  при  $u \rightarrow \pm\infty$ ,  $1/2 \leq \mu < 1$ , ток  $J(x)$  удовлетворяет условию (3).

Таким образом, для введенных выше подклассов диаграмм направленности  $F(u)$  теорема 3 дает прямое решение вида (17) для тока  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$ . Часто, однако, бывает трудно вычислить интегралы в формулах (16), (17). В этих случаях для вычисления тока  $J(x)$  можно воспользоваться, например, методом парциальных диаграмм [1, 2]. Известно [3],

что любая  $F(u) \in B_\sigma$  может быть разложена в равномерно сходящийся ряд

$$(20) \quad F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{\sigma_1}\right) \frac{\sin \sigma_1 \left(u - \frac{n\pi}{\sigma_1}\right)}{\sigma_1 \left(u - \frac{n\pi}{\sigma_1}\right)},$$

где  $\sigma_1 = \sigma + \varepsilon$  и  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малое число. Если  $F(u)$  — реализуемая диаграмма направленности, то, подставляя (20) в формулу (16), получаем выражение для тока  $J(x)$ :

$$(21) \quad J(x) = \frac{i}{2\sigma_1} \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\pi/\sigma_1) - F(0)}{n\pi/\sigma_1} \exp\left\{-i \frac{n\pi}{\sigma_1} x\right\} \right\},$$

где ряд сходится в смысле метрики  $L_2$ . Если  $F(u)$  принадлежит одному из подклассов 1), 2), 3), то из (17) и (20) следует почти всюду

$$(22) \quad J(x) = \frac{1}{2\sigma_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{\sigma_1}\right) \exp\left\{-i \frac{n\pi}{\sigma_1} x\right\}.$$

Рассмотрим теперь случай нереализуемых заданных диаграмм направленности  $\tilde{F}(u)$ . Пусть  $\tilde{F}(u)$  — непрерывная функция, определенная на конечном интервале. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать такие числа  $a_n$  и  $N(\varepsilon)$ , что справедливо неравенство [3, 9]

$$(23) \quad \left| \tilde{F}(u) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_n J_n(u) \right| \leq |\tilde{F}(u) - F(u)| + \left| F(u) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_n J_n(u) \right| < \varepsilon,$$

где  $N(\varepsilon) < \infty$ ,  $F(u)$  — целая функция;  $J_n(u)$  — функция Бесселя. Функции  $J_n(\sigma u) \in B_\sigma$  принадлежат подклассу 2) и имеют представление [10]

$$(24) \quad J_n(\sigma u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{(-i)^n T_n(x/\sigma)}{\pi \sqrt{\sigma^2 - x^2}} e^{iux} dx,$$

где  $T_n$  — полиномы Чебышева первого рода. Таким образом, аппроксимирующей диаграмме направленности  $F_N(u) = \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_n J_n(\sigma u)$  соответствует

ток вида\*

$$(25) \quad J(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_n (-i)^n \frac{T_n(x/\sigma)}{\sqrt{\sigma^2 - x^2}}.$$

Очевидно, что ток (25) имеет на концах антенны  $x = \pm\sigma$  особенность вида  $\rho^{-1/2}$  ( $\rho = |x \pm \sigma|$ ). Может быть проведено такое обобщение метода синтеза по заданной нереализуемой диаграмме, при котором искомые токи будут иметь на концах антенны заданную интегрируемую особенность, разрешаемую условиями (3).

\* Впервые такое выражение для тока получено Тартаковским в [9]. Однако в этой работе рассмотрена теория синтеза линейных антенн с токами из  $L_2$ , в рамках которой диаграммы направленности вида (24) нереализуемы.

Действительно, аналитическая функция  $F(u)$  в формуле (23) может быть с любой степенью точности аппроксимирована следующим агрегатом [10]:

$$(26) \quad F_N(u) = \sum_{n=0}^N a_n J_{\nu+n}(\sigma u) (u\sigma)^{-\nu},$$

где

$$a = (1/2\pi i) \oint_C F(t) A_{n,\nu}(\sigma t) dt;$$

$C$  — замкнутый контур, охватывающий точку  $t = 0$ ;

$$A_{n,\nu}(t) = \frac{2^{\nu+n}(\nu+n)}{t^{n+1}} \sum_{m=0}^{\leq n/2} \frac{\Gamma(\nu+n-m)}{m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

— полиномы Гегенбауэра  $\nu \neq 0, -1, -2, \dots$ . Очевидно, что при  $-1/2 < \nu < 0$  функция

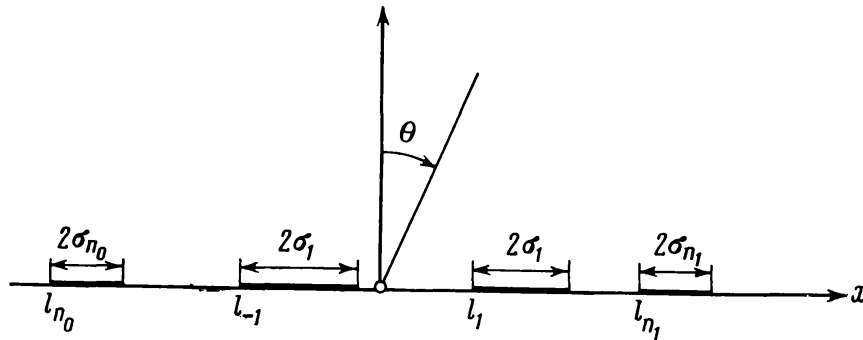


Рис. 1. ( $x, \sigma_n, l_n$  — приведенные координаты)

$F_N(u) \in B_\sigma$  и описывает реализуемую диаграмму направленности линейной антенны с током из  $L_1$  (см. теорему 3).

Используя теперь формулу [11]

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} C_n^\nu(x) e^{iux} dx = \frac{\pi 2^{1-\nu} \Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} i^n a^{-\nu} J_{\nu+n}(a),$$

где  $C_n^\nu(x)$  — коэффициенты в разложении функции  $(1-2ax+a^2)^{-\nu}$  в степенной ряд по  $a$ ,

$$C_n^\nu(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(2\nu+n) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{2^n \Gamma(2\nu) \Gamma\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \frac{(1-x^2)^{1/2-\nu}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+\nu-1/2}],$$

получаем для искомого тока  $J(x)$  (обеспечивающего диаграмму направленности  $F_N(u)$  вида (26)) выражение

$$(27) \quad J(x) = \sum_{n=0}^N \frac{n! \Gamma(\nu) i^{-n} a_n}{\pi \sigma^{-2(1-\nu)} 2^{1-\nu} \Gamma(2\nu+n)} \frac{C_n^\nu(x/\sigma)}{(\sigma^2 - x^2)^{1/2-\nu}}$$

Из (27) следует, что при  $-1/2 < \nu < 0$  ток  $J(x)$  удовлетворяет условию (3). Таким образом, описанный метод позволяет по заданной непрерывной функции  $\tilde{F}(u)$  находить ток  $J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma]$  с заданной особенностью на концах антенны, реализующий диаграмму, аппроксимирующую заданную с любой точностью.

### 3. СИНТЕЗ РЕШЕТКИ ЛИНЕЙНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ С ТОКАМИ ИЗ $L_1$

Сформулированные выше теоремы 1 и 2 позволяют также установить необходимые и достаточные условия реализуемости заданных диаграмм направленности для решетки из  $N$  линейных излучателей с токами из  $L_1$ , расположенных вдоль некоторой оси (рис. 1).

Диаграмму направленности такой решетки можно записать в виде

$$(28) \quad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x) e^{iux} dx, \quad J(x) \in L_1[-\sigma, \sigma].$$

Здесь  $J(x)$  — финитная функция, отличная от нуля только в пределах отдельных излучателей. Учитывая это, формулу (28) можно переписать в виде

$$(29) \quad F(u) = \sum_{n=n_0}^{n_1} e^{iu(l_n + \sigma_n)} F_n(u); \quad n_1 - n_0 + 1 = N \quad (n_1 > n_0),$$

где

$$F_n(u) = \int_{-\sigma_n}^{\sigma_n} J_n(\zeta) e^{iu\zeta} d\zeta, \quad J_n(\zeta) = J(\zeta + l_n + \sigma_n), \quad u = \sin \theta,$$

$l_n$  — координата левого конца  $n$ -го излучателя (рис. 1),  $2\sigma_n$  — длина  $n$ -го излучателя. Очевидно, что  $F_n(u) \in B_{\sigma_n}$ ,  $F(u) \in B_{\sigma}$ , а  $\sigma = \max\{|l_{n_0}|, |l_{n_1} + 2\sigma_{n_1}|\}$ .

Имеет место

**Теорема 4.** Для принадлежности заданной диаграммы направленности  $F(u)$  классу реализуемых диаграмм конечной решетки линейных излучателей, расположенных вдоль некоторой оси, с токами из  $L_1$ , необходимо и достаточно выполнения следующих условий.

А.  $F(u) \in B_{\sigma}$  и представима формулой

$$F(u) = \sum_{n=n_0}^{n_1} F_n(u) e^{iu(l_n + \sigma_n)},$$

в которой

$$F_n(u) \in B_{\sigma_n}; \quad \sum_{n_0}^{n_1} \sigma_n \leq \sigma; \quad n_1 - n_0 + 1 < \infty; \quad \max\{|l_{n_0}|, |l_{n_1} + 2\sigma_{n_1}|\} \leq \sigma.$$

Б. Функции

$$\psi_n(\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(u) - F_n(0)}{u} e^{-iu\zeta} du, \quad n_0 \leq n \leq n_1$$

(сходимость интегралов понимается в смысле метрики  $L_2$ ) на соответствующих отрезках  $[-\sigma_n, \sigma_n]$  подчиняются условиям а), б), в) теоремы 1.

При выполнении условий А и Б для заданной диаграммы  $F(u)$  искомым ток на  $n$ -м излучателе равен

$$(30) \quad J(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(u) - F_n(0)}{u} e^{-iu(x-l_n-\sigma_n)} du$$

для  $x \in [l_n, l_n + 2\sigma_n]$ .

Так как правая часть (30) обращается в нуль вне отрезка  $[l_n, l_n + 2\sigma_n]$ , то, суммируя ее по  $n$ , найдем искомое решение уравнения (28):

$$(31) \quad J(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - \sum_{n_0}^{n_1} F_n(0) e^{iu(l_n+\sigma_n)}}{u} e^{-iux} du; \quad -\infty < x < \infty.$$

Если каждая из  $F_n(u)$  в условии А теоремы 4 принадлежит одному из подклассов 1), 2), 3), введенных в § 2, то решение (30) переходит в

$$(32) \quad J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(u) e^{-iu(x-l_n-\sigma_n)} du$$

для  $x \in [l_n, l_n + 2\sigma_n]$ .

**Пример.** Задана диаграмма направленности  $F(u) = \cos(\sigma u/2) J_0(\sigma u/2)$ , где  $J_0(\sigma u/2)$  — функция Бесселя. Очевидно,  $F(u) \in B_\sigma$ , представима в виде

$$F(u) = \frac{1}{2} \exp\left\{i \frac{\sigma u}{2}\right\} J_0\left(\frac{\sigma u}{2}\right) + \frac{1}{2} \exp\left\{-i \frac{\sigma u}{2}\right\} J_0\left(\frac{\sigma u}{2}\right)$$

и  $J_0(\sigma u/2) \in B_{\sigma/2}$ , принадлежит подклассу 2), т. е. выполнены все условия теоремы 4. Для искомого тока, используя (32), получим выражение

$$J(x) = 1/\pi \sqrt{|x|(\sigma - |x|)}$$

для  $0 \leq |x| \leq \sigma$ .

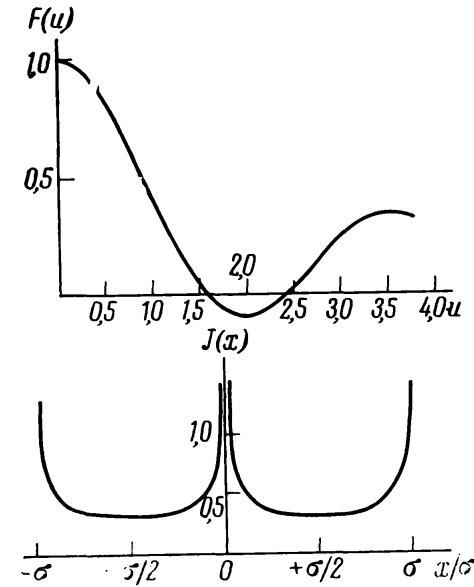


Рис. 2. Диаграмма направленности  $F(u) = \cos(\sigma u/2) J_0(\sigma u/2)$  и соответствующее ей распределение токов  $J(x) = 1/\pi \sqrt{|x|(\sigma - |x|)}$

На рис. 2 изображены заданная диаграмма  $F(u)$  и ток  $J(x)$ . Таким образом, искомая диаграмма направленности обеспечивается двумя соприкасающимися в точке  $x=0$  линейными излучателями длиной  $\sigma$  каждый с токами из  $L_1$ , имеющими особенности вида  $O(\rho^{-1/2})$  на концах. Очевидно, эту систему можно трактовать как один линейный вибратор длины  $2\sigma$  с током, имеющим особенности на концах и в середине.

#### 4. КОЭФФИЦИЕНТ СВЕРХНАПРАВЛЕННОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН С ТОКАМИ ИЗ $L_1$

Известно [1, 2, 3], что коэффициент сверхнаправленности для линейных антенн с токами из  $L_2$  определяется выражением

$$(33) \quad \gamma_{L_2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du}{\int_{-u_1}^{u_1} |F(u)|^2 du} \equiv \frac{2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} |J(x)|^2 dx}{\int_{-u_1}^{u_1} |F(u)|^2 du},$$

где  $[-u_1, u_1]$  — область, соответствующая действительным углам. Для антенн с токами из  $L_1$  формула (33) не имеет смысла, так как в этом случае, вообще говоря,  $\|J\|_{L_2} = \infty$ .

Поэтому введем для антенн с токами из  $L_1$  коэффициент сверхнаправленности  $\gamma_{L_1}$ , при помощи выражения

$$(34) \quad \gamma_{L_1} = \frac{\int_{|u|>1} \frac{|F(u)|^2}{\sqrt{u^2-1}} du - \pi \int_{-\sigma}^{\sigma} J^*(x) \int_{-\sigma}^{\sigma} J(y) N_0(|x-y|) dy dx}{\int_{-u_1}^{u_1} |F(u)|^2 du} \equiv \frac{\int_{-u_1}^{u_1} |F(u)|^2 du}{\int_{-u_1}^{u_1} |F(u)|^2 du},$$

Поскольку ток  $J(x) \in L_1$  связан с  $F(u)$  формулой (1), то введение коэффициента  $\gamma_{L_1}$  вместо  $\gamma_{L_2}$  позволяет сохранить информацию об осцилляциях тока  $J(x)$ , играющих основную роль в явлениях сверхнаправленности. С другой стороны очевидно, что сохраняется также и информация об особенностях, которые имеет ток.

Таким образом, коэффициент  $\gamma_{L_1}$ , так же, как и  $\gamma_{L_2}$ , позволяет контролировать запас «реактивной» энергии вблизи антенны, распределение лепестков диаграммы направленности в области «мнимых» углов, изрезанность тока и т. д.

Введение коэффициента  $\gamma_{L_1}$  (34) дает возможность ставить и решать задачи на экстремум параметров антенн с токами из  $L_1$ , характеризующих излучаемую мощность, кнд, среднеквадратичный уровень лепестков и т. д., так же, как это делается для токов из  $L_2$  при помощи коэффициента  $\gamma_{L_2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Л. Д. Бахрах, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 2, 187.
2. Е. Г. Зелкин, Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности, ГЭИ, 1963.
3. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, Физматгиз, 1962.
4. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, Изд. Мир, 1964.
5. С. Бохнер, Лекции об интеграле Фурье, Физматгиз, 1962.
6. Г. Титчмарш, Введение в теорию интеграла Фурье, ГТТИ, 1948.
7. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимаций, Изд. Наука, 1965.
8. Г. Е. Шолов, Математический анализ, Дополнительные главы, Изд. Наука, 1965.
9. Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 12, 1463.
10. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, 1949.
11. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, 1962.

Поступила в редакцию  
7 VIII 1970

УДК 534.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ДИФРАКЦИЯ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ НА НЕЗАМКНУТОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 II 1972)

Пусть первичное поле  $\psi^0(q)$  дифрагирует на незамкнутой поверхности (Ляпунова)  $s$ , краем которой служит гладкий контур  $L$ . Вторичное поле  $\psi(q)$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (1)$$

во всем пространстве вне  $\bar{s} = s + L$  и граничным условиям Дирихле \*

$$\psi^+ = \psi^- = -\psi^0 \quad \text{на } s. \quad (2)$$

Кроме того,  $\psi$  подчиняется условиям типа Майкснера <sup>(1)</sup> \*\* на контуре  $L$  и условиям излучения на бесконечности.

Как известно, эта задача имеет единственное решение.

Целью настоящей работы является доказательство существования и построение последнего, путем обобщения метода Энскогога.

Введем поверхностный «ток» на  $s$  при помощи выражения

$$w = \partial\psi^+ / \partial n - \partial\psi^- / \partial n. \quad (3)$$

Тогда поле  $\psi$  во всем пространстве определяется формулой <sup>(2)</sup>

$$\psi(q) = - \int_s w(p) f(p, q) dp, \quad (4)$$

где

$$f(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|}, \quad (5)$$

а  $dp$  — дифференциал площади поверхности  $s$  в точке  $p$ . Пусть  $L_R^2(s)$  — совокупность функций  $w(p)$ ,  $p \in s$ , для которых норма

$$\|w\| \equiv \left( \int_s |w(p)|^2 R(p) dp \right)^{1/2} < \infty. \quad (6)$$

Здесь  $R(p) > 0$  при  $p \in s$  — непрерывная на  $\bar{s}$  функция, которая выбирается так, чтобы  $w \in L_R^2(s)$  удовлетворяли требованиям, налагаемым на ток условием Майкснера. Таким образом,  $R(p)$  должна обращаться в нуль на контуре  $L$  как  $\rho^\alpha$ , где  $\rho$  — расстояние до  $L$ , а  $0 < \alpha < 1$ .  $L_R^2(s)$  становится гильбертовым сепарабельным пространством, если ввести скалярное про-

\* Индексами + и — обозначаются предельные значения величины при переходе на  $s$  со стороны, куда направлена нормаль  $n$ , и с противоположной соответственно.

\*\* На  $L$  должны отсутствовать источники (стоки) энергии; т. е. поток мощности через поверхность «цилиндра» радиуса  $\rho$ , охватывающего  $L$ , должен стремиться к нулю вместе с  $\rho$ .

$$(w, v) = \int_s w(p) \overline{v(p)} R(p) dp, \quad w, v \in L_R^2(s); \quad (7)$$

черта — знак комплексного сопряжения.

Покажем, что при любом  $w \in L_R^2(s)$ , величина  $\psi/R$ , где  $\psi$  определена формулой (4), также включена в  $L_R^2(s)$ . Для этого напомним очевидное неравенство

$$\iint_s |w^2(p) f(p, q)| \frac{R(p)}{R(q)} dg dp \leq \sup_{p \in s} \int_s \frac{|f(p, q)|}{R(q)} dq \cdot \|w\|^2.$$

Поскольку  $R(q)$  обращается в нуль на  $L$  так, что правая часть неравенства конечна, то существует и двойной интеграл, стоящий слева. Отсюда следует, на основании теоремы Фубини, существование (почти всюду) и суммируемость (как функции  $q$ ) интеграла

$$\int_s |w^2(p) f(p, q)| \frac{R(p)}{R(q)} dp \in L(s). \quad (8)$$

Теперь остается применить неравенство Коши — Буняковского к выражению

$$\frac{|\psi(q)|^2}{R(q)} \equiv \left| \int_s \frac{w(p)}{\sqrt{R(q)}} f(p, q) dp \right|^2 \leq \int_s |w^2(p) f(p, q)| \frac{R(p)}{R(q)} dp \int_s \frac{|f(p, q)|}{R(p)} dp.$$

Правая часть этого неравенства суммируема на  $s$ , так как первый ее множитель суммируем (см. (8)), а второй ограничен. Поэтому суммируема и левая часть  $|\psi|^2/R \in L(s)$ , а значит,  $\psi/R \in L_R^2(s)$ , и доказательство закончено.

Нам понадобится квадратичная лемма, которую легко получить, применив вторую теорему Грина к полям  $\psi$  и  $\psi_m$ , возбуждаемым токами  $w \in L_R^2(s)$  и  $w_m \in L_R^2(s)$ , распределенными на  $s$ . Она имеет, учитывая (3), вид\*

$$\int_s \psi_m(p) w(p) dp = \int_s \psi(p) w_m(p) dp. \quad (9)$$

Используя обозначение (7), ее можно записать как

$$(w, \bar{\psi}_m / R) = (w_m, \bar{\psi} / R). \quad (10)$$

Пусть  $w_m \in L_R^2(s)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , — полное относительно  $L_R^2(s)$  семейство функций. Понимая теперь в (10) под  $\psi$  и  $w$  поле и ток исходной задачи, а под  $\psi_m$  — поле, возбуждаемое только что введенным током  $w_m$ , перепишем ее, учитывая (2), в виде

$$(w, \bar{\psi}_m / R) = a_m, \quad a_m \equiv -(w_m, \bar{\psi}^0 / R); \quad (11)$$

здесь  $a_m$  — известные числа, а  $\psi_m$  определяется через  $w_m$  по формуле типа (4).

Покажем, что семейство  $\bar{\psi}_m / R$  полно относительно  $L_R^2(s)$ , т. е. для функции  $v \in L_R^2(s)$  из условий

$$(v, \bar{\psi}_m / R) = 0 \quad \text{при} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

следует  $v = 0$  (почти всюду) на  $s$ .

\* Поскольку  $\psi$  и  $\psi_m$  непрерывны при переходе через  $s$ , индексы  $\pm$  у них опущены.



$$\Phi(q) = - \int_s v(p) f(p, q) dp, \quad R^{-1}\Phi \in L_R^2(s), \quad (13)$$

и используя лемму типа (10), перепишем (12) как

$$(w_m, \bar{\Phi}/R) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Вследствие полноты  $w_m$  относительно  $L_R^2(s)$ , из (14) сразу следует, что  $\Phi = 0$  на  $s$  (почти всюду). Поскольку  $\Phi(q)$  — волновой потенциал простого слоя (см. (13)) с током  $v \in L_R^2(s)$ , то выполнены все условия теоремы единственности и из последнего равенства вытекает, что  $\Phi(q) = 0$  во всем пространстве. Так как  $v$  равно скачку  $\partial\Phi/\partial n$  при переходе через  $s$  (см. (3)), то из только что сказанного следует, что  $v = 0$  на  $s$  (почти всюду), и полнота доказана.

Ортонормируем теперь семейство  $\bar{\Psi}_m/R$ , т. е. построим функции

$$u_m = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} \frac{\bar{\Psi}_n}{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где постоянные  $a_n^{(m)}$  находятся из условий  $(u_m, u_n) = \delta_{mn}$  (см. (3)) и имеют вид

$$a_n^{(m)} = D_{mn}^{(m+1)} / \sqrt{D_m D_{m+1}};$$

здесь

$$D_0 = 1, \quad D_{m+1} = \begin{vmatrix} d_{00} & \dots & d_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m0} & \dots & d_{mm} \end{vmatrix}, \quad d_{mn} = \left( \frac{\bar{\Psi}_m}{R}, \frac{\bar{\Psi}_n}{R} \right).$$

$D_{in}^{(m+1)}$  — алгебраическое дополнение элемента  $d_{in}$  в определителе  $D_{m+1}$ .

Система  $u_m$  полна относительно  $L_R^2(s)$ , поскольку полна исходная система  $\bar{\Psi}_m/R$ . Найдем коэффициенты Фурье искомого тока  $w$  по функциям  $u_m$ . Для этого умножим равенство (11) на  $\bar{a}_m^{(n)}$  и просуммируем по  $m$  от нуля до  $n$ . Тогда, используя (15), получим

$$(w, u_n) = c_n, \quad c_n \equiv \sum_{m=0}^n \bar{a}_m^{(n)} a_m. \quad (16)$$

Таким образом,  $c_n$  — искомые коэффициенты Фурье.

Как известно, ряд Фурье по полной, ортонормальной системе функций сходится (по норме  $L_R^2(s)$ ) к функции из  $L_R^2(s)$ , для которой он составлен, поэтому

$$w(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(q), \quad q \in s. \quad (17)$$

Рассмотрим отрезок ряда

$$F_N(q) = - \sum_{n=0}^{N-1} c_n \int_s f(p, q) u_n(p) dp. \quad (18)$$

Учитывая (4) и неравенство Коши — Буняковского, найдем

$$|\psi(q) - F_N(q)| = \left| \left( w - \sum_{n=0}^N c_n u_n, \bar{f}/R \right) \right| \leq \left\| \frac{\bar{f}}{R} \right\| \cdot \left\| w - \sum_{n=0}^N c_n u_n \right\|; \quad (19)$$

Пусть  $Q$  произвольная область пространства, не пересекающаяся с  $\bar{s}$ . Тогда первый множитель правой части (19) ограничен в  $Q$ , а второй стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  вследствие сходимости (17) по норме, поэтому  $F_N \rightarrow \psi$  равномерно в  $Q$ . Следовательно,

$$\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n(q), \quad (20)$$

где

$$U_n(q) = - \int_{\bullet} f(p, q) u_n(p) dp.$$

Равномерно сходящийся в  $Q$  ряд (20) и дает решение поставленной задачи.

Вернемся к определению весовой функции  $R(q)$ . Она стоит в знаменателе выражения (15) для  $u_n$ . Для улучшения сходимости ряда (17) (а значит, и (20)) нужно, чтобы каждый член ряда имел ту же особенность на  $L$ , что и ток  $w$ . Для этого  $R(q)$  должна иметь на  $L$  нуль порядка  $\alpha = 0,5$  (<sup>1</sup>)

Все полученные здесь результаты справедливы и для случая, когда  $s$  состоит из нескольких отдельных поверхностей Ляпунова с суммарным контуром  $L$ .

Поступило  
16 II 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, 1964. <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 11, № 7 (1966). <sup>3</sup> Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, 1959.

**РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XVIII

Май 1973

Вып. 5

МОСКВА

УДК 621.372.8.09:539.574.6

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ***Я. Н. Фельд, Г. А. Свистунов, А. Г. Кюркчан,  
А. С. Леонтьев*

Задача дифракции плоской волны на конечной (и бесконечной) решетке плоскопараллельных волноводов конечной длины с фланцами в плоскостях входного и выходного раскрывов сводится к системе из двух интегральных уравнений, которые решаются двумя независимыми методами — методом специальной ортогонализации [7] и обобщенным методом магнитодвижущих сил (МДС) [6, 8, 10]. В среднем сечении волноводов расположены фазовые корректоры, изменяющие фазу распространяющейся волны. Приведены некоторые результаты численных расчетов (произведенных указанными методами) распределений полей в раскрывах волноводов, ксв в них, диаграммы направленности (в том числе с учетом сканирования за счет фазовых корректоров), кнд и коэффициента прохождения.

Задачи, связанные с дифракцией волн на структурах типа решеток, в настоящее время приобретают все больший интерес. Одним из примеров такого рода задач является задача дифракции электромагнитной волны на системе, состоящей из совокупности плоскопараллельных волноводов конечной длины, образующих дифракционную решетку.

В литературе, посвященной дифракции волн на волноводных решетках, рассматривались задачи, связанные с бесконечными решетками закрытого (волноводы полубесконечной длины) и проходного (волноводы конечной длины) типов. Первые из них могут быть решены как аналитически (случай волноводов с бесконечно тонкими стенками) [1], так и численными методами (волноводы со стенками конечной толщины) [2, 3, 4]. Решение задач второго типа может быть построено путем использования решений для задач первого типа [13], либо численными методами [5]. Работы же, посвященные решеткам проходного типа, состоящим из конечного числа элементов, нам неизвестны.

В данной статье рассматриваются задачи дифракции плоской (и цилиндрической) волны на решетке проходного типа, состоящей из конечного числа плоских волноводов с фланцами в плоскостях входного и выходного раскрывов. Известно, что наиболее значительная взаимная связь между элементами в волноводных решетках наблюдается чаще всего при сканировании диаграмм в  $E$ -плоскости. Нами рассматривались решетки

из плоскопараллельных волноводов, возбуждаемые волной, вектор  $\vec{E}$  которой поляризован в плоскости, перпендикулярной стенкам волноводов. В каждый из волноводов помещен фазовый корректор (идеально согласованный с волноводом), обеспечивающий поворот фазы распространяющейся ТЕМ-волны на заданную величину.

1. Пусть на систему плоскопараллельных волноводов с фланцами (рис. 1, а) падает волна, вектор  $\vec{H}$  которой имеет только одну компоненту  $H_x$ . На рис. 1, а приведена принятая система координат;  $\theta$  — угол падения первичной волны на систему волноводов,  $\varphi$  — угол наблюдения;

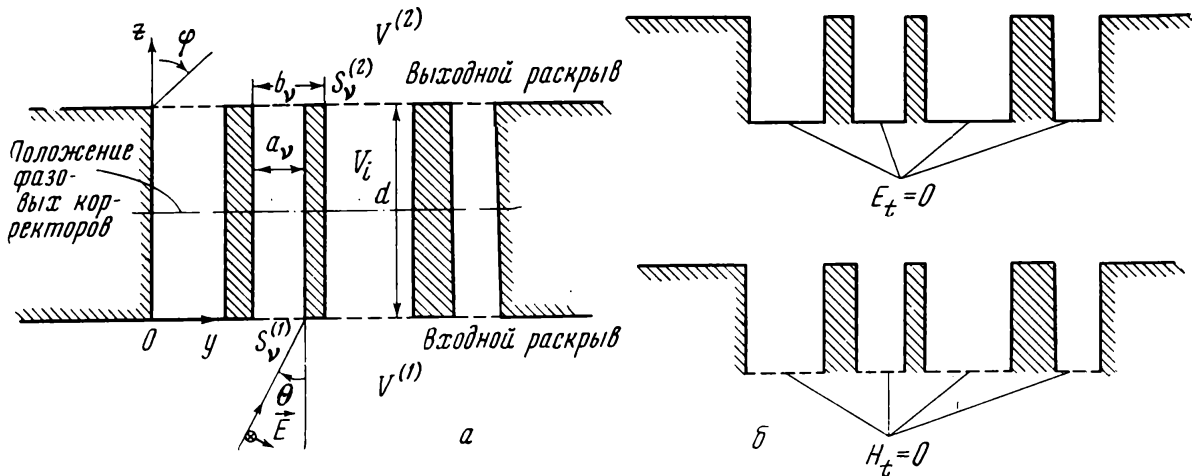


Рис. 1. Геометрия задачи

ширина волноводов обозначена через  $a_v$ , толщина их стенок равна  $b_v - a_v$ , где  $b_v$  — «период» решетки, а длина волноводов равна  $d$ .

Обозначим через  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$  искомые касательные составляющие электрического вектора на входном и выходном раскрывах соответственно. Реакция апертур волноводов на поля во внешних (по отношению к решетке) полупространствах  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  может быть учтена при помощи эквивалентных магнитных токов, распределенных на геометрической поверхности входного и выходного раскрывов  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  с плотностями [6]

$$(1) \quad \vec{K}_\mu^{(1)} = 2[\vec{n}e^{(1)}] \quad \text{и} \quad \vec{K}_\mu^{(2)} = 2[\vec{n}e^{(2)}]$$

соответственно. В формулах (1)  $\vec{n}$  — нормали к поверхностям раскрывов  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ , внешние по отношению к  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  соответственно. Поля, создаваемые токами (1), легко найти по известным формулам [8] для свободного пространства. Так, для интересующей нас компоненты имеем

$$H_x = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{\bigcup_{v=1}^N S_v^{(1)}} H_0^{(2)}(kR) e^{(1)}(y') dy', \quad z \leq 0,$$

$$(2) \quad H_x = -\frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{\bigcup_{v=1}^N S_v^{(2)}} H_0^{(2)}(kR) e^{(2)}(y') dy', \quad z \geq d,$$

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + (y - y')^2}.$$

Здесь  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$  —  $y$ -составляющие векторов  $\vec{e}^{(1)}$  и  $\vec{e}^{(2)}$  соответственно. Полное поле в области  $V^{(1)}$  ( $z \leq 0$ ) равно сумме поля, создаваемого током  $\vec{K}_\mu^{(1)}$

и поля, возбуждаемого первичной волной в области  $V^{(1)}$  при металлизированных апертурах волноводов. В области  $V^{(2)}$  полное поле совпадает с полем тока  $\vec{K}_\mu^{(2)}$ , так как в ней отсутствуют источники. Полное поле во внутренней области (т. е. в плоскопараллельных волноводах) можно записать в виде разложения по системе волноводных волн

$$(3) \quad \begin{aligned} E_y &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^\nu(y) (b_{n\nu} e^{-i(\gamma_n^\nu z + \xi_n^\nu(z))} + c_{n\nu} e^{i(\gamma_n^\nu z + \xi_n^\nu(z))}), \\ H_x &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^\nu(y) Y_n^\nu (b_{n\nu} e^{-i(\gamma_n^\nu z + \xi_n^\nu(z))} - c_{n\nu} e^{i(\gamma_n^\nu z + \xi_n^\nu(z))}), \end{aligned}$$

где  $0 \leq z \leq d$ ;  $\varepsilon_n = 2 - \delta_{0n}$ ;

$$\Phi_n^\nu(y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{a_\nu}} \cos \frac{\pi n}{a_\nu} y$$

— поперечная модовая функция, отличная от нуля лишь на  $\nu$ -м волноводе;  $Y_n^\nu = \omega \varepsilon_0 / \gamma_n^\nu$  — волновая проводимость  $n$ -го типа волны в  $\nu$ -м волноводе;  $\gamma_n^\nu = \sqrt{k^2 - (\pi n / a_\nu)^2}$  — постоянная распространения  $n$ -го типа волны в  $\nu$ -м волноводе;  $b_{n\nu}$  и  $c_{n\nu}$  — неизвестные комплексные модовые амплитуды;  $\xi_n^\nu(z) = \begin{cases} \Gamma_n^\nu, & z \geq d/2 \\ 0, & z < d/2 \end{cases}$  — фаза в сечении  $z$   $\nu$ -го волновода, внося-

мая фазовым корректором для  $n$ -го распространяющегося типа волны\*; эту фазу на выходе  $\nu$ -го волновода решетки удобно записать, например, в виде

$$(3a) \quad \Gamma_n^\nu = \nu \frac{2\pi b}{\lambda} \sin \beta,$$

$\beta$  — угол наклона линейного фазового фронта в выходном раскрытии решетки, обусловленного фазовыми корректорами при условии, что на входе решетки имеет место синфазный фронт.

Приравнивая теперь касательные компоненты полного магнитного вектора с внутренней и внешней сторон соответствующих апертур и выражая модовые амплитуды  $b_{n\nu}$  и  $c_{n\nu}$  через неизвестные распределения  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$  на этих апертурах, получим систему интегральных уравнений

$$(4) \quad \begin{aligned} & \int_{\bigcup_{\nu=1}^N S_\nu^{(1)}} \left\{ \frac{\omega \varepsilon_0}{2} H_0^{(2)}(k|y - y'|) + \sum_{\nu=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_n^\nu d + \xi_n^\nu(d))}{i \sin(\gamma_n^\nu d + \xi_n^\nu(d))} \right\} \times \\ & \times Y_n^\nu \Phi_n^\nu(y) \Phi_n^\nu(y') \Big\} e^{(1)}(y') dy' - \\ & - \int_{\bigcup_{\nu=1}^N S_\nu^{(2)}} \left\{ \sum_{\nu=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n^\nu \Phi_n^\nu(y) \Phi_n^\nu(y')}{i \sin(\gamma_n^\nu d + \xi_n^\nu(d))} \right\} e^{(2)}(y') dy' = f(y), \end{aligned}$$

\* Множители вида  $e^{i\xi_n^\nu(z)}$  в формулах (3) описывают влияние фазовых корректоров в каждом из волноводов. Фазовые корректоры можно представить себе в виде бесконечно тонких пленок, расположенных в волноводах в сечении  $z = d/2$  и обеспечивающих скачок фазы без изменения амплитуды.

$$(5) \quad \int_{\bigcup_{v=1}^N S_v^{(2)}} \left\{ \frac{\omega \varepsilon_0}{2} H_0^{(2)}(k|y-y'|) + \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_n^v d + \xi_n^v(d))}{i \sin(\gamma_n^v d + \xi_n^v(d))} \times \right. \\ \left. \times Y_n^v \Phi_n^v(y) \Phi_n^v(y') \right\} e^{(2)}(y') dy' - \\ - \int_{\bigcup_{v=1}^N S_v^{(1)}} \left\{ \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n^v \Phi_n^v(y) \Phi_n^v(y')}{i \sin(\gamma_n^v d + \xi_n^v(d))} \right\} e^{(1)}(y') dy' = 0,$$

где функция

$$f(y) = \begin{cases} 2Y_0 e^{-iky \sin \theta} & \text{при падении на решетку плоской волны} \\ & \text{под углом } \theta, \\ 2Y_0 H_0^{(2)}(kr) & \text{при падении на решетку цилиндрической} \\ & \text{волны;} \end{cases}$$

$r$  — расстояние от оси цилиндрической волны до входного раскрыва;  $k = 2\pi / \lambda$ ;  $Y_0 = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}$  — волновая проводимость свободного пространства.

В дальнейшем будем предполагать, что входные и выходные апертуры волноводов и сами волноводы одинаковы.

Введем новые неизвестные функции  $g_1$  и  $g_2$  по формулам

$$e^{(1)} = (g_1 + g_2) / 2 \quad \text{и} \quad e^{(2)} = (g_1 - g_2) / 2.$$

Тогда, складывая и вычитая (4) и (5) и проводя элементарные алгебраические преобразования, приходим к следующей системе уравнений:

$$(6) \quad \frac{1}{a} \int_{\bigcup_{v=1}^N S_v} \left\{ \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k|y-y'|) + \frac{a}{\pi} \times \right. \\ \left. \times \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_n d + \xi_n^v(d)) + (-1)^p}{ir_n \sin(\gamma_n d + \xi_n^v(d))} \Phi_n^v(y) \Phi_n^v(y') \right\} g_p(y') dy' = \\ = \frac{1}{ka} f(y),$$

где

$$p = 1, 2; \quad r_n = \sqrt{c^2 - n^2}; \quad c = ka / \pi.$$

Физически замена (4) и (5) уравнениями типа (6) означает замену исходной задачи двумя более простыми, а именно: волноводы, составляющие решетку, заменяются системой канавок глубиной  $d/2$ , дно которых образуют электрические или магнитные стенки (рис. 1, б).

В случае решетки из бесконечного числа волноводов уравнения (6) могут быть несколько упрощены. Так, если на решетку падает плоская волна,

$$(7) \quad \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_n d + \xi_n(d)) + (-1)^p}{ir_n \sin(\gamma_n d + \xi_n(d))} \frac{c}{c_1} \Phi_n(y) \Phi_n(y') + \right. \\ \left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_m(y) \psi_m^*(y')}{S_m} \right\} g_p(y') dy' = (2\pi/k\sqrt{b}) e^{-iky \sin \theta},$$

где

$$p = 1, 2; \quad \psi_m(y) = \frac{1}{\sqrt{b}} \exp \left\{ i \left( \frac{2\pi m}{b} - k \sin \theta \right) y \right\}$$

— собственные волны бесконечной периодической решетки;  $c_1 = kb / \pi$ ;  $S_m = \sqrt{c_1^2 - (2m - c_1 \sin \theta)^2}$ ;  $b$  — период решетки. Здесь были использованы однородность и периодичность бесконечной решетки, благодаря которым поля во внешнем пространстве могут быть представлены в виде ряда по пространственным гармоникам (теорема Флоке). Заметим, что ядра уравнений (6) и (7) содержат логарифмические особенности, легко выделяемые при преобразовании рядов, входящих в них.

2. Решение систем (6) и (7) было осуществлено двумя независимыми методами — методом специальной ортогонализации [7, 9] и методом обобщенных магнитодвижущих сил (МДС) [8]. При использовании метода специальной ортогонализации ряды для полей в апертурах волноводов сходятся, вообще говоря, лишь среднеквадратически; однако интегральные функционалы от этих рядов (диаграмма направленности, коэффициент отражения и т. п.) сходятся равномерно и достаточно быстро, что удобно при практических расчетах. Так, в случае бесконечных решеток получают пригодные для приближенных расчетов одночленные формулы для коэффициента отражения плоской волны от входной апертуры:

$$(8) \quad R = 1 - \left\{ \frac{1}{1 - i \frac{\pi^2 c c_1}{4} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta [\cos(cc_2) - 1]}{\sin^2 \left( \frac{\pi c \sin \theta}{2} \right) \sin(cc_2)}} - \frac{1}{1 - i \frac{\pi^2 c c_1}{4} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta [\cos(cc_2) + 1]}{\sin^2 \left( \frac{\pi c \sin \theta}{2} \right) \sin(cc_2)}} \right\},$$

где  $c_2 = \pi d / a$  (здесь вносимая корректорами фаза равна нулю).

С другой стороны, метод обобщенных МДС позволяет рассчитывать и распределения полей в апертурах волноводов, обеспечивая равномерную сходимость ряда для поля в апертуре. Кроме того, последний метод обеспечивает, видимо, менее громоздкую процедуру решения для случая падения на решетку неплоской первичной волны.

Расчет параметров решеток методом ортогонализации проводится по рекуррентным формулам типа Шмидта (аналогично тому, как это делается в работе [9]), причем в качестве исходной полной системы функций выбрана следующая:

$$(9) \quad \Phi_n^{(p)} = \Phi_{\sigma^v}(y) / \sqrt{A_{nn} - i\alpha_n^{(p)}},$$

где  $p = 1, 2$ ;  $\sigma = [n - (v - 1)] / N$ ,  $\sigma = 0, 1, 2, \dots$ ;  $v$  — номер волновода,  $v = 1, 2, \dots, N$ ;

$$A_{mn} = \frac{1}{2a} \sum_{\nu=1}^N \int_{S_\nu} H_0^{(2)}(k|y - y'|) \Phi_{\sigma^v}(y) \Phi_{\tau^\mu}(y') dy' dy;$$

$$\mu = 1, 2, \dots, N; \quad \tau = \frac{m - (\mu - 1)}{N};$$

$$\alpha_n^{(p)} = \begin{cases} \frac{\cos(c_2 \sqrt{c^2 - \sigma^2} + \xi_n^{(p)}(d)) + (-1)^p}{\pi \sqrt{c^2 - \sigma^2} \sin(c_2 \sqrt{c^2 - \sigma^2} + \xi_n^{(p)}(d))} & \text{для } c^2 > \sigma^2, \\ -\frac{\operatorname{ch}(c_2 \sqrt{c^2 - \sigma^2} + \xi_n^{(p)}(d)) + (-1)^p}{\pi \sqrt{\sigma^2 - c^2} \operatorname{sh}(c_2 \sqrt{\sigma^2 - c^2} + \xi_n^{(p)}(d))} & \text{для } c^2 < \sigma^2. \end{cases}$$

Исходная система функций (9) выбрана из соображений максимального упрощения вычислений. Можно было бы использовать систему функций, в которой каждая имела бы нужную особенность, обусловленную наличием краев; при этом сходимость процесса улучшилась бы, однако это приводит к более громоздким выкладкам.

Таким образом, для диаграммы направленности, например, может быть написана формула

$$(10) \quad F(\theta, \varphi) = \frac{ka^2}{2\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n^{(1)}(\theta) \tilde{a}_n^{(1)}(\varphi) - a_n^{(2)}(\theta) \tilde{a}_n^{(2)}(\varphi)],$$

где коэффициенты  $a_n^{(p)}$ ,  $\tilde{a}_n^{(p)}$  определяются рекуррентными формулами вида

$$(11) \quad a_n^{(p)} = \frac{f_n^{(p)} - \sum_{m=0}^{n-1} B_{mn}^{(p)} a_m^{(p)}}{B_{nn}^{(p)}}, \quad a_0^{(p)} = f_0^{(p)}.$$

Для  $\tilde{a}_n^{(p)}$  в формулу (11) вместо  $f_n^{(p)}$  подставляют  $\tilde{f}_n^{(p)}$ , где

$$f_n^{(p)} = \frac{g_n(\theta)}{\sqrt{A_{nn} - i\alpha_n^{(p)}}}; \quad \tilde{f}_n^{(p)} = \frac{g_n^*(\varphi)}{\sqrt{A_{nn} - i\alpha_n^{(p)}}};$$

$$g_n(\alpha) = \sin \alpha \frac{\exp\left\{-i\pi c(v-1) \frac{b}{a} \sin \alpha\right\} \sqrt{\varepsilon_0} [e^{-i\pi(c \sin \alpha + \sigma)} - 1]}{\sigma^2 - c^2 \sin^2 \alpha}.$$

В формуле (11)

$$B_{mn}^{(p)} = \begin{cases} \frac{d_{mn}^{(p)} - \sum_{q=0}^{m-1} B_{qm}^{(p)} B_{qn}^{(p)}}{B_{mn}^{(p)}}, & m \leq n, \quad B_{0n}^{(p)} = d_{0n}^{(p)}, \\ 0, & m > n, \end{cases}$$

$$d_{mn}^{(p)} = \frac{A_{mn}}{\sqrt{(A_{nn} - i\alpha_n^{(p)})(A_{mm} - i\alpha_m^{(p)})}}, \quad d_{mm}^{(p)} \equiv 1.$$

Формулы, подобные (10) — (11), могут быть выписаны и для других функционалов от полей (коэффициент отражения, КНД и т. д.).

Следует отметить, что наиболее интересными параметрами являются именно функционалы от распределений полей в апертурах, а не сами распределения.

При использовании метода обобщенных МДС в качестве базисных (для преобразования уравнений (6) и (7) в системы алгебраических уравне-



ний) были взяты, по примеру [10], следующие функции:

$$u_l(y) = \begin{cases} 1, & y_{l-1} \leq y \leq y_l, \\ 0, & \text{вне этого интервала} \end{cases}$$

и  $v_m(y) = \delta(y - \bar{y}_m)$ , где

$$y_l = E \left( \frac{l - \Delta}{P} \right) b + \left( l - PE \left( \frac{l - \Delta}{P} \right) \right) \frac{a}{P};$$

$$\bar{y}_m = E \left( \frac{m - \Delta}{P} \right) b + \left( m - \frac{1}{2} - PE \left( \frac{m - \Delta}{P} \right) \right) \frac{a}{P};$$

$E(\ )$  означает «целая часть»,  $0 < \Delta < 1$ ;  $P$  — число точек разбиения на одной волноводной апертуре;  $l, m = 1, 2, \dots, N \times P$ ;  $N$  — число волноводных апертур. Оказывается, что при таком выборе функций определители получающихся систем алгебраических уравнений хорошо обусловлены, и системы имеют устойчивое решение.

3. Полученные формулы позволяют рассчитать ряд параметров, характеризующих рассматриваемую решетку. Ниже приводятся результаты расчетов для распределений полей в апертурах волноводов, коэффициента прохождения, диаграмм направленности отдельных волноводов и всей системы, а также кнд в зависимости от геометрических параметров системы, длины волны, угла сканирования и угла падения возбуждающей волны.

Как уже указывалось ранее, решение задачи осуществлялось двумя независимыми методами, причем результаты сравнивались. Кроме того, для идеально проводящей ленты сравнивались результаты расчета диаграмм рассеяния, проведенные указанными выше методами, с приведенными в книге [11]. На рис. 2 изображены соответствующие диаграммы и распределение тока на ленте. Из рисунка видно, что уже при числе точек на ширине ленты, равном 11 (приблизительно  $2ka$ ) — при расчете по методу обобщенных МДС —, или при числе исходных функций (метод специальной ортогонализации), равном 7 (т. е. порядка  $ka$ ), совпадение результатов между собой и с точными [11] очень хорошее.

На рис. 3 приведены распределения полей в апертурах волноводов для решеток из одного и из трех излучателей, рассчитанные обобщенным методом наведенных МДС. По оси абсцисс здесь отложены координаты точек (и их число), в которых определялись значения полей. Как видно из этих рисунков, поля имеют подъемы на краях апертур, соответствующие особенностям точных решений. В случае системы из одного волновода, как и следует ожидать, распределение поля на его выходной апертуре не зависит от угла  $\theta$ , поскольку при расчетах предполагалось, что между входным и выходным раскрытиями взаимодействие осуществляется только по основному типу волны. Для системы из трех волноводов распределения полей в каждом из них сильно отличаются друг от друга и значительно меняются с изменением длины волны и геометрических параметров  $b$  и  $d$  решетки и угла падения  $\theta$ . При изменении угла падения плоской волны на решетку распределения полей в раскрытиях волноводов становятся асимметричными. Эта асимметрия связана, по-видимому, с различным поведением полей в окрестности ребер. Как видно из рис. 1, а, например, если принять, что для клина, образованного левым фланцем и стенкой левого волновода, направление падения первичной волны составляет угол  $\theta$  с осью  $z$ , то для правого ребра того же волновода это эквивалентно, с точки зрения характера распределения полей, падению первичной волны под углом  $-\theta$ .

Особенно сильно меняется характер распределения полей в раскрытиях волноводов в том случае, когда их длина кратна  $\lambda/4$ . В этом случае одна

из систем эквивалентных канавок (рис. 1, б) является резонансной. Этому случаю соответствуют кривые распределений полей, приведенные на рис. 3, в<sub>1</sub>. Видно значительное отличие распределений полей от случаев, когда нет описанных резонансов (рис. 3, в<sub>2</sub>, в<sub>3</sub>). Распределения полей на раскрывах отдельных волноводов позволяют, таким образом, судить (по их искажениям) о взаимном влиянии волноводов.

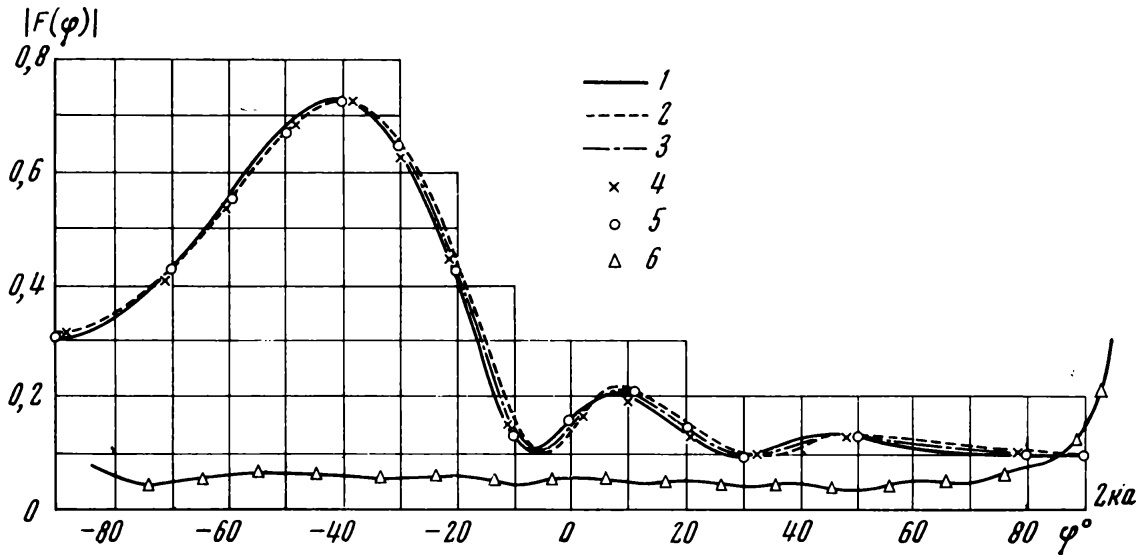


Рис. 2. Диаграмма рассеяния лентой и распределение тока ( $ka = \sqrt{28}$ ;  $\theta = -45^\circ$ ):  
1 — строгое решение (из книги Уфимцева [11]); 2 — метод моментов ( $p = 11$ ); 3 — метод ортогонализации ( $R = 6$ ); 4 — метод моментов ( $p = 19$ ); 5 — метод ортогонализации ( $R = 10$ );  
6 — распределение тока ( $p$  — число точек на ленте;  $R$  — число гармоник на ленте)

На рис. 4 приведены кривые зависимости ксв в излучателях трехэлементной решетки от ее геометрических параметров. Как видно из графиков, эта зависимость является осциллирующей от длины волноводов  $d$  и длины волны  $\lambda$ . Возможны режимы, для которых ксв в крайних волноводах резко отличаются от ксв в средних, что, очевидно, объясняется их взаимным влиянием.

$\beta$ ( $\theta=0$ )	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
$\varphi_{\max}$	$10^\circ 21'$	$20^\circ 23'$	$29^\circ 19'$	$46^\circ 47'$	$60^\circ 18'$	$75^\circ 46'$
$\theta$ ( $\beta = 0$ )	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	—
$\varphi_{\max}$	$12^\circ 49'$	$31^\circ 44'$	$46^\circ 40'$	$60^\circ 45'$	$73^\circ 19'$	—

На рис. 5 приведены диаграммы направленности крайнего и среднего волноводов трехэлементной решетки, а также диаграмма направленности отдельного изолированного волновода с фланцами. Из рисунка видно значительное искажение диаграммы излучателя в результате взаимодействия.

Диаграммы направленности всей системы и отдельных элементов для углов наблюдения в окрестностях  $\varphi = \pm \pi/2$  уплощаются. Это обстоятельство связано с наличием в этих окрестностях только нормальной к фланцу компоненты электрического вектора. Взаимодействие отдельных волноводов и наличие фланцев вызывают значительное изменение уровня боковых лепестков, величины провалов в области «нулей» и формы диаграммы направленности.

Для решеток из 5 и 7 волноводов были проделаны методом специальной ортогонализации расчеты их параметров при наличии фазовых кор-

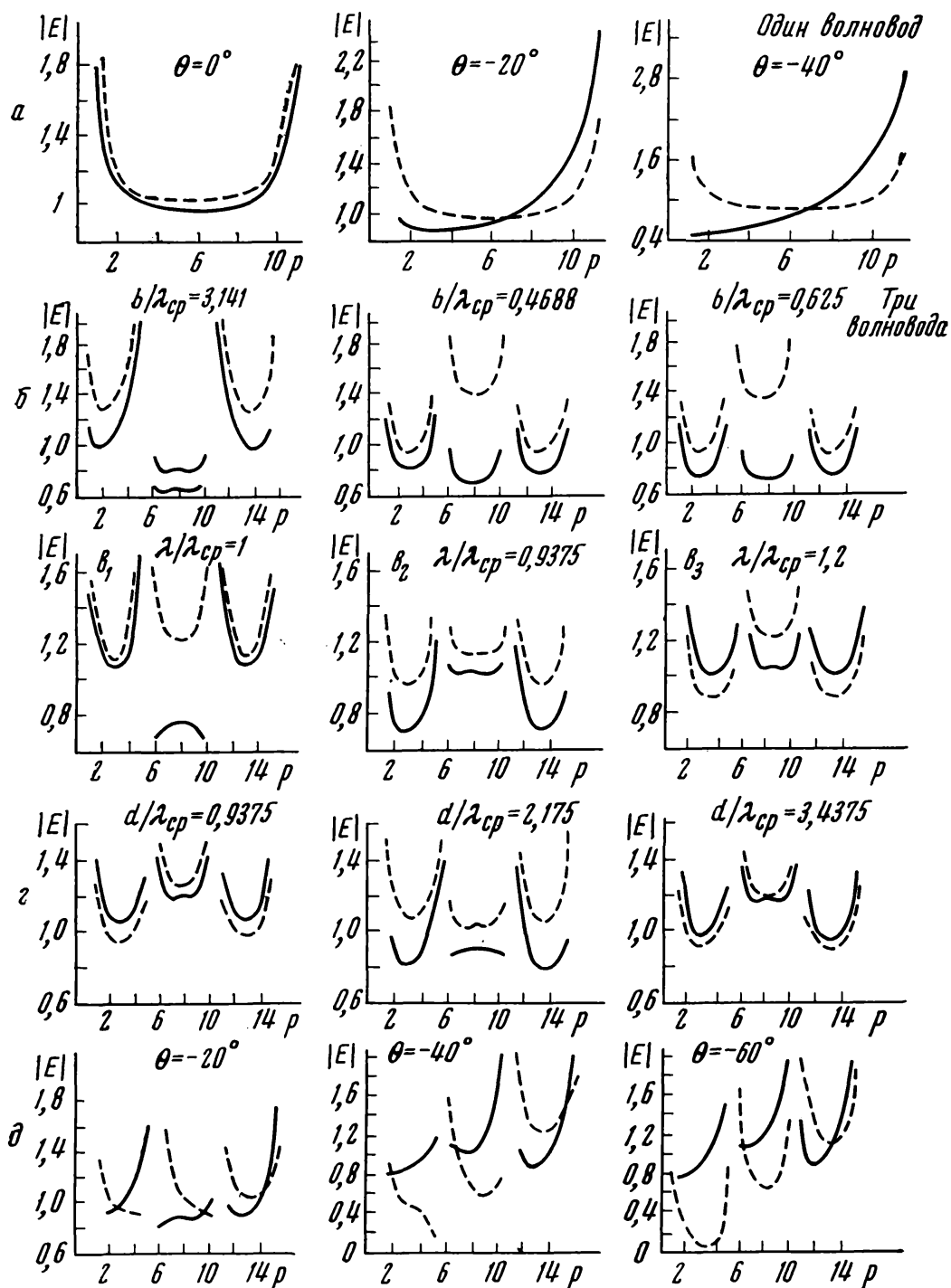


Рис. 3. Распределения амплитуды поля в раскрытиях волноводов одно- и трехэлементных решеток (сплошные кривые — распределение поля на входе; пунктир — распределение поля на выходе):

а —  $a/\lambda_{ср} = 0,3125$ ,  $d/\lambda_{ср} = 3,75$ ; б —  $\theta = 0$ ; в —  $\theta = 0$ ,  $b/\lambda_{ср} = 0,375$ ; г —  $\theta = 0$ ,  $b/\lambda_{ср} = 0,375$ ,  $\lambda = \lambda_{ср}$ ; д —  $b/\lambda_{ср} = 0,375$ ;  $d/\lambda_{ср} = 3,75$ ;  $\lambda = \lambda_{ср}$

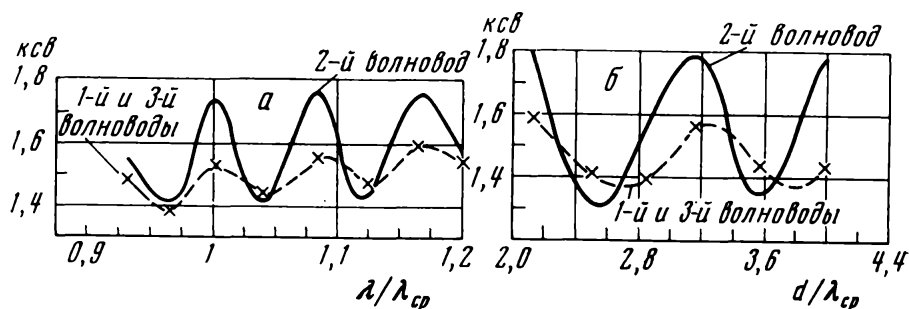


Рис. 4. КСВ излучателей трехэлементной решетки:

а —  $\theta = 0$ ,  $b/\lambda_{ср} = 0,375$ ,  $d/\lambda_{ср} = 3,75$ ,  $a/\lambda_{ср} = 0,3125$ ; б —  $\theta = 0$ ,  $b/\lambda_{ср} = 0,375$ ,  $a/\lambda_{ср} = 0,3125$ ,  $\lambda/\lambda_{ср} = 1$

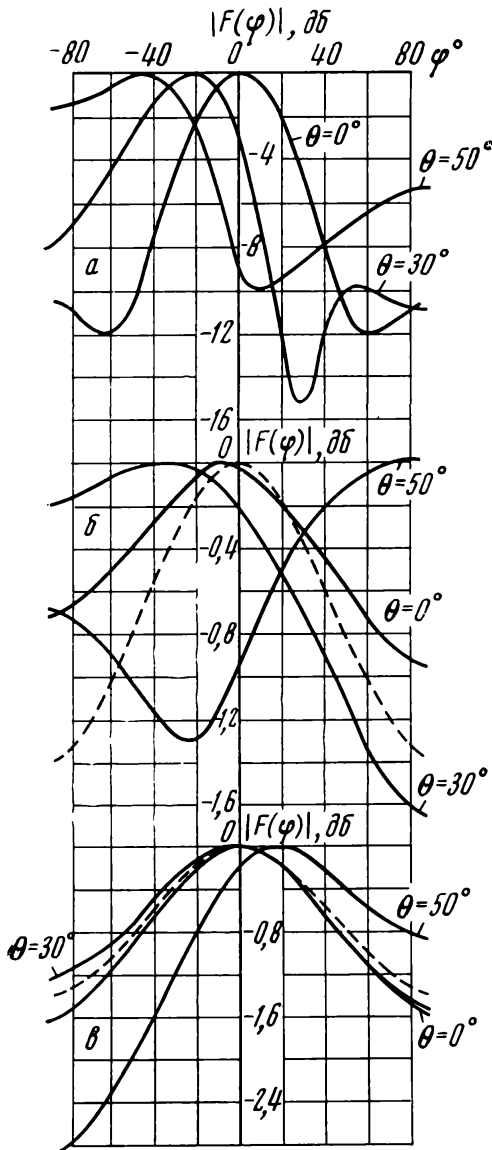


Рис. 5. Решетка из трех элементов ( $a / \lambda_{\text{ср}} = 0,3125$ ,  $b / \lambda_{\text{ср}} = 0,375$ ,  $d / \lambda_{\text{ср}} = 3,75$ ,  $\lambda / \lambda_{\text{ср}} = 1$ ):

*a* — диаграммы трехэлементной решетки; *б* — диаграммы крайнего волновода в трехэлементной решетке; *в* — диаграммы среднего волновода в трехэлементной решетке; пунктир — диаграмма изолированного волновода

как он определяется в книге [12]) не представляет большого интереса в рассматриваемом случае, так как для системы, состоящей из конечного числа волноводов (узких щелей в толстом экране), он может быть при некоторых значениях геометрических параметров системы больше единицы за счет интенсивного «засасывания» энергии из области пространства вне «трубок», вырезаемых щелями. Очевидно, в реальной решетке (для некрайних волноводов) коэффициент прохождения близок к коэффициенту прохождения в бесконечной решетке с такими же параметрами волноводов. Поэтому коэффициент усиления считался как произведение кнд на коэффициент прохождения волны в бесконечной решетке. На рис. 8 приведен соответствующий график для решетки из 5 волноводов, из которого видно, что падение  $k_u$  на 3 дБ происходит при отклонении луча при-

ректоров. Рассматривались варианты, когда: 1) менялся угол  $\theta$  падения плоской волны, а угол  $\beta$  наклона фазового фронта, создаваемого корректорами, был равен 0; 2) угол  $\theta$  был зафиксирован ( $\theta = 0, 30, 60^\circ$ ), а угол  $\beta$  изменялся в пределах  $\pm 70^\circ$  за счет фазовых корректоров (см. рис. 6). Анализ этих расчетов показывает, что во втором случае, когда фаза в каждом из волноводов принудительно изменяется (за счет фазового корректора), ошибка в установке максимума диаграммы решетки в заданное положение несколько меньше, чем в первом случае. Это видно, например, из таблицы.

На рис. 6 приведены также для сравнения множитель решетки из 5 излучателей с равномерным амплитудным распределением и тем же периодом. Видно существенное различие сравниваемых кривых.

Из анализа проведенных расчетов следует, что взаимодействие между волноводами в значительной степени обуславливается высшими типами колебаний, возникающими в их апертурах. Так, например, диаграммы отдельного волновода с фланцем могут быть рассчитаны с хорошей точностью при учете только одной основной (распространяющейся) моды, в то время как расчет диаграмм системы, состоящей из нескольких волноводов, требует учета уже по крайней мере одного — двух высших типов волн.

На рис. 7 приведены кривые зависимости относительного кнд решетки от углов  $\theta$  ( $\beta = 0$ ) и  $\beta$  ( $\theta = 0$ ). Из них видно, что в пределах сектора  $\pm 45^\circ$  кнд решетки спадает по закону, близкому к квадрату косинуса, при больших же углах влияние фланцев приводит к стабилизации и даже к некоторому увеличению кнд. Коэффициент прохождения (например в том виде,

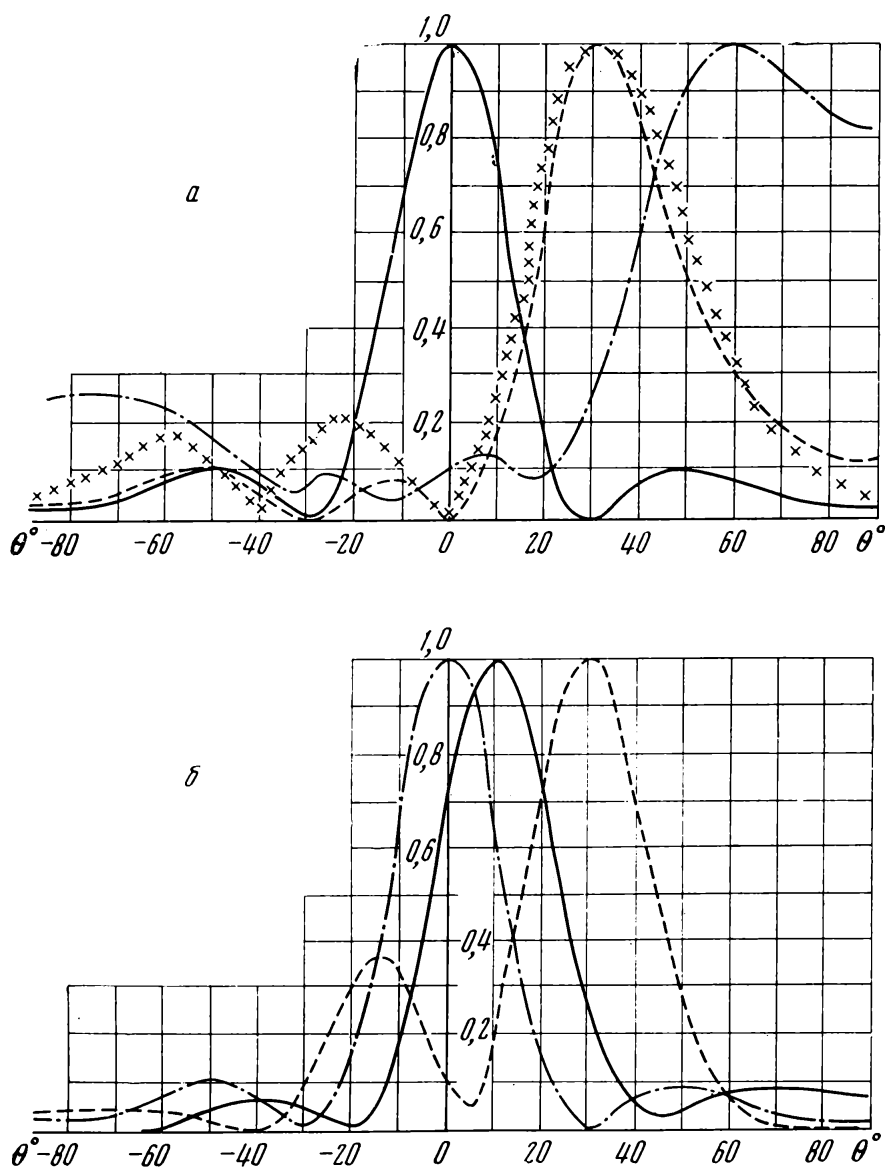


Рис. 6. Диаграммы пятиэлементной решетки ( $a / \lambda_{ср} = 0,3125$ ,  $b / \lambda_{ср} = 0,375$ ,  $d / \lambda_{ср} = 3,75$ ,  $\lambda / \lambda_{ср} = 1$ ):

$a$  — сплошная кривая,  $\theta = 0^\circ$ , пунктир —  $\theta = 30^\circ$ , штрих-пунктир —  $\theta = 60^\circ$ ; крестики — множитель решетки точечных излучателей с равномерным амплитудным распределением;  $N = 5$ ,  $\beta = 0^\circ$ ;  $b$  — сплошная кривая,  $\beta = 10^\circ$ , пунктир —  $\beta = 30^\circ$ , штрих-пунктир —  $\beta = 0^\circ$ ;  $N = 5$ ,  $\theta = 0^\circ$

близительно на  $\pm 40^\circ$  от нормали, что хорошо подтверждается на практике.

Рассмотренные выше методы решения позволяют получить численные результаты для решеток при падении на них неплоской волны, при наличии в волноводах диэлектрических пробок, согласующих штырей, несогласованных (взаимных и невзаимных) фазовых корректоров с потерями и т. д.

Отметим, что расчет функциональных параметров подобных решеток (диаграмм направленности, кнд и др.) выгоднее (с точки зрения скорости и объема вычислений) производить по формулам метода специальной ортогонализации [7, 9], причем программирование задачи целесообразнее производить не на АЛГОЛ, а на языке машины, так как при этом экономится большой объем оперативной памяти и программируемые формулы достаточно просты. В то же время, если при расчетах по методу обобщен-

ных МДС [8] пользоваться подпрограммами обращения комплексных матриц (не разбивая их заранее на действительные и мнимые части), то это позволит значительно увеличить объем полезных расчетов (например, довести систему до 15—20 волноводов при расчетах на машине «М-220»).

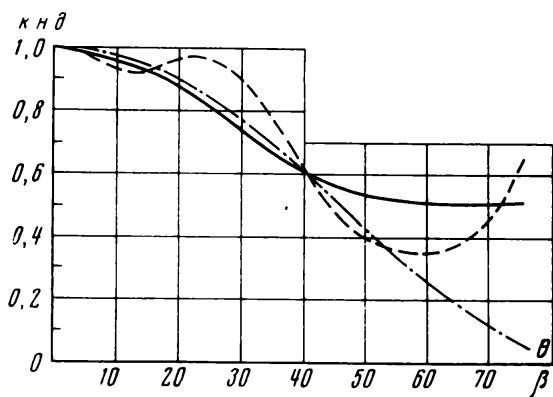


Рис. 7. Относительный кнд пятиэлементной решетки:

сплошная кривая — кнд( $\theta$ ); пунктир — кнд( $\beta$ ); штрих-пунктир —  $\cos^2 \theta$

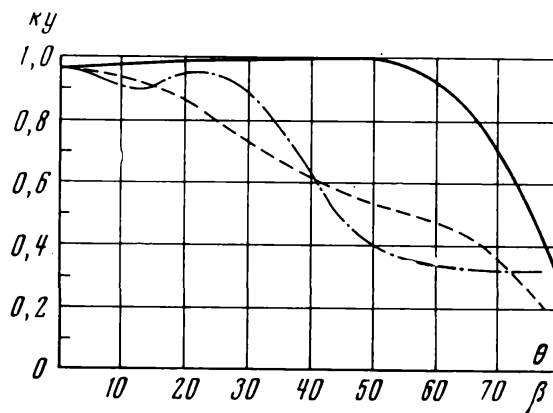


Рис. 8. Коэффициент прохождения и коэффициент усиления пятиэлементной решетки:

сплошная кривая —  $T^2$ ; пунктир —  $кУ(\theta)$ ; штрих-пунктир —  $кУ(\beta)$

Что касается необходимого машинного времени, то расчет, например, диаграммы направленности системы из 7 волноводов по формулам (10) — (11) занимал около 15 мин (на «М-220»).

В заключение авторы выражают глубокую признательность М. Г. Белкиной и В. В. Яблонской за руководство вычислениями на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Б. Тартаковский, А. И. Рубинштейн, Вопросы радиоэлектроники, Серия XII, вып. 1, 1963.
2. B. L. Diamond, Proc. I.E.E.E., 1968, 56, 11.
3. G. V. Borgiotti, Proc. I.E.E.E., 1968, 56, 11.
4. V. Galindo, C. P. Wu, IEEE Trans., 1966, AP-14, March.
5. Ю. П. Виниченко и др., Радиотехника и электроника, 1970, 15, 1, 58.
6. Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, Изд. Советское радио, 1948.
7. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 12, 2004.
8. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. 2, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
9. А. Г. Кюркчан, Радиотехника и электроника, 1972, 17, 4, 687.
10. C. P. Wu, IEEE Trans., 1970, AP-18, 2, 3.
11. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, Изд. Советское радио, 1962.
12. X. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, Изд. Мир, 1964.
13. Berz, Whitehead, Proc. I.E.E.E., 1951, pt III, N 52; Lengyel, J. Appl. Phys., 1951, 22, 3, 263.

Поступила в редакцию  
24 VII 1972

УДК 538.3

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 29 XI 1972)

Рассмотрим дифракцию первичной волны  $E^0, H^0$  на незамкнутом бесконечно тонком, идеально проводящем экране  $s$  с гладким контуром  $\mathcal{L}$ . Поле  $E^0, H^0$  возбуждает на экране  $s$  поверхностный ток  $K$ , создающий вторичное поле  $E, H$ . Последнее должно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла вне  $\bar{s} = s + \mathcal{L}$ , граничному условию

$$E_t = -E_t^0 \quad \text{на } s, \quad (1)$$

условиям Майкснера на контуре  $\mathcal{L}$  и условиям излучения на бесконечности. Эта задача имеет единственное решение. Построим его. Нам понадобится лемма Лоренца, которую удобно записать в виде

$$\int_s K E \{K_n, s_0\} ds = \int_{s_0} K_n E \{K, s\} ds; \quad (2)$$

здесь  $K$  и  $K_n$  — плотности поверхностных токов, распределенных на  $s$  и  $s_0$  соответственно, а, например,  $E \{K, s\}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого током  $K$ , распределенным на  $s$ . Под  $s_0$  будем понимать поверхность, получающуюся в результате дополнения  $s$  до замкнутой при помощи геометрической поверхности  $\Sigma$  ( $s_0 = s + \Sigma$ ).

Полагая, что в равенстве (2)  $K$  есть искомый ток, а  $K_n$  — один из семейства вспомогательных токов (которое мы определим ниже), перепишем (2), учитывая (1), так:

$$\int_s K E \{K_n, s\} ds = - \int_s K_n E^0 ds + \int_\Sigma K_n E \{K, s\} ds. \quad (3)$$

Используя обозначения

$$I = \begin{cases} K & \text{на } s, \\ \frac{1}{\rho_0} E_t \{K, s\} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad F_n = \begin{cases} E_t \{K_n, s_0\} & \text{на } s, \\ -\rho_0 K_n & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\rho_0$  — волновое сопротивление свободного пространства, придадим равенству (3) следующий вид:

$$\int_{s_0} I F_n ds = - \int_s K_n E^0 ds. \quad (5)$$

Это соотношение является основным в развиваемом методе.

Для нахождения при помощи (5) вектора  $I$  введем гильбертово пространство  $L_R^2(s_0)$ , элементами которого являются вектор функции, заданные на  $s_0$  и касательные к ней. Скалярное произведение и норму определим формулами

$$(A, I) = \int_{s_0} A \overline{RI} ds, \quad \|I\| = \left( \int_{s_0} I \overline{RI} ds \right)^{1/2}; \quad (6)$$

здесь  $R$  — линейный оператор, выбираемый так, чтобы выполнялись аксиомы гильбертова пространства и все элементы  $L_R^2(s_0)$  удовлетворяли условиям Майкснера для тока при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  и электрического поля, при приближении со стороны  $\Sigma$ ; черта — знак комплексного сопряжения.

Практически в качестве  $R$  удобно брать двумерный тензор второго ранга, имеющий (в ортогональной системе координат) диагональный вид с положительными на  $s$  и  $\Sigma$  компонентами. Если одна из координатных линий  $X_1 = \text{const}$  совпадает с  $\mathcal{L}$ , то  $R_{11}$  должно стремиться к бесконечности как  $\rho^{-1/2}$  ( $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ ), а  $R_{22}$  к нулю как  $\rho^{1/2}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$ ; при приближении со стороны  $\Sigma$   $R_{11}$  должно стремиться к нулю как  $\rho^{1/2}$ , а  $R_{22}$  оставаться конечным (см. ниже).

Обозначения (6) позволяют записать равенство (5) так:

$$(I, R^{-1}\bar{F}_n) = a_n, \quad a_n \equiv - \int_s K_n E^0 ds; \quad (7)$$

$R^{-1}$  — оператор, обратный оператору  $R$  ( $RR^{-1} = 1$ ), а  $a_n$  — известные числа.

Выберем в качестве  $K_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , семейство дважды непрерывно дифференцируемых\* на  $s_c$  векторных функций, полное относительно  $L(s_0)$  ( $L(s_0)$  — пространство суммируемых на  $s_0$  векторных функций, тангенциальных к  $s_0$ ;  $L_R^2(s_0) \subset L(s_0)$ ). Такое семейство всегда существует. Легко видеть, что  $I$  и  $R^{-1}\bar{F}_n$  включены в  $L_R^2(s_0)$ .

Введем еще подпространство  $M(s_0)$ , элементами которого являются вектор-функции  $A \in L_R^2(s_0)$ , удовлетворяющие следующим дополнительным требованиям:

- 1)  $A$  имеют непрерывные вторые производные на  $s$ ;
- 2) нормальная к  $\mathcal{L}$  компонента  $A$  стремится к нулю, при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$ , не слабее чем  $\rho^{1/2}$ .

$M(s_0)$  всюду плотно в  $L_R^2(s_0)$ , поэтому его замыкание  $\bar{M}(s_0)$  совпадает с  $L_R^2(s_0)$ . Покажем сначала, что семейство  $R^{-1}\bar{F}_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , полно относительно  $M(s_0)$ , т. е. из условий

$$(A, R^{-1}\bar{F}_n) \equiv \int_{s_0} A F_n ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где  $A \in M(s_0)$ , следует, что  $A = 0$  на  $s_0$ .

Перепишем равенство (8), учитывая (4):

$$\int_s A E \{K_n, s_0\} ds - \rho_0 \int_\Sigma K_n A ds = 0,$$

или, используя лемму типа (2),

$$\int_{s_0} K_n E \{A, s\} ds - \rho_0 \int_\Sigma K_n A ds = 0.$$

Представляя первый интеграл в виде суммы интегралов по  $s$  и  $\Sigma$  и объединяя соответствующие члены, запишем последнее равенство так:

$$\int_{s_0} K_n F ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$F = \begin{cases} E_t \{A, s\} & \text{на } s, \\ E_t \{A, s\} - \rho_0 A & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (10)$$

\* Это требование можно ослабить.



Поскольку  $\mathbf{F} \in L(s_0)$ , а семейство  $\mathbf{K}_n$  полно в  $L(s_0)$ , то из условий (9) следует, что  $\mathbf{F} = 0$  (почти всюду) на  $s_0$ . Отсюда, учитывая (10), 548

$$\mathbf{E}_t\{\mathbf{A}, s\} = 0 \quad \text{на } s, \quad \rho_0 \mathbf{A} = \mathbf{E}_t\{\mathbf{A}, s\} \quad \text{на } \Sigma. \quad (11)$$

Поле  $\mathbf{E}\{\mathbf{A}, s\}$ ,  $\mathbf{H}\{\mathbf{A}, s\}$  вследствие первого условия (11) и теоремы единственности обращается в нуль во всем пространстве. Так как ток  $\mathbf{A}$  равен скачку  $\mathbf{H}_t\{\mathbf{A}, s\}$  при переходе через  $s$ , то  $\mathbf{A} = 0$  на  $s$ ; из второго условия (11) следует также, что  $\mathbf{A} = 0$  на  $\Sigma$ . Таким образом,  $\mathbf{A} = 0$  на  $s_0$  и полнота в  $M(s_0)$  доказана. Поскольку  $\bar{M}(s_0) = L_R^2(s_0)$ , то вследствие непрерывности скалярного произведения  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n$  полно также относительно  $L_R^2(s_0)$ .

Дальнейший путь решения аналогичен используемому в методе Энскогога (1).

Прежде всего ортонормируя семейство  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n$ , приходим к функциям

$$\mathbf{u}_m = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где числа  $a_n^{(m)}$  находятся из условий  $(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n) = \delta_{mn}$  по известным формулам. Далее, умножая первое равенство (7) на  $\overline{a_n^{(m)}}$  и суммируя результат по  $n$  от нуля до  $m$ , найдем

$$(\mathbf{I}, \mathbf{u}_m) = c_m, \quad c_m \equiv \sum_{n=0}^m a_n \overline{a_n^{(m)}}. \quad (13)$$

Таким образом,  $c_m$  — коэффициент Фурье вектор-функции  $\mathbf{I}$ , и, следовательно,

$$\mathbf{I}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbf{u}_n(q), \quad q \in s_0. \quad (14)$$

Этот ряд сходится по норме  $L_R^2(s_0)$  и определяет ток  $\mathbf{K}$  на  $s$  и  $\mathbf{E}_t$  на  $\Sigma$  (см. (5)). Искомое вторичное поле определяется во всем пространстве рядом

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}\{\mathbf{K}, s\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbf{U}_n(q); \quad (15)$$

здесь

$$\mathbf{U}_n(q) = \frac{1}{i4\pi\omega\epsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_s \mathbf{u}_n(p) \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|} ds.$$

Выражения для  $\mathbf{H}$  мы не выписываем. Как и в (2), можно показать, что ряд (15) сходится равномерно в любой области, не пересекающейся с  $\bar{s}$ . Для улучшения сходимости ряда (14) (а значит, и (15)) желательно, чтобы каждый его член имел такие же особенности на  $\mathcal{L}$ , как и  $\mathbf{I}$ . Это обеспечивается указанным выше выбором оператора  $R$ .

Если вычисление  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, s_0\}$ , входящей во все расчетные формулы (см. (4)), не легче, чем  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, s\}$ , то метод следует упростить. Для этого нужно положить  $\mathbf{K}_n \equiv 0$  на  $\Sigma$ . При этом  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, s_0\} \equiv \mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, s\}$ , интегралы по  $\Sigma$  исчезают и всюду следует заменить  $s_0$  на  $s$ ,  $\mathbf{I}$  — на  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{F}_n$  — на  $\mathbf{E}_t\{\mathbf{K}_n, s\}$ . Функции  $\mathbf{u}_n(q)$ ,  $q \in s$ , получаются теперь в результате ортогонализации семейства  $R^{-1}\mathbf{E}_t\{\mathbf{K}_n, s\}$  на  $s$ , полнота которого в  $L_R^2(s)$  есть простое следствие полноты  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n$  в  $L_R^2(s_0)$ . Таким образом, отпадает необходимость введения  $\Sigma$  (ср. с (2)).

Отметим еще, что основное равенство (5) может быть непосредственно использовано для сведения задачи к решению системы линейных уравнений, минуя ортогонализацию. Для этого достаточно подставить в (5) выражение для  $I$  в виде ряда

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} b_m A_m, \quad A_m \in L_R^2(s_0),$$

где  $A_m$  — полное в  $L_R^2(s_0)$  семейство функций.

Тогда для нахождения постоянных  $b_m$  будем иметь систему

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_{nm} b_m = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad Z_{nm} \equiv \int_{s_0} F_n A_m ds.$$

Числа  $Z_{nm}$  и  $a_n$  (см. (7)) известны.

Если выбор  $A_m$  произведен так, что последняя система хорошо обусловлена, то определение  $b_m$  на ЭВМ не представляет большого труда.

Поступило  
14 XI 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960. <sup>2</sup> Я. Н. Фельд, ДАН, 206, № 6 (1972).

УДК 538.574.6

## ДИФРАКЦИЯ СКАЛЯРНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

*Я. Н. Фельд*

Построен единый ряд для «тока» (скачок нормальной производной поля в случае условий Дирихле и скачок самого поля для условий Неймана) на заданной поверхности и поля на вспомогательной поверхности, дополняющей заданную до замкнутой. Ряд этот сходится по норме некоторого пространства  $L_R^2(s_0)$ . Получен также равномерно сходящийся ряд для искомого дифрагированного поля. Метод решения основан на использовании квадратичных лемм с последующей ортогонализацией некоторой полной (относительно  $L_R^2(s_0)$ ) системы функций.

В качестве примера рассмотрена дифракция плоской волны на части кругового цилиндра. Приведены кривые распределения тока и диаграммы направленности вторичного поля.

Указан метод сведения рассматриваемых задач к системам линейных уравнений.

### 1. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Пусть первичное поле  $\psi^0(q)$  дифрагирует на незамкнутой поверхности  $s$ , краем которой служит гладкий контур  $\mathcal{L}$ .

Вторичное поле удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

во всем пространстве вне  $\bar{s} = s + \mathcal{L}$  и краевым условиями Дирихле

$$(2) \quad \psi^+ = \psi^- = -\psi^0 \text{ на } s^*.$$

Кроме того,  $\psi$  подчиняется условиям типа Майкснера [1] на контуре  $\mathcal{L}$  и условиям излучения на бесконечности. Как известно, эта задача имеет единственное решение. Целью настоящей работы является построение последнего. Введем поверхностный «ток» на  $s$  при помощи выражения

$$(3) \quad w = \frac{\partial \psi^+}{\partial n} - \frac{\partial \psi^-}{\partial n}$$

где  $\partial / \partial n$  — оператор дифференцирования по направлению нормали к  $s$ . Тогда поле  $\psi$  во всем пространстве определяется формулой [2]

$$(4) \quad \psi(q) = - \int_s w(p) f(p, q) dp.$$

Здесь

$$(5) \quad f(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|}.$$

---

\* Индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения величин при переходе на  $s$  со стороны, куда направлена нормаль  $n$  к  $s$ , и с противоположной соответственно.

$dp$  — дифференциал площади поверхности  $s$  в точке  $p$ ;  $k$  — волновое число.

Дополним  $s$  до замкнутой поверхности при помощи геометрической поверхности  $\Sigma$  (рис. 1). Введем также следующие обозначения:  $s_0 = s + \Sigma$ ,  $\psi\{v, s\}$  — поле, возбуждаемое током  $v$ , распределенным на  $s$ . Таким образом, поле (4) можно записать так:  $\psi(q) = \psi\{w, s\}$ .

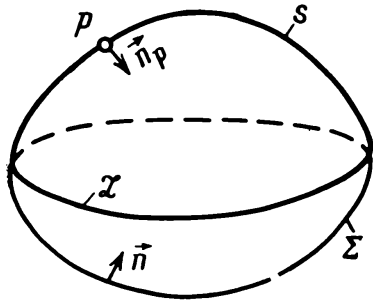


Рис. 1

Нам понадобится квадратичная лемма, которую легко получить, применив вторую теорему Грина к двум полям  $\psi\{w, s\}$  и  $\psi\{w_n, s_0\}$ , возбуждаемым токами  $w$  и  $w_n$ , распределенными на  $s$  и  $s_0$  соответственно. Она имеет, учитывая (3), вид\*

$$(6) \quad \int_s w \psi\{w_n, s_0\} dp = \int_{s_0} w_n \psi\{w, s\} dp.$$

Полагая, что в равенстве (6)  $w$  есть искомый ток (3), а  $w_n$  — один из семейства вспомогательных токов (которое мы определим ниже), перепишем его, учитывая (2), так:

$$(7) \quad \int_s w \psi\{w_n, s_0\} dp = - \int_s w_n \psi^0 dp + \int_\Sigma w_n \psi\{w, s\} dp.$$

Используя обозначения

$$(8) \quad J = \begin{cases} w & \text{на } s, \\ k\psi\{w, s\} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad F_n = \begin{cases} k\psi\{w_n, s_0\} & \text{на } s, \\ -w_n & \text{на } \Sigma, \end{cases}$$

придадим равенству (7) следующий вид:

$$(9) \quad \int_{s_0} J F_n dp = -k \int_s w_n \psi^0 dp.$$

Это основное соотношение, которое используется ниже для нахождения  $J$ , т. е. (см. (8)) тока  $w$  на  $s$  и поля  $\psi$  на  $\Sigma$ . Формула (4) после этого позволяет определить поле всюду. Введем гильбертово пространство  $L_R^2(s_0)$ , элементами которого являются функции, заданные на  $s_0$ . Скалярное произведение и норма определим формулами [3]

$$(10) \quad (w, v) = \int_{s_0} w(p) \overline{v(p)} R(p) dp, \quad \|w\| = \sqrt{\overline{(w, w)}}.$$

Здесь черта — знак комплексного сопряжения, а  $R(p) > 0$  при  $p \in s$  — непрерывная на  $\bar{s}$  функция, стремящаяся к нулю при приближении к  $\mathcal{L}$ , так, чтобы  $w \in L_R^2(s_0)$  удовлетворяли требованиям, налагаемым на ток условием Майкснера (см. ниже); на поверхности  $\bar{\Sigma}$  ( $\bar{\Sigma} = \Sigma + \mathcal{L}$ ) функция  $R(p) > \epsilon > 0$  непрерывна и, в частности, может быть константой. Функция принадлежит  $L_R^2(s_0)$ , если ее норма конечна. Наряду с  $L_R^2(s_0)$  будем рассматривать также пространство  $L_R^2(s)$ , отличающееся заменой  $s_0$  на  $s$ . Норма и скалярное произведение снабжаются при этом индексом  $s$ .

\* Поскольку  $\psi\{w, s\}$  и  $\psi\{w_n, s_0\}$  непрерывны при переходе через  $s_0$ , индексы «±» у них опущены.

Обозначения (10) позволяют записать равенства (9) так:

$$(11) \quad (J, \bar{F}_n/R) = a_n, \quad a_n \equiv -k \int_s \psi^0 w_n dp,$$

где  $a_n$  — известные числа. Выберем в качестве  $w_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) семейство функций из  $L_R^2(s_0)$ , полное относительно последнего.

Методом, тождественным приведенному в [4], можно показать, что при любом  $v \in L_R^2(s_0)$  величина  $\psi(v, s_0) / R$  также включена в  $L_R^2(s_0)$ . Легко видеть, что и  $F_n / R \in L_R^2(s_0)$ . Это следует из того, что  $w_n \in L_R^2(s_0)$  по определению, а  $R > \varepsilon > 0$  на  $\Sigma$  и  $\psi\{w_n, s_0\} / R \in L_R^2(s_0)$ , как было только что отмечено. Очевидно и  $J \in L_R^2(s_0)$ , если  $w \in L_R^2(s)$ .

Покажем теперь, что последовательность  $\bar{F}_n / R$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) полна относительно  $L_R^2(s_0)$ , т. е. из условий

$$(12) \quad (v, \bar{F}_n/R) \equiv \int_{s_0} v F_n dp = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $v \in L_R^2(s_0)$ , следует, что  $v = 0$  на  $s_0$ . Перепишем равенство (12), учитывая вторую формулу (8):

$$k \int_s v \psi\{w_n, s_0\} dp - \int_\Sigma v w_n dp = 0,$$

или, используя лемму типа (6),

$$k \int_{s_0} w_n \psi\{v, s\} dp - \int_\Sigma w_n v dp = 0.$$

Представляя первый интеграл в виде суммы интегралов по  $s$  и  $\Sigma$  и объединяя соответствующие члены, запишем последнее равенство так:

$$(13) \quad \int_{s_0} w_n F dp \equiv (w_n, \bar{F}/R) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(13a) \quad F = \begin{cases} k\psi\{v, s\} & \text{на } s, \\ k\psi\{v, s\} - v & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

$\bar{F} / R \in L_R^2(s_0)$ , так как  $v \in L_R^2(s_0)$  и, следовательно,  $\psi\{v, s\} / R \in L_R^2(s_0)$ , как уже отмечалось выше. Поэтому поскольку система  $w_n$  полна относительно  $L_R^2(s_0)$ , из условий (13) следует, что  $F / R = 0$  на  $s_0$  (почти всюду). Отсюда, учитывая (13a),

$$(14) \quad \psi\{v, s\} = 0 \quad \text{на } s, \quad v = k\psi\{v, s\} \quad \text{на } \Sigma.$$

Поле  $\psi\{v, s\}$ , вследствие теоремы единственности и первого условия (14), обращается в нуль во всем пространстве. Так как ток  $v$  равен скачку  $\partial\psi / \partial n$  при переходе через  $s$  (см. (3)), то  $v = 0$  на  $s$ ; из второго условия (14) следует, что  $v = 0$  и на  $\Sigma$ . Таким образом,  $v = 0$  на  $s_0$  и полнота доказана.

Дальнейший путь решения аналогичен используемому в методе Энскога [5].

Ортонормируем прежде всего семейство  $\bar{F}_n/R$ , т. е. построим функции

$$(15) \quad u_m = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} \bar{F}_n/R, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где постоянные  $a_n^{(m)}$  находятся из условий  $(u_m, u_n) = \delta_{mn}$  (см. [3], стр. 88) и имеют следующий вид:

$$(16) \quad a_n^{(m)} = D_{mn}^{(m+1)} / \sqrt{D_m D_{m+1}}.$$

Здесь

$$D_0 = 1, \quad D_{m+1} = \begin{vmatrix} d_{00} & \dots & d_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m0} & \dots & d_{mm} \end{vmatrix}, \quad d_{mn} = \left( -\frac{F_m}{R}, \frac{F_n}{R} \right),$$

$D_{in}^{(m+1)}$  — алгебраическое дополнение элемента  $d_{in}$  в определителе  $D_{m+1}$ . Система  $u_m$  полна относительно  $L_R^2(s_0)$ , поскольку полна исходная система  $\bar{F}_n/R$ . Найдем коэффициенты Фурье функции  $J$  по ортонормальной системе  $u_m$ . Для этого умножим первое равенство (11) на  $\overline{a_n^{(m)}}$  и просуммируем результат по  $n$  от нуля до  $m$ . Тогда, используя (15), получим

$$(17) \quad (J, u_m) = c_m, \quad \text{где} \quad c_m = \sum_{n=0}^m \overline{a_n^{(m)}} a_n.$$

Таким образом,  $c_m$  — искомые коэффициенты Фурье функции  $J \in L_R^2(s_0)$ , совпадающей с током на  $s$  и полем на  $\Sigma$  (см. (8)). Как известно, ряд Фурье по полной, ортонормальной системе функций сходится (по норме  $L_R^2(s_0)$ ) к функции из  $L_R^2(s_0)$ , для которой он составлен, поэтому

$$(18) \quad J(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(q), \quad q \in s_0.$$

Рассмотрим отрезок ряда

$$(19) \quad \Phi_N(q) = - \sum_{n=0}^N c_n \int_s f(p, q) u_n(p) dp.$$

Учитывая (4) и неравенство Коши — Буняковского, найдем

$$(20) \quad |\psi(q) - \Phi_N(q)| = \left| \left( w - \sum_{n=0}^N c_n u_n, \bar{f}/R \right)_s \right| \leq \\ \leq \left\| \frac{f}{R} \right\|_s \left\| w - \sum_{n=0}^N c_n u_n \right\|_s.$$

Пусть  $Q$  — произвольная область пространства, не пересекающаяся с  $\bar{s}$ . Тогда первый множитель правой части (20) ограничен в  $Q$ , а второй стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , вследствие сходимости (18) по норме  $L_R^2(s_0)$ ,

поскольку  $\left\| w - \sum_{n=0}^N c_n u_n \right\| \leq \left\| J - \sum_{n=0}^N c_n u_n \right\|$ . Поэтому  $\Phi_N(q) \rightarrow \psi(q)$  рав-

номерно в  $Q$ . Следовательно,

$$(21) \quad \psi(q) \equiv \psi\{w, s\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n(q),$$

где

$$(22) \quad U_n(q) = - \int_s f(p, q) u_n(p) dp.$$

Равномерно сходящийся в  $Q$  ряд (21) и дает решение поставленной задачи. Диаграмма направленности, создаваемая «током»  $w$  (т. е. вторичное поле в дальней зоне) определяется известной формулой

$$(23) \quad \Phi(\theta, \varphi) = \int_s w e^{ikr \cos \vartheta} ds.$$

Здесь  $\theta, \varphi$  — угловые координаты точки наблюдения;  $r$  — расстояние от начала координат до точки интегрирования;  $\vartheta$  — угол между радиус-векторами, проведенными из начала координат в точку наблюдения и точку интегрирования.

Вернемся к определению весовой функции  $R(q)$ . Она стоит в знаменателе выражения (15) для  $u_m$ . Для улучшения сходимости ряда (18) (а значит и (21)) нужно, чтобы каждый член ряда имел ту же особенность на  $\mathcal{L}$ , что и  $J$ . Как известно, из условий Майкснера следует, что  $J$  (см. (8)) является разрывной на  $\mathcal{L}$  функцией, стремящейся к бесконечности как  $\rho^{-1/2}$  ( $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ ) при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  и остающейся конечной и равной  $-k\psi^0$  при приближении со стороны  $\Sigma$ . Поэтому в качестве  $R(q)$  следует выбирать положительную, непрерывную на  $s$  и  $\Sigma$  функцию, стремящуюся к нулю как  $\rho^{1/2}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$ . На  $\Sigma$  ее можно взять постоянной.

Для определения  $\psi(q)$  достаточно знать  $J$  только на  $s$  (т. е. ток  $w$ ), как это следует из (4). Поэтому можно было бы не вводить вспомогательной поверхности  $\Sigma$  и поступать так, как это сделано в нашей работе [4]. Формально можно перейти к формулам последней, положив выше  $w_n = 0$  на  $\Sigma$ . Однако метод, развитый здесь, имеет вычислительные преимущества в ряде практически интересных случаев.

Действительно, для некоторых поверхностей  $s_0, w_n$  могут быть выбраны так, чтобы функции  $\psi\{w_n, s_0\}$ , входящие в основные расчетные формулы, вычислялись значительно проще, чем  $\psi\{w_n, s\}$ , фигурирующие в аналогичных формулах работы [4]. Это, например, имеет место, когда задача Дирихле для областей, лежащих внутри и вне  $s_0$ , может быть решена методом разделения переменных.

Рассмотрим пример, когда  $s$  — часть бесконечного (вдоль оси  $z$ ) идеально проводящего цилиндра радиуса  $r_0$  и на него падает в направлении  $-x$  плоская электромагнитная волна с вектором  $E^0$ , параллельным оси  $z$ . Поверхность  $\Sigma$  дополняет  $s$  до полного цилиндра. Эта задача сводится к плоской с  $\psi = E_z$  (вторичное поле) и  $\psi^0 = E_z^0 = e^{ikx}$ , при граничных условиях (2). «Ток»  $w$  теперь только множителем  $1/i\omega\mu$  отличается от плотности электрического поверхностного тока, текущего по  $s$ . Введем в плоскости  $z = \text{const}$  полярную систему координат  $r, \varphi$ ; остальные обозначения

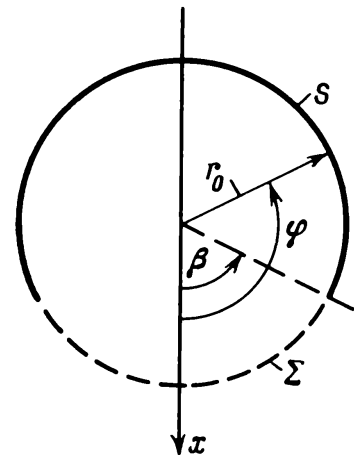


Рис. 2

ясны из рис. 2. Вследствие симметрии задачи относительно оси  $x$  выбираем  $w_n = \cos n\varphi$  на  $s_0$ . Последняя система полна относительно четных функций из  $L_R^2(s_0)$ . Легко видеть, что при этом

$$(24) \quad \psi\{w_n, s_0\} = \frac{i\pi r_0}{2} J_n(kr_0) H_n^{(2)}(kr_0) \cos n\varphi \text{ на } s_0.$$

Вычисление же  $\psi\{w_n, s\}$  сложно и сводится к взятию интеграла типа (4) по части окружности. В качестве  $R$  в настоящем примере удобно взять симметричную относительно оси  $x$  функцию, равную

$$(24a) \quad R = \sqrt{(\varphi - \beta)(2\pi - \beta - \varphi)} \text{ на } s \quad (\beta < \varphi < 2\pi - \beta); \quad R = 1 \text{ на } \Sigma \\ (|\varphi| < \beta),$$

$2(\pi - \beta)$  — центральный угол дуги  $s$ , на концах дуги  $s$ ,  $\varphi = \pm\beta$ .

По формулам (18) и (23) были рассчитаны и построены кривые распределения тока  $J = w$  на  $s$  и соответствующие диаграммы направленности. Все расчеты проводились для  $kr_0 = 10$  и для различных  $\beta$  (см. рис. 2). Учитывая симметрию задачи относительно оси  $x$ , кривые строились для тока в интервале углов  $\beta < \varphi \leq \pi$ , а диаграммы — в интервале  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $\theta = 90^\circ$ . На рис. 3–5 приведены кривые для  $r_0|w|$  и  $\arg w$ , рассчитанные при  $\beta = 10, 40, 90^\circ$ . Число членов ряда (18) взято равным двадцати ( $N = 20$ ). Для того чтобы судить о сходимости ряда (18), на рис. 5 даны кривые  $r_0|w|$  при  $\beta = 90^\circ$ , вычисленные для  $N = 13, 18, 20$ . При  $N = 18$  и 20 расхождение имеет место только вблизи экстремальных точек. Обратим внимание, что при  $kr_0 = 10$  на окружности  $s_0$  укладываются 20 полуволн. То, что металл занимает только часть окружности, в данном случае несущественно для сходимости, так как ряд (18) определяет  $J$  на всей  $s_0$  (см. (8)). По-видимому, метод, изложенный в [4], даст более быструю сходимость, которая будет определяться числом полуволн, укладывающихся только на  $s$ , однако он более сложен в вычислительном плане для рассматриваемой задачи. На рис. 6 и 7 приведены амплитуды и фазы диаграмм направленности вторичного поля, найденные при  $\beta = 10, 40^\circ$ . Все они рассчитывались для  $N = 20$ . Сходимость здесь, как и следовало ожидать, значительно лучше, чем для тока.

Все приведенные кривые рассчитаны на ЭВМ И. Ф. Гусевой под руководством М. Г. Белкиной, за что автор выражает им глубокую признательность.

## 2. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ НЕЙМАНА

Рассмотрим задачу дифракции, отличающуюся от предыдущей только заменой краевого условия (2) на следующее:

$$(25) \quad \frac{\partial \psi^+}{\partial n} = \frac{\partial \psi^-}{\partial n} = -\frac{\partial \psi^0}{\partial n} \text{ на } s.$$

Метод решения, развитый выше, может быть применен (путем естественной модификации) и для задач дифракции с краевым условием (25). Дадим формальное его изложение, выписывая для краткости только те формулы, которые отличаются от приведенных выше.

Так, поверхностный «ток» на  $s$  и создаваемое им поле связаны теперь формулами [2]

$$(26) \quad w = \psi^+ - \psi^-; \quad \psi(q) = \int_s w(p) \frac{\partial f(p, q)}{\partial n_p} dp.$$



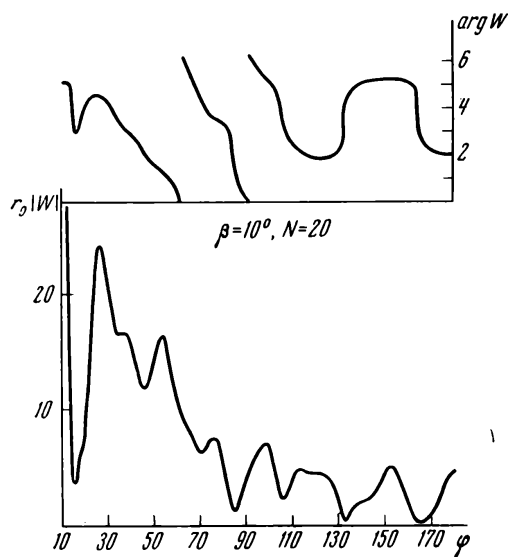


Рис. 3

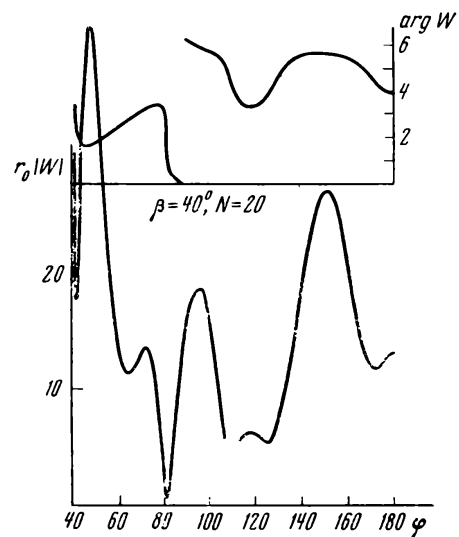


Рис. 4

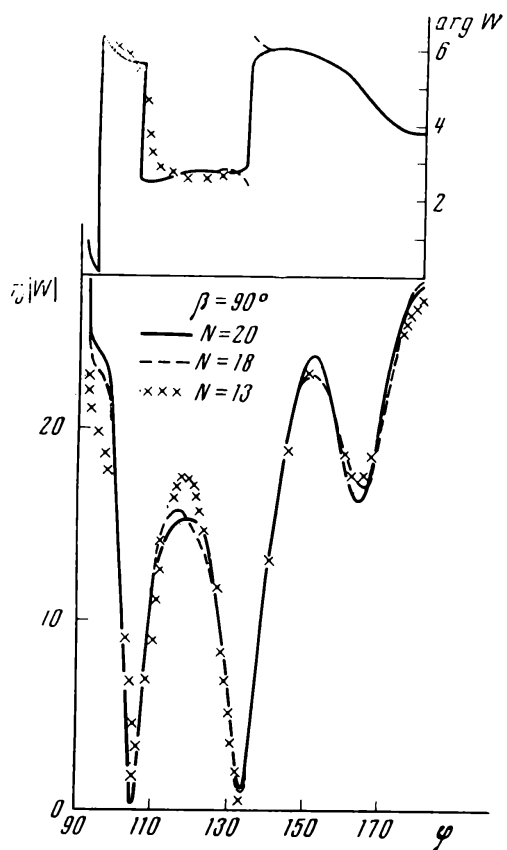


Рис. 5

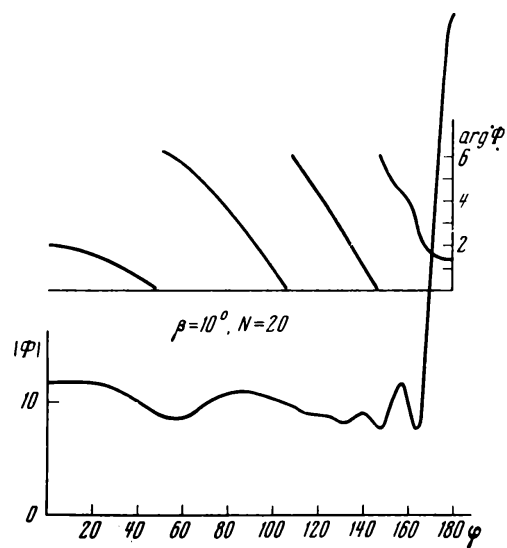


Рис. 6

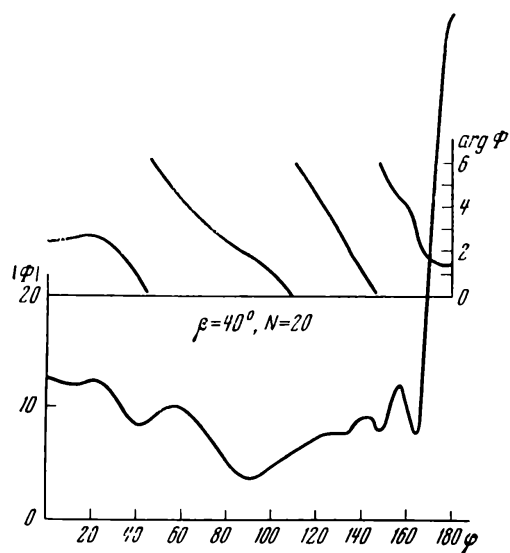


Рис. 7

Функция  $R(p)$ , фигурирующая в формулах (8), (9) и ряде следующих, должна, учитывая условия Майкснера для задач Неймана [1], стремиться к бесконечности как  $\rho^{-1/2}$  при приближении к контуру  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  и к нулю как  $\rho^{1/2}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $\Sigma$ .

Квадратичная лемма типа (6) заменяется следующей\*:

$$(27) \quad \int_s w \frac{\partial \psi \{w_m, s_0\}}{\partial n} dp = \int_{s_0} w_m \frac{\partial \psi \{w, s\}}{\partial n} dp,$$

которая также получается из теоремы Грина с учетом (26). Полагая, что  $w$  в (27) — искомый ток, перепишем (27), учитывая условия (25):

$$(28) \quad \int_s w \frac{\partial \psi \{w_m, s_0\}}{\partial n} dp = - \int_s w_m \frac{\partial \psi^0}{\partial n} dp + \int_\Sigma w_m \frac{\partial \psi \{w, s\}}{\partial n} dp.$$

Введем вместо (8) обозначения

$$(29) \quad J = \begin{cases} w & \text{на } s, \\ \frac{1}{k} \frac{\partial \psi \{w, s\}}{\partial n} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad F_m = \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{\partial \psi \{w_m, s_0\}}{\partial n} & \text{на } s, \\ -w_m & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Тогда равенство (28) можно переписать так:

$$\int_{s_0} J F_m dp = - \frac{1}{k} \int_s w_m \frac{\partial \psi^0}{\partial n} dp,$$

или, используя обозначение (10),

$$(30) \quad (J, \bar{F}_m/R) = a_m, \text{ где } a_m = - \frac{1}{k} \int_s w_m \frac{\partial \psi^0}{\partial n} dp.$$

Далее рассуждения, тождественные проведенным выше, приводят к формулам (15)–(18), в которых  $F_n$  и  $a_n$  определяются теперь вторыми формулами (29) и (30). Таким образом, ток  $w$  на  $s$  дается выражением (18). Оно же определяет нормальную производную искомого поля  $\psi$  на  $\Sigma$  (см. первую формулу (29)). Для нахождения вторичного поля  $\psi$  в произвольной области  $Q$ , не пересекающейся с  $\bar{s}$ , подставим (18) во вторую формулу (26), после чего придем к выражению (21), где  $U_n$  теперь имеет следующий вид (ср. с (22)):

$$(31) \quad U_n(q) = \int_s u_n(p) \frac{\partial f(p, q)}{\partial n_p} dp.$$

Таким образом, задача о дифракции первичной волны  $\psi^0$  у поверхности  $s$  с краевыми условиями Неймана (25) решается аналогичным путем. Строгое обоснование результатов этого параграфа может быть проведено методом, аналогичным данному в работе [6]. При этом на семейство функций  $w_m$  приходится накладывать дополнительное требование (существование непрерывных вторых производных на  $s_0$ ).

\* Фигурирующие в (27) величины  $\partial \psi / \partial n$  являются предельными значениями  $\partial \psi^+ / \partial n = \partial \psi^- / \partial n$ , у которых для краткости опущены индексы «+», «-».

## 3. СВЕДЕНИЕ К БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущих параграфах соотношение (11) (или (30)) использовалось для нахождения  $J$  путем ортогонализации семейства функций  $\bar{F}_n/R$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Однако это не единственный прием. Можно от (11) перейти к бесконечной системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами и решать ее обычными методами на ЭВМ.

Для этого следует использовать некоторую подходящую, полную в  $L_R^2(s_0)$ , систему функций  $\xi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) (в частности, она может совпадать с  $\bar{F}_n/R$ ) и искать решение в виде

$$(32) \quad J(q) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \xi_m(q), \quad q \in s_0.$$

Здесь  $b_m$  — искомые постоянные числа. Подставляя этот ряд в первое равенство (11), найдем

$$(33) \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (\xi_m, \bar{F}_n/R) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

или, вводя обозначение

$$(33a) \quad z_{nm} \equiv (\xi_m, \bar{F}_n/R),$$

$$(34) \quad \sum_{m=0}^{\infty} z_{nm} b_m = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Числа  $z_{nm}$  и  $a_n$  известны. Если выбор функций  $\xi_m$  произведен так, чтобы система (34) была хорошо обусловлена, нахождение  $b_m$  из нее не представляет большого труда.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хенл, А. Маур, К. Вестпфаль, Теория дифракции, ИЛ, 1964.
2. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 7, 1159.
3. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
4. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1972, 206, 6.
5. Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
6. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1973, 212, 1.

Поступила в редакцию  
11 I 1973

УДК 538.574.6

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛАХ

Я. Н. Фельд

Рассмотрена дифракция первичной волны на одном или нескольких однородных телах с произвольными (различными) параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$ . Построены ряды (сходящиеся в среднем) для тангенциальных составляющих электрического и магнитного векторов на поверхности рассматриваемых тел. Для поля внутри и вне тел получены равномерно сходящиеся ряды. Разложение ведется по специальным функциям, для построения которых необходимо решать внутреннюю краевую задачу для каждого тела в отдельности. Коэффициенты Фурье в указанных рядах находятся при помощи леммы Лоренца. Метод пригоден также для решения задач о дифракции на телах в присутствии металлических (или иных) поверхностей, если известно решение задачи о возбуждении поля заданными токами в присутствии этих поверхностей.

Рассмотрим задачу о дифракции произвольной первичной электромагнитной волны  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , падающей на некоторое тело с параметрами  $\epsilon, \mu$  (в общем случае комплексными). Поверхность, ограничивающую тело, обозначим через  $s$ , а область, занимаемую им, через  $Q^+$  (рис. 1). Вся остальная часть пространства  $Q^-$  однородна, ее параметры  $\epsilon_0, \mu_0$ . Полное поле запишем в области  $Q^-$  в виде  $\vec{E} + \vec{E}^0, \vec{H} + \vec{H}^0$ , т. е. выделяя первичную волну, а в области  $Q^+$  — в виде  $\vec{E}, \vec{H}$ . Введенное таким образом поле  $\vec{E}, \vec{H}$  всюду удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, принципу излучения на бесконечности и следующим граничным условиям на поверхности  $s$ :

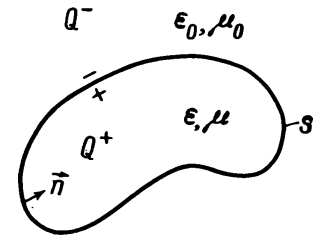


Рис. 1

$$(1) \quad \vec{E}_t^+ = \vec{E}_t^- + \vec{E}_t^0, \quad \vec{H}_t^+ = \vec{H}_t^- + \vec{H}_t^0.$$

Здесь  $\vec{E}_t^-$  — предельное значение тангенциальной составляющей  $\vec{E}$  при стремлении к  $s$  со стороны области  $Q^-$ , а  $\vec{E}_t^+$  — со стороны  $Q^+$ , аналогично для  $\vec{H}$ .

Эти составляющие на  $s$  мы будем рассматривать как элементы гильбертова пространства  $L^2(s)$  со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами

$$(2) \quad (\vec{A}, \vec{B}) = \int_s \vec{A} \vec{B} ds, \quad \|\vec{A}\| = \sqrt{(\vec{A}, \vec{A})}.$$

Элементы  $L^2(s)$  — касательные к  $s$  векторы с конечной нормой \*\*. Черта — знак комплексного сопряжения.

\* Поверхность  $s$  предполагается достаточно гладкой.

\*\* В настоящей работе предполагается, что элементами всех вводимых пространств являются заданные на  $s$  векторные функции, касательные к  $s$  в соответствующих точках.

Зададим на поверхности  $s$  семейство векторных функций  $\vec{K}_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), принадлежащих пространству  $C^{(2)}(s)$  ( $C^{(2)}(s)$  — пространство функций, обладающих непрерывными вторыми производными на  $s$ ). Будем также считать, что линейные комбинации функций  $\vec{K}_m$  всюду плотны в  $C^{(2)}(s)$  (по норме  $C^{(2)}(s)$ ). Такое семейство всегда существует.

Введем теперь вспомогательные поля  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) следующим образом.

I. Во внешнем пространстве  $Q^-$   $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  определяется как поле, создаваемое поверхностным электрическим током с плотностью  $\vec{K}_m$ , распределенным на  $s$ . При этом временно предполагается, что все пространство  $Q^-+Q^+$  однородно и обладает параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$ . Таким образом, в области  $Q^-$

$$(3) \quad \vec{E}_m = \text{rot rot } \vec{\Pi}_m, \vec{H}_m = i\omega\epsilon_0 \text{ rot } \vec{\Pi}_m, \vec{\Pi}_m = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \int_s \vec{K}_m \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r} ds.$$

II. В области  $Q^+$ , занимаемой телом, поле  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  находится из решения первой краевой задачи\*, обеспечивающей непрерывность тангенциальной составляющей  $\vec{E}_m$  при переходе через  $s$ ; т. е. оно удовлетворяет внутри  $Q^+$  однородным уравнениям Максвелла (с параметрами среды  $\epsilon, \mu$ ) и краевому условию  $\vec{E}_{mt}^+ = \vec{E}_{mt}^-$  на  $s$ .  $\vec{E}_{mt}^-$  на  $s$  элементарно находится из первой формулы (3).

Таким образом, введенное поле  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла (с параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$  внутри  $Q^-$  и  $\epsilon, \mu$  внутри  $Q^+$ ), принципу излучения (см. (3));  $\vec{E}_{mt}$  непрерывно при переходе через  $s$ , а  $\vec{H}_{mt}$  терпит скачок.  $\vec{H}_{mt}$  не может быть непрерывным при переходе через  $s$ , так как при этом, вследствие теоремы единственности,  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  всюду равнялось бы нулю, что противоречит (3).

При определении поля  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  можно было бы поменять местами области  $Q^-$  и  $Q^+$ , т. е. решать краевую задачу для  $Q^-$  и задать поле квадратурами\*\* (3) в области  $Q^+$ . Это не сделано, так как в ряде случаев значительно легче решать краевую задачу для внутренней области, чем для внешней. Последнее, например, имеет место для задач, где переменные разделяются, а  $s$  состоит из нескольких координатных поверхностей (куб, конечный цилиндр с торцами и т. п.).

Нам понадобится еще одно семейство вспомогательных полей  $\vec{e}_m, \vec{h}_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), отличающихся от  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  тем, что у них сохраняется непрерывность  $\vec{h}_{mt}$  при переходе через  $s$  и терпит разрыв  $\vec{e}_{mt}$ . Проще всего их определить следующим образом\*\*\*:

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{e}_m = -\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \vec{H}_m \\ \vec{h}_m = \vec{E}_m \end{array} \right\} \text{ в } Q^- \quad \left. \begin{array}{l} \vec{e}_m = -\frac{\mu}{\epsilon} \vec{H}_m \\ \vec{h}_m = \vec{E}_m \end{array} \right\} \text{ в } Q^+.$$

\* Эта задача может быть сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Последнее получим, выразив поле через магнитный ток, распределенный на  $s$ , и записав при помощи этого тока заданное краевое условие.

\*\* Опустив в них индексы нуль.

\*\*\* Если среда внутри  $Q^+$  неоднородна, то  $\vec{e}_m, \vec{h}_m$  следует определять внутри  $Q^-$  при помощи формул (3), а внутри  $Q^+$ , решая вторую краевую задачу с краевым условием  $\vec{h}_{mt}^+ = \vec{h}_{mt}^-$  на  $s$ .  $\vec{h}_{mt}^-$  находится из второй формулы (3).

Легко видеть, что введенные таким образом  $\vec{e}_m, \vec{h}_m$  удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла в областях  $Q^-$  и  $Q^+$ , принципу излучения, а  $\vec{h}_{mt}$  непрерывно при переходе через  $s$ .

Вернемся теперь к исходной задаче и применим лемму Лоренца к искомому полю  $\vec{E}, \vec{H}$  и вспомогательному  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$ . Тогда для области  $Q^-$  будем иметь

$$(5a) \quad \int_s \{[\vec{E}^- \vec{H}_m^-] - [\vec{E}_m^- \vec{H}^-]\} \vec{ds} = 0,$$

а для области  $Q^+$ , занимаемой телом,

$$(5b) \quad \int_s \{[\vec{E}^+ \vec{H}_m^+] - [\vec{E}_m^+ \vec{H}^+]\} \vec{ds} = 0.$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее и учитывая непрерывность  $\vec{E}_{mt}$  при переходе через  $s$ , а также условия (1), найдем\*

$$(6) \quad \int_s [\vec{E}^- (\vec{H}_m^+ - \vec{H}_m^-)] \vec{ds} = \int_s \{[\vec{E}_m \vec{H}^0] - [\vec{E}^0 \vec{H}_m^+]\} \vec{ds}.$$

Целесообразно переписать это равенство, используя обозначение (2):

$$(7) \quad (\vec{E}^-, \vec{A}_m) = a_m.$$

Здесь

$$(8) \quad \vec{A}_m \equiv [(\vec{H}_m^+ - \vec{H}_m^-) \vec{n}], \quad a_m \equiv \int_s \{[\vec{E}_m \vec{H}^0] - [\vec{E}^0 \vec{H}_m^+]\} \vec{ds}.$$

$\vec{n}$  — нормаль к  $s$  ( $\vec{ds} = \vec{n} ds$ ), направленная внутрь  $Q^+$ . Постоянные  $a_m$  и векторы  $\vec{A}_m$ , касательные к  $s$ , известны.

Найдем еще соотношения для тангенциальной составляющей магнитного вектора искомого поля, подобные (6) и (7). Для этого выпишем леммы Лоренца, применительно к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{e}_m, \vec{h}_m$ , для областей  $Q^-$  и  $Q^+$  соответственно:

$$(9) \quad \int_s \{[\vec{E}^- \vec{h}_m] - [\vec{e}_m^- \vec{H}^-]\} \vec{ds} = 0,$$

$$\int_s \{[\vec{E}^+ \vec{h}_m] - [\vec{e}_m^+ \vec{H}^+]\} \vec{ds} = 0.$$

Вычитая одно из другого, найдем, учитывая (1),

$$(10) \quad \int_s [\vec{H}^- (\vec{e}_m^+ - \vec{e}_m^-)] \vec{ds} = \int_s \{[\vec{h}_m \vec{E}^0] - [\vec{H}^0 \vec{e}_m^+]\} \vec{ds},$$

или

$$(11) \quad (\vec{H}^-, \vec{B}_m) = b_m,$$

где

$$(12) \quad \vec{B}_m \equiv [(\vec{e}_m^+ - \vec{e}_m^-) \vec{n}], \quad b_m \equiv \int_s \{[\vec{h}_m \vec{E}^0] - [\vec{H}^0 \vec{e}_m^+]\} \vec{ds}.$$

В Приложении 1 показано, что семейства  $\vec{A}_m$  и  $\vec{B}_m$  полны в пространстве  $L^2(s)$ . Поэтому формулы (7) и (11) можно использовать для определения (предельных) значений  $\vec{E}_t^-, \vec{H}_t^-$  на  $s$ . Для этого существует несколько

\* В (6) и ниже индексы  $\mp$  не ставятся у векторов, тангенциальные компоненты которых непрерывны при переходе через  $s$ .

путей. Начнем с метода ортогонализации. Ортонормируем семейства  $\vec{A}_m$  и  $\vec{B}_m$ , т. е. построим вектор-функции

$$(13) \quad \vec{u}_m = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} \vec{A}_n, \quad \vec{v}_m = \sum_{n=0}^m b_n^{(m)} \vec{B}_n,$$

где постоянные  $a_n^{(m)}$  и  $b_n^{(m)}$  находятся из условий  $(\vec{u}_m, \vec{u}_k) = \delta_{mk}$  и  $(\vec{v}_m, \vec{v}_k) = \delta_{mk}$  по известным формулам [1]. Семейства  $\vec{u}_m$  и  $\vec{v}_m$  полны в  $L^2(s)$ , поскольку полны исходные системы  $\vec{A}_m$  и  $\vec{B}_m$ . Определим коэффициенты Фурье искомых величин  $\vec{E}_t^-$  и  $\vec{H}_t^-$  на  $s$  по вектор-функциям  $\vec{u}_m$  и  $\vec{v}_m$ . Для этого следует умножить формулы (7) и (11) на  $\overline{a_m^{(n)}}$  и  $\overline{b_m^{(n)}}$  соответственно, а результаты просуммировать по  $m$  от нуля до  $n$ . Тогда, используя (13), найдем

$$(14) \quad (\vec{E}_t^-, \vec{u}_n) = c_n, \quad (\vec{H}_t^-, \vec{v}_n) = d_n.$$

Здесь

$$(15) \quad c_n \equiv \sum_{m=0}^n a_m \overline{a_m^{(n)}}, \quad d_n \equiv \sum_{m=0}^n b_m \overline{b_m^{(n)}},$$

$c_n$  и  $d_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) — искомые коэффициенты Фурье. Ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций сходится (по норме  $L^2(s)$ ) к функции из  $L^2(s)$ , для которой он составлен, поэтому

$$(16) \quad \vec{E}_t^- = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \vec{u}_n(q); \quad \vec{H}_t^- = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \vec{v}_n(q), \quad q \in s.$$

Для нахождения  $\vec{E}_t^+$  и  $\vec{H}_t^+$  следует использовать условия (1).

Можно также обойтись без ортогонализации и перейти от (7) и (11) к системам линейных уравнений для коэффициентов разложения  $\vec{E}_t^-$  и  $\vec{H}_t^-$  в ряды по подходящей системе функций (например, по  $\vec{A}_m$  и  $\vec{B}_m$ ) так, как это сделано в [2].

Зная  $\vec{E}_t^-$ ,  $\vec{H}_t^-$  и  $\vec{E}_t^+$ ,  $\vec{H}_t^+$  на  $s$ , можно определить искомые поля в областях  $Q^-$  и  $Q^+$  при помощи формул типа Гюйгенса — Кирхгофа [3]

$$(17) \quad \begin{aligned} \vec{E} &= \text{rot rot} \int_s \vec{K} \frac{e^{-ikr}}{4\pi i \omega \epsilon r} ds - \text{rot} \int_s \vec{K}_\mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} ds, \\ \vec{H} &= \text{rot} \int_s \vec{K} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} ds + \text{rot rot} \int_s \vec{K}_\mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi i \omega \mu r} ds. \end{aligned}$$

Здесь для области  $Q^+$  следует положить

$$(18a) \quad \vec{K} = [\vec{n}\vec{H}^+] = [\vec{n}(\vec{H}^- + \vec{H}^0)], \quad \vec{K}_\mu = [\vec{E}^+\vec{n}] = [(\vec{E}^- + \vec{E}^0)\vec{n}],$$

а для области  $Q^-$

$$(18b) \quad \vec{K} = [\vec{H}^-\vec{n}]; \quad \vec{K}_\mu = [\vec{n}\vec{E}^-]$$

и заменить в (17)  $k, \epsilon, \mu$  на  $k_0, \epsilon_0, \mu_0$ . Покажем, что, подставив в (17) выражения (16), получим равномерно сходящиеся ряды в любой замкну-

той области  $Q$ , не пересекающейся с  $s$ . Сделаем это на примере области  $Q$ , целиком лежащей в  $Q^-$ , для произвольной компоненты вектора  $\vec{E}$ . Умножим первое равенство (17) скалярно на некоторый единичный вектор  $\vec{p}$ . Тогда, учитывая (18б) и производя элементарные преобразования, найдем

$$(19) \quad \vec{p}\vec{E} = \int_s \vec{H}^- \vec{F}_1 ds - \int_s \vec{E}^- \vec{F}_2 ds,$$

где

$$(20) \quad \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon_0} \left[ \vec{n} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left( \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \vec{p} \right) \right], \quad \vec{F}_2 = \left[ \vec{n} \left[ \vec{p} \operatorname{grad} \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r} \right] \right].$$

В (20) операции  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{grad}$  производятся по координатам точки интегрирования.

Рассмотрим отрезок ряда, получаемого после подстановки (16) в (19):

$$(21) \quad f_N = \sum_{n=0}^N \left\{ d_n \int_s \vec{v}_n \vec{F}_1 ds - c_n \int_s \vec{u}_n \vec{F}_2 ds \right\}.$$

Используя обозначение (2), а также неравенство Коши — Буняковского, можно написать

$$\begin{aligned} |\vec{p}\vec{E} - f_N| &= \left| \left( \vec{H}^- - \sum_{n=0}^N d_n \vec{v}_n, \vec{F}_1 \right) - \left( \vec{E}^- - \sum_{n=0}^N c_n \vec{u}_n, \vec{F}_2 \right) \right| \leq \\ &\leq \|\vec{F}_1\| \cdot \left\| \vec{H}^- - \sum_{n=0}^N d_n \vec{v}_n \right\| + \|\vec{F}_2\| \cdot \left\| \vec{E}^- - \sum_{n=0}^N c_n \vec{u}_n \right\|. \end{aligned}$$

Вследствие ограниченности  $\|\vec{F}_1\|$  и  $\|\vec{F}_2\|$  в  $Q$  и сходимости (16) по норме правая часть неравенства стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому  $f_N \rightarrow \vec{p}\vec{E}$  равномерно в области  $Q$ . Ввиду произвольности выбора орта  $\vec{p}$ , очевидно, и ряд для полного вектора  $\vec{E}$  равномерно сходится в  $Q$ . Аналогичный результат справедлив и для ряда, определяющего  $\vec{H}$ . Все полученные в работе результаты справедливы и для случая, когда рассматривается задача

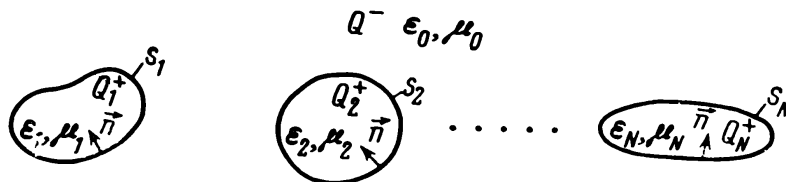


Рис. 2

о падении электромагнитной волны на систему из нескольких тел (рис. 2), каждое из которых обладает своими, отличными от остальных параметрами. Под  $s$  тогда следует понимать суммарную поверхность этих тел

$(s = \sum_m s_m)$ , а под  $Q^+$  — суммарную область, занимаемую телами

$(Q^+ = \sum_m Q_m^+)$ .  $Q^-$  — по-прежнему область, внешняя по отношению к  $Q^+$ .

Никаких добавочных рассмотрений задача с несколькими телами не требует.



Развитый выше метод допускает также очевидное обобщение на случай тел, находящихся внутри или вблизи металлических поверхностей, если известно решение задачи о возбуждении полей заданными токами в присутствии этих поверхностей. При этом естественно формулы типа (3) должны быть заменены формулами, учитывающими наличие указанных поверхностей. Простейшим примером подобной задачи является волновод с диэлектрическими телами, для которого формулы, заменяющие (3), хорошо известны.

Модификация метода для идеально проводящих тел очевидна.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Доказательство полноты $\vec{A}_m$ и $\vec{B}_m$ в $L^2(s)$

Рассмотрим гильбертову шкалу [4] пространств  $H^\alpha(s)$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ). При целых положительных  $\alpha$  эти пространства совпадают\* с пространствами Соболева. В частности,  $H^0(s) \equiv L^2(s)$ . Элементами  $H^{-\alpha}(s)$  при  $\alpha > 0$  являются обобщенные (в нашем случае векторные) функции, которые можно рассматривать как линейные непрерывные функционалы над пространством  $H^\alpha(s)$ . Справедливо обобщенное неравенство Шварца [4]

$$(22) \quad |(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|x\|_\alpha \|y\|_{-\alpha} \quad \text{при } \vec{x} \in H^\alpha(s), \vec{y} \in H^{-\alpha}(s).$$

Здесь индексы  $\alpha$  и  $-\alpha$  отмечают нормы соответствующих пространств. Из результатов главы 2 (страницы 215–217) монографии [5] может быть получена следующая

**Теорема 1.** Если электрический ток  $\vec{K}$  распределен на  $s$  и принадлежит  $H^\alpha(s)$ , то для поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , возбуждаемого этим током, справедливы утверждения:  $\vec{H}_i^\pm \in H^\alpha(s)$  и  $\vec{E}_i^\pm \in H^{\alpha-1}(s)$ . Аналогично, если магнитный ток  $\vec{K}_\mu \in H^\alpha(s)$ , то для его поля  $\vec{E}_i^\pm \in H^\alpha(s)$ ,  $\vec{H}_i^\pm \in H^{\alpha-1}(s)$ .

Покажем теперь, что семейства  $\vec{A}_m$  и  $\vec{B}_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) порознь полны в  $L^2(s)$ , т. е. из условий

$$(23) \quad (\vec{A}, \vec{A}_m) = 0, \quad (\vec{B}, \vec{B}_m) = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

где  $\vec{A} \in L^2(s)$ ,  $\vec{B} \in L^2(s)$ , следует, что  $\vec{A} = \vec{B} = 0$  на  $s$ .

Для этого введем два вспомогательных поля  $\vec{E}\{\vec{A}\}$ ,  $\vec{H}\{\vec{A}\}$  и  $\vec{e}\{\vec{B}\}$ ,  $\vec{h}\{\vec{B}\}$ . Подчиним их следующим требованиям. Оба они должны удовлетворять однородным уравнениям Максвелла в областях  $Q^-$  и  $Q^+$ , принципу излучения на бесконечности и краевым условиям (почти всюду) на  $s$  –

$$(24) \quad \vec{E}_i^+ \{\vec{A}\} = \vec{E}_i^- \{\vec{A}\} = \vec{A}; \quad \vec{h}_i^+ \{\vec{B}\} = \vec{h}_i^- \{\vec{B}\} = \vec{B}.$$

Эти требования однозначно определяют указанные поля.

Применяя к полям  $\vec{E}\{\vec{A}\}$ ,  $\vec{H}\{\vec{A}\}$  и  $\vec{E}_m$ ,  $\vec{H}_m$ , а также  $\vec{e}\{\vec{B}\}$ ,  $\vec{h}\{\vec{B}\}$  и  $\vec{e}_m$ ,  $\vec{h}_m$  лемму Лоренца\*\*, найдем, учитывая (24) и обозначения (2), (8) и (12).

$$(25) \quad (\vec{A}, \vec{A}_m) = ((\vec{H}^+ \{\vec{A}\} - \vec{H}^- \{\vec{A}\}) \vec{n}], \vec{E}_m)$$

и

$$(26) \quad (\vec{B}, \vec{B}_m) = ((\vec{e}^+ \{\vec{B}\} - \vec{e}^- \{\vec{B}\}) \vec{n}], \vec{h}_m)$$

соответственно. Поэтому если  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  удовлетворяют условиям (23), то из (25) и (26) сразу следуют равенства

$$((\vec{H}^+ \{\vec{A}\} - \vec{H}^- \{\vec{A}\}) \vec{n}], \vec{E}_m) = 0, \quad ((\vec{e}^+ \{\vec{B}\} - \vec{e}^- \{\vec{B}\}) \vec{n}], \vec{h}_m) = 0.$$

\* Для рассматриваемой нами шкалы, которая обозначается иногда буквой  $W_2^\alpha(s)$ .

\*\* Справедливость леммы Лоренца для рассматриваемых полей будет обоснована в Приложении 3.

Поскольку  $\vec{h}_m = \vec{E}_m$  всюду (см. (4)), эти равенства можно переписать так:

$$(27) \quad ((\vec{H}^+ \{ \vec{A} \} - \vec{H}^- \{ \vec{A} \}) \vec{n}], \vec{E}_m) = 0,$$

$$((\vec{e}^+ \{ \vec{B} \} - \vec{e}^- \{ \vec{B} \}) \vec{n}], \vec{E}_m) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Главная (сингулярная) часть  $\vec{H} \{ \vec{A} \}$  определяется внутри  $Q^+$  и  $Q^-$  выражением типа первой формулы (3), где вместо  $\vec{K}_m$  должно стоять [6]  $2[\vec{n}\vec{A}]$  и  $-2[\vec{n}\vec{A}]$  соответственно. Поэтому  $\vec{H}_t^\pm \{ \vec{A} \}$  ведут себя на  $s$  как предельные значения вторых производных потенциала простого слоя с плотностью, принадлежащей  $L^2(s)$ . Из сказанного и теоремы 1 следует, что

$$(28) \quad [(\vec{H}^+ \{ \vec{A} \} - \vec{H}^- \{ \vec{A} \}) \vec{n}] \in H^{-1}(s).$$

Принцип перестановочной двойственности [3] позволяет также написать

$$(28a) \quad [(\vec{e}^+ \{ \vec{B} \} - \vec{e}^- \{ \vec{B} \}) \vec{n}] \in H^{-1}(s).$$

Из неравенства (22) следует, в частности, что левые части равенств (27) имеют смысл (конечны), так как первые сомножители в них принадлежат  $H^{-1}(s)$  (см. (28) и (28a)), а вторые  $-\vec{E}_{mt} \in H^1(s)$  (на основании теоремы 1, ибо  $\vec{K}_m \in C^{(2)}(s) \subset H^2(s)$ ).

В Приложении 2 будет показано, что семейство  $\vec{E}_{mt}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) полно относительно  $H^{-1}(s)$  в том смысле, что из условий (27) следует

$$(29) \quad [(\vec{H}^+ \{ \vec{A} \} - \vec{H}^- \{ \vec{A} \}) \vec{n}] = 0; \quad [(\vec{e}^+ \{ \vec{B} \} - \vec{e}^- \{ \vec{B} \}) \vec{n}] = 0 \quad \text{на } s.$$

Напомним, что поскольку в левых частях этих равенств стоят обобщенные функции, они выражают только тот факт, что соответствующие функционалы обращаются в нуль в любой точке области своего определения, т. е. условия (27) выполняются при замене  $\vec{E}_{mt}$  любой функцией из  $H^1(s)$ .

Равенства (29) позволяют утверждать, на основании теоремы единственности \*\* что поля  $\vec{E} \{ \vec{A} \}$ ,  $\vec{H} \{ \vec{A} \}$  и  $\vec{e} \{ \vec{B} \}$ ,  $\vec{h} \{ \vec{B} \}$  тождественно равны нулю всюду, так как у них отсутствуют источники. Следовательно (см. (24)),  $\vec{A} = \vec{B} = 0$  на  $s$  и полнота семейств  $\vec{A}_m$  и  $\vec{B}_m$  в  $L^2(s)$  доказана.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Доказательство полноты $\vec{E}_{mt}$ относительно $H^{-1}(s)$

Покажем, что из условий

$$(30) \quad (\vec{D}, \vec{E}_m) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\vec{D} \in H^{-1}(s)$ , следует, что  $\vec{D} = 0$  на  $s$ .  $\vec{E}_{mt}$  является предельным значением на  $s$  ( $\vec{E}_{mt} = \vec{E}^-_{mt}$ ) тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}_m$ , при расчете которого все пространство  $Q^- + Q^+$  временно предполагается заполненным средой с параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$  (см. (3)). Если ввести еще поле  $\vec{\mathcal{E}} \{ \vec{D} \}$ ,  $\vec{\mathcal{H}} \{ \vec{D} \}$ , определяемое во всем пространстве  $Q^- + Q^+$  формулами (3), где вместо  $\vec{K}_m$  стоит  $\vec{D}$ , то лемма Лоренца позволяет написать

$$(31) \quad (\vec{D}, \vec{E}_m) = (\vec{\mathcal{E}} \{ \vec{D} \}, \vec{K}_m).$$

На основании теоремы 1 (см. выше)

$$\vec{E}_{mt} \in H^1(s), \quad \vec{\mathcal{E}}_t \{ \vec{D} \} \in H^{-2}(s), \quad \text{так как } \vec{K}_m \in H^2(s), \quad \vec{D} \in H^{-1}(s).$$

\* Этот результат следует также из того, что  $\vec{H} \{ \vec{A} \}$  можно выразить через магнитный ток  $\vec{K}_m \in L^2(s)$ , удовлетворяющий уравнению Фредгольма 2-го рода (см. сноску на стр. 928). Отсюда следует также, что в  $Q^+$  векторы  $\vec{E} \{ \vec{A} \} \in H^{1/2}(Q^+)$ ,  $\vec{H} \{ \vec{A} \} \in H^{-1/2}(Q^+)$ .

\*\* Справедливость теоремы единственности для рассматриваемых полей сохраняется, как это будет показано в Приложении 3.

Поэтому справедливость (31) есть следствие неравенства (22) (см. Приложение 3). Используя (31), перепишем условия (30) в виде

$$(32) \quad (\vec{\mathcal{E}}\{\vec{D}\}, \vec{K}_m) = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Так как по определению  $\vec{K}_m \in C^2(s)$  и их линейные комбинации там плотны, то отсюда следует, что  $\vec{K}_m \in H^2(s)$  и их линейные комбинации плотны также в  $H^2(s)$  (по норме  $H^2(s)$ ), поэтому условия (32) позволяют написать

$$(33) \quad (\vec{E}\{\vec{D}\}, \vec{K}) = 0$$

для любого  $\vec{K}$  из пространства  $H^2(s)$ . Действительно, заменив в (32)  $\vec{K}_m$  их линейными комбинациями, сходящимися к  $\vec{K}$  по норме  $H^2(s)$ , получим, переходя к пределу и учитывая (22), написанное выше равенство (33). Таким образом, доказано, что функционал  $\vec{\mathcal{E}}\{\vec{D}\}$  равен нулю на всех функциях  $\vec{K} \in H^2(s)$ , на которых он определен, т. е. он тождественно равен нулю:  $\vec{\mathcal{E}}\{\vec{D}\} = 0$ . На основании теоремы единственности отсюда можно сделать вывод, что поле  $\vec{\mathcal{E}}\{\vec{D}\}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}\{\vec{D}\}$  тождественно равно нулю всюду (см. Приложение 3). При этом ток  $\vec{D} = 0$  на  $s$ , так как он равен скачку  $\vec{\mathcal{H}}\{\vec{D}\}$  при переходе через  $s$ , и доказательство полноты  $\vec{E}_{mt}$  относительно  $H^{-1}(s)$  закончено.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### Лемма Лоренца и теоремы единственности для полей, создаваемых токами из $H^\alpha(s)$

Все вспомогательные поля, введенные в настоящей работе, можно рассматривать как создаваемые электрическими и магнитными токами, распределенными на  $s$  и принадлежащими пространствам  $H^\alpha(s)$ . Для  $\vec{\mathcal{E}}\{\vec{D}\}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}\{\vec{D}\}$  это очевидно, а для остальных полей следует из теоремы эквивалентности [3]. Поэтому они выражаются формулами типа (3) для электрических токов и получаемыми из них перестановкой  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  для магнитных. Очевидно, векторы этих полей обладают внутри  $Q^-$  и  $Q^+$  (вне  $s$ ) непрерывными производными всех порядков и удовлетворяют там однородным уравнением Максвелла. Леммы Лоренца для подобных полей доказываются обычным способом [3], и в добавочном обосновании нуждаются лишь равенства типа

$$(34) \quad \lim_{s^\pm \rightarrow s} \int_{s^\pm} [\vec{E}\vec{h}] \vec{ds} = \int_s [\vec{E}^\pm \vec{h}^\pm] \vec{ds},$$

$$(35) \quad \vec{E}_t^+ \{\vec{K}\} = \vec{E}_t^- \{\vec{K}\}, \quad [\vec{n}(\vec{H}^+ \{\vec{K}\}) - \vec{H}^- \{\vec{K}\}] = \vec{K} \text{ на } s,$$

используемые при доказательстве. Здесь  $s^+$  и  $s^-$  — две замкнутые поверхности, целиком лежащие в  $Q^+$  и  $Q^-$ , которые мы стремим к  $s$ . Векторы  $\vec{E}_t^\pm \in H^{-\alpha}(s)$ ,  $\vec{H}_t^\pm \in H^{-\alpha+1}(s)$ ,  $\vec{K} \in H^{-\alpha+1}(s)$ ,  $\vec{h}_t^\pm \in H^\alpha(s)$ , ( $\alpha > 0$ ), и в этом состоит отличие от обычного случая. Вводя обозначения  $\vec{A} \equiv \vec{E}_t$ ,  $\vec{B} \equiv [\vec{h}\vec{n}]$ , придадим равенствам (34) вид

$$(36) \quad \lim_{s^\pm \rightarrow s} \int_{s^\pm} \vec{A}\vec{B} ds = (\vec{A}^\pm, \vec{B}^\pm).$$

В [5] (стр. 219–221) показано, что можно перенести  $\vec{A}|_{s^\pm}$ ,  $\vec{B}|_{s^\pm}$  с  $s^\pm$  на  $s$ , определив тем самым их образы  $\vec{A}^{(s^\pm)} \in H^{-\alpha}(s)$  и  $\vec{B}^{(s^\pm)} \in H^\alpha(s)$  на  $s$ . Учитывая это, запишем (36) так:

$$(37) \quad \lim_{s^\pm \rightarrow s} (\vec{A}^{(s^\pm)}, \vec{B}^{(s^\pm)}) = (\vec{A}^\pm, \vec{B}^\pm).$$

Неравенство (22) позволяет написать

$$|(\vec{A}^{(s^\pm)}, \vec{B}^{(s^\pm)}) - (\vec{A}^\pm, \vec{B}^\pm)| \leq \| \vec{A}^{(s^\pm)} \|_{-\alpha} \| \vec{B}^{(s^\pm)} - \vec{B}^\pm \|_{\alpha} + \| \vec{B}^\pm \|_{\alpha} \| \vec{A}^{(s^\pm)} - \vec{A}^\pm \|_{-\alpha}.$$

Из теоремы 8.1 (см. [5], стр. 221) следует, что образы  $\vec{A}^{(s^\pm)} \rightarrow \vec{A}^\pm$ ,  $\vec{B}^{(s^\pm)} \rightarrow \vec{B}^\pm$  при  $s^\pm \rightarrow s$  по нормам соответствующих пространств. Следовательно, правая часть приве-

денного неравенства стремится к нулю при  $s^{\pm} \rightarrow s$  и равенства (37), а значит и (34), доказаны.

Переходя к доказательству равенств (35), напомним, что они эквивалентны утверждению

$$(38) \quad (\vec{E}^+ \{ \vec{K} \} - \vec{E}^- \{ \vec{K} \}, \vec{A} ) = 0, \quad ( [\vec{n} (\vec{H}^+ \{ \vec{K} \} - \vec{H}^- \{ \vec{K} \})], \vec{B} ) = (\vec{K}, \vec{B})$$

для любых  $\vec{A} \in H^\alpha(s)$  и  $\vec{B} \in H^{\alpha-1}(s)$ .

Введем на  $s$  последовательность достаточно гладких функций  $\vec{K}_n \rightarrow \vec{K}$  (при  $n \rightarrow \infty$ ) по норме  $H^{-\alpha+1}(s)$ . Для  $\vec{K}_n$ , очевидно, справедливы равенства (38). Выпишем первое из них:

$$(39) \quad (G\vec{K}_n, \vec{A}) = 0, \quad G\vec{K}_n = \vec{E}_t^+ \{ \vec{K}_n \} - \vec{E}_t^- \{ \vec{K}_n \}.$$

Введенный линейный оператор  $G$  действует ограниченным образом из  $H^{-\alpha+1}(s)$  в  $H^{-\alpha}(s)$ . Поэтому

$$|(G\vec{K}_n, \vec{A}) - (G\vec{K}, \vec{A})| \leq \| \vec{A} \|_\alpha \| G(\vec{K}_n - \vec{K}) \|_{-\alpha} \leq C \| \vec{A} \|_\alpha \| \vec{K}_n - \vec{K} \|_{-\alpha+1}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G\vec{K}_n, \vec{A}) = (G\vec{K}, \vec{A}).$$

Таким образом, переходя в (39) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим первое равенство (38). Аналогично доказывается и второе. Для магнитных токов  $\vec{K}_\mu$  равенства, соответствующие (35), следуют на основании принципа перестановочной двойственности.

Справедливость использованных выше теорем единственности вытекает из известных формул [6]

$$(40) \quad \left. \begin{aligned} \vec{p} \vec{E} |_{q'} \\ 0 \end{aligned} \right\} = i\omega \int_{s^\pm} \{ [\vec{E} \vec{h}] - [\vec{e} \vec{H}] \} \vec{d}s \quad \begin{aligned} q' \in Q^\pm \\ q' \in Q^\mp \end{aligned}$$

с учетом (34) и (35). Здесь  $\vec{e}, \vec{h}$  — поле вспомогательного электрического диполя с произвольным моментом  $\vec{p}$ , находящимся в точке  $q'$ . Действительно, из формул (40) и (34), например, можно получить, учитывая гладкость и непрерывность  $e_t$  и  $h_t$  при переходе через  $s$ ,

$$(41) \quad \vec{p} \vec{E} |_{q'} = \pm i\omega \{ (\vec{E}^+ - \vec{E}^-, [\vec{h} \vec{n}]) + (\vec{H}^+ - \vec{H}^-, [\vec{e} \vec{n}]) \}, \quad q' \in Q^\pm.$$

Полагая здесь  $\vec{E}_t^+ = \vec{E}_t^-$  и  $\vec{H}_t^+ = \vec{H}_t^-$ , получим  $\vec{E} = 0$  в  $Q^+$  и  $Q^-$ . Таким образом, использованная в Приложении 1 теорема единственности доказана. Аналогично доказывается и теорема, использованная в Приложении 2.

Выше предполагалось, что поверхность  $s$  гладкая, однако можно показать, что основные результаты сохраняются и для кусочно-гладких  $s$ .

Выражаю признательность М. С. Аграновичу за ценные советы при написании Приложений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Изд. Наука, 1965.
2. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1973, 18, 9, 1785.
3. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. 1, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
4. Функциональный анализ (справочная математическая библиотека), Изд. Наука, 1972.
5. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд. Мир, 1971.
6. Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, Изд. Советское радио, 1948.

УДК 538.574.8

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ*Я. Н. Фельд*

Предложен метод определения поверхностной плотности тока, возбуждаемого на металлических (криволинейных) незамкнутых поверхностях падающей электромагнитной волной. Для тока получен ряд, сходящийся в среднем с некоторым весом. Дан также равномерно сходящийся ряд для вторичного — дифрагированного поля. Метод решения основан на использовании леммы Лоренца и пригоден для решения задач с одной или несколькими металлическими поверхностями. Приведены примеры расчета.

Рассмотрим дифракцию первичной волны  $E^0, H^0$  на незамкнутой криволинейной бесконечно тонкой идеально проводящей поверхности  $s$  с гладким контуром  $\mathcal{L}$ . Поверхность  $s$  будем также считать достаточно гладкой. Поле  $E^0, H^0$  возбуждает на  $s$  электрический ток с поверхностной плотностью  $K$ , создающий вторичное поле  $E, H$ . Последнее должно удовлетворять вне  $\bar{s}=s+\mathcal{L}$  однородным уравнениям Максвелла, условиям Майкснера на контуре  $\mathcal{L}$ , условиям излучения на бесконечности и граничным условиям

$$(1) \quad E_t^+ = E_t^- = -E_t^0 \text{ на } s.$$

Индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения величин при стремлении к  $s$  со стороны, куда направлена нормаль  $\nu$  к  $s$ , и с противоположной соответственно. Ниже всюду, где это не может вызвать путаницы, индексы «+» и «-» мы будем опускать у величин, непрерывных при переходе через соответствующую поверхность.

Сформулированная выше задача определения вторичного поля  $E, H$  имеет, как известно, единственное решение. Построим его. Для этого дополним  $s$  до замкнутой, достаточно гладкой, поверхности  $s_0$  (рис. 1) при помощи геометрической поверхности  $\Sigma$  ( $s_0 = s + \Sigma$ ). Нам понадобится лемма Лоренца, которую удобно записать в виде

$$(2) \quad \int_{s_0} K E\{K_n, s_0\} ds = \int_{s_0} K_n E\{K, s\} ds.$$

Здесь  $K$  и  $K_n$  — плотности поверхностных токов, распределенных на  $s$  и  $s_0$  соответственно, а, например,  $E\{K, s\}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого током  $K$ , распределенным на  $s$ . Полагая, что в равенстве (2)  $K$  есть искомый ток, создающий вторичное поле, а  $K_n$  — один из семейства вспомогательных токов (которое определим ниже), перепишем его, учитывая (1), так:

$$(3) \quad \int_s K E\{K_n, s_0\} ds = \int_{\Sigma} K_n E\{K, s\} ds - \int_s K_n E^0 ds.$$

Используя обозначения

$$(4) \quad \mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s, \\ \frac{1}{\rho_0} \mathbf{E}_t\{\mathbf{K}, s\} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad \mathbf{F}_n = \begin{cases} \mathbf{E}_t\{\mathbf{K}_n, s_0\} & \text{на } s, \\ -\rho_0 \mathbf{K}_n & \text{на } \Sigma, \end{cases}$$

где  $\rho_0$  — волновое сопротивление свободного пространства, придадим равенству (3) следующий вид:

$$(5) \quad \int_{s_0} \mathbf{I} \mathbf{F}_n ds = - \int_s \mathbf{K}_n \mathbf{E}^0 ds.$$

Это соотношение является основным в развиваемом методе. Для нахождения при помощи (5) вектора  $\mathbf{I}$  введем гильбертово пространство  $L_R^2(s_0)$ , элементами которого являются вектор-функции, заданные на  $s_0$  и касательные к ней в соответствующих точках. Скалярное произведение и норму определим формулами

$$(6) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{I}) = \int_{s_0} \overline{\mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{I}} ds, \\ \|\mathbf{I}\| = \left( \int_{s_0} \overline{\mathbf{I} \mathbf{R} \mathbf{I}} ds \right)$$

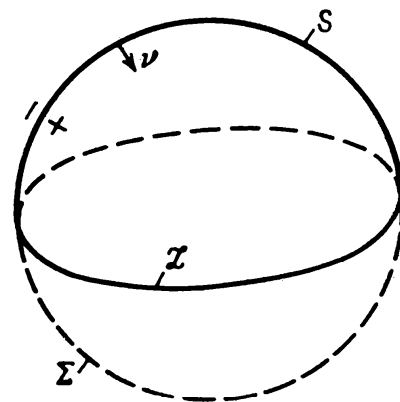


Рис. 1

Здесь  $R$  — зависящий от точки на  $s_0$  линейный оператор, выбираемый так, чтобы выполнялись аксиомы гильбертова пространства и все элементы  $L_R^2(s_0)$  удовлетворяли условиям Майкснера\* для тока при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  и электрического поля при приближении со стороны  $\Sigma$ . Черта — знак комплексного сопряжения. Практически в качестве оператора  $R$  удобно брать матрицу, имеющую (в ортогональной системе координат) диагональный вид с положительными на  $s$  и  $\Sigma$  элементами:

$$(6a) \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

Если одна из координатных линий  $x_1 = \text{const}$  совпадает с  $\mathcal{L}$ , то  $R_{11}$  ведет себя как  $O(\rho^{\alpha_{s1}})$  ( $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ ), а  $R_{22}$  как  $O(\rho^{\alpha_{s2}})$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$ ; при приближении со стороны  $\Sigma$   $R_{11}$  ведет себя как  $O(\rho^{\alpha_{\Sigma 1}})$ , а  $R_{22}$  как  $O(\rho^{\alpha_{\Sigma 2}})$ . Очевидно, эти показатели  $\alpha$  должны лежать в интервалах:

$$(7) \quad -2 < \alpha_{s1} < -1; \quad 0 < \alpha_{s2} < 1; \quad 0 < \alpha_{\Sigma 1} < 1; \quad -1 < \alpha_{\Sigma 2} < 0.$$

При этом каждый элемент  $L_R^2(s_0)$  удовлетворяет условиям Майкснера, а искомое решение  $\mathbf{I}$  также принадлежит  $L_R^2(s_0)$ . Для дальнейшего нам понадобится величина

$$(7a) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \max(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{\Sigma 1}, \alpha_{\Sigma 2}).$$

Она (см. (7)) лежит в интервале  $0 < \alpha_0 < 0,5$ . О выборе величин  $\alpha$  в интервалах (7) будет сказано ниже. Обозначения (6) позволяют записать равенство (5) так:

$$(8) \quad (\mathbf{I}, R^{-1} \overline{\mathbf{F}}_n) = a_n, \quad \text{где } a_n \equiv - \int_s \mathbf{K}_n \mathbf{E}^0 ds;$$

$R^{-1}$  — оператор, обратный оператору  $R$  ( $RR^{-1} = 1$ ), а  $a_n$  — известное число. Выберем в качестве  $\mathbf{K}_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) семейство линейно независи-

\* Понимаемым в широком смысле, как обеспечивающим единственность решения соответствующих задач, т. е. отсутствие источников на контуре  $\mathcal{L}$ .

мых \* векторных функций касательных к  $s_0$  в соответствующих точках, принадлежащих пространству  $C^2(s_0)$  ( $C^2(s_0)$  — пространство функций, обладающих непрерывными вторыми производными на  $s_0$ ). Будем также предполагать, что линейные комбинации функций  $K_n$  всюду плотны в  $C^2(s_0)$  (по норме  $C^2(s_0)$ ). Такое семейство всегда существует.

Как уже отмечалось, мы будем искать вектор  $\mathbf{I}$  в пространстве  $L_R^2(s_0)$ . Поэтому для того, чтобы левая часть первой формулы (8) имела смысл, достаточно показать, что  $R^{-1}\mathbf{F}_n \in L_R^2(s_0)$ . Для этого (учитывая вторую формулу (4)) найдем предельное значение тангенциальной составляющей  $\mathbf{E}\{K_n, s_0\}$  при стремлении точки наблюдения  $q \in s_0$  к некоторой точке  $g \in s_0$ . Обозначим через  $\mathbf{t}_g$  произвольный вектор, касательный к  $s_0$  в точке  $g$ . Тогда проекция  $\mathbf{E}\{K_n, s_0\}$  в точке  $q$  на направление  $\mathbf{t}_g$  равна [4], с точностью до несущественного постоянного множителя,

$$\mathbf{t}_g \mathbf{E}\{K_n, s_0\} = \int_{s_0} \mathbf{t}_g (\text{grad}_q \text{div}_q + k^2) K_n \frac{e^{-ikr}}{r} ds.$$

Множитель, стоящий под интегралом при  $\mathbf{t}_g$ , равен электрическому вектору поля в  $q$ , создаваемому диполем, находящимся в точке интегрирования с моментом, пропорциональным  $K_n ds$ . Поэтому, используя теорему взаимности [4], перепишем это выражение так:

$$\mathbf{t}_g \mathbf{E}\{K_n, s_0\} = \int_{s_0} K_n (\text{grad div} + k^2) \mathbf{t}_g \frac{e^{-ikr}}{r} ds.$$

Учитывая, что  $\mathbf{v}K_n = 0$  ( $\mathbf{v}$  — нормаль к  $s_0$ ), напомним следующее тождество:

$$K_n \text{grad div } \mathbf{B} = \mathbf{v} \text{rot} ([\mathbf{v}K_n] \text{div } \mathbf{B}) - \mathbf{v} \text{rot} [\mathbf{v}K_n] \text{div } \mathbf{B}.$$

Используя его, а также теорему Стокса, найдем

$$\mathbf{t}_g \mathbf{E}\{K_n, s_0\} = k^2 \int_{s_0} K_n \mathbf{t}_g \frac{e^{-ikr}}{r} ds - \int_{s_0} \mathbf{v} \text{rot} [\mathbf{v}K_n] \text{div} \left( \mathbf{t}_g \frac{e^{-ikr}}{r} \right) ds.$$

Первый интеграл ведет себя как потенциал простого слоя с плотностью  $K_n \mathbf{t}_g$ , а второй — как сумма первых производных потенциала простого слоя с плотностью  $\mathbf{v} \text{rot} [\mathbf{v}K_n]$ . Поскольку  $K_n \in C^2(s_0)$ , эти плотности правильно непрерывны на  $s_0$ . Поэтому, на основании известных теорем теории потенциала, предельное значение  $\mathbf{t}_g \mathbf{E}\{K_n, s_0\}$  при  $q \rightarrow g$  правильно непрерывно на  $s_0$ . Так как  $\mathbf{t}_g$  — произвольный вектор, касательный к  $s_0$  в точке  $g$ , то правильно непрерывен на  $s_0$  и весь тангенциальный вектор  $\mathbf{E}_t\{K_n, s_0\}$ . Отсюда, учитывая выражение (4) для  $\mathbf{F}_n$  и поведение элементов  $R$  (см. (6а) и (7)) при стремлении к  $\mathcal{L}$ , легко сообразить, что  $\|R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_n\|$  конечна, т. е.  $R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_n \in L_R^2(s_0)$ , что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что последовательность  $R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) линейно независима и полна в  $L_R^2(s_0)$ .

Линейная независимость семейства  $R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_n$ . Докажем, что любое конечное число функций  $R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_n$  ( $0 \leq n \leq N$ ) линейно независимо, т. е. из условия

$$(9) \quad \bar{c}_0 R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_0 + \bar{c}_1 R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_1 + \dots + \bar{c}_N R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_N = 0 \quad \text{на } s_0,$$

где  $c_n$  — постоянные \*\*, следуют равенства  $c_n = 0$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Воздействуя на (9) оператором  $R$  слева и переходя к комплексно-сопряженным величинам, получим равносильное равенство

$$(10) \quad c_0 \mathbf{F}_0 + c_1 \mathbf{F}_1 + \dots + c_N \mathbf{F}_N = 0 \quad \text{на } s_0.$$

\* Бесконечное семейство называется линейно независимым, если линейно независимо любое конечное число его функций.

\*\* В (9) фигурируют  $\bar{c}_n$  вместо  $c_n$  для того, чтобы упростить запись нижеследующих равенств.

Учитывая обозначение (4) и линейность оператора  $E_t\{ \}$ , запишем (10) так:

$$(11) \quad E_t \left\{ \sum_{n=0}^N c_n K_n, s_0 \right\} = 0 \text{ на } s, \quad \sum_{n=0}^N c_n K_n = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Второе из этих равенств позволяет заменить в первом  $s_0$  на  $s$ , после чего (11) принимает вид

$$E_t \left\{ \sum_{n=0}^N c_n K_n, s \right\} = 0 \text{ на } s, \quad \sum_{n=0}^N c_n K_n = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Эти равенства с учетом теоремы единственности позволяют утверждать, что суммарный ток равен нулю на всей поверхности  $s+\Sigma$ , т. е.

$$(12) \quad \sum_{n=0}^N c_n K_n = 0 \text{ на } s_0.$$

Поскольку семейство  $K_n$  линейно независимо по определению, то из (12) следует, что  $c_n=0$  ( $0 \leq n \leq N$ ), и линейная независимость системы  $R^{-1}\bar{F}_n$  доказана.

Пространства Соболева — Слободецкого [1]. Для дальнейшего нам понадобятся пространства  $H^\alpha(s_0)$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ). Напомним, что элементами  $H^{-\alpha}(s_0)$  при  $\alpha > 0$  являются обобщенные (в нашем случае — векторные) функции, которые можно рассматривать как линейные непрерывные функционалы, областью определения которых является пространство  $H^\alpha(s_0)$ . Элементы последнего — обычные функции, гладкость которых увеличивается с ростом  $\alpha$ . При целом  $\alpha \geq 0$  пространство  $H^\alpha(s_0)$  состоит из вектор-функций, обладающих следующими свойствами: локально, в локальных координатах, их производные в смысле обобщенных функций порядка  $\leq \alpha$  также являются обычными функциями, причем все эти функции имеют суммируемый квадрат модуля.

Справедливы следующие соотношения:

$$(13) \quad H^\alpha(s_0) \subset H^\beta(s_0), \text{ если } \alpha > \beta;$$

$$(14) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{-\alpha} \|y\|_\alpha \text{ при } x \in H^{-\alpha}(s_0), y \in H^\alpha(s_0).$$

Здесь индексы  $-\alpha$  и  $\alpha$  отмечают нормы соответствующих пространств, а  $\langle x, y \rangle$  есть значение функционала  $x$  на функции  $y$ . Если  $x$  — регулярный функционал (обычная функция), то он действует по известной формуле

$$(15) \quad \langle x, y \rangle = \int_{s_0} xy ds.$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $s_0$  — замкнутая (достаточно гладкая) поверхность. Тогда, если поверхностный электрический ток  $A \in H^\alpha(s_0)$ , где  $-\infty < \alpha < \infty$ , то  $E_t^\pm\{A, s_0\} \in H^{\alpha-1}(s_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $s$  — часть поверхности  $s_0$ . Тогда вектор  $V \in H^\beta(s)$ , продолженный\* на  $s_0$  нулем вне  $s$ , принадлежит  $H^\beta(s_0)$ , если  $|\beta| < 0,5$ .

**Теорема 3.** Пусть ток  $A \in H^\beta(s_0)$ , где  $|\beta| < 0,5$ . Тогда, если  $A^s$  — сужение  $A$  на  $s$ , а  $A^s$  — продолжение  $A^s$  на  $s_0$  нулем вне  $s$ , то справедливы

\* Если  $\beta < 0$ , а  $V \in H^\beta(s)$ , то  $V^0$  — продолжение  $V$  на  $s_0$  нулем вне  $s$  — определяется формулой  $\langle V_0, C \rangle = \langle V, C^s \rangle$ , где  $C \in H^{-\beta}(s_0)$ , а  $C^s \in H^{-\beta}(s)$  — сужение  $C$  на  $s$ .



утверждения:

$$A^s \in H^\beta(s), \quad \overset{0}{A}^s \in H^\beta(s_0), \quad E_t^\pm \{\overset{0}{A}^s, s_0\} \in H^{\beta-1}(s_0).$$

Для краткости будем в дальнейшем пользоваться обозначением

$$E_t^\pm \{A^s, s\} \equiv E_t^\pm \{\overset{0}{A}^s, s_0\}.$$

Сужение  $E_t^\pm \{A^s, s\}$  на  $s_0$ , очевидно, принадлежит  $H^{\beta-1}(s_0)$ . Теорема 1 может быть доказана на основании результатов главы 2 (стр. 215—217) монографии [2]. Теорема 2 следует из теорем II.1 и II.4, помещенных на стр. 71 и 78 в [2]. И, наконец, теорема 3 есть очевидное следствие теорем 1 и 2.

Индексы  $\pm$  у  $E_t^\pm$  будем в дальнейшем опускать. Тангенциальная составляющая на  $s_0$  электрического вектора  $E_t \{A^s, s\}$ , где  $A^s \in H^{-\alpha}(s)$  ( $0 \leq \alpha \leq 0,5$ ) есть сужение  $A \in H^{-\alpha}(s_0)$  на  $s$ , является обобщенной функцией, действующей по формуле \*

$$(16) \quad \langle E \{A^s, s\}, B \rangle = \langle A^s, E^s \{B, s_0\} \rangle_s, \quad \text{для всех } B \in H^{\alpha+1}(s_0).$$

Здесь  $E^s \{ \}$  — сужение  $E \{ \}$  с  $s_0$  на  $s$ . Из теоремы 3 при этом следует, что

$$(16a) \quad E_t \{A^s, s\} \in H^{-(\alpha+1)}(s_0); \quad E_t^s \{B, s_0\} \in H^\alpha(s).$$

Равенство (16) можно рассматривать как лемму Лоренца для обобщенных токов. Доказательство ее аналогично приведенному в [3]. В случае, когда  $A \in H^{(1+\epsilon)}(s)$  и  $B \in H^{(1+\epsilon_0)}(s_0)$ , где  $\epsilon > 0$  и  $\epsilon_0 > 0$ , равенство (16) сводится (см. (15)) к обычной лемме Лоренца \*\*

$$(17) \quad \int_{s_0} E \{A, s\} B ds = \int_s A E \{B, s_0\} ds.$$

Полнота  $R^{-1}\bar{F}_n$  в  $L_R^2(s_0)$ . По определению эта система полна в  $L_R^2(s_0)$ , если из условий

$$(18) \quad (A, R^{-1}\bar{F}_n) \equiv \int_{s_0} A F_n ds = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

где  $A \in L_R^2(s_0)$ , следует, что  $A=0$  на  $s_0$ .

Заменяя  $F_n$  его значением (4), придадим условиям (18) вид

$$(18a) \quad \int_s A E \{K_n, s_0\} ds - \rho_0 \int_z A K_n ds = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Для дальнейшего необходимо выяснить, в какое из пространств  $H^\beta(s_0)$  (с наибольшим  $\beta$ ) включено  $L_R^2(s_0)$ . Учитывая (6) и поведение элементов матрицы (6a) при приближении к контуру  $\mathcal{L}$ , можно утверждать, что если  $A \in L_R^2(s_0)$ , то  $A \rho^{\alpha_0} \in L^2(s_0)$ , где (см. (7a))  $0 < \alpha_0 < 0,5$ , а  $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ . Используя теорему II.2 на стр. 74 в [2], легко показать теперь, что  $A \in H^{-\alpha_0}(s_0)$ , т. е.  $L_R^2(s_0) \subset H^{-\alpha_0}(s_0)$ .

Поэтому, поскольку  $K_n \in C^2(s_0) \subset H^2(s_0)$  по определению,  $E_t \{K_n, s_0\} \in H^1(s_0)$  по теореме 1, а  $E_t \{A^s, s\} \in H^{-(\alpha_0+1)}(s_0)$  по теореме 3, можно переписать

\* Индекс  $s$  у  $\langle \rangle_s$  указывает на то, что множители в  $\langle \rangle_s$  принадлежат  $H(s)$ , а не  $H(s_0)$  (см. также (17)).

\*\* Действительно, при этом из теорем 1—3 и соотношения (13) следует, что все функции, стоящие в (16) и (17), принадлежат пространству  $H^0 \equiv L^2$  и интегралы в (17) имеют смысл.

сать (18а), используя (15) и (16), так:

$$(19) \quad \langle \mathbf{E}\{\mathbf{A}^s, s\}, \mathbf{K}_n \rangle - \rho_0 \langle \mathbf{A}^z, \mathbf{K}_n^z \rangle_\Sigma = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $\mathbf{A}^z$  и  $\mathbf{K}_n^z$  — сужения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{K}_n$  на  $\Sigma$ . Введя обозначение

$$(20) \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{E}_t\{\mathbf{A}^s, s\} - \rho_0 \mathring{\mathbf{A}}^z \in H^{-(\alpha_0+1)}(s_0) \subset H^{-2}(s_0),$$

где  $\mathring{\mathbf{A}}^z$  — продолжение  $\mathbf{A}^z$  на  $s_0$  нулем вне  $s$ , запишем (19) в виде

$$(21) \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{K}_n \rangle = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Так как линейные комбинации  $\mathbf{K}_n$  плотны в  $C^2(s_0)$ , то они плотны также в  $H^2(s_0)$  по норме  $H^2(s_0)$ . Поэтому из (21) следует, что функционал  $\mathbf{F}$  равен нулю на всех функциях  $\mathbf{K} \in H^2(s_0)$ , на которых он определен, т. е.

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{K} \rangle = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{K} \in H^2(s_0).$$

Таким образом доказано, что  $\mathbf{F} \equiv 0$ . Отсюда, учитывая (12), следует

$$(22) \quad \mathbf{E}_t^s\{\mathbf{A}^s, s\} = 0, \quad \rho_0 \mathbf{A}^z = \mathbf{E}_t^z\{\mathbf{A}^s, s\}.$$

Эти равенства можно записать в привычных, но не вполне строгих обозначениях так:

$$(22a) \quad \mathbf{E}_t\{\mathbf{A}, s\} = 0 \text{ на } s, \quad \rho_0 \mathbf{A} = \mathbf{E}_t\{\mathbf{A}, s\} \text{ на } \Sigma.$$

Поле  $\mathbf{E}\{\mathbf{A}, s\}$ ,  $\mathbf{H}\{\mathbf{A}, s\}$  вследствие первого условия (22а) и теоремы единственности\* обращается в нуль во всем пространстве. Так как ток  $\mathbf{A}$  равен скачку  $\mathbf{H}_t\{\mathbf{A}, s\}$  при переходе через  $s$ , то  $\mathbf{A} = 0$  на  $s$  ( $\mathbf{A}^s = 0$ ); из второго условия (22а) следует также, что  $\mathbf{A} = 0$  на  $\Sigma$  ( $\mathbf{A}^z = 0$ ). Таким образом,  $\mathbf{A} = 0$  на  $s_0$ , и полнота  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n$  в  $L_R^2(s_0)$  доказана\*\*. При доказательстве полноты я пользовался советами М. С. Аграновича, за что выражаю ему глубокую признательность.

Нахождение тока и поля. Полнота  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n$  в  $L_R^2(s_0)$  позволяет использовать (8) для определения  $\mathbf{I}$ . Для этого можно, например, перейти от  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n$  к ортонормальному семейству функций

$$(23) \quad \mathbf{u}_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

где числа  $a_n^{(m)}$  находятся из условий  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m) = \delta_{nm}$  по известным формулам. После этого можно перейти от (8) к

$$(24) \quad (\mathbf{I}, \mathbf{u}_m) = c_m, \quad \text{где } c_m \equiv \sum_{n=0}^m a_n \overline{a_n^{(m)}}.$$

Таким образом,  $c_m$  — коэффициент Фурье функции  $\mathbf{I}$  по полной ортонормальной системе  $\mathbf{u}_m$  и, следовательно,

$$(25) \quad \mathbf{I}(q) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathbf{u}_m(q), \quad q \in s_0.$$

\* Касательные составляющие векторов поля, возбуждаемого током  $\mathbf{A} \in H^3(s)$ , где  $|\beta| < 0,5$ , удовлетворяют обычным соотношениям при переходе через  $s$ . Это следует из теорем 2, 3 и результатов приложения 3 работы [3]. Поэтому сохраняется справедливость известных доказательств [4] теорем единственности для указанных токов.

\*\* Доказательство полноты в [5] нуждается в исправлении в соответствии с настоящей работой.

Этот ряд сходится по норме  $L_R^2(s_0)$  к некоторой функции из  $L_R^2(s_0)$  и определяет ток  $\mathbf{K}$  на  $s$  и  $\mathbf{E}_t$  на  $\Sigma$  (см. (4)).

Здесь уместно вернуться к выбору параметров  $\alpha$  в интервалах (7). Если бы ряд (25) сходил равномерно на  $s_0$ , то следовало бы положить  $\alpha_{s_1} = -0,5$ ,  $\alpha_{s_2} = 0,5$ ,  $\alpha_{\Sigma_1} = 0,5$ ,  $\alpha_{\Sigma_2} = 0$ . При этом, как следует из (23) и (6а), каждый член ряда (25) имел бы на контуре  $\mathcal{L}$  особенности, физически реализующиеся для  $\Gamma$ . Это привело бы к увеличению скорости сходимости ряда (25). Однако в нашем случае, когда ряд (25) сходится по норме  $L_R^2(s_0)$ , эти соображения не могут быть решающими и вопрос о наивыгоднейшем выборе  $\alpha$  нуждается в дальнейшем исследовании. Вместо метода ортогонализации можно свести задачу определения  $\Gamma$  к решению бесконечной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Для этого следует использовать представление вида (25), где  $\mathbf{u}_m$  — подходящая полная (но не обязательно ортогональная) система функций, и подставить его в (8), после чего найдем

$$(26) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\mathbf{u}_m, R^{-1}\bar{\mathbf{F}}_n) = a_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Искомое вторичное поле определяется во всем пространстве рядом [4]

$$(27) \quad \mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{K}, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbf{U}_n(q).$$

Здесь

$$(27a) \quad \mathbf{U}_n(q) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{rot rot} \int_s \mathbf{u}_n(p) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} ds_p,$$

$r$  — расстояние между точками  $q$  и  $p$ . Выражение для  $\mathbf{H}$  записывается аналогично. Покажем, что ряд (27) равномерно сходится в любой замкнутой области  $Q$ , не пересекающейся с  $s$ . Для этого введем произвольный единичный вектор  $\xi$  и рассмотрим выражение

$$\left| \xi \left( \mathbf{E} - \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{U}_n \right) \right| \equiv \frac{1}{\omega|\epsilon|} \left| \xi \text{rot rot} \int_s \left( \mathbf{K} - \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{u}_n \right) \frac{e^{-i}}{4\pi r} ds \right|$$

Производя элементарные векторные преобразования и используя неравенство Шварца, получим

$$(28) \quad \left| \xi \left( \mathbf{E} - \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{U}_n \right) \right| = \left| \int_s \left( \mathbf{K} - \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{u}_n \right) \Phi ds \right| \equiv \\ \equiv \left| \left( \mathbf{K} - \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{u}_n, R^{-1}\bar{\Phi} \right)_s \right| \leq \|R^{-1}\bar{\Phi}\|_s \left\| \mathbf{K} - \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{u}_n \right\|_s,$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\omega\epsilon} (\text{grad div} + k^2) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \xi,$$

а индекс  $s$  указывает на то, что здесь при использовании обозначений (6)  $s_0$  заменено на  $s$ . Первая норма, стоящая справа в (28), ограничена при  $q \in Q$ , а вторая стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , поскольку ряд (25) сходится по норме  $L_R^2(s_0)$  (см. также обозначение (4)). Поэтому левая часть (28) тоже стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  и, вследствие произвольности вектора  $\xi$ , равномерная сходимость ряда (27) в области  $Q$  доказана.

Если расчет величины  $E_t\{K_n, s_0\}$ , входящей в большинство формул (см. (4)), не проще, чем  $E_t\{K_n, s\}$ , то предлагаемый метод следует упростить. Для этого нужно положить  $K_n=0$  на  $\Sigma$ . При этом  $E\{K_n, s_0\} \equiv E\{K_n, s\}$ , интегралы по  $\Sigma$  исчезают и всюду следует заменить  $s_0$  на  $s$ ,  $I$  на  $K$  и  $F_n$  на  $E_t\{K_n, s\}$ . Таким образом, отпадает необходимость введения  $\Sigma$  (ср. с [6]).

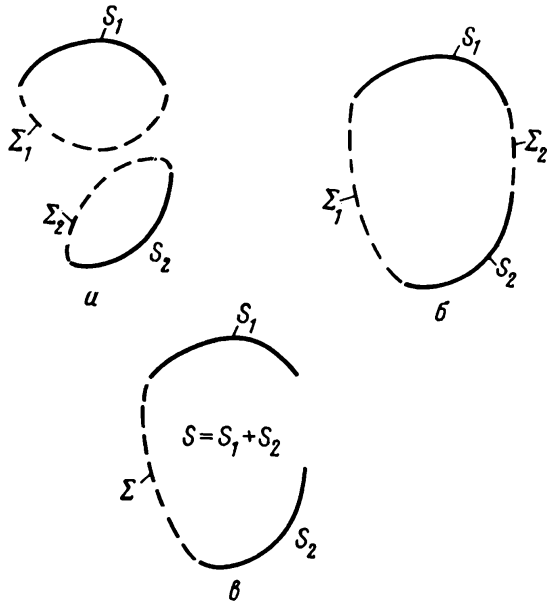


Рис. 2

$$S = S_1 + S_2; \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

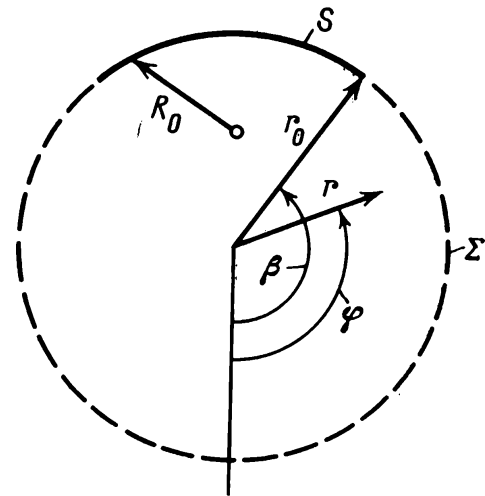


Рис. 3

Развитый выше метод справедлив также для задач, у которых  $s$  состоит из нескольких отдельных (в общем случае незамкнутых) металлических поверхностей. Под  $\mathcal{L}$  при этом следует понимать суммарный контур, состоящий из замкнутых контуров, на которые опираются указанные выше отдельные поверхности. При этом вспомогательную поверхность  $\Sigma$  можно, как это было отмечено ранее, вообще не вводить или ввести одним из трех возможных способов, указанных на рис. 2, на примере, где  $s$  состоит из двух отдельных поверхностей. Предлагаемый метод допускает также очевидное обобщение на случай, когда вблизи поверхности  $s$  находятся другие тела, если известно решение задачи о возбуждении поля заданными токами в присутствии этих тел.

**Пример.** В качестве иллюстрации предлагаемого метода рассмотрена задача определения диаграммы направленности зеркальной антенны, представляющей собой часть параболического цилиндра. Зеркало облучается линейным источником, расположенным вдоль фокальной оси и имеющим секторную диаграмму.

Параболическую поверхность зеркальной антенны можно аппроксимировать частью кругового цилиндра (рис. 3) с радиусом  $r_0$ , равным удвоенному фокусному расстоянию параболического зеркала [7]. При этом угол  $\beta$  (см. рис. 3), определяющий величину используемой части цилиндра, выбирается так, чтобы фазовая ошибка на краях раскрыва не превосходила  $\pi/2$ .

Пусть  $r, \varphi, z$  — цилиндрическая система координат с осью  $z$ , совпадающей с осью кругового цилиндра. Тогда при выбранной линии отсчета  $\varphi$  края кругового зеркала совпадают с линиями  $\varphi = \pm\beta$ , а фокальная ось определяется уравнениями  $\varphi = \pi, r = r_0/2$ . Секторную «диаграмму» линейного

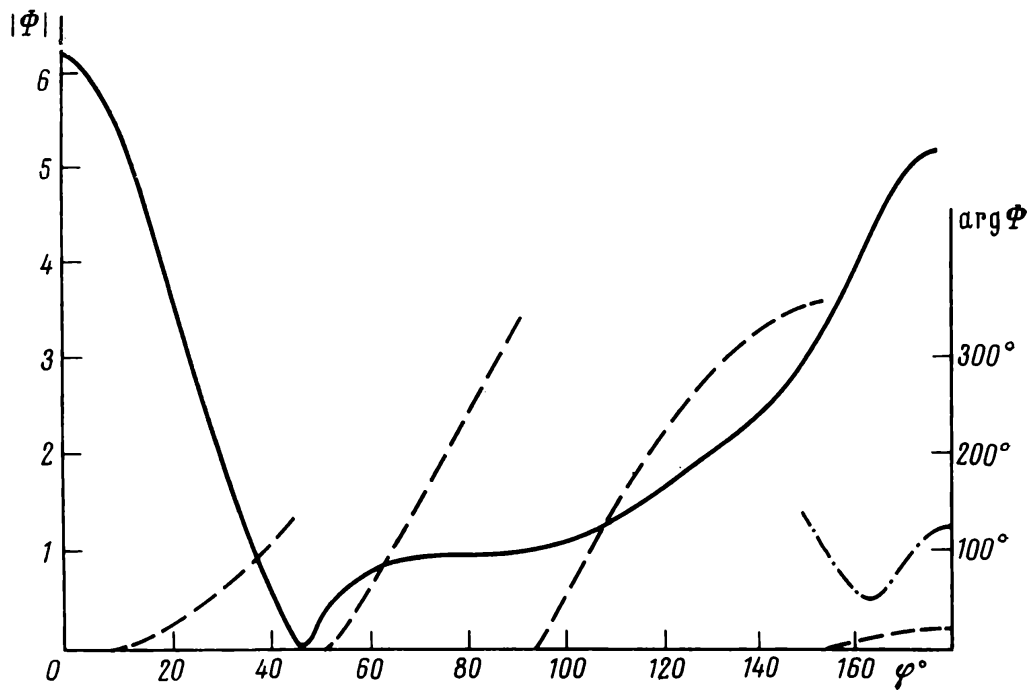


Рис. 4

сплошная кривая —  $|\Phi|$ ; пунктир —  $\arg \Phi$ ; штрих-пунктир — модуль диаграммы полного поля;  $\beta=150^\circ$ ;  $kr_0=10$ ;  $N=18$

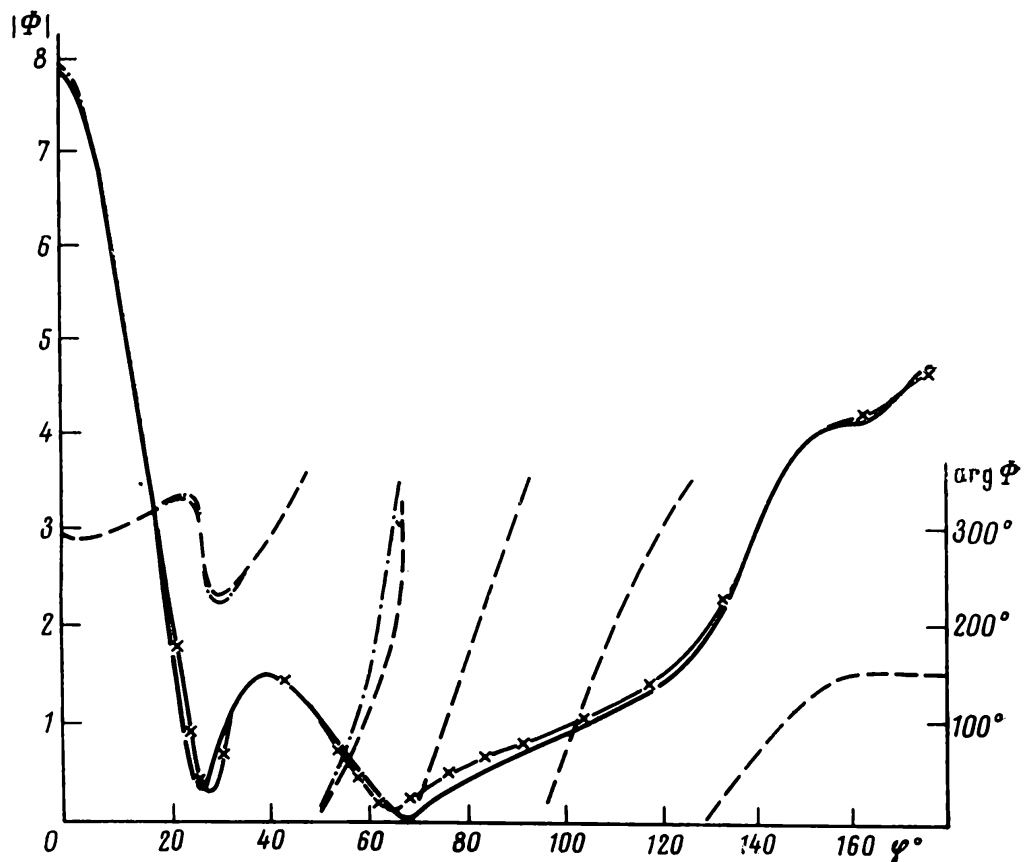


Рис. 5

сплошная кривая —  $|\Phi|$ ,  $N=18$ ; крестики —  $|\Phi|$ ,  $N=23$ ; пунктир —  $\arg \Phi$ ,  $N=18$ ; штрих-пунктир —  $\arg \Phi$ ,  $N=23$ ;  $\beta=150^\circ$ ;  $kr_0=15$

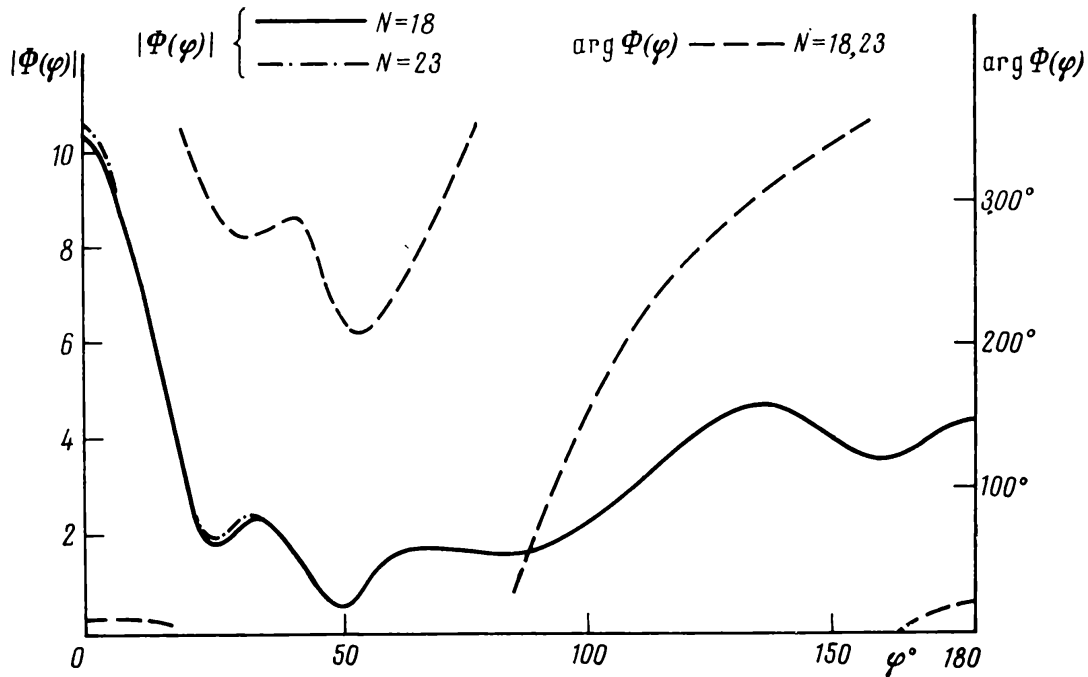


Рис. 6  
 $kr_0=10, \beta=120^\circ$

источника можно записать так:

$$E^0 = E_z^0 = \begin{cases} H_0^{(2)}(kR_0), & \beta < \varphi < 2\pi - \beta, \\ 0, & -\beta < \varphi < \beta. \end{cases}$$

Здесь  $H_0^{(2)}$  — функция Ганкеля,  $k$  — волновое число,  $R_0$  — расстояние от фокальной оси. Будем рассматривать плоскую задачу, когда длина образующей цилиндрического зеркала велика и влиянием концов можно пренебречь, т. е. поля не зависят от координаты  $z$ . При этом под  $s$  следует подразумевать разомкнутый контур, образованный пересечением зеркала с плоскостью  $z = \text{const}$ .  $\Sigma$  дополняет  $s$  до полного круга. Учитывая симметрию задачи относительно оси  $\varphi = 0$  и выбранную поляризацию первичного поля, положим

$$K_n = K_{n,z} = \cos n\varphi \text{ на } s_0 \quad (0 < \varphi < 2\pi).$$

При этом

$$E\{K_n, s_0\} = E_z\{K_n, s_0\} = -\frac{\omega\mu\pi r_0}{2} J_n(kr_0) H_n^{(2)}(kr_0) \cos n\varphi, \text{ на } s_0.$$

Так как ток и электрический вектор имеют только по одной составляющей, то матрица  $R$  сводится к одному элементу, и мы возьмем его равным

$$R = \begin{cases} \sqrt{(\varphi - \beta)(2\pi - \beta - \varphi)} & \text{на } s \quad (\beta < \varphi < 2\pi - \beta), \\ 1 & \text{на } \Sigma \quad (|\varphi| < \beta). \end{cases}$$

Такой выбор удовлетворяет условиям (7) и обеспечивает для каждого члена ряда (25) такие же особенности на ребрах  $\varphi = \pm\beta$ , как и у  $I$ . Диаграмма направленности вторичного поля определяется, в рассматриваемом случае, формулой

$$\Phi(\varphi) = \int_{\beta}^{2\pi - \beta} I e^{ikr_0 \cos \varphi} r_0 d\varphi'$$

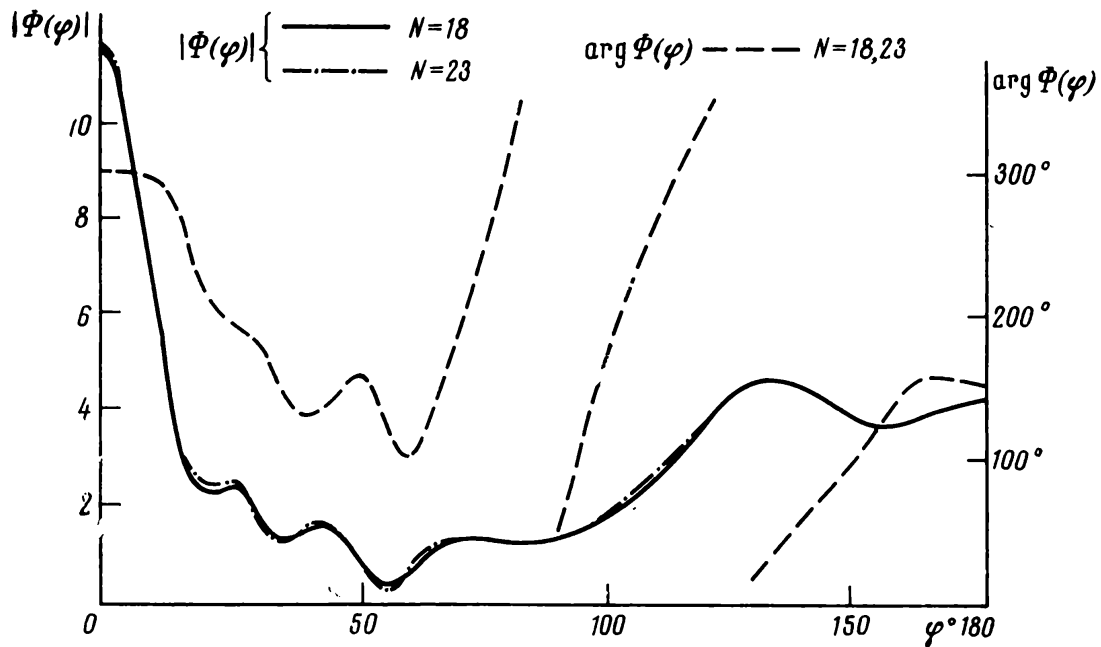


Рис. 7

 $kr_0=15, \beta=127^\circ$ 

Здесь  $\varphi$  — угол между радиус-векторами, проведенными из начала координат в точку наблюдения и точку интегрирования. Ток  $I$  на  $s$  определялся по формуле (25), где постоянные  $c_m$  находились в результате решения системы линейных уравнений (26). В качестве  $u_m$  использовалось неортонормальное семейство функций

$$u_m = \cos m\varphi/R.$$

На рис. 4 и 5 приведены диаграммы направленности вторичного поля, рассчитанные для раскрытов зеркала  $\approx 1,6\lambda$  ( $kr_0=10, \beta=150^\circ$ ) и  $\approx 2,4\lambda$  ( $kr_0=15, \beta=150^\circ$ ) соответственно ( $\lambda$  — длина волны). При этих параметрах фазовая ошибка на раскрыве меньше  $10^\circ$ . На рис. 4 штрих-пунктиром изображен модуль диаграммы направленности полного поля (с учетом поля первичного источника) в той области углов ( $150-180^\circ$ ), где она отличается от диаграммы вторичного поля. Вследствие того, что первичный источник имеет секторную диаграмму, диаграмма полного поля терпит скачок при  $\varphi=150^\circ$ . Для числа членов ряда (25), равного  $N=18$  и 21, результаты расчета при  $kr_0=10$  с графической точностью совпадают. При  $kr_0=15$  на рис. 5 приведены кривые для  $N=18$  и 23. Расхождение между ними невелико и имеет место только для части сектора углов.

Если допустить на краях раскрыва фазовую ошибку  $90^\circ$ , то при тех же  $kr_0$  можно увеличить раскрыв до  $2,7\lambda$  ( $kr_0=10, \beta=120^\circ$ ) и  $3,8\lambda$  ( $kr_0=15, \beta=127^\circ$ ). Соответствующие этим параметрам диаграммы направленности вторичного поля изображены на рис. 6 и 7.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Эскин, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, Изд. Наука, 1973.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд. Мир, 1971.
3. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1974, 19, 5, 927.
4. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. 1, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
5. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1973, 212, 1.
6. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1972, 206, 6.
7. А. З. Фрадин, Антенны сверхвысоких частот, Изд. Советское радио, 1957.

Поступила в редакцию  
9 VII 1974

## МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ В ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНОВОДОВ

Л. Н. Фельд

Цель настоящего сообщения — показать, что хорошо известный из теории обыкновенных дифференциальных уравнений метод вариации постоянных Лагранжа может быть распространен на краевые задачи для уравнений с частными производными. Сделаем это на примере уравнений Максвелла, рассмотрев задачу о возбуждении волновода произвольного сечения заданными сторонними электрическими  $\mathbf{I}$  и магнитными  $\mathbf{I}^\mu$  токами, распределенными в некоторой области волновода между сечениями  $z=z_1$  и  $z=z_2$ .

Эта задача исследовалась неоднократно. Наибольшее распространение получили методы, использующие лемму Лоренца. Впервые это было сделано в работе [1], а затем различные модификации метода, использующего эту лемму, были даны в [2, 3, 4].

Пусть  $\mathbf{E}^{(\nu)}$ ,  $\mathbf{H}^{(\nu)}$  ( $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — полная система волн регулярного волновода, где положительным  $\nu$  соответствуют волны, идущие в направлении  $z > 0$ , а отрицательным  $\nu$  — в направлении  $z < 0$ . Любое решение однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющее соответствующим краевым условиям, в регулярной части волновода может быть представлено рядами

$$(1) \quad \mathbf{E} = \sum'_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \mathbf{E}^{(\nu)}, \quad \mathbf{H} = \sum'_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \mathbf{H}^{(\nu)},$$

где  $c_\nu$  — постоянные коэффициенты.

Штрих у сумм указывает на то, что  $\nu=0$  исключено, ниже мы его опускаем.

Попробуем, в соответствии с методом вариации постоянных, удовлетворить неоднородным уравнениям Максвелла, у которых справа стоят плотности токов  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{I}^\mu$ , выражениями типа (1), предполагая, что  $c_\nu$  — функции координат. Если считать  $c_\nu$  функциями трех координат, то мы сведем задачу к уравнениям в частных производных для  $c_\nu$ , что нежелательно. Поэтому будем полагать  $c_\nu$  функциями только одной координаты  $z$ , а для того, чтобы получить искомое решение при таком ограничительном предположении, добавим к правым частям (1) поправочные члены и запишем решение в виде

$$(2) \quad \mathbf{E} = \sum_{\nu} c_\nu(z) \mathbf{E}^{(\nu)} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{H} = \sum_{\nu} c_\nu(z) \mathbf{H}^{(\nu)} + \mathbf{F}.$$

Подставляя эти выражения в неоднородные уравнения Максвелла и учитывая, что  $\mathbf{E}^{(\nu)}$ ,  $\mathbf{H}^{(\nu)}$  удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла, найдем

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\nu} [\nabla c_\nu, \mathbf{H}^{(\nu)}] + \text{rot } \mathbf{F} = i\omega \epsilon \mathbf{f} + \mathbf{I}, \\ \sum_{\nu} [\nabla c_\nu, \mathbf{E}^{(\nu)}] + \text{rot } \mathbf{f} = -i\omega \mu \mathbf{F} - \mathbf{I}^\mu. \end{array} \right.$$

Легко видеть, что системе (3) нельзя удовлетворить в отсутствие поправочных членов  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{F}$ , так как токи  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{I}^\mu$ , в общем случае, имеют продольные (зет) компоненты, а суммы, стоящие слева в (3), их не имеют (если  $c_\nu$  зависят только от  $z$ ).

Так как неизвестных у нас оказалось больше, чем можно определить при помощи системы (3), то мы вправе наложить на них добавочные условия. Выберем их в соответствии с методом вариации постоянных так, чтобы максимально упростить уравнения (3). Последнее имеет место, если положить \*

$$(4) \quad \mathbf{F}_\perp = \mathbf{f}_\perp = 0.$$

\*  $\mathbf{A}_\perp$  — поперечная относительно  $z$  часть вектора  $\mathbf{A}$ .



При этом система (3) разбивается на две:

$$(5) \quad \mathbf{f} = -\frac{1}{i\omega\epsilon} I_z \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{F} = -\frac{1}{i\omega\mu} I_z \mathbf{i}_z;$$

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_v [\nabla c_v, \mathbf{H}^{(v)}] = \mathbf{I}_\perp + \frac{1}{i\omega\mu} [\nabla I_z^\mu, \mathbf{i}_z], \\ \sum_v [\nabla c_v, \mathbf{E}^{(v)}] = -\mathbf{I}_\perp^\mu + \frac{1}{i\omega\epsilon} [\nabla I_z, \mathbf{i}_z]. \end{cases}$$

Таким образом, удается сразу найти поправочные члены  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{F}$ , удовлетворяющие в отдельности крайевым условиям рассматриваемой задачи, если на стенке (идеального) волновода  $I_z$  и нормальная компонента  $I^\mu$  обращаются в нуль. Последнее всегда разумно считать выполненным, так как эти компоненты, находясь у стенки, не возбуждают поля внутри волновода.

Систему (6) можно использовать для нахождения  $c_v(z)$ . Для этого умножим первое уравнение (6) скалярно на  $\mathbf{E}^{(*)}$ , а второе — на  $\mathbf{H}^{(*)}$  и проинтегрируем по сечению волновода  $s(z)$  с координатой  $z$ . Тогда, учитывая, что

$$\int_{s(z)} [\mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{H}^{(*)}] ds = 0 \quad \text{при} \quad v \neq \mp *,$$

найдем

$$\begin{aligned} & \frac{dc_+}{dz} \int_{s(z)} [\mathbf{H}^{(*)}, \mathbf{E}^{(*)}] ds + \frac{dc_{-+}}{dz} \int_{s(z)} [\mathbf{H}^{(-*)}, \mathbf{E}^{(*)}] ds = \\ & = \int_{s(z)} \mathbf{E}^{(*)} \left\{ \mathbf{I}_\perp + \frac{1}{i\omega\mu} [\nabla I_z^\mu, \mathbf{i}_z] \right\} ds, \\ & \frac{dc_+}{dz} \int_{s(z)} [\mathbf{E}^{(*)}, \mathbf{H}^{(*)}] ds + \frac{dc_{-+}}{dz} \int_{s(z)} [\mathbf{E}^{(-*)}, \mathbf{H}^{(*)}] ds = \\ & = \int_{s(z)} \mathbf{H}^{(*)} \left\{ -\mathbf{I}_\perp^\mu + \frac{1}{i\omega\epsilon} [\nabla I_z, \mathbf{i}_z] \right\} ds. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно  $dc_+/dz$  и  $dc_{-+}/dz$  и выписывая выражение только для последнего, так как одно переходит в другое при замене  $+$  на  $-$ , получим

$$(7) \quad \frac{dc_{-+}}{dz} = \frac{\int_{s(z)} \left\{ \mathbf{H}^{(*)} \left( -\mathbf{I}_\perp^\mu + \frac{1}{i\omega\epsilon} [\nabla I_z, \mathbf{i}_z] \right) + \mathbf{E}^{(*)} \left( \mathbf{I}_\perp + \frac{1}{i\omega\mu} [\nabla I_z^\mu, \mathbf{i}_z] \right) \right\} ds}{2 \int_{s(z)} [\mathbf{E}^{(-*)}, \mathbf{H}^{(*)}] ds}.$$

Если использовать элементарно получаемые равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega\epsilon} \int_{s(z)} \mathbf{H}^{(*)} [\nabla I_z, \mathbf{i}_z] ds &= \int_{s(z)} E_z^{(*)} I_z ds; \\ \frac{1}{i\omega\mu} \int_{s(z)} \mathbf{E}^{(*)} [\nabla I_z^\mu, \mathbf{i}_z] ds &= - \int_{s(z)} H_z^{(*)} I_z^\mu ds \end{aligned}$$

а затем заменить  $\kappa$  на  $-\kappa$ , то (7) перейдет в следующее:

$$(8) \quad \frac{dc_\kappa}{dz} = \frac{\int_{s(z)} (E^{(-\kappa)}I - H^{(-\kappa)}I^\mu) ds}{2 \int_{s(0)} [E^{(\kappa)}, H^{(-\kappa)}] ds}.$$

Из принципа излучения и формул (2) и (8) следует, что  $c_\kappa(z) = 0$  при  $\kappa > 0$ ,  $z < z_1$  и при  $\kappa < 0$ ,  $z > z_2$ . Поэтому, интегрируя (8) по  $z$ , найдем окончательно

$$(9) \quad c_\kappa(z) = \pm \frac{\int_V (E^{(-\kappa)}I - H^{(-\kappa)}I^\mu) dV}{2 \int_{s(0)} [E^{(\kappa)}, H^{(-\kappa)}] ds},$$

где при  $\kappa > 0$  (знак «+») интегрирование по объему  $V$  идет между сечениями волновода  $z_1$  и  $z$ , а при  $\kappa < 0$  (знак «-») — между сечениями  $z$  и  $z_2$ .

Формулы (9) впервые получены в [3]. Метод, использованный здесь, импонирует своей относительной простотой, хотя в отдельных пунктах и близок к данному в [3].

Аналогичный прием может быть использован и при решении других задач.

**П р и м е ч а н и е.** Решение (2), (5), (9) формально справедливо при условии, что  $I_z = I_n^{(\mu)} = 0$  у идеально проводящей стенки волновода. В противном случае равенства (4) противоречат граничным условиям и должны быть изменены. Не останавливаясь на этом, отметим только, что при  $I_z \neq 0$  и  $I_n^{(\mu)} \neq 0$  у стенки эти составляющие могут

быть представлены в виде суммы  $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$  (аналогично для  $I_n^{(\mu)}$ ), где  $I_z^{(1)}$  внутри волновода совпадает с  $I_z$  и только на малом расстоянии  $\delta$  от стенки отличается от  $I_z$ , плавно стремясь к нулю;  $I_z^{(2)}$ , наоборот, равно нулю внутри волновода и только на расстоянии  $\delta$  становится отличным от нуля, плавно стремясь к  $I_z$  на стенке. Тогда, на основании принципа суперпозиции, поле внутри волновода может быть представлено в виде суммы полей, индуцированных токами  $I_z^{(1)}$  и  $I_z^{(2)}$  \*. Поле первого тока можно найти по формулам (2), (5), (9), так как  $I_z^{(1)} = 0$  у стенки, а поле тока  $I_z^{(2)}$ , поскольку он весь сосредоточен у идеально проводящей стенки, очевидно почти равно нулю всюду при достаточно малом  $\delta$ . Таким образом, формулы (2), (5), (9) практически решают задачу всегда.

Следует отметить, что в [3] члены  $f$  и  $F$  формул (2) найдены (в первой части работы) как взятые с обратным знаком поля двойных (разноименных) слоев электрических и магнитных зарядов. Однако при этом не учтено, что эти заряды находятся не в пустоте, а в металлической трубе. Последняя не влияет на поле между слоями вдали от стенки, но существенно сказывается на поле у самой стенки, обращая его соответствующие компоненты в нуль. Следовательно, в [3] в самом начале неявно предполагается, что  $I_z = I_n^{(\mu)} = 0$  у стенки, поскольку при этом заряды у стенки отсутствуют и влиянием последней на поле зарядов можно пренебречь.

В заключение обратим внимание на то, что случай, когда  $I_z$  и  $I_n^{(\mu)}$  не равны нулю у стенки, представляет чисто академический интерес. Действительно, токи не могут задаваться совершенно произвольно. Они должны быть «самосогласованными», т. е. определяться из соответствующей системы уравнений. Поэтому практически реализуемые токи всегда будут удовлетворять условиям  $I_z = I_n^{(\mu)} = 0$  у стенки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 1947, 17, 11, 1471.
2. М. Б. Заксон, Докл. АН СССР, 1949, 66, 637.
3. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1953, 23, 4, 654.
4. Б. Э. Каценеленбаум, Высоочастотная электродинамика, Изд. Наука, 1966.

Поступило в редакцию  
19 IV 1976

\* О полях, создаваемых другими компонентами токов, мы не говорим, так как для них формулы (2), (5), (9) всегда справедливы.

## РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXII

Январь 1977

Вып. 1

МОСКВА

УДК 621.396.677.833.1

ДИФРАКЦИЯ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ  
НА ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ЗЕРКАЛЕ*Я. Н. Фельд, А. К. Ансрян*

Исследуется задача о возбуждении зеркала — типа конечного параболоида вращения — точечным источником, находящимся в фокусе параболоида. Рассмотрение проводится для краевых условий Дирихле и Неймана на поверхности зеркала. Находятся распределение «тока» (скачок нормальной производной поля в случае краевых условий Дирихле и скачок самого поля при условиях Неймана) на зеркале и диаграммы направленности вторичного поля. Приводятся численные результаты.

Рассмотрим зеркальную антенну, поверхность которой  $S$  является частью параболоида вращения, опирающейся на контур  $\mathcal{L}$  (рис. 1, а). Поверхность зеркала предполагается бесконечно тонкой. Зеркало облучается точечным источником, расположенным в фокусе параболоида и создающим первичную скалярную волну  $\psi^{(0)}$ .

Вторичное поле  $\psi$ , создаваемое зеркалом, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(1) \quad \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (k - \text{волновое число}) \text{ и краевым условиям на зеркале типа Дирихле (или Неймана) } *$$

$$(2) \quad \psi^+ = \psi^- = -\psi^{(0)} \quad \text{на } S \quad \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial n} = \frac{\partial \psi^-}{\partial n} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial n} \text{ на } S \right) **$$

Поле  $\psi$  подчиняется также условиям Майкснера на контуре  $\mathcal{L}$  и условиям излучения на бесконечности.

Используем для решения краевой задачи (1)–(2) метод, предложенный в работе [1]. Для этого прежде всего приведем краткую сводку необходимых нам формул из [1].

\* Индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения величин при приходе на  $S$  со стороны, куда направлена нормаль  $n$  к  $S$ , и с противоположной соответственно.

\*\* В скобках помещаются формулы, относящиеся к краевым условиям Неймана, в тех случаях, когда они отличны от формул для условий Дирихле.

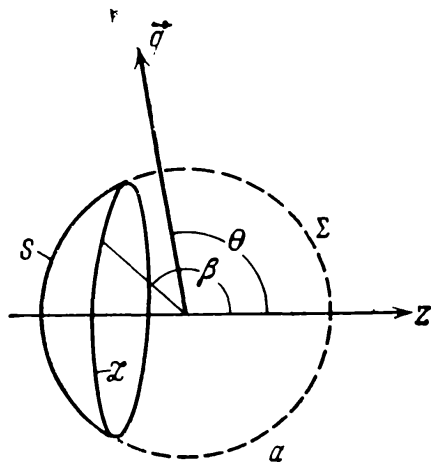
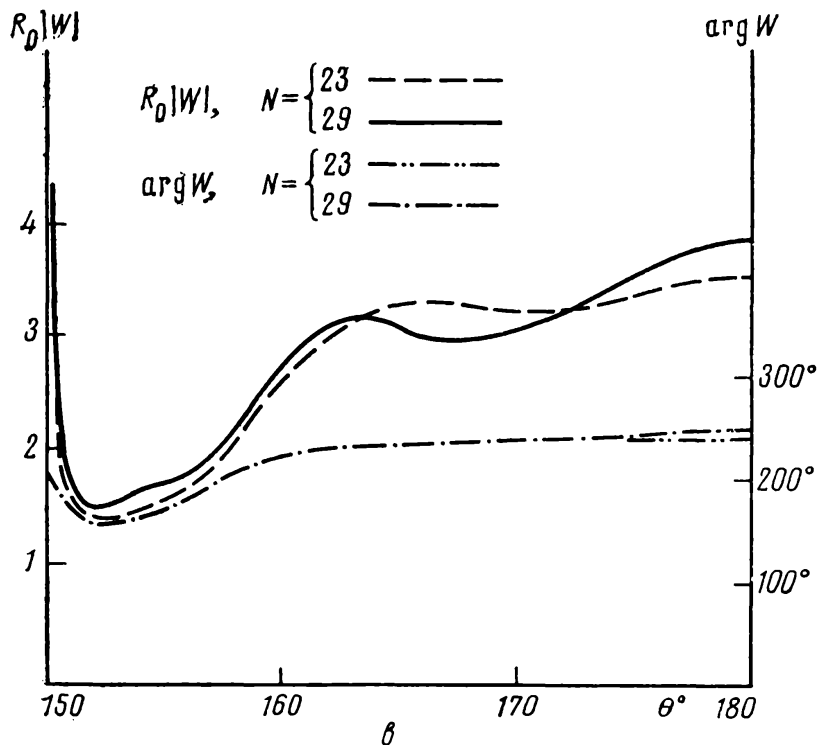
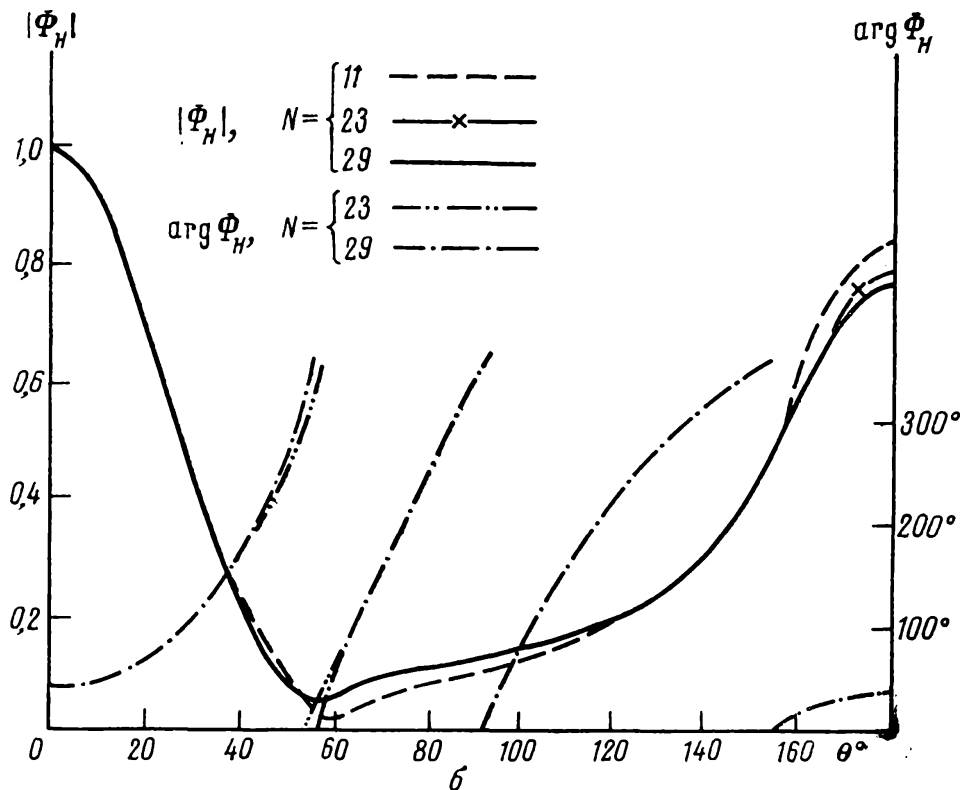


Рис. 1: а – параболическое зеркало; б – краевые условия Дирихле,  $kR_0=10$ ,  $\beta=150^\circ$ ; в – краевые условия Дирихле,  $kR_0=10$ ,  $\beta=150^\circ$



Поверхностный «ток»  $W$  на  $S$  и возбуждаемое им поле  $\psi$  определяются выражениями

$$(3) \quad W = \frac{\partial \psi^+}{\partial n} - \frac{\partial \psi^-}{\partial n} \text{ на } S \quad (W = \psi^+ - \psi^- \text{ на } S)$$

и

$$(4) \quad \psi(q) = - \int_S W(p) f(p, q) dp \quad \left( \psi(q) = \int_S W(p) \frac{\partial f(p, q)}{\partial n_p} dp \right),$$

где

$$f(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|};$$

$dp$  — дифференциал площади поверхности  $S$  в точке  $p$ . Справедлива следующая формула [1]:

$$(5) \quad W(q) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m U_m(q) \text{ на } S.$$

Здесь

$$(6) \quad C_m = \sum_{n=0}^m \overline{a_n^{(m)}} a_n; \quad U_m(q) = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} \frac{\bar{F}_n^*}{R}, \quad m=0, 1, 2, \dots;$$

$$(7) \quad a_n = -k \int_S \psi^{(0)} W_n dp \quad \left( a_n = -\frac{1}{k} \int_S W_n \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial n} dp \right).$$

Для определения  $F_n$  необходимо дополнить поверхность  $S$  до замкнутой поверхности  $S_0$  при помощи геометрической поверхности  $\Sigma$  (см. рис. 1, а). Тогда, вводя на  $S$ , семейство вспомогательных токов \*\*  $W_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), запишем

$$(8) \quad F_n = \begin{cases} k\psi\{W_n; S_0\} & \text{на } S \\ -W_n & \text{на } \Sigma \end{cases} \quad \left( F_n = \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{\partial \psi\{W_n; S_0\}}{\partial n} & \text{на } S \\ -W_n & \text{на } \Sigma \end{cases} \right),$$

где  $\psi\{W_n; S_0\}$  — поле, возбуждаемое током  $W_n$ , распределенным на  $S_0$ , определяемое формулами типа (4). Постоянные  $a_n^{(m)}$  (см. (6)) подбираются так, чтобы семейство функций  $U_m$  было ортонормированным, т. е.

$$(U_m, U_n) = \delta_{mn}.$$

Рекуррентные формулы для  $a_n^{(m)}$ , получаемые известным методом ортогонализации Шмидта, имеют следующий вид:

$$(9) \quad \begin{cases} a_n^{(m)} = \frac{\sigma_{mn}}{\sqrt{\Gamma_{mm} - \sum_{k=0}^{m-1} |\lambda_{mk}|^2}}; & \sigma_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ -\sum_{k=n}^{m-1} \lambda_{mk} a_n^{(k)} & \text{при } n < m; \end{cases} \\ \lambda_{mk} = \sum_{p=0}^k \Gamma_{mp} \overline{a_p^{(k)}}; & \Gamma_{mp} = \left( \frac{\bar{F}_m}{R}, \frac{\bar{F}_p}{R} \right). \end{cases}$$

\* Черта над буквой — знак комплексного сопряжения.

\*\* Предполагается, что линейные комбинации  $W_n$  всюду плотны в  $C^2(S_0)$  ( $C^2(S_0)$  — пространство функций, обладающих непрерывными вторыми производными).

Отметим, что скалярное произведение определяется так:

$$(10) \quad (U, V) = \int_S U \bar{V} R dp.$$

Вес  $R$  (фигурирующий также во второй формуле (6)) для условий Дирихле выбирается в виде произвольной положительной непрерывной (вместе с первыми производными) на  $S$  и  $\Sigma$  функции, стремящейся к нулю как  $\rho^{1/2}$  ( $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ ) при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $S$ ; на  $\Sigma$  ее можно взять постоянной. В случае условий Неймана  $R \rightarrow \infty$  как  $\rho^{-1/2}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $S$  и  $R \rightarrow 0$  как  $\rho^{1/2}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $\Sigma$ . В дальней зоне вторичное поле

$$(11) \quad \psi(q) = -\frac{e^{-ik|q|}}{4\pi|q|} \Phi \quad \left( \psi(q) = -ik \frac{e^{-ik|q|}}{4\pi|q|} \Phi \right).$$

Здесь

$$(12) \quad \Phi = \int_S W(p) e^{ik|p|\cos \gamma} dp$$

— диаграмма направленности вторичного поля;  $|p|$  — длина радиуса-вектора точки  $p$ ;  $\gamma$  — угол между векторами, проведенными из начала координат в точки интегрирования  $p$  и наблюдения  $q$ .

Возвращаясь к исходной задаче, аппроксимируем поверхность зеркала сферическим сегментом (рис. 1, а) с радиусом  $R_0$ , равным удвоенному фокусному расстоянию параболоида вращения [2]. При этом угол  $\beta$  (см. рис. 1, а), определяющий используемую часть сферы, должен быть таким, чтобы фазовая ошибка на краю раскрыва не превосходила  $\pi/2$  \*. Это обеспечивается допустимым отклонением поверхности зеркала от идеального параболоида на величину, не превосходящую  $\lambda/8$ , что соответствует допускам, применяемым при изготовлении реальных зеркал.

Введем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с центром в центре сферы  $S_0$  и осью  $\theta=0$ , совпадающей с осью параболоида (рис. 1, а). Тогда контур  $\mathcal{L}$  зеркала определяется уравнением  $\theta=\beta$ , а поверхность зеркала (сферический сегмент) —  $R=R_0$ ,  $\beta \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Поверхность  $\Sigma$  дополняет  $S$  до полной сферы  $S_0$ . Весовую функцию выберем в соответствии со сказанным выше равной

$$(13) \quad R = \begin{cases} (\cos \beta - \cos \theta)^{1/2}, & \beta < \theta, \\ 1, & \theta < \beta \end{cases}$$

$$\left( R = \begin{cases} (\cos \beta - \cos \theta)^{-1/2}, & \beta < \theta \\ (\cos \theta - \cos \beta)^{1/2}, & \theta < \beta \end{cases} \right).$$

Вследствие симметрии рассматриваемой задачи относительно оси  $\theta=0$ ,  $\theta=\pi$  вспомогательные токи удобно задать при помощи формул

$$(14) \quad W_n = P_n(\cos \theta), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

где  $P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра  $n$ -й степени. Подставляя (14) в (4) вместо  $W_n$  и заменяя  $S$  на  $S_0$ , найдем

$$(15) \quad \psi\{W_n; S_0\} = \frac{\pi R_0}{-2i} J_{n+1/2} H_{n+1/2}^{(2)} P_n(\cos \theta) \text{ на } S_0$$

\* Это требование ограничивает глубину параболического зеркала.

для краевых условий Дирихле и \*

$$(16) \quad \frac{1}{k} \frac{\partial \psi \{W_n; S_0\}}{\partial n} = \frac{\pi k R_0}{2i} \left( J_{n+1/2} - \frac{n J_{n+1/2}}{k R_0} \right) \times \\ \times \left( H_{n+1/2}^{(2)} - \frac{n H_{n+1/2}^{(2)}}{k R_0} \right) P_n(\cos \theta) \text{ на } S_0$$

для условий Неймана. Здесь аргументом у цилиндрических функций является  $kR_0$ . Поле  $\psi^{(0)}$  первичного источника, расположенного в фокусе, зададим (в телесном угле, под которым зеркало видно из фокуса) при помощи формулы

$$(17) \quad \psi^{(0)} = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-ik\rho_0}}{k\rho_0}, \quad \text{где } \rho_0 = \sqrt{\frac{1}{4} R_0^2 + R^2 + RR_0 \cos \theta}$$

— расстояние, отсчитываемое от фокуса зеркала. Вне указанного телесного угла поле  $\psi^{(0)}$  мы не задаем, так как его значение в этой области не сказывается на величине вторичного (дифрагированного) поля  $\psi$ . Практически поле  $\psi^{(0)}$  вне угла облучения зеркала стараются сделать как можно меньше, чтобы не испортить суммарную диаграмму и не снизить коэффициент усиления.

Номер рисунка	$kR_0$	$\beta^\circ$	$\frac{d}{\lambda}$	$\Delta$	Краевые условия	$N$	Диаграмма или ток	$\Delta\Phi^\circ$	$ \Phi_{нс}(\pi) $
1, б	10	150	1,59	$\frac{\pi}{36}$	Дирихле	11, 23, 29	$\Phi_n$	40	0,29
1, в	10	150	1,59	$\frac{\pi}{36}$	Дирихле	23, 29	$R_0 W$	—	—
2, а	10	90	3,18	1,6 $\pi$	Дирихле	18, 24	$\Phi_n$	32	0,04
2, б	10	90	3,18	1,6 $\pi$	Неймана	18, 24	$\Phi_n$	32	0,20
3, а	20	136	4,57	$\frac{\pi}{4}$	Дирихле	17, 23, 29	$\Phi_n$	12,5	0,08
3, б	20	136	4,57	$\frac{\pi}{4}$	Дирихле	17, 23	$R_0 W$	—	—
4, а	20	136	4,57	$\frac{\pi}{4}$	Неймана	23, 29	$\Phi_n$	13,75	0,22
4, б	20	136	4,57	$\frac{\pi}{4}$	Неймана	23, 29	$W$	—	—

Выражения (13)–(17) позволяют рассчитать ток (5) (учитывая формулы (6)–(8)), а также поле (4) и диаграмму (12) для рассматриваемых задач с краевыми условиями Дирихле или Неймана.

Ниже приведены результаты расчетов для амплитуд и фаз тока (5) и нормированной диаграммы вторичного (дифрагированного) поля

$$(18) \quad \Phi_n(\theta) = \frac{\Phi(\theta)}{|\Phi(0)|},$$

где  $\Phi(\theta)$  определяется формулой (12); аргумент  $\theta$  здесь опущен, так как поле осесимметрично (см. (17)).

Вычисления проводились на ЦЭВМ «Наири» для параметров, сведенных в таблицу. В таблице приняты следующие обозначения:  $d/\lambda$  — диаметр раскрыва зеркала в долях волны,  $\Delta$  — максимальная фазовая ошиб-

\* Вторая формула (4) при этом дифференцируется по нормали.

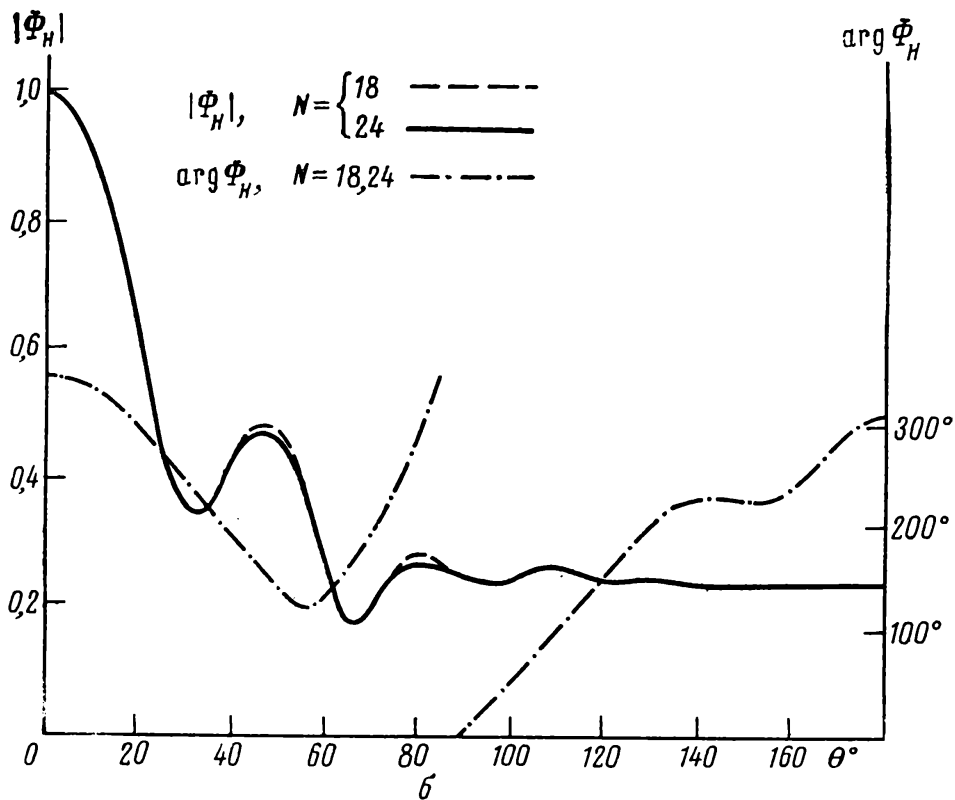
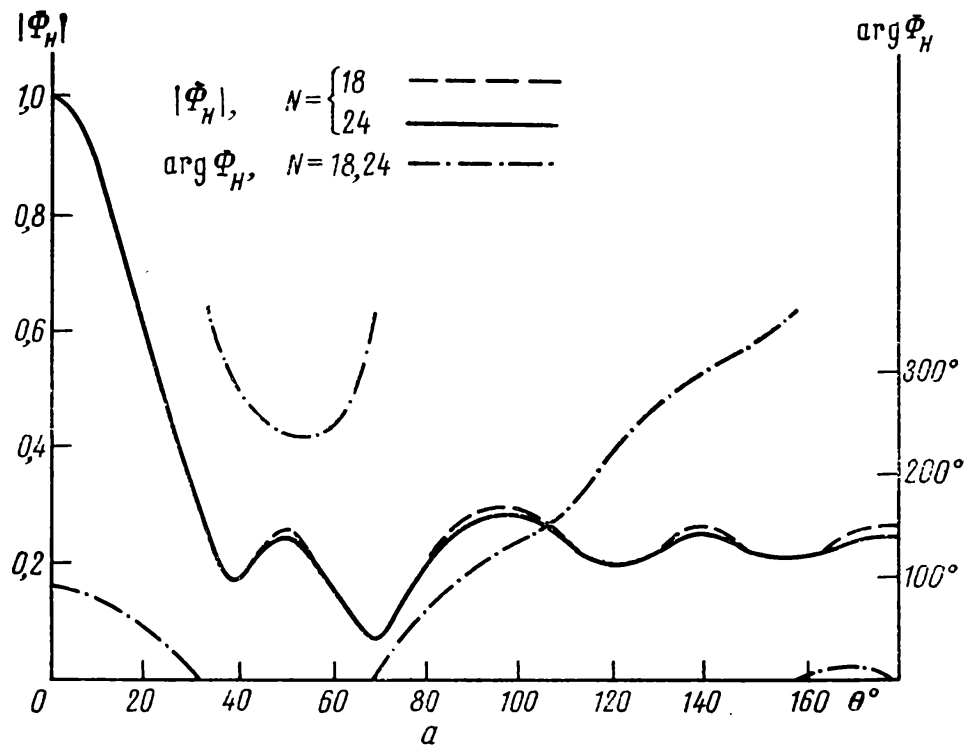


Рис. 2: а — краевые условия Дирихле,  $kR_0=10$ ,  $\beta=90^\circ$ ; б — краевые условия Неймана,  $kR_0=10$ ,  $\beta=90^\circ$

ка в раскрые,  $N$  — число учтенных членов ряда (6),  $\Delta\Phi$  — ширина главного лепестка диаграммы на уровне 0,707,  $|\Phi_{\text{вс}}(\pi)|$  — величина суммарной (с учетом первичного поля), нормированной диаграммы в направлении  $\theta=\pi$ .

Из кривых на рис. 1, б—4, б видно, что ряд для диаграммы «поточечно» сходится значительно лучше, чем ряд для тока. Это естественно, так как первый сходится равномерно, а второй — по норме пространства  $L_R^2$ , т. е. в среднем с весом  $R$  [1]. Следует также отметить, что кривые, характери-



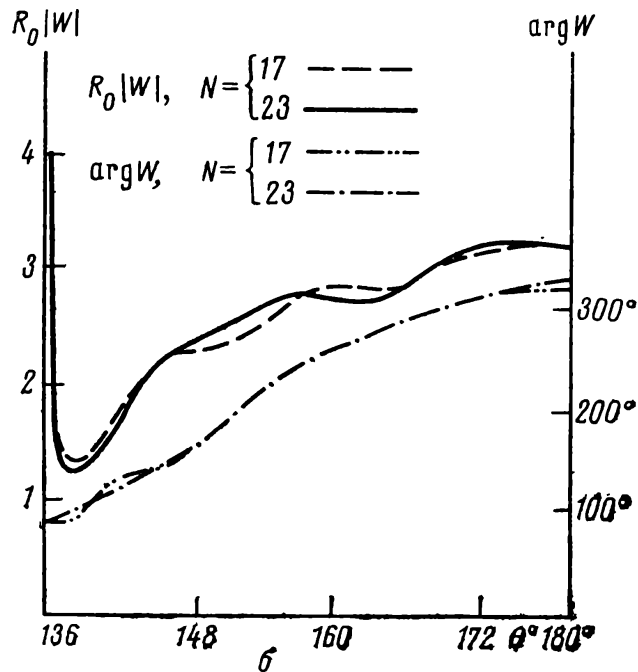
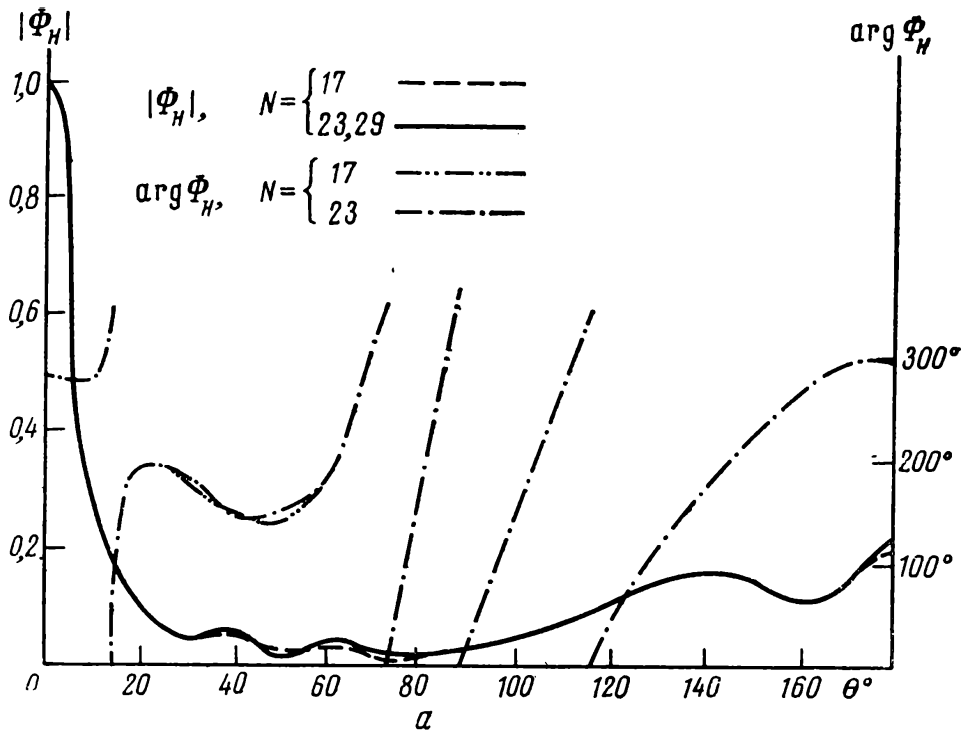


Рис. 3: а – краевые условия Дирихле,  $kR_0=20$ ,  $\beta=136^\circ$ ; б – краевые условия Дирихле,  $kR_0=20$ ,  $\beta=136^\circ$

зующие фазы диаграмм и токов, сближаются с ростом  $N$  несколько быстрее, чем для соответствующих амплитуд. Практически достаточно при расчетах ограничиться числом членов ряда  $N \approx kR_0$ , т. е. равным числу волн, укладывающихся на экваториальном контуре поверхности  $S_0$ .

Ширина главного лепестка диаграммы на уровне 0,707 для всех рассмотренных случаев, когда фазовая ошибка  $\Delta < \pi/2$ , удовлетворительно совпадает с величиной, получаемой по известной формуле  $\Delta\Phi = 57^\circ (\lambda/d)$  вплоть до раскрытов  $d \approx 1,5\lambda$ . Для сравнительно больших раскрытов  $d = 4,6\lambda$  ширина  $\Delta\Phi$  в случае условия Дирихле на 30% уже, чем для условий Неймана. Следует отметить, что при  $\Delta = 1,6\lambda$  зеркало представляет собой половину сферы и плохо аппроксимирует параболоид, однако диаграммы (рис. 2, а, б) получаются вполне приемлемыми, хотя фактическая ширина главного лепестка оказывается значительно большей,  $32^\circ$  вместо  $18^\circ$  при обоих краевых условиях.

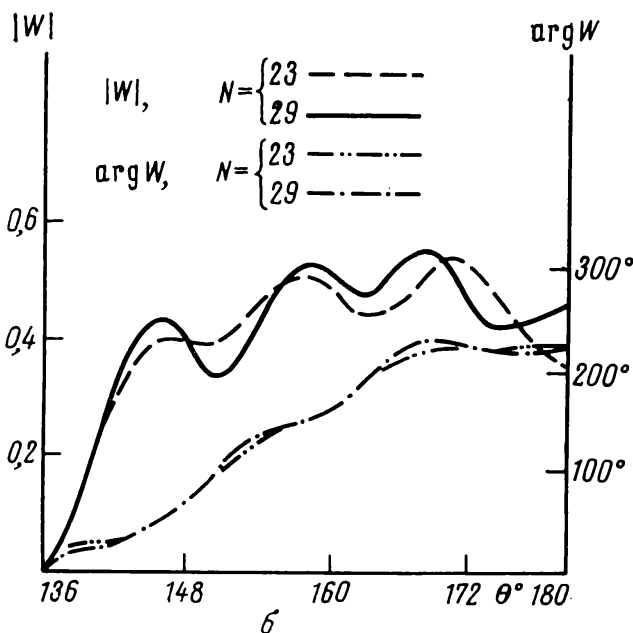
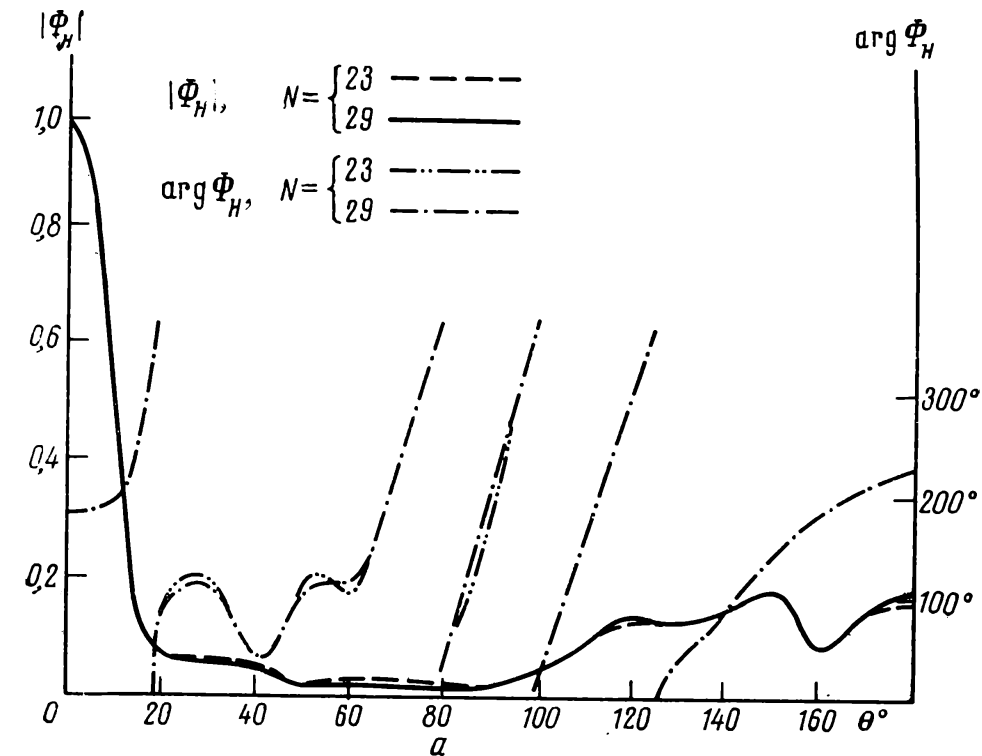


Рис. 4: а — краевые условия Неймана,  $kR_0=20$ ,  $\beta=136^\circ$ ; б — краевые условия Неймана,  $kR_0=20$ ,  $\beta=136^\circ$

На рисунках изображены диаграммы вторичного поля. Для того чтобы судить о результирующей диаграмме, необходимо прибавить ко вторичной диаграмме (12) диаграмму первичного поля (17), она имеет вид

$$(19) \quad \Phi^{(0)}(\theta) = \frac{\sqrt{32\pi}}{ik} \exp \left\{ -ik \frac{R_0}{2} \cos \theta \right\}$$

$$\left( \Phi^{(0)}(\theta) = \frac{\sqrt{32\pi}}{-k^2} \exp \left\{ -ik \frac{R_0}{2} \cos \theta \right\} \right)$$

в телесном угле  $\beta \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Диаграмму направленности первичного источника в области  $0 \leq \theta < \beta$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  мы не выписываем, так как здесь не задано поле  $\psi^{(0)}$  (см. выше); в первом приближении ее можно положить тут равной нулю. Не приводя (из-за недостатка места) суммар-

ных диаграмм  $\Phi_{nc} = \Phi_n + \Phi_n^{(0)}$  ( $\Phi_n^{(0)} = \Phi^{(0)}(\theta)/|\Phi(0)|$ ), оценим, насколько наличие первичного поля снижает уровень задних лепестков вторичного, так как они почти противофазны. Для этого в таблице в последнем столбце приведены значения суммарной нормированной диаграммы направленности  $|\Phi_{nc}(\pi)|$  в направлении  $\theta = \pi$ , т. е. точно назад. Как видно из таблицы, уровень заднего лепестка суммарной диаграммы уменьшился, по сравнению с  $|\Phi_n(\pi)|$ , для большинства рассмотренных примеров в несколько раз.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1973, 18, 9, 1785.
2. А. З. Фрадин, Антенны сверхвысоких частот, Изд. Советское радио, 1957.

Поступила в редакцию  
18 V1976

УДК 621.372.81

**МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ В ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ  
ШАРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И МАГНИТНЫМИ ТОКАМИ***Я. Н. Фельд, С. Я. Фельд*

Методом вариации постоянных, обобщенным на случай краевых задач для уравнений Максвелла, изучено возбуждение шара произвольно заданными электрическими и магнитными токами. Показано, что полное поле может быть записано при помощи формул, аналогичных известным формулам теории возбуждения волноводов. Рассмотрены случаи идеально проводящего и магнитодиэлектрического шаров. В зависимости от выбора парциальных волн и преимущественной координаты могут быть сразу получены решения, пригодные для численных расчетов при  $ka \gg 1$  или  $ka \approx 1$  ( $a$  — радиус шара,  $k = 2\pi/\lambda$ ).

**ВВЕДЕНИЕ**

Рассматривается задача о возбуждении шара произвольно распределенными токами. Предлагаемый метод решения подробно изучается на примере идеально проводящего шара, а затем обобщается на случай шара с любыми электромагнитными параметрами.

Задача о возбуждении шара точечным диполем неоднократно рассматривалась различными методами и ей посвящена обширная литература. Отметим только работы \* [1–5], в которых дана также подробная библиография. Мы сочли возможным вернуться к этой задаче по следующим причинам.

1. В большинстве работ решение получено в виде ряда, пригодного для вычисления при  $ka \approx 1$  ( $k$  — волновое число,  $a$  — радиус шара), и лишь затем, при помощи преобразования Ватсона, оно приводится к виду, пригодному для  $ka \gg 1$ . Исключение составляют работы [2, 4], где рассматривается скалярная задача с точечным источником.

2. Переход от решения, полученного для точечных диполей, к произвольному распределению возбуждающих электрических и магнитных токов методом суперпозиции весьма громоздок. Связано это с тем, что поле обычно записывается в системе координат с осью  $z$ , проходящей через диполь. Поэтому переход к произвольной системе сферических координат для последующего объемного интегрирования требует применения теорем сложения для различных спецфункций и утомительных преобразований.

3. Предлагаемый метод прост и кратчайшим путем ведет к получению окончательных формул; причем, в зависимости от выбора парциальных волн и преимущественной координаты, приводит к решению, пригодному для вычислений при  $ka \gg 1$  или  $ka \approx 1$ .

4. Для целого класса задач (возбуждение шара, волновода и т. п.), когда можно построить парциальные решения, этот метод (§ 2) однопипен и приводит к совпадающим по форме решениям (ср. с [7]), аналогичным известным [6] формулам задачи о возбуждении волновода.

\* В работе [5] рассмотрено возбуждение идеального шара радиальным линейным током конечной длины.

Ниже будет дано решение уравнений Максвелла:

$$(I) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{k}{i\rho} \mathbf{E} + \mathbf{I}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\rho \mathbf{H} - \mathbf{I}^{\prime},$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$  — волновое число,  $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$  — волновое сопротивление; использована практическая система единиц и зависимость от времени взята в виде  $e^{-i\omega t}$ . Для идеально проводящего шара краевые условия имеют вид

$$(II) \quad [\mathbf{E}, \mathbf{i}_r] = 0 \quad \text{при} \quad r = a.$$

Здесь  $\mathbf{i}_r$  — радиальный орт.

В случае магнитоэлектрического шара условие (II) заменяется требованием непрерывности тангенциальных составляющих векторов поля при переходе через поверхность шара, а в уравнениях (I) под  $k$  и  $\rho$  понимаются кусочно-постоянные функции, равные при  $r > a$  соответствующим величинам для внешнего пространства, а при  $r < a$  — для внутреннего пространства шара.

### 1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СЛУЧАЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЫ

Парциальные волны введем в соответствии с идеей Зоммерфельда [2] так, чтобы каждая из них удовлетворяла условию излучения и краевому условию на сфере  $r = a$ . При этом она естественно должна иметь источники в области  $r > a$ .

Парциальные волны проще всего ввести при помощи потенциалов Дебая по известным формулам [6]

$$(1) \quad \begin{cases} E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) V; & H_r = 0, \\ E_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \vartheta}; & H_\vartheta = \frac{-ik}{\rho r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}; & H_\varphi = \frac{ik}{\rho r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

для электрических волн и

$$(2) \quad \begin{cases} E_r = 0; & H_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) U, \\ E_\vartheta = \frac{ik\rho}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; & H_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \vartheta}, \\ E_\varphi = -\frac{ik\rho}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}; & H_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} \end{cases}$$

для магнитных волн. Здесь

$$(3) \quad V = A \zeta_\nu(kr) P_\nu^m(\pm \cos \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix},$$

$$(4) \quad U = B \zeta_\nu(kr) P_\nu^m(\pm \cos \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix},$$

$P_{\nu(x)}^m$  — присоединенная функция Лежандра,  $\zeta_\nu(kr) = \sqrt{\pi kr/2} H_{\nu+1/2}^{(1)}(kr)$ ,  $H_{\nu+1/2}^{(1)}$  — функция Ганкеля,  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Для того чтобы каждая парциальная волна удовлетворяла

краевому условию на сфере, числа  $\nu$  и  $\kappa$ , как это следует из (1) – (4), должны быть корнями уравнений:

$$(5) \quad \zeta'_\nu(ka) = 0 \quad \text{в случае электрических волн,}$$

$$(6) \quad \zeta_\kappa(ka) = 0 \quad \text{в случае магнитных волн.}$$

Уравнения (5) – (6) имеют счетное число корней  $\nu$  и  $\kappa$ , расположенных в первом \* квадранте комплексной плоскости \*\*. Каждому из них при заданной зависимости от  $\varphi$  (типа  $\cos m\varphi$  или  $\sin m\varphi$ ) соответствуют две парциальные волны. Одна из этих волн получается при выборе знака «+» у  $\cos \vartheta$  в формулах (3), (4) и распространяется в направлении от  $\vartheta = \pi$  к  $\vartheta = 0$ , а другая – при выборе знака «-» и распространяется от  $\vartheta = 0$  к  $\vartheta = \pi$  [4]. В этом легко убедиться при помощи асимптотической формулы, например, для  $P_\nu^m(\cos \vartheta)$  при  $|\nu| \gg 1$ , что имеет место для корней  $\nu$  при  $|ka| \gg 1$ .

Из сказанного следует, что рассмотренных парциальных волн существует счетное множество. Поэтому их можно перенумеровать (тем или иным способом) при помощи одного индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения, кроме нуля. Сделаем это при единственном условии, чтобы парциальные волны  $E^p, H^p$  и  $E^{-p}, H^{-p}$  отличались только знаком у  $\cos \vartheta$  в выражении для соответствующего потенциала Дебая (3) или (4). При этом индексу  $p > 0$  пусть соответствует знак «-», т. е. волна, идущая в направлении от  $\vartheta = 0$  к  $\vartheta = \pi$ , и наоборот. Таким образом, волны, отличающиеся знаком  $p$ , однотипны, но распространяются в противоположных направлениях по  $\vartheta$ .

Поскольку  $P_{\nu(x)}^m(\cos \vartheta)$  обращается в бесконечность при  $\vartheta = \pi$ , а  $P_{\nu(x)}^m(-\cos \vartheta)$  – при  $\vartheta = 0$ , то парциальные волны с  $p > 0$  имеют источники, расположенные вдоль луча  $\vartheta = 0, r > a$ , а волны с  $p < 0$  – вдоль луча  $\vartheta = \pi, r > a$ . Вне этих лучей они удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла.

Обозначим через  $s(\vartheta)$  поверхность усеченного конуса:  $\vartheta = \text{const}, r > a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Для введенных парциальных волн выполняются следующие условия ортогональности:

$$(7) \quad \int_{s(\vartheta)} [E^p, H^q] ds = 0 \quad \text{при } p \neq \pm q.$$

Доказать это проще всего при помощи леммы Лоренца, которая (в нашем случае) для объема, ограниченного поверхностями  $s(\vartheta_1), s(\vartheta_2)$  ( $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \pi$ ) и частью сферы  $r = a$ , имеет вид

$$(8) \quad \int_{s(\vartheta_1)} \{[E^p, H^q] - [E^q, H^p]\} ds = \int_{s(\vartheta_2)} \{[E^p, H^q] - [E^q, H^p]\} ds.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Индексу  $p$  соответствует электрическая, а  $q$  – магнитная волна. Тогда (8) перепишется так:

$$\int_{s(\vartheta_1)} [E^p, H^q] ds = \int_{s(\vartheta_2)} [E^p, H^q] ds.$$

\* Соответствующие числа  $-(\nu+1)$  и  $-(\kappa+1)$  также являются корнями (5), (6), но они не дают новых решений.

\*\* Значение этих корней может быть взято из соответствующей литературы [1–3].

Левая часть — функция  $\vartheta_1$ , а правая —  $\vartheta_2$ , поэтому они обе равны постоянной. Последняя равна нулю, поскольку, например, левая часть содержит, как видно из (1) — (4), множитель, являющийся функцией от  $\vartheta_1$ . Доказательство для случая, когда  $p$  соответствует магнитной, а  $q$  — электрической волне, аналогично.

2. Индексы  $p$  и  $q$  одного знака и оба соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам.

В этом случае, устремляя  $\vartheta_1 \rightarrow 0$  (при  $p, q < 0$ ) или  $\vartheta_2 \rightarrow \pi$  (при  $p, q > 0$ ), приведем (8) к виду

$$(9) \quad \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^q] ds = \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^p] ds,$$

где индекс у  $\vartheta$  опущен. Если  $p \neq q$ , то, как следует из (1) — (4), левая и правая части (9) содержат в качестве множителей различные функции от  $\vartheta$  и, следовательно, должны порознь равняться нулю. Исключением является случай, когда  $p \neq q$  только за счет того, что в соответствующих выражениях для потенциалов (3), (4) у волны  $p$  стоит  $\cos m\vartheta$ , а у волны  $q$  —  $\sin m\vartheta$  или наоборот. Однако и в этом случае левая и правая части (9) обращаются в нуль за счет ортогональности указанных тригонометрических функций на интервале  $0-2\pi$ .

3. Индексы  $p$  и  $q$  различных знаков и оба соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам. В этом случае по доказанному в п. 2

$$(10) \quad \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^{-q}] ds = 0 \quad \text{при } p \neq -q.$$

Если теперь в этом равенстве заменить  $-q$  на  $q$ , то в выражении для соответствующего потенциала Дебая изменится только знак у  $\cos \vartheta$ . Следовательно, изменится только множитель, зависящий от  $\vartheta$ , содержащийся в левой части (10), а само равенство не нарушится. Таким образом, и

$$\int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^q] ds = 0 \quad \text{при } p \neq -q.$$

Доказательство закончено.

## 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ [7]

Будем искать решение краевой задачи (I, II) в виде рядов по парциальным волнам с переменными коэффициентами  $C_p$ . Для того чтобы свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для  $C_p$  ( $p = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), положим последние функциями только одного переменного  $\vartheta$ , и чтобы скомпенсировать это ограничение, добавим к рядам поправочные \* члены. Таким образом, напомним

$$(11) \quad \mathbf{E} = \sum_p C_p(\vartheta) \mathbf{E}^p + \mathbf{F}; \quad \mathbf{H} = \sum_p C_p(\vartheta) \mathbf{H}^p + \mathbf{f}.$$

Подставляя эти выражения в (I) и учитывая, что парциальные волны удовлетворяют при  $0 < \vartheta < \pi$  однородным уравнениям Максвелла, найдем

\* Добавление таких членов практикуется также при решении обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений обобщенным методом вариации постоянных ([8], стр. 149).

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{H}^p] + \text{rot } \mathbf{f} &= -\frac{ik}{\rho} \mathbf{F} + \mathbf{I} \\ \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{E}^p] + \text{rot } \mathbf{F} &= ik\rho \mathbf{f} - \mathbf{I}^\mu \end{aligned} \right\} 0 < \vartheta < \pi.$$

При  $\mathbf{F}=\mathbf{f}=0$  последние равенства не могли бы быть выполнены, так как при этом их левые части не имели бы составляющих в направлении  $\vartheta$  (при  $C_p=C_p(\vartheta)$ ), а правые, в общем случае, имели бы.

Учитывая сказанное, а также то, что число неизвестных, фигурирующих в (12), больше, чем может быть определено из этой системы, положим

$$(13) \quad F_r = F_\varphi = f_r = f_\varphi = 0.$$

Это соответствует методу вариации постоянных Лагранжа, где излишек неизвестных используется для максимального упрощения уравнений. Действительно, при выполнении условий (13) система (12) расщепляется на две

$$(14) \quad F_\vartheta = \frac{\rho}{ik} I_\vartheta; \quad f_\vartheta = \frac{1}{ik\rho} I_\vartheta^\mu$$

и

$$(15) \quad \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{H}^p] + \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{I}_\perp; \quad \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{E}^p] + \text{rot } \mathbf{F} = -\mathbf{I}_\perp^\mu.$$

Здесь, например,  $\mathbf{I}_\perp$  — поперечная, относительно орта  $\mathbf{i}_\vartheta$ , часть вектора  $\mathbf{I}$ . Формулы (14) совместно с (13) определяют векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{f}$ , а система (15) может быть использована для нахождения коэффициентов  $C_p(\vartheta)$ . Для этого умножим первое равенство (15) скалярно на  $r\mathbf{E}^q$ , второе — на  $r\mathbf{H}^q$  и результаты проинтегрируем по поверхности  $s(\vartheta)$  ( $0 < \vartheta < \pi$ ). Учитывая условия ортогональности (7), найдем

$$\begin{aligned} \frac{dC_q}{d\vartheta} \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^q] ds + \frac{dC_{-q}}{d\vartheta} \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^{-q}] ds &= \int_{s(\vartheta)} \mathbf{E}^q (\text{rot } \mathbf{f} - \mathbf{I}_\perp) r ds, \\ \frac{dC_q}{d\vartheta} \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^q] ds + \frac{dC_{-q}}{d\vartheta} \int_{s(\vartheta)} [\mathbf{E}^{-q}, \mathbf{H}^q] ds &= - \int_{s(\vartheta)} \mathbf{H}^q (\text{rot } \mathbf{F} + \mathbf{I}_\perp^\mu) r ds. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных  $dC_q/d\vartheta$  и  $dC_{-q}/d\vartheta$ , получим

$$(16) \quad \frac{dC_{-q}}{d\vartheta} = \frac{\int_{s(\vartheta)} \{ \mathbf{E}^q (\text{rot } \mathbf{f} - \mathbf{I}_\perp) + \mathbf{H}^q (\text{rot } \mathbf{F} + \mathbf{I}_\perp^\mu) \} r ds}{\int_{s(\vartheta)} \{ [\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^{-q}] - [\mathbf{E}^{-q}, \mathbf{H}^q] \} ds}$$

Выражение для  $dC_q/d\vartheta$  не выписываем, так как оно получается\* из (16) заменой  $q$  на  $-q$ . Упростим числитель (16). Учитывая (13), (14) и однородные уравнения Максвелла, которым удовлетворяют  $\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^q$  в области  $0 < \vartheta < \pi$ , легко показать, что

\* Следует отметить, что из решения вышенаписанной системы уравнений получается более громоздкое выражение для  $dC_q/d\vartheta$ , но оно легко упрощается, если учесть (1)–(4).



$$\int_{s(\vartheta)} \mathbf{E}^q \operatorname{rot} \mathbf{f} r ds = \int_{s(\vartheta)} I_\varphi^q \mathbf{i}_\varphi \mathbf{H}^q r ds; \quad \int_{s(\vartheta)} \mathbf{H}^q \operatorname{rot} \mathbf{F} r ds = - \int_{s(\vartheta)} I_\varphi^q \mathbf{i}_\varphi \mathbf{E}^q r ds.$$

При этом учтено также, что при  $r=a$  физически реализуемая составляющая  $I_\varphi=0$  (об этом подробнее см. в [7]) и что токи  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}^\mu$  распределены в конечной области. Используя эти равенства и меняя  $q$  на  $-q$ , придадим (16) следующий вид:

$$(17) \quad \frac{dC_q}{d\vartheta} = \frac{\int_{s(\vartheta)} (\mathbf{I} \mathbf{E}^{-q} - \mathbf{I}^\mu \mathbf{H}^{-q}) r ds}{\int_{s(\vartheta)} \{[\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^{-q}] - [\mathbf{E}^{-q}, \mathbf{H}^q]\} ds}.$$

Как следует из леммы Лоренца (8), знаменатель в (17) — величина постоянная, не зависящая от  $\vartheta$ . Пусть все токи  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}^\mu$  распределены в области  $\alpha < \vartheta < \beta$  ( $0 < \alpha < \beta < \pi$ ). Тогда, интегрируя (17) от  $\vartheta_0$  до  $\vartheta$ , найдем

$$(18) \quad C_q(\vartheta) - C_q(\vartheta_0) = \frac{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \int_{s(\vartheta)} (\mathbf{I} \mathbf{E}^{-q} - \mathbf{I}^\mu \mathbf{H}^{-q}) r ds d\vartheta}{\int_{s(\vartheta)} \{[\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^{-q}] - [\mathbf{E}^{-q}, \mathbf{H}^q]\} ds}.$$

Очевидно, для  $q > 0$   $C_q(\vartheta) = 0$  при  $\vartheta \leq \alpha$ ; действительно, как следует из (18),  $C_q(\vartheta)$  постоянно вне интервала  $(\alpha, \beta)$ , поэтому, если оно будет отлично от нуля при  $\vartheta \leq \alpha$ , то в решении (11) будет присутствовать член с  $p=q$ , обращающийся в бесконечность при  $\vartheta=0$ , чего не должно быть. Аналогично, для  $q < 0$   $C_q(\vartheta) = 0$  при  $\vartheta \geq \beta$ . Учитывая сказанное и полагая в (18)  $\vartheta_0 = \alpha$ , а затем  $\vartheta_0 = \beta$ , получим окончательно

$$(19) \quad C_q(\vartheta) = \frac{\pm \int_{v^\pm} [\mathbf{I} \mathbf{E}^{-q} - \mathbf{I}^\mu \mathbf{H}^{-q}] dv}{\int_{s(\vartheta)} \{[\mathbf{E}^q, \mathbf{H}^{-q}] - [\mathbf{E}^{-q}, \mathbf{H}^q]\} ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь знаки «+» относятся к положительным  $q$ , а знаки «-» к отрицательным;  $v^+$  — объем, ограниченный поверхностями  $s(\alpha)$ ,  $s(\vartheta)$  и частью сферы  $r=a$ ,  $v^-$  — объем, ограниченный поверхностями  $s(\vartheta)$ ,  $s(\beta)$  и частью сферы  $r=a$ . Формулы (11), (13), (14), (19) дают решение задачи о возбуждении идеально проводящей сферы произвольной системой электрических и магнитных токов (при единственном условии, что  $I_\varphi=0$  на сфере  $r=a$ \*). Это решение, во всяком случае, пригодно для вычислений при больших  $ka$ , когда можно ограничиться одним — двумя первыми членами рядов, фигурирующих в (11).

Метод вариации постоянных, развитый здесь, выгодно отличается своей простотой, а главное тем, что приводит к весьма компактному решению. Все полученные формулы сохраняют смысл и в пределе, когда  $\alpha \rightarrow 0$ , а  $\beta \rightarrow \pi$ .

Резонансный случай, когда  $ka \rightarrow 1$ , тоже может быть рассмотрен методом вариации постоянных. Однако он должен быть несколько изменен. Так, парциальные волны по-прежнему определяются формулами (1), (2), где потенциалы (3), (4) теперь заменяются следующими:

$$(3a) \quad (V, U) = (A, B) Z_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}.$$

\* В [7] добавлено еще одно условие  $I_n^\mu=0$  на идеальном металле, которое формально не требуется, но всегда выполняется.

Здесь

$$Z_n(kr) = \begin{cases} \zeta_n(kr) & \text{при } p > 0, \\ \zeta_n(kr) - \alpha_n \psi_n(kr) & \text{при } p < 0, \end{cases}$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \zeta_n'(ka) / \psi_n'(ka) & \text{для электрических волн,} \\ \zeta_n(ka) / \psi_n(ka) & \text{для магнитных волн,} \end{cases}$$

$m$  и  $n$  — целые числа,  $\psi_n(x) = \sqrt{\pi x} / 2 J_{n+1/2}(x)$ .

Как и выше, применяется одноиндексная нумерация ( $p = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) парциальных волн, причем переход от волны  $p$  ( $> 0$ ) к волне  $-p$  сводится только к замене в выражении для  $Z_n(kr)$  верхней строчки на нижнюю. Пусть  $s(r)$  — поверхность сферы  $r = \text{const}$ . Можно показать, что для только что введенных парциальных волн выполняется условие ортогональности (7), если в нем заменить область интегрирования  $s(\vartheta)$  на  $s(r)$ . Учитывая это и повторив вычисления § 2, заменив при этом преимущественную переменную  $\vartheta$  на  $r$ , придем к решению типа (11):

$$\mathbf{E} = \sum_p C_p(r) \mathbf{E}^p + \mathbf{F}; \quad \mathbf{H} = \sum_p C_p(r) \mathbf{H}^p + \mathbf{f}.$$

Здесь

$$\mathbf{F} = \frac{\rho}{ik} I_r \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{ik\rho} I_r \mathbf{i}_r,$$

$\mathbf{i}_r$  — орт в направлении  $r$ , а коэффициенты  $C_p(r)$  определяются формулой (19), в которой  $s(\vartheta)$  следует заменить на  $s(r)$  и под  $v^+$  понимать область между  $s(r_a)$  и  $s(r)$ , а под  $v^-$  — между  $s(r)$  и  $s(r_b)$ ;  $r_a < r < r_b$  — область, в которой находятся источники. При этом, естественно, под  $\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^p$  понимаются волны, определяемые уравнениями (1), (2), (3а). Из рассмотренных выше случаев ясно, как следует подбирать парциальные волны. Внутри интервала изменения преимущественной переменной они должны удовлетворять однородным уравнениям Максвелла; на одном его краю должны выполняться краевые условия для волн с  $p > 0$ , а на другом — с  $p < 0$ .

### 3. ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА

Рассмотрим шар радиуса  $a$  с комплексными, в общем случае, параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$  и соответствующими числами  $k_1$  и  $\rho_1$ . Параметры внешней среды по-прежнему будем писать без индексов. Парциальные волны в области  $r > a$  определим формулами (1) — (4), а в области  $r < a$  — формулами (1), (2), у которых вместо  $k, \rho$  должны стоять постоянные  $k_1, \rho_1$ ; что касается формул (3), (4), то они должны быть заменены следующими:

$$(20) \quad V = A^1 \psi_v(k_1 r) P_v^m(\pm \cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \left. \vphantom{P_v^m} \right\} r < a.$$

$$(21) \quad U = B^1 \psi_x(k_1 r) P_x^m(\pm \cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

Величины  $A, A^1, v$  и  $B, B^1, x$  находятся теперь из условий непрерывности тангенциальных составляющих векторов поля парциальной волны при переходе через поверхность сферы  $r = a$ . Эти условия, с учетом (1) — (4) и (20), (21), имеют вид

$$(22) \quad A k \zeta_v'(ka) = A^1 k_1 \psi_v'(k_1 a); \quad \frac{k}{\rho} A \zeta_v(ka) = \frac{k_1}{\rho_1} A^1 \psi_v(k_1 a)$$

для электрических волн и

$$(23) \quad k\rho B \zeta_x(ka) = k_1 \rho_1 B^1 \psi_x(k_1 a); \quad kB \zeta_x'(ka) = k_1 B^1 \psi_x'(k_1 a)$$

для магнитных волн.

Условия совместности первой и второй пары уравнений запишутся так:

$$(24) \quad \rho \frac{\zeta_v'(ka)}{\zeta_v(ka)} = \rho_1 \frac{\psi_v'(k_1 a)}{\psi_v(k_1 a)}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\zeta_x'(ka)}{\zeta_x(ka)} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\psi_x'(k_1 a)}{\psi_x(k_1 a)}.$$

Это и есть характеристические уравнения, определяющие корни  $\nu$  и  $\kappa$ ; они заменяют уравнения (5), (6). После нахождения этих корней отношения  $A^1/A$  и  $B^1/B$  определяются из (22) и (23). Имеется счетное множество корней  $\nu$  и  $\kappa$ . Они также лежат в первом квадранте комплексной плоскости (во всяком случае при достаточно малом  $|\rho_1/\rho|$ ). Соответствующие им парциальные волны перенумеруем при помощи одного индекса  $p$ , аналогично тому, как это сделано выше для идеально проводящей сферы. При этом, в отличие от последней, для волны с  $p > 0$  источники распределены вдоль всего луча  $\vartheta = 0$ ,  $r > 0$ , а при  $p < 0$  — вдоль всего луча  $\vartheta = \pi$ ,  $r > 0$ . При такой нумерации эти волны также удовлетворяют условиям ортогональности типа (7), если под  $s(\vartheta)$  теперь понимать поверхность полного конуса  $\vartheta = \text{const}$ ,  $r > 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . С учетом последнего замечания доказательство условий (7) ничем не отличается от данного выше.

Все рассуждения и формулы, приведенные в § 2, полностью пригодны и для решения задачи о возбуждении магнитодиэлектрической сферы заданной системой токов. Необходимо только под  $E^p$ ,  $H^p$  понимать парциальные волны, введенные в настоящем параграфе, под  $s(\vartheta)$  — поверхность полного конуса  $\vartheta = \text{const}$ ,  $r > 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , а под  $k$  и  $\rho$  в формулах (12), (14) — кусочно-постоянные функции, равные при  $r > a$  волновому числу и волновому сопротивлению свободного пространства, а при  $r < a$  — соответствующим величинам для магнитодиэлектрической сферы, т. е.  $k_1$  и  $\rho_1$ .

Таким образом, формулы (11), (13), (14), (19) решают (с учетом только что сказанного) также задачу о возбуждении магнитодиэлектрической сферы при  $ka \gg 1$ . Переход к случаю  $ka \approx 1$  проводится так же, как и для идеальной сферы.

#### 4. ПРИМЕР

Для иллюстрации метода рассмотрим известную задачу о возбуждении идеально проводящего шара электрическим диполем, находящимся в точке  $r = r_0$ ,  $\vartheta = 0$  ( $r_0 > a$ ) с радиально ориентированным моментом  $p_0$ . Благодаря осевой симметрии задачи можно ограничиться электрическими парциальными волнами (1), (3) с  $m = 0$ . Нумерацию этих волн произведем в соответствии с нумерацией корней  $\nu_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) уравнения (5) в порядке возрастания их модулей. Из формул (19) с учетом (1), (3) найдем после соответствующих преобразований

$$(25) \quad C_p = \frac{\omega \rho p_0 (2\nu + 1) \zeta_\nu(kr_0)}{4k^2 r_0^2 \sin(\pi\nu) \zeta_\nu(ka) \frac{\partial}{\partial \nu} \zeta_\nu'(ka)} \Big|_{\nu = \nu_p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

$C_p=0$  при  $p=-1, -2, \dots$ . При этом в формуле (3) положено  $A=1$ . Поле (11) запишется так:

$$\mathbf{E} = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \mathbf{E}^p, \quad \mathbf{H} = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \mathbf{H}^p.$$

Поскольку коэффициенты  $C_p$  постоянны, то это результирующее поле можно также выразить через результирующий потенциал Дебая

$$V = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \xi_{v_p}(kr) P_{v_p}(-\cos \vartheta)$$

по формулам (1). Это решение совпадает при  $r_0=a$  с известным [1-3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1937.
2. А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.
3. Б. А. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, ОНТИ, 1934.
4. И. И. Голичев, П. Е. Краснушкин, Теоретическая и математическая физика, 1972, 10, 3.
5. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1946, 51, 3.
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
7. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1976, 21, 12, 2615.
8. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. Наука, 1965.

Поступила в редакцию  
17 I 1977

## РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXIII

Январь 1978

Вып. 1

МОСКВА

УДК 621.372.8.012

## ДИАФРАГМА В ВОЛНОВОДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

*Я. Н. Фельд*

Рассмотрена задача о падении волны на плоскую диафрагму произвольной формы, расположенную в волноводе любого сечения. Полная система собственных волн регулярного волновода предполагается известной. Найдены коэффициенты Фурье для вектор-функции  $\mathbf{I}$ , равной току на металле диафрагмы, и тангенциальной составляющей электрического вектора на ее апертуре. Построен соответствующий ряд для  $\mathbf{I}$ , сходящийся в среднем с некоторым весом. Даны формулы, определяющие комплексные амплитуды волн, возбуждаемых диафрагмой, по найденным значениям  $\mathbf{I}$  на металле диафрагмы или на апертуре. Приведена методика расчета для случая резонансной диафрагмы в прямоугольном волноводе.

## ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — распространение метода, предложенного в [1, 2] для решения задач дифракции на незамкнутых поверхностях, на случай, когда вблизи последних находятся другие тела. Предполагается, что решение задачи о возбуждении поля заданными токами при наличии этих тел, но в отсутствие незамкнутых поверхностей, известно. Подобным примером является диафрагма (незамкнутая поверхность), расположенная внутри волновода (другое тело).

Ниже будет рассмотрена задача о падении волны на диафрагму, находящуюся в волноводе произвольного сечения.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть  $\mathbf{E}^\nu, \mathbf{H}^\nu, \nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ , — полная система электрических и магнитных волн регулярного волновода произвольного сечения  $s_0$  с осью  $z$ . Положительные индексы  $\nu > 0$  соответствуют волнам, распространяющимся в направлении положительных  $z$ , и отрицательные  $\nu < 0$  — в направлении  $z < 0$ . Введем некоторую фиксированную нормировку, которая будет определена ниже для волн с  $\nu > 0$ . Тогда нормировку для волн с  $\nu < 0$  найдем из условий

$$(1) \quad [\mathbf{i}_z(\mathbf{E}^\nu - \mathbf{E}^{-\nu})] = 0 \text{ при } z=0 \ (\nu > 0).$$

Введем еще семейство векторных функций  $\Gamma^v$ , заданных в сечении волновода  $z=0$  равенствами

$$(2) \quad \Gamma^v = [i_z(\mathbf{H}^v - \mathbf{H}^{-v})]_{z=0} \quad (v > 0).$$

Известно [3] условие ортогональности

$$\int_{(s_0)} [\mathbf{E}^v \mathbf{H}^{\kappa*}] ds = 0 \quad \text{при } v \neq \pm \kappa.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$(3) \quad \int_{(s_0)} \mathbf{E}^v \Gamma^{\kappa*} ds = 0 \quad \text{при } v \neq \pm \kappa.$$

Теперь определим нормировку волн при  $v > 0$  из естественного условия

$$(4) \quad \int_{(s_0)} \mathbf{E}^v \Gamma^v ds = 1 \quad (v > 0).$$

Если в сечении  $z=0$  волновода распределен поверхностный электрический ток с плотностью  $\Gamma^v$  ( $v > 0$ ), то он возбуждит в волноводе поле  $\mathbf{e}^v, \mathbf{h}^v$ , определяемое формулой

$$(5) \quad \mathbf{e}^v, \mathbf{h}^v = \begin{cases} \mathbf{E}^v, \mathbf{H}^v & \text{при } z > 0, \\ \mathbf{E}^{-v}, \mathbf{H}^{-v} & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Другие волны при этом возбуждаться не будут. Таким образом ток  $\Gamma^v$  возбуждит в сечении  $z=0$  электрическое поле, тангенциальная составляющая которого равна

$$(6) \quad \mathbf{e}_t^v = \mathbf{E}_t^v = \mathbf{E}_t^{-v}.$$

## 2. ДИАФРАГМА В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим задачу о падении волны  $\mathbf{E}^{v_0}, \mathbf{H}^{v_0}$  ( $v_0 > 0$ ) на бесконечно тонкую, идеально проводящую, плоскую диафрагму  $s$  произвольной формы, установленную в сечении волновода  $z=0$ .

Обозначим через  $\Sigma$  плоскую поверхность отверстия, дополняющую  $s$  до полного сечения волновода  $s_0$  ( $s_0 = s + \Sigma$ ). Полное поле в волноводе запишем в виде

$$(7) \quad \vec{\mathcal{E}} = \mathbf{E}^{v_0} + \mathbf{E}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \mathbf{H}^{v_0} + \mathbf{H} \quad (-\infty < z < \infty),$$

где  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — вторичное искомое поле, вызванное наличием диафрагмы. Вследствие полноты системы собственных волн и условия нормировки (1) это поле можно представить так:

$$(8) \quad \mathbf{E} = \sum_{v=1}^{\infty} A_v \begin{cases} \mathbf{E}^v, \\ \mathbf{E}^{-v}, \end{cases} \quad \mathbf{H} = \sum_{v=1}^{\infty} A_v \begin{cases} \mathbf{H}^v, & z \geq 0, \\ \mathbf{H}^{-v}, & z \leq 0. \end{cases}$$

Непрерывность тангенциальной составляющей вектора  $\mathbf{E}$  при переходе через диафрагму обеспечивается (1), а скачок  $\mathbf{H}_t$  определяет поверхностную плотность тока  $\mathbf{K}$ , индуцированного на диафрагме  $s$ . Вторая формула (8) и обозначение (2) позволяют написать

$$(9) \quad \sum_{v=1}^{\infty} A_v \Gamma^v = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s, \\ 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Это равенство дает возможность выразить неизвестные постоянные  $A_\nu$  через  $K$ . Действительно, учитывая ортонормировку (3), (4), найдем

$$(10) \quad A_\nu = \int_{(s)} K E^\nu ds \quad (\nu=1, 2, \dots).$$

Для  $A_\nu$  может быть получено еще одно выражение через тангенциальную составляющую  $E_t$  на отверстии  $\Sigma$ . Учитывая, что  $E_t = -E_t^{\nu_0}$  на  $s$ , напишем, при помощи первой формулы (8), следующее равенство:

$$(11) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu E_t^\nu = \begin{cases} -E_t^{\nu_0} & \text{на } s \\ E_t & \text{на } \Sigma \end{cases} \quad (z=0).$$

Условия ортонормировки (3), (4) позволят перейти от (11) к формуле

$$(12) \quad A_\nu = \int_{(\Sigma)} E I^\nu ds - \int_{(s)} E^{\nu_0} I^\nu ds \quad (\nu=1, 2, \dots).$$

Приравнивая (10) и (12), получим искомую систему функциональных уравнений для  $K$  на  $s$  и  $E_t$  на  $\Sigma$ :

$$(13) \quad \int_{(s)} K E^\nu ds - \int_{(\Sigma)} E I^\nu ds = - \int_{(s)} E^{\nu_0} I^\nu ds \quad (\nu > 0).$$

Эта система могла быть также получена сразу при помощи леммы Лоренца, примененной к полям  $E, H$  и  $e^\nu, h^\nu$ .

Введем обычные [2] обозначения

$$(14) \quad I = \begin{cases} K & \text{на } s, \\ \frac{1}{\rho_0} E_t & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad F^\nu = \begin{cases} E_t^\nu & \text{на } s, \\ -\rho_0 I^\nu & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Здесь  $\rho_0$  — волновое сопротивление свободного пространства и введено для придания величинам единой размерности во всей области их определения.

Теперь (13) можно переписать так:

$$(15) \quad \int_{(s_0)} I F^\nu ds = - \int_{(s)} E^{\nu_0} I^\nu ds, \quad \nu=1, 2, \dots$$

$I$  — искомый вектор, а все остальные величины известны. Эти соотношения являются основными. Для нахождения вектора  $I$  при помощи (15) введем гильбертово пространство  $L_R^2(s_0)$ , элементами которого являются вектор-функции, заданные на  $s_0$  и касательные к ней. Скалярное произведение в нем определим формулой

$$(16) \quad (A, B) = \int_{(s_0)} A \cdot \overline{RB} ds.$$

Здесь  $R$  — квадратная диагональная матрица с неотрицательными элементами, которая выбирается так, чтобы элементы  $L_R^2(s_0)$  удовлетворяли условиям Майкснера для тока при приближении к контуру диафрагмы со стороны  $s$  и электрического поля при приближении со стороны  $\Sigma$  (подробнее см. в [2]). Это обеспечивает принадлежность искомого  $I$  (см. (14)) пространству  $L_R^2(s_0)$ . Черта — знак комплексного сопряжения. Обозначение (16) позволяет переписать (15) в виде

$$(17) \quad (I, R^{-1} \overline{F^\nu}) = a_\nu, \quad \text{где } a_\nu = - \int_{(s)} E^{\nu_0} I^\nu ds;$$

$R^{-1}$  — матрица, обратная  $R$ .

В [2] доказано, что семейство вектор-функций  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^v$  ( $v=1, 2, \dots$ ) полно в  $L_R^2(s_0)$ . Последнее позволяет использовать (17) для нахождения  $\mathbf{I}$ . Сделать это можно, например, переходя от  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^v$  к ортонормированному семейству  $\mathbf{u}^v$  при помощи процесса Шмидта:

$$(18) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{v+1} = \frac{\mathbf{v}^{v+1}}{\|\mathbf{v}^{v+1}\|}, & \mathbf{v}^1 = R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^1, \\ \mathbf{v}^{v+1} = R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^{v+1} - \sum_{x=1}^v (R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^{v+1}, \mathbf{u}^x) \mathbf{u}^x. \end{cases}$$

Очевидно, искомый вектор  $\mathbf{I}$  можно записать так:

$$(19) \quad \mathbf{I} = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \mathbf{u}^v, \text{ где } c_v = (\mathbf{I}, \mathbf{u}^v).$$

Этот ряд сходится по норме пространства  $L_R^2(s_0)$ . Коэффициенты  $c_v$  легко найти, учитывая (17), при помощи следующей рекуррентной формулы:

$$(20) \quad c_{v+1} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{v+1}\|} \left\{ a_{v+1} - \sum_{x=1}^v c_x (\mathbf{u}^x, R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^{v+1}) \right\}, \quad c_1 = \frac{a_1}{\|\mathbf{v}^1\|}$$

Для  $\mathbf{u}^v$  и  $c_v$  можно написать также явные выражения, но в вычислительном плане (18), (20) предпочтительнее.

Вычисляя  $\mathbf{I}$  при помощи (19) и используя его (см. (14)) для нахождения коэффициентов  $A_v$  по формулам (10) и (12), можно судить о точности вычисления ряда (19), так как результаты вычислений по обеим этим формулам будут совпадать только при подстановке истинных значений  $\mathbf{K}$  на  $s$  и  $\mathbf{E}_t$  на  $\Sigma$ .

Отметим также, что при помощи (17) можно найти  $\mathbf{I}$ , минуя процесс ортогонализации. Для этого, записав  $\mathbf{I}$  в виде ряда

$$(19a) \quad \mathbf{I} = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \mathbf{W}^v,$$

где  $\mathbf{W}^v$  — любая подходящая полная система функций, заданная на  $s_0$  (не обязательно ортогональная), найдем, подставляя (19a) в (17),

$$(20a) \quad \sum_{x=1}^{\infty} c_x (\mathbf{W}^x, R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^v) = a_v, \quad v=1, 2, \dots$$

Эта система линейных алгебраических уравнений позволяет обычными методами определить коэффициенты  $c_x$ , т. е. решение (19a). В качестве  $\mathbf{W}^v$  можно, например, взять  $R^{-1}\bar{\mathbf{F}}^v$ .

### 3. РЕЗОНАНСНАЯ ДИАФРАГМА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Применим изложенную выше методику к задаче о диафрагме в прямоугольном волноводе, изображенной на рисунке. Здесь же указаны все размеры. Выпишем интересующие нас величины, используя, как обычно, двойную индексацию, т. е. заменяя  $v$  на  $m, n$ . При этом в качестве полной системы волн в регулярном волноводе используем  $E$ - и  $H$ -волны.



*E*-волны. Для них

$$(21) \quad \begin{cases} \Gamma^{\nu} = \frac{B_{\nu}}{\gamma_{\nu}} \frac{m}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} i_x + \frac{B_{\nu}}{\gamma_{\nu}} \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} i_y, \\ E_i^{\nu} = -\frac{\gamma_{\nu} \rho_0}{2} \Gamma^{\nu} \quad (z=0, \nu > 0). \end{cases}$$

*H*-волны. Для них

$$(22) \quad \begin{cases} \Gamma^{\nu} = B_{\nu} \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} i_x - B_{\nu} \frac{m}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} i_y, \\ E_i^{\nu} = -\frac{\rho_0}{2\gamma_{\nu}} \Gamma^{\nu} \quad (z=0, \nu > 0). \end{cases}$$

В формулах (21) и (22)

$$B_{\nu} = \sqrt{\frac{-8\gamma_{\nu}}{\rho_0 \left( \frac{b}{a} m^2 + \frac{a}{b} n^2 \right)}}, \quad \gamma_{\nu} = \sqrt{1 - \left( \frac{m\pi}{ka} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{kb} \right)^2};$$

$$\text{Im } B_{\nu} > 0, \quad \text{Re } \gamma_{\nu} \geq 0, \quad \text{Im } \gamma_{\nu} \leq 0.$$

Для численных расчетов по формулам (17)–(20) желательно написать явные выражения, позволяющие взаимно однозначно сопоставить каждому индексу  $\nu$  ( $\nu=1, 2, 3, \dots$ ) пару целых положительных чисел  $m, n$ . При этом четными числами  $\nu$  мы перенумеруем все возможные пары  $m, n$ , описывающие *E*-волны, а нечетными  $\nu$  – пары  $m, n$ , описывающие *H*-волны. Одно из многочисленных подобных сопоставлений можно задать при помощи следующих формул:

$$(23) \quad \begin{cases} n = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{\nu}{2} - 1 + m \right)} \right) - m \text{ при } \nu\text{-четных, } m \geq 1; \\ m = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{\nu+1}{2} - n \right)} \right) - n \text{ при } \nu\text{-нечетных, } n \geq 0. \end{cases}$$

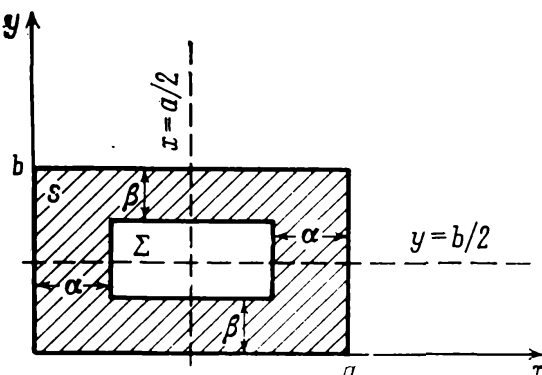
Задаваясь целым числом  $\nu > 0$  и подставляя в правую часть соответствующей формулы (23) наименьшее целое число  $m \geq 1$  (или  $n \geq 0$ ), при котором левая часть формулы будет целым числом  $n$  (или  $m$ ), определим пару чисел  $m, n$ , соответствующих заданному  $\nu$ . Выберем теперь матрицу  $R$  для рассматриваемого примера так, чтобы каждый член ряда (19) имел на внутреннем контуре диафрагмы, т. е. на ребре (см. рисунок), те же особенности, которые реализуются для  $I$  [2]. Это будет '  $y$  иметь место при

$$(24) \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$R_{11} = \sqrt{(x-\alpha)(a-\alpha-x)} \text{ на } \Sigma,$$

$$R_{22} = \sqrt{(y-\beta)(b-\beta-y)} \text{ на}$$

$$\Sigma \quad (\alpha \leq x \leq a-\alpha, \beta \leq y \leq b-\beta).$$



Ввиду симметрии диафрагмы  $s$  относительно осей  $x=a/2$  и  $y=b/2$  (рисунок) можно задать  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  только в левом нижнем углу  $s$ , ограниченном этими осями,

$$(24a) \quad R_{11} = \frac{1}{R_{22}} = \begin{cases} (\alpha-x)^{-1/2} & \text{при } 0 \leq x \leq \alpha, \beta \leq y \leq b/2; \\ (\beta-y)^{1/2} & \text{при } \alpha \leq x \leq a/2, 0 \leq y \leq \beta; \\ \frac{(\beta-y)^{1/2} + (\alpha-x)^{1/2}}{\sqrt{(\beta-y)^2 + (\alpha-x)^2}} & \text{при } 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq y \leq \beta. \end{cases}$$

На остальную часть  $s$  эти выражения могут быть продолжены, исходя из соображений симметрии.

Введенная таким образом матрица  $R$  непрерывна на  $s$  и  $\Sigma$  и только в четырех дискретных точках внутреннего контура диафрагмы — в углах  $x=\alpha$ ,  $y=\beta$ ;  $x=\alpha$ ,  $y=b-\beta$ ;  $x=a-\alpha$ ,  $y=\beta$ ;  $x=a-\alpha$ ,  $y=b-\beta$  не обеспечивает указанных выше особенностей для каждого члена (19). Однако это несущественно, поскольку ряд (19) сходится по норме пространства  $L_R^2(s_0)$  [2]. Подчеркнем здесь же, что ряды для величин  $A_n$ , получаемые при помощи формул (10) или (12) после подстановки в них  $K$  или  $E_i$  из (19) (см. (14)), будут сходиться как обычные числовые ряды.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда на диафрагму падает первичная волна типа  $H_{10}$ ; в наших обозначениях волна  $E^{\nu_0}$ ,  $H^{\nu_0}$  с  $\nu_0=1$ .

Величина  $A_1$  связана с коэффициентами отражения  $R_1$  и прохождения  $T_1$  основной волны  $H_{10}$ , отнесенными к сечению  $z=0$ , следующими очевидными выражениями:

$$R_1 = A_1; \quad T_1 = 1 + A_1.$$

Расчет проводится в следующей последовательности.

1. По формулам (18) и (19), где  $F^\nu$  определяется по второй формуле (14), с учетом (21), (22) и (24) находятся  $u^\nu$  и  $c_\nu$ .
2. По формуле (19) находится  $I$ , т. е. (см. (14))  $K$  на  $s$  и  $E_i$  на  $\Sigma$ .
3. По формулам (10) или (12) с учетом (21), (22) рассчитываются  $A_n$ .

Вместо расчетов по пунктам 1 и 2 можно найти  $c_\nu$  из решения системы (20а), а затем определить  $I$  по формуле (19а).

Все вычисления можно существенно сократить, если учесть симметрию геометрии и первичной волны  $H_{10}$  относительно осей  $x=a/2$  и  $y=b/2$ . Легко сообразить, что при этом икс-овые компоненты тока на диафрагме  $s$  и электрического вектора поля в апертуре  $\Sigma$  будут антисимметричны, а игрековые — симметричны относительно указанных осей. Поэтому для полей с такой симметрией будет полной система  $E$ - и  $H$ -волн (21), (22), у которой  $m$  и  $n$  принимают только нечетные и четные значения соответственно, т. е.  $m=(2m'-1)$ , а  $n=2n'$  ( $m'=1, 2, \dots$ ;  $n'=0, 1, \dots$ ). Связь между  $m$ ,  $n$  и  $\nu$  по-прежнему может быть задана формулами (23) при условии, что  $m$  и  $n$  в них заменены штрихованными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1973, 212, 1.
2. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1975, 20, 1, 28.
3. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, Изд. Наука, 1966.

Поступила в редакцию  
3 V 1977

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.372.8.09

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ИМПЕДАНСНОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ТОКОВ

Я. Н. Фельд, С. Я. Фельд

Рассмотрим импедансный цилиндр радиуса  $a$ , возбуждаемый системой электрических  $I$  и магнитных  $I^m$  токов. Подобные задачи уже неоднократно рассматривались [1–6]. Отличие настоящей работы заключается в получении общих формул для любого распределения возбуждающих токов. Для этого развивается метод вариации постоянных [7, 8], в котором используются следующие моменты. 1) Решение ищется в виде разложения по парциальным волнам, источники которых расположены на двух полуплоскостях:  $\varphi=0, r>a$  и  $\varphi=\pi, r>a$ . 2) Неопределенные коэффициенты этих разложений представляются функциями только одной координаты, что позволяет получить для них обыкновенное дифференциальное уравнение. При этом в зависимости от выбора этой координаты можно получать различные формы решения; ниже, выбрав координату  $\varphi$ , получим решение, пригодное при  $|ka| \gg 1$  (в области тени).

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью цилиндра. Не ограничивая общности, будет считать, что токи и поля зависят от  $z$  в виде  $\exp(ihz)$ . Взяв временную зависимость в форме  $\exp(i\omega t)$ , будем искать решение неоднородных уравнений Максвелла (при  $r>a$ ) с краевым условием

$$(1) \quad E_t = \xi [nH] \quad \text{при } r=a,$$

где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $r=a$ ;  $\xi$  — поверхностный импеданс. Решение должно удовлетворять также принципу излучения при  $r \rightarrow \infty$ .

Построим прежде всего систему парциальных волн, каждая из которых должна удовлетворять однородным уравнениям Максвелла при  $r>a$  и  $\varphi \neq 0$  или  $\varphi \neq \pi$ , условию (1) и принципу излучения при  $r \rightarrow \infty$ . Эти волны гибридные и определяются формулами

$$(2) \quad E = (\text{grad div} + k^2) \Pi - i\omega \mu \text{rot } \Pi^m,$$

$$(2) \quad H = i\omega \epsilon \text{rot } \Pi + (\text{grad div} + k^2) \Pi^m.$$

Здесь  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ ;  $\Pi$  и  $\Pi^m$  — электрический и магнитный векторы Герца, равные

$$(3) \quad \Pi = \Pi_z = A e^{ihz} H_v^{(2)}(\gamma r) \begin{cases} \cos v(\varphi - \pi) & \text{или} & \cos v\varphi' \\ \sin v(\varphi - \pi) & & \sin v\varphi' \end{cases},$$

$$(4) \quad \Pi^m = \Pi_z^m = B h e^{ihz} H_v^{(2)}(\gamma r) \begin{cases} -\sin v(\varphi - \pi) & \text{или} & -\sin v\varphi' \\ \cos v(\varphi - \pi) & & \cos v\varphi' \end{cases},$$

$$(5) \quad \gamma = \sqrt{k^2 - h^2}; \quad \text{Im } \gamma \leq 0, \quad \text{Re } \gamma \geq 0.$$

Углы  $\varphi$  и  $\varphi'$  отсчитываются от одной и той же полуоси, но изменяются в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и  $-\pi \leq \varphi' \leq \pi$ , т. е.  $\varphi' = \varphi$  при  $0 \leq \varphi \leq \pi$  и  $\varphi' = \varphi - 2\pi$  при  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$  (рис. 1). При построении парциальных волн по формулам (2) в выражениях (3), (4) берутся одновременно тригонометрические функции, стоящие либо сверху, либо снизу и в одном и том же столбце. Постоянные  $A, B$  и  $v$  находятся из (1), которое приводит к равенствам

$$(6) \quad \begin{cases} (\gamma^2 H_v^{(2)} + i\omega \epsilon \gamma \xi H_v^{(2)'}) A + \left( \frac{iv}{a} h^2 \xi H_v^{(2)} \right) B = 0, \\ \left( \frac{v}{a} H_v^{(2)} \right) A + (\omega \mu \gamma H_v^{(2)' } - i \xi \gamma^2 H_v^{(2)}) B = 0, \quad (h \neq 0). \end{cases}$$

Аргументами у  $H_\nu^{(2)}$  и  $H_\nu^{(2)'}$  является  $\gamma a$ , а штрих означает производную по аргументу. Условие совместности уравнений (6) имеет вид

$$(7) \quad (\gamma H_\nu^{(2)} + i\omega \epsilon \xi H_\nu^{(2)'}) (\xi \gamma H_\nu^{(2)} + i\omega \mu H_\nu^{(2)'}) = -\xi \left( \frac{\gamma h}{\gamma a} H_\nu^{(2)} \right)^2.$$

Найдя отсюда корни  $\nu$ , определим из (6)  $A$  и  $B$  с точностью до произвольного множителя. Далее будем использовать только корни с  $\text{Re } \nu > 0$ . Парциальные волны (2) – (4) имеют источники, расположенные на полуплоскости  $\varphi=0$ , если в (3), (4) взяты множители, зависящие от  $\varphi$ , или на полуплоскости  $\varphi'=\pm\pi$ , если взяты множители, зависящие от  $\varphi'$ . Поскольку (7) имеет счетное число корней ( $\text{Re } \nu > 0$ ), то эти парциальные волны можно перенумеровать при помощи индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения, отличные от нуля. Перенумеруем их одним из воз-

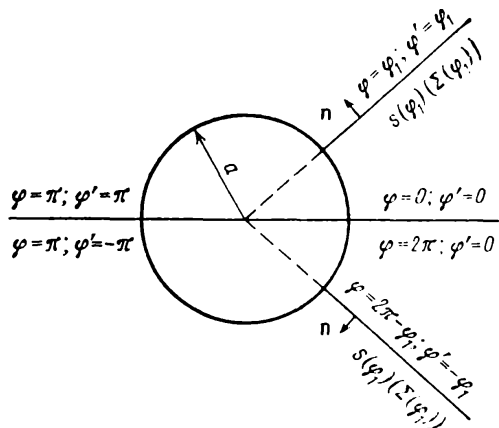


Рис. 1

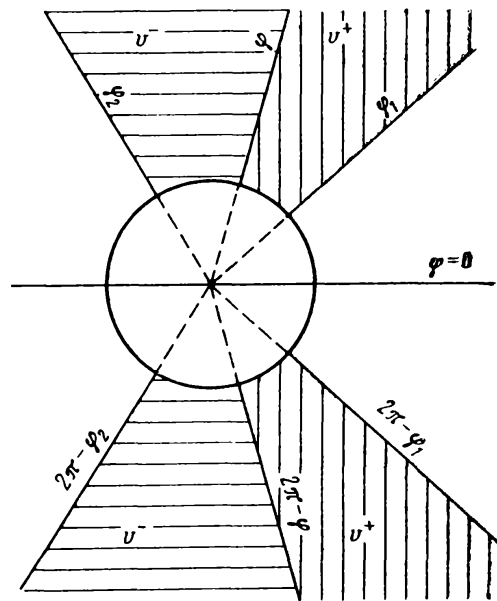


Рис. 2

можных способов при единственном условии, чтобы волна с  $p > 0$  определялась векторами (3), (4) с множителями, зависящими от  $\varphi$ , а волна с  $(-p)$  – соответствующими множителями (т.е. стоящими в той же строке), зависящими от  $\varphi'$ , остальные множители при этом сохраняются. Парциальные волны  $E^p, H^p$  при  $p > 0$  имеют источники на полуплоскости  $\varphi=0$ , а при  $p < 0$  – на полуплоскости  $\varphi=\varphi'=\pi$  и удовлетворяют следующему условию ортонормировки:

$$(8) \quad \int_{s(\varphi_1)} [\hat{E}^p, \mathbf{H}^q] ds = D(p, q) \delta_{|p||q|}.$$

Здесь  $s(\varphi_1)$  – поверхность, состоящая из плоских кусков  $\varphi=\varphi_1, a \leq r < \infty, 0 \leq z \leq 1$  и  $\varphi=2\pi-\varphi_1, a \leq r < \infty, 0 \leq z \leq 1$  (рис. 1),  $\delta_{pq}$  – символ Кронекера,  $ds = n ds$ , где  $n$  – внутренняя (по отношению к области  $\varphi_1 < \varphi < 2\pi-\varphi_1$  или  $2\pi-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$ ) нормаль к  $s(\varphi_1)$ ;  $s(0) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} s(\varphi), s(\pi) = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} s(\varphi)$ ,

$$(8a) \quad D(p, \pm p) = \int_{s(\varphi_1)} [\hat{E}^p, \mathbf{H}^{\pm p}] ds,$$

$\hat{E}$  отличается от  $E$  заменой  $h$  на  $-h$ , ниже это относится и к другим величинам. Доказательство соотношения (8), которое мы опускаем, проще всего провести при помощи леммы Лоренца [8].

В соответствии с методом вариации постоянных [7, 8] будем искать решение рассматриваемой задачи в виде

$$E = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(\varphi) E^p + f, \quad (9)$$

$$H = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(\varphi) H^p + F.$$

Подставляя (9) в неоднородные уравнения Максвелла, найдем (вне  $\varphi=0, \varphi=\pi$ )

$$\sum_p [\nabla C_p, H^p] + \text{rot } F = i\omega \varepsilon f + I, \quad (10)$$

$$\sum_p [\nabla C_p, E^p] + \text{rot } f = -i\omega \mu F - I^\mu.$$

Так как число неизвестных больше, чем может быть определено из этих уравнений, положим  $f_r = f_z = F_r = F_z = 0$ . При этом система (10) расщепляется на две

$$(11) \quad f_\varphi = \frac{i}{\omega \varepsilon} I_\varphi, \quad F_\varphi = \frac{i}{\omega \mu} I_\varphi^\mu$$

и

$$\sum_p [\nabla C_p, H^p] + \text{rot } F = I_\perp, \quad (12)$$

$$\sum_p [\nabla C_p, E^p] + \text{rot } f = -I_\perp^\mu.$$

$I_\perp$  — поперечная, относительно орта  $i_\varphi$ , часть вектора  $I$ . Система (12) используется для нахождения  $C_p$  ( $p = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Для этого умножим первое равенство (12) скалярно на  $r \hat{E}^{-q}$ , второе на  $r \hat{H}^{-q}$  и результаты проинтегрируем по  $s(\varphi)$ . Учитывая (8), найдем

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dC_q}{d\varphi} D(-q, q) + \frac{dC_{-q}}{d\varphi} D(-q, -q) = \int_{s(\varphi)} \hat{E}^{-q} (\text{rot } \hat{F} - I_\perp) r ds, \\ \frac{dC_q}{d\varphi} \hat{D}(q, -q) + \frac{dC_{-q}}{d\varphi} \hat{D}(-q, -q) = - \int_{s(\varphi)} \hat{H}^{-q} (\text{rot } f + I_\perp^\mu) r ds. \end{cases}$$

При этом использовались равенства (обоснованные ниже)

$$(14) \quad C_q(\varphi) = C_q(2\pi - \varphi), \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть токи  $I, I^\mu$  заключены в области между  $\Sigma(\varphi_1)$  и  $\Sigma(\varphi_2)$  ( $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \pi$ ), где, например,  $\Sigma(\varphi_1)$  — поверхность, состоящая из двух плоских кусков  $\varphi = \varphi_1$ ,  $a < r < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$  и  $\varphi = 2\pi - \varphi_1$ ,  $a < r < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ . Разрешая (13) относительно  $dC_q/d\varphi$  и  $dC_{-q}/d\varphi$  и повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в [7, 8], найдем

$$(15) \quad C_q(\varphi) = \frac{\pm \int_{v^\pm} (\hat{E}^{-q} I - \hat{H}^{-q} I^\mu) dv}{\int_{s(\varphi)} \{ [E^q, \hat{H}^{-q}] - [\hat{E}^{-q}, H^q] \} ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь знаки «+» относятся к положительным  $q$ , а знаки «-» к отрицательным;  $v^+$  — объем, ограниченный  $s(\varphi_1)$ ,  $s(\varphi)$ ,  $z=0$ ,  $z=1$  и частью цилиндра  $r=a$  (рис. 2), а  $v^-$  — объем, ограниченный  $s(\varphi)$ ,  $s(\varphi_2)$ ,  $z=0$ ,  $z=1$  и частью цилиндра  $r=a$ . Из формулы (15) следует справедливость (14), так как  $s(\varphi) \equiv s(2\pi - \varphi)$ . Поэтому, вследствие един-

ственности решения, (14) можно было использовать при нахождении (15). Формулы (9) с учетом (11) и (15) решают задачу о возбуждении импедансного цилиндра произвольной системой токов. Можно провести обобщение полученных результатов на случай анизотропного импеданса. Полученное решение позволяет также рассмотреть задачу с произвольной зависимостью заданных токов от  $z$ , для чего достаточно представить их в виде интеграла Фурье по координате  $z$  и воспользоваться принципом суперпозиции. Решение (9) формально совпадает с данным в [1] для волновода. Однако в нашем случае коэффициенты  $C_p$  являются функциями  $\varphi$ , а не  $z$ , как в [1], и парциальные волны существенно различаются. Отметим, что, выбрав в качестве выделенной переменной не  $\varphi$ , а  $r$  или  $z$ , можно получить другие формы решения. Также может быть рассмотрен магнитодиэлектрический цилиндр, при этом следует учитывать непрерывный спектр\*.

Пример. В качестве иллюстрации метода рассмотрим задачу о возбуждении идеально проводящего цилиндра линейным магнитным током, расположенным параллельно его оси  $z$ . Будем считать ток равномерным, текущим вдоль линии  $r=b>a$ ,  $\varphi=0$ . Поле такой системы состоит из чисто магнитных волн. Поэтому, учитывая также симметрию задачи, ограничимся парциальными волнами типа

$$E = -i\omega\mu \operatorname{rot} \Pi^\nu, \quad H = k^2 \Pi^\nu, \quad \Pi^\nu = \Pi_z^\nu = M H_\nu^{(2)}(kr) \cos \nu(\varphi - \pi) \text{ или } \cos \nu\varphi',$$

где  $M = \lim_{h \rightarrow 0} hB$  — постоянная. Уравнение (7) принимает теперь вид  $H_\nu^{(2)'}(ka) = 0$  и

служит для определения корней  $\nu$ . Произведя нумерацию парциальных волн в соответствии с номером корня, определим поле по формулам (9), которые принимают вид ( $h=0$ )

$$E, H = \sum_{p=1}^{\infty} C_p E^p, H^p.$$

Суммирование идет только по  $p > 0$ , так как  $C_p = 0$  при  $p < 0$  (см. (15)). Вычислив коэффициенты по формуле (15), найдем, например,

$$H = H_z = C \sum_{p=1}^{\infty} \frac{H_\nu^{(2)}(kb)}{\sin \nu\pi H_\nu^{(2)}(ka) \frac{\partial}{\partial \nu} H_\nu^{(2)'}(ka)} H_\nu^{(2)}(kr) \cos \nu(\varphi - \pi) \Big|_{\nu=\nu_p},$$

где  $C$  — постоянная. При  $b=a$  (задача о щели на цилиндре) полученное выражение совпадает с имеющимся в [9]. В отличие от [9] мы не пользовались преобразованием Ватсона.

Авторы выражают признательность Л. А. Вайнштейну за просмотр рукописи и полезную дискуссию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
2. Л. А. Вайнштейн, А. А. Федоров, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 31.
3. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 8, 1247; 1961, 6, 9, 1489.
4. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, Изд. Наука, 1969.
5. А. Б. Маненков, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1970, 13, 5, 739.
6. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, М. А. Молотков, в сб. «I Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, г. Паланга, 1965», Москва — Харьков, 1968.
7. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1976, 21, 12, 2615.
8. Я. Н. Фельд, С. Я. Фельд, Радиотехника и электроника, 1977, 22, 9, 1829.
9. Д. Р. Уэйт, Электромагнитное излучение из цилиндрических систем, Изд. Советское радио, 1963.

Поступило в редакцию  
10 XI 1977

\* Отметим, что в [8] упущен конец предпоследней фразы в § 3: «...в тех случаях, когда можно пренебречь непрерывным спектром».

## РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXIII

Апрель 1978

Вып. 4

МОСКВА

УДК 621.396.677.833.1

ТОКИ И ДИАГРАММЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛА  
С ОБЛУЧАТЕЛЕМ ТИПА ЭЛЕМЕНТА ГЮЙГЕНСА*Я. Н. Фельд, А. К. Ансрян*

Рассмотрена антенна типа параболоида вращения, облучаемого скрещенными электрическим и магнитным диполями. Получены выражения для распределения плотности тока на зеркале и поля, возбуждаемого им. Эти выражения представляют собой ряды, из которых первый сходится в среднем с некоторым весом, а второй равномерно. Для ряда примеров построены кривые распределения плотности тока на зеркале и диаграммы направленности.

В работе [1] была изучена дифракция скалярной сферической волны на параболическом зеркале с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Здесь эта задача будет решена для случая электромагнитной волны.

Рассмотрим зеркальную антенну, поверхность которой  $s$  является частью параболоида вращения, опирающегося на контур  $\mathcal{L}$  (рис. 1). Поверхность зеркала предполагается идеально проводящей и бесконечно тонкой. Зеркало облучается элементом Гюйгенса (взаимно перпендикулярные электрический и магнитный диполи Герца), расположенным в фокусе параболоида. Плоскость расположения диполей перпендикулярна оси параболоида. Первичное поле облучателя обозначим через  $E^0, H^0$ .

Вторичное поле  $E, H$ , создаваемое токами, индуцированными на зеркале, удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла и граничным условиям

$$(1) \quad E_t^+ = E_t^- = -E_t^0 \text{ на } s.$$

Индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения тангенциальных составляющих полей при стремлении к  $s$  со стороны, куда направлена нормаль к  $s$ , и противоположной соответственно.

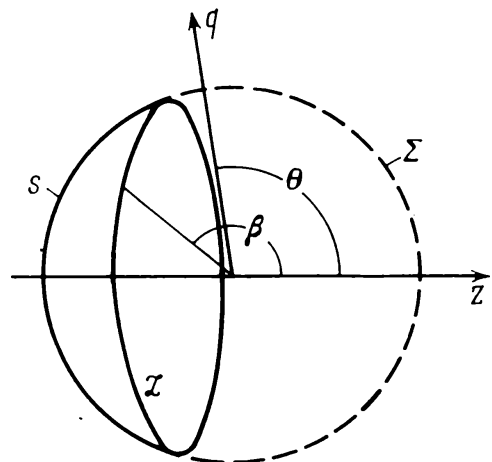


Рис. 1. Параболическое зеркало

Поле  $E$ ,  $H$  подчиняется также условиям Майкснера на контуре  $\mathcal{L}$  и условиям излучения на бесконечности.

Как и в работе [1], аппроксимируем рассматриваемое зеркало частью сферы радиуса  $r_0$ , равного удвоенному фокусному расстоянию параболоида. Будем требовать при этом, чтобы отклонение указанной части сферы от параболического зеркала не превосходило  $\lambda/8$  ( $\lambda$  — длина волны), что накладывает определенные ограничения на глубину исходного зеркала\*. Эту часть сферы будем обозначать в дальнейшем также буквой  $s$ . Поверхность, дополняющую  $s$  до полной сферы, обозначим через  $\Sigma$  ( $s_0 = s + \Sigma$ ). В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом отсчета в центре сферы  $s_0$  и с осью, совпадающей с осью параболоида, поверхность зеркала  $s$  определяется соотношениями  $r = r_0$ ,  $\beta \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , а контур  $\mathcal{L} - r = r_0$ ,  $\theta = \beta$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Фокус, где находится облучатель, расположен в точке  $r = r_0/2$ ,  $\theta = \pi$ . Угол  $\varphi$  отсчитывается от оси магнитного диполя. Выпишем выражение для первичного поля облучателя, учитывая указанные выше расположение и ориентацию электрического и магнитного диполей:

$$(2) \quad \begin{cases} E_{\theta}^0 = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-ikR}}{kR} \times \\ \times \sin \varphi \left[ \left(1 - \frac{i}{kR}\right) \left(\cos \vartheta - \frac{m}{cp}\right) \cos \chi - \frac{2i}{kR} \sin \vartheta \sin \chi \right], \\ E_{\varphi}^0 = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-ikR}}{kR} \cos \varphi \left(1 - \frac{i}{kR}\right) \left(1 - \frac{m}{cp} \cos \vartheta\right). \end{cases}$$

Здесь слева стоят компоненты электрического вектора в системе координат  $r, \theta, \varphi$ ; фигурирующие справа величины  $R, \vartheta, \chi$  связаны с ними следующими формулами:

$$(2a) \quad \begin{cases} R = \sqrt{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 + r^2 + rr_0 \cos \theta}, & \sin \chi = \frac{\frac{r_0}{2} \sin \theta}{R}, \\ \cos \vartheta = \frac{\frac{r_0}{2} + r \cos \theta}{R}, & \cos \chi = \frac{r + \frac{r_0}{2} \cos \theta}{R}, \\ \sin \vartheta = \frac{r \sin \theta}{R}. \end{cases}$$

Величины  $m, p$  обозначают магнитный и электрический моменты диполей:  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ . Третья компонента  $E_r^0$  и магнитный вектор  $H^0$  не приводятся, так как они в дальнейшем не понадобятся. При получении формул (2) сохранены члены до второго порядка включительно относительно  $1/kR$ , так как зеркало при не очень больших  $kr_0$  может и не находиться в дальней зоне облучателя. Для дальней зоны из (2) и (2a) следует

$$(3) \quad E^0 = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{kr} \Phi^0(\theta, \varphi),$$

\* Хотя глубокое параболическое зеркало нельзя целиком аппроксимировать частью сферы при заданной фазовой ошибке на краю раскрыва, это почти не уменьшает общности предлагаемого метода расчета. Действительно, при любых заданных диаметре  $d$  раскрыва зеркала и фазовой ошибке  $\Delta$  всегда можно подобрать такое фокусное расстояние  $f$ , при котором подобная аппроксимация возможна. Для этого, например, при  $\Delta = \pi/2$  достаточно взять  $f = r_0/2 \approx (d/4) \sqrt{d/2\lambda}$ .



где

$$(3a) \quad \Phi^0(\theta, \varphi) = \exp \left\{ -i \frac{kr_0}{2} \cos \theta \right\} \left[ i_\theta \sin \varphi \left( \cos \theta - \frac{m}{cp} \right) + i_\varphi \cos \varphi \left( 1 - \frac{m}{cp} \cos \theta \right) \right]$$

— диаграмма направленности облучателя. Здесь и ниже используется практическая система единиц с зависимостью от времени вида  $e^{i\omega t}$ . Из формул (2) следует, что зависимость первичного поля от угла  $\varphi$  содержит только первую гармонику угла  $\varphi$ . Это обстоятельство будет учтено ниже.

Используем для решения поставленной краевой задачи метод, предложенный в [2]. В соответствии с ним введем прежде всего на поверхности сферы  $s_0$  семейство вспомогательных векторных функций — токов  $\mathbf{K}_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), касательных к  $s_0$  при помощи формул:

$$(4) \quad \mathbf{K}_n = \begin{cases} i_\theta \sin \varphi \frac{dP_{(n+1)/2}^1}{d\theta} + i_\varphi \cos \varphi \frac{P_{(n+1)/2}^1}{\sin \theta}, & n=1, 3, 5, \dots, \\ i_\theta \sin \varphi \frac{P_{n/2}^1}{\sin \theta} + i_\varphi \cos \varphi \frac{dP_{n/2}^1}{d\theta}, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Здесь  $P_n^1 = P_n^1(\cos \theta)$  — первая присоединенная функция Лежандра. Специфический выбор семейства  $\mathbf{K}_n$  обусловлен следующими обстоятельствами.

1. Каждый из заданных таким образом на  $s_0$  токов  $\mathbf{K}_n$  возбуждает волну электрического типа для  $n$  — нечетных и магнитного для  $n$  — четных.
2. Зависимость от  $\varphi$  взята в соответствии с аналогичной зависимостью искомого тока  $\mathbf{K}$ , индуцированного на зеркале первичным полем  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  (см. (2)).

Можно показать, что семейство  $\mathbf{K}_n$  линейно независимо, принадлежит пространству  $C^2(s_0)$  и линейные комбинации функций  $\mathbf{K}_n$  всюду плотны в  $C^2(s_0)$  при заданной зависимости от  $\varphi$  в соответствии с требованиями [2]. Приведем краткую сводку необходимых для дальнейшего формул из [2]. Двухсторонний поверхностный ток

$$(5) \quad \mathbf{K} = [i_r, \mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-] \text{ на } s$$

представляется разложением

$$(6) \quad \mathbf{K} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \mathbf{u}_m \text{ на } s,$$

где

$$(7) \quad C_m = \sum_{n=1}^m a_n \overline{a_n^m}, \quad a_n = - \int_s \mathbf{K}_n \mathbf{E}^0 ds;$$

$$(8) \quad \mathbf{u}_m = \sum_{n=1}^m a_n^m \hat{R}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_n, \quad \mathbf{F}_n = \begin{cases} \mathbf{E}_t \{ \mathbf{K}_n; s_0 \} & \text{на } s, \\ -\rho_0 \mathbf{K}_n & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{E}_t \{ \mathbf{K}_n; s_0 \}$  — тангенциальная составляющая поля, возбуждаемого током  $\mathbf{K}_n$ , распределенным на  $s_0$ ;  $\rho_0$  — волновое сопротивление свободного пространства; черта — знак комплексного сопряжения;  $\hat{R}^{-1}$  — матрица,

обратная  $\hat{R}$ . Матрица  $\hat{R}$  представляет собой диагональную матрицу 2-го ранга с положительными элементами, которая определяется в соответствии с [2] формулами

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{11} = \begin{cases} (\cos \beta - \cos \theta)^{-1/2} & \text{на } s, \\ (\cos \theta - \cos \beta)^{1/2} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \\ R_{22} = \begin{cases} (\cos \beta - \cos \theta)^{1/2} & \text{на } s, \\ 1 & \text{на } \Sigma. \end{cases} \end{array} \right.$$

При таком выборе  $R_{11}$  и  $R_{22}$  каждый член ряда (6) удовлетворяет условиям Майкснера для тока на контуре  $\mathcal{L}$  (составляющая тока, параллельная  $\mathcal{L}$ , стремится к бесконечности как  $\rho^{-1/2}$ , а перпендикулярная  $\mathcal{L}$  — к нулю как  $\rho^{1/2}$  при  $\rho$  — расстоянии до  $\mathcal{L}$ , стремящемся к нулю). Остается найти коэффициенты  $a_n^m$ . Они находятся из условий ортонормировки семейства  $\mathbf{u}_m$ , определяемого первой формулой (8):

$$(10) \quad (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n) = \delta_{mn}.$$

Здесь слева стоит скалярное (гильбертово) произведение, задаваемое формулой

$$(11) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{s_0} \mathbf{u} \hat{R} \mathbf{v} ds.$$

Метод ортонормировки Шмидта приводит к следующим рекуррентным соотношениям, определяющим  $a_n^m$ :

$$(12) \quad a_n^m = \frac{\sigma_{mn}}{\sqrt{\Gamma_{mm} - \sum_{k=1}^{m-1} |\lambda_{mk}|^2}}; \quad \sigma_{mn} = \begin{cases} -\sum_{h=n}^{m-1} a_n^h \lambda_{mh} & \text{при } n < m, \\ 1 & \text{при } n = m; \end{cases}$$

здесь  $n=1, 2, 3, \dots$ ;

$$(12a) \quad \Gamma_{mp} = (\hat{R}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_m, \hat{R}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_p); \quad \lambda_{mk} = \sum_{p=1}^{m-1} \bar{a}_p^k \Gamma_{mp}.$$

Отметим, что в первой формуле (12) при  $n=m=1$  сумма под корнем должна быть заменена нулем. Искомое вторичное поле, создаваемое током  $\mathbf{K}$  ((6)), текущим на зеркале, выражается известными формулами

$$(13) \quad \mathbf{E} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \mathbf{U}_m(q); \quad \mathbf{H} = \frac{i}{\mu\omega} \text{rot } \mathbf{E},$$

где

$$(14) \quad \mathbf{U}_m = \frac{1}{i\epsilon\omega} \text{rot rot } \int \mathbf{u}_m(p) \frac{e^{-ik|p-q|}}{4\pi|p-q|} ds_p;$$

$|p-q|$  — расстояние между точкой наблюдения  $q$  и точкой интегрирования  $p$ . Для определения  $u_n$  необходимо найти поле  $E\{K_n; s_0\}$  (см. (8)), возбуждаемое током  $K_n$ . Учитывая (4), проще всего это сделать, вводя потенциалы Дебая при помощи выражений

$$(15) \quad V_n = \sin \varphi P_{(n+1)/2}^1(\cos \theta) \begin{cases} A_n \xi_{(n+1)/2}(kr), & r > r_0 \\ B_n \psi_{(n+1)/2}(kr), & r < r_0 \end{cases} \quad n=1, 3, 5, \dots$$

$$(16) \quad V_n = \cos \varphi P_{n/2}^1(\cos \theta) \begin{cases} A_n \xi_{n/2}(kr), & r > r_0 \\ B_n \psi_{n/2}(kr), & r < r_0 \end{cases} \quad n=2, 4, 6, \dots$$

где

$$(17) \quad \xi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(x); \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x).$$

Определим постоянные  $A_n$  и  $B_n$  из непрерывности тангенциальной составляющей электрического вектора и равенства скачка тангенциальной составляющей магнитного вектора «волны  $n$ » току  $K_n$  при переходе через сферу  $r=r_0$ . Используя известные [3] соотношения, связывающие поле с потенциалом Дебая для электрических ( $n$  — нечетное) и магнитных ( $n$  — четное) волн, найдем

$$(18) \quad A_n = \frac{r_0}{k} \begin{cases} -\rho_0 \psi'_{(n+1)/2}(kr_0), \\ i\psi_{n/2}(kr_0), \end{cases}$$

$$B_n = \frac{r_0}{k} \begin{cases} -\rho_0 \xi_{(n+1)/2}(kr_0), & n=1, 3, \\ i\xi_{n/2}(kr_0), & n=2, 4, \dots \end{cases}$$

Те же соотношения [3] позволяют написать

$$(19) \quad E_t\{K_n; s_0\} = \frac{kA_n}{r_0} \xi'_{(n+1)/2}(kr_0) \left\{ i_\theta \sin \varphi \frac{dP_{(n+1)/2}^1}{d\theta} + \right. \\ \left. + i_\varphi \cos \varphi \frac{P_{(n+1)/2}^1}{\sin \theta} \right\}, \quad n=1, 3, \dots,$$

$$(20) \quad E_t\{K_n; s_0\} = \frac{ik\rho_0 A_n}{r_0} \xi_{n/2}(kr_0) \left\{ i_\theta \sin \varphi \frac{dP_{n/2}^1}{d\theta} + \right. \\ \left. + i_\varphi \cos \varphi \frac{P_{n/2}^1}{\sin \theta} \right\}, \quad n=2, 4, \dots$$

при  $r=r_0$ . Вторичное поле зеркала в любой точке пространства рассчитывается по формулам (13), (14). Переходя в них к дальней зоне, получим

$$(21) \quad E = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{kr} \Phi(\theta, \varphi).$$

Здесь  $\Phi$  — диаграмма направленности, отнесенная к началу координат, выражаемая формулой

$$(22) \quad \Phi(\theta, \varphi) = -\frac{ir_0^2}{n\omega} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_m e^{ikr_0 \cos \tau} \sin \theta_p d\varphi_p d\theta_p,$$

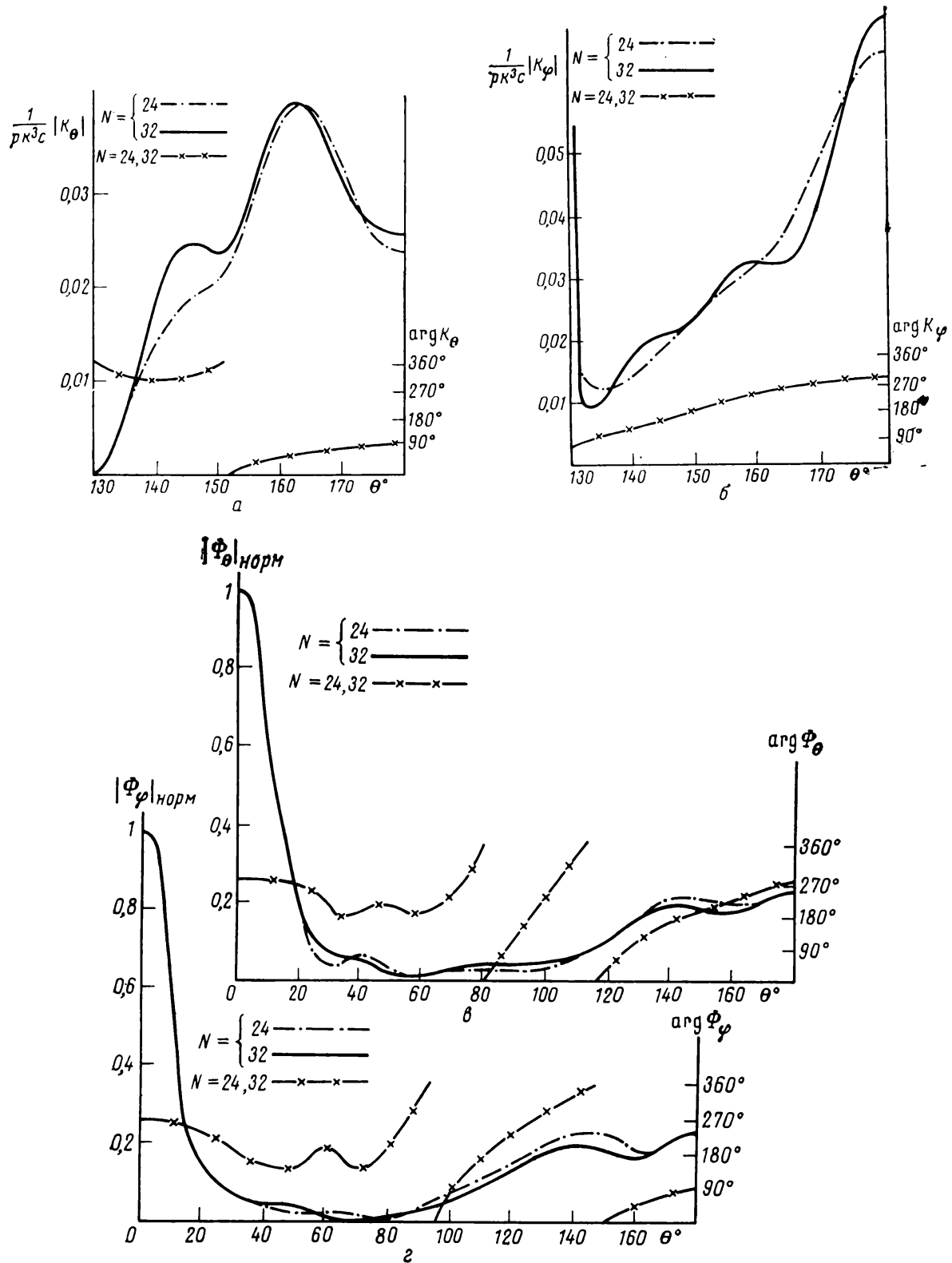


Рис. 2: а –  $\theta$ -компонента тока,  $kr_0=15$ ,  $\beta=130^\circ$ ; б –  $\phi$ -компонента тока,  $kr_0=15$ ,  $\beta=130^\circ$ ; в –  $\theta$ -компонента нормированного значения диаграммы направленности,  $kr_0=15$ ,  $\beta=130^\circ$ ; г –  $\phi$ -компонента нормированного значения диаграммы направленности,  $kr_0=15$ ,  $\beta=130^\circ$

где  $\gamma$  – угол между направлениями, проведенными из начала координат в точки наблюдения и интегрирования. Легко сообразить на основании предыдущего, что

$$(23) \quad \Phi_\theta(\theta, \varphi) = \Phi_\theta(\theta) \sin \varphi, \quad \Phi_\phi(\theta, \varphi) = \Phi_\phi(\theta) \cos \varphi,$$

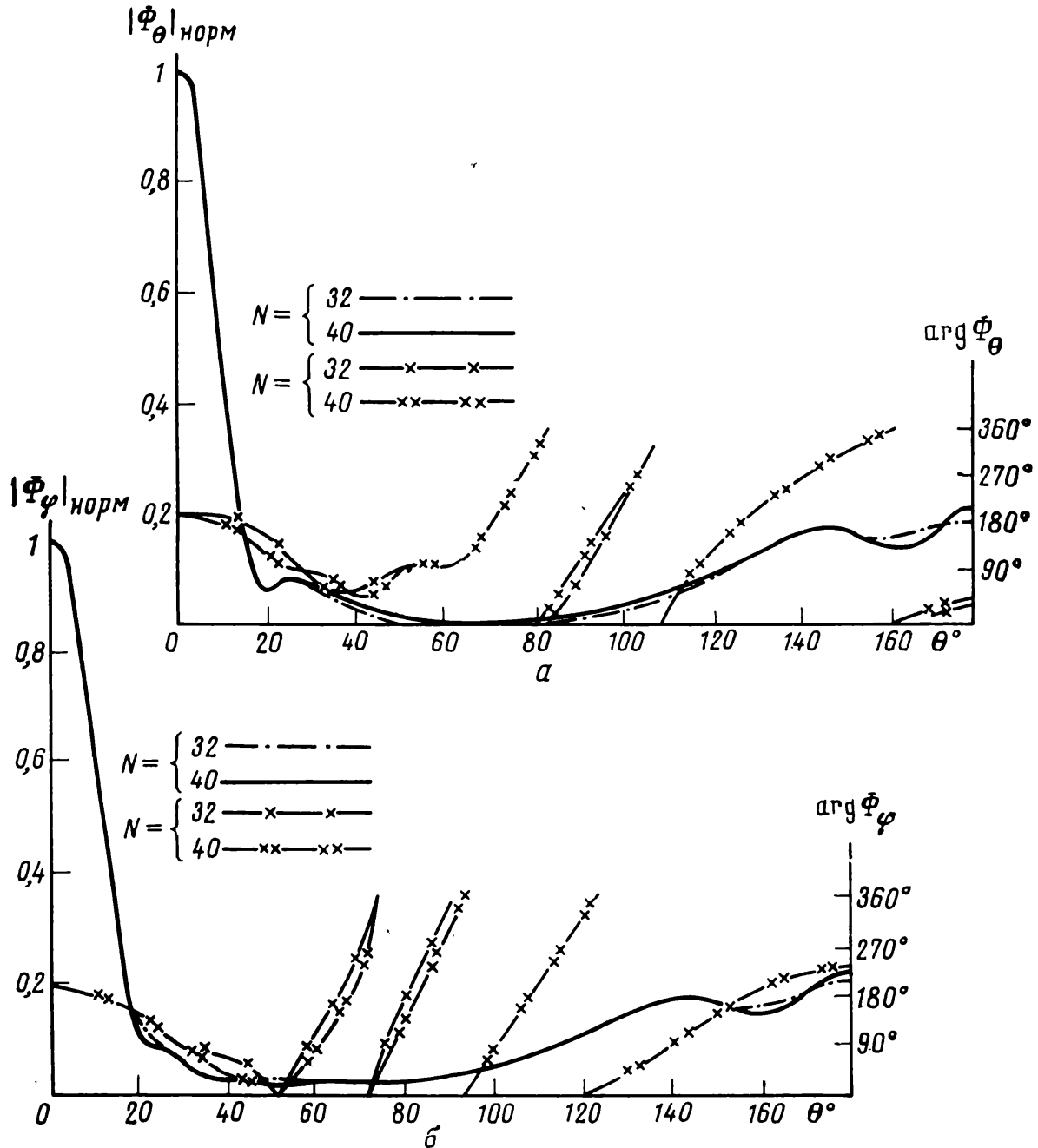


Рис. 3: а —  $\theta$ -компонента нормированного значения диаграммы направленности,  $kr_0=20$ ,  $\beta=135^\circ$ ; б —  $\phi$ -компонента нормированного значения диаграммы направленности,  $kr_0=20$ ,  $\beta=135^\circ$

т. е. в выражениях для компонент переменные разделяются. Нормированные диаграммы задаются выражениями

$$(23a) \quad \Phi_{\theta \text{ норм}} = \frac{\Phi_{\theta}(\theta)}{|\Phi_{\theta}(0)|}, \quad \Phi_{\phi \text{ норм}} = \frac{\Phi_{\phi}(0)}{|\Phi_{\phi}(0)|}.$$

Аналогичная картина имеет место для компонент плотности тока на зеркале:

$$(24) \quad K_{\theta}(\theta, \varphi) = \sin \varphi K_{\theta}(\theta), \quad K_{\varphi}(\theta, \varphi) = \cos \varphi K_{\varphi}(\theta).$$

Формулы (6)–(9), (12), (19), (20) позволяют рассчитать плотность тока на  $s$ , а (22), (23) — диаграммы направленности. По этим формулам проведены расчеты для амплитуд и фаз плотности тока на зеркале и нормированных компонент диаграммы направленности. На рис. 2–4 приведены

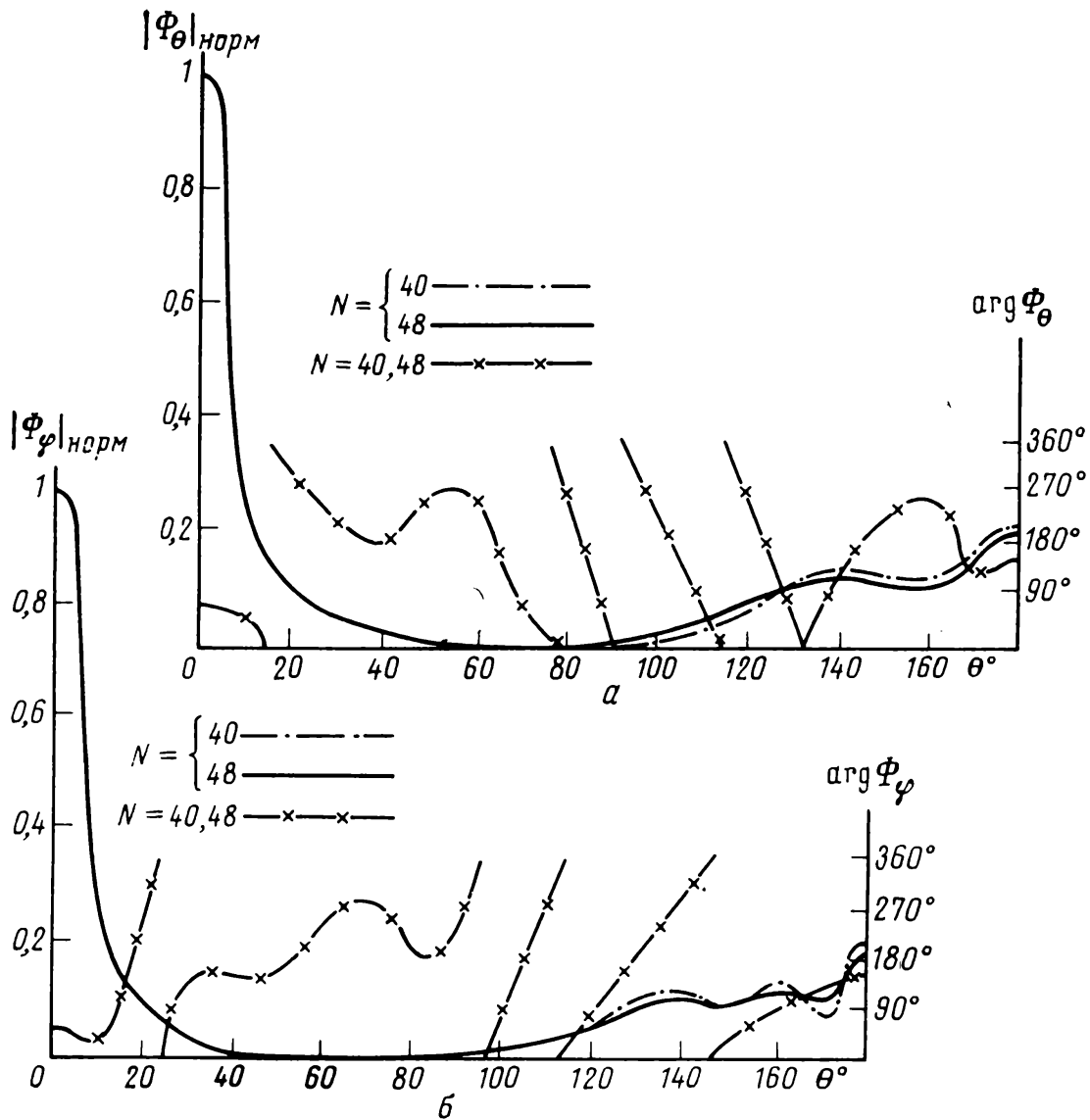


Рис. 4: а –  $\theta$ -компонента нормированного значения диаграммы направленности,  $kr_0=30$ ,  $\beta=136^\circ$ ; б –  $\phi$ -компонента нормированного значения диаграммы направленности,  $kr_0=30$ ,  $\beta=136^\circ$

результаты расчетов амплитуд и фаз компонент плотности тока для  $kr_0=15$  и нормированных диаграмм направленности вторичного поля для  $kr_0=15, 20, 30$ . При этом кривые строились только для множителей, зависящих от  $\theta$  (см. (23), (24)); зависимости от  $\phi$  типа  $\sin \phi$  и  $\cos \phi$  отбрасывались. На этих рисунках пунктиром с точкой и сплошными линиями изображаются модули величин, а пунктиром с крестиками — аргументы соответствующих величин.

Вычисления проводились на ЦЭВМ для параметров, приведенных в таблице.

При заданном значении  $kr_0$  угол  $\beta$  (рис. 1) выбирался так, чтобы фазовая ошибка  $\Delta$  на краю раскрыва (из-за аппроксимации параболоида частью сферы) не превосходила  $\pi/2$ . Параметр  $m/cr$  взят равным единице.

Из приведенных графиков видно, что ряд для диаграмм «поточечно» сходится значительно лучше, чем ряд для тока (как и в скалярном случае). Это объясняется тем, что первый сходится равномерно, а второй — по норме пространства  $L_R^2(s_0)$  [2].

Номер рисунка	$kr_0$	$\beta^\circ$	$\frac{d}{\lambda}$	$N$	$\Delta$	$ \Phi_{нс}(\pi) $
2, а, б, в, г	15	130	3,7	24; 32	0,4 $\pi$	0,19
3, а, б	20	135	4,5	32; 40	0,4 $\pi$	0,11
4, а, б	30	136	6,6	40; 48	0,5 $\pi$	0,04

$d/\lambda$  — диаметр раскрыва зеркала в долях волны;  $N$  — число учтенных членов рядов (6) и (22) (расчеты проводились в каждом случае для двух значений  $N$ );  $|\Phi_{нс}(\pi)|$  — модуль нормированной суммарной (с учетом первичного поля) диаграммы в направлении  $\theta = \pi$ .

Ширина главного лепестка на уровне 0,707 для всех рассмотренных случаев хорошо согласуется с величиной, получаемой по известной формуле  $\Delta\Phi = 57^\circ (\lambda/d)$ .

На рисунках изображены диаграммы вторичного поля. Для того, чтобы судить о результирующей диаграмме, необходимо прибавить ко вторичной диаграмму первичного поля (3а). Не приводя кривых для суммарных диаграмм, мы только оценили, насколько наличие первичного поля снижает уровень задних лепестков вторичного поля, так как они почти противофазны. Для этого в последнем столбце таблицы приведены относительные уровни суммарной диаграммы в направлении  $\theta = \pi$ . Как видно из таблицы, уровень заднего лепестка суммарной диаграммы при изменении величины  $kr_0$  в интервале 15—30 уменьшается в 1,2—5 раз.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, А. К. Ансрян, Радиотехника и электроника, 1977, 22, 1, 1.
2. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1975, 20, 1, 28.
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.

Поступила в редакцию  
28 IX 1977

УДК 537.874.001.6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТЯХ  
С НЕОДНОРОДНЫМ АДМИТАНСОМ*Я. Н. Фельд*

Рассматривается задача о дифракции электромагнитной волны на криволинейных поверхностях с изменяющимся вдоль них двухсторонним локальным адмитансом. Построена система векторных функций, полная в соответствующем функциональном пространстве, и найдены коэффициенты типа Фурье для тангенциальной составляющей поля или тока (на рассматриваемых поверхностях) по этой системе функций. Доказано, что соответствующий ряд типа Фурье сходится в среднем (или в среднем с некоторым весом при обращении адмитанса в бесконечность). Даны также равномерно сходящиеся (вне указанных поверхностей) ряды для вторичного — дифрагированного поля.

Метод пригоден, например, для численного решения задач с одной или несколькими поверхностями, состоящими из полупрозрачных диэлектрических (с изменяющимися  $\epsilon$  и толщиной) и металлических частей. В дополнении приведено решение первой краевой задачи электродинамики.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим конечную, криволинейную достаточно гладкую поверхность  $s_0$ , состоящую из  $N$  отдельных замкнутых поверхностей. Пусть на  $s_0$  падает первичная электромагнитная волна  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  с зависимостью от времени вида  $\exp(i\omega t)$ . Вторичное дифрагированное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  (к нахождению которого сводится задача) удовлетворяет вне  $s_0$  однородным уравнениям Максвелла и двухсторонним локальным краевым условиям

$$(1) \quad [\mathbf{n}^+(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-)] = 0, \quad [\mathbf{n}^+(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] = Y(\mathbf{E}_t^+ + \mathbf{E}_t^0) \text{ на } s_0.$$

Индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения величин при стремлении к  $s_0$  со стороны, куда направлена нормаль  $\mathbf{n}^+$  и с противоположной соответственно\*; индексом  $t$  отмечены тангенциальные к  $s_0$  составляющие;  $Y$  — заданный адмитанс, являющийся кусочно-непрерывной функцией координат точки на  $s_0$  (ниже будет рассмотрен также случай, когда  $Y = \infty$  на части  $s_0$ ). Как легко показать методом, аналогичным использованному в [1], рассматриваемая задача имеет при  $\operatorname{Re} Y \geq 0$  \*\* единственное решение, и, значит, при  $\mathbf{E}_t^0 = 0$  на  $s_0$  это решение тождественно равно нулю.

К дифракции на  $s_0$  с краевыми условиями (1) может быть сведено большее количество задач.

Например, 1. Если  $s_0$  — тонкий диэлектрический слой и выполняется неравенство  $\omega \sqrt{\epsilon \mu_0} d \ll 1$  ( $d$  — толщина слоя,  $\epsilon$  — проницаемость,  $\epsilon_0, \mu_0$  — постоянные вакуума), то [2, 3]  $Y = i\omega(\epsilon - \epsilon_0)d$ .

2. Если  $s_0$  — тонкая металлическая поверхность с достаточно высокой проводимостью, то следует положить  $Y = \infty$ .

\* У непрерывных, при переходе через  $s_0$ , величин индексы «±» ниже опущены.

\*\* В работе это условие всегда предполагается выполненным.



3. Если  $s_0$  имитирует различные комбинации металлических, диэлектрических (указанных в п. 2 и 1) и чисто геометрических поверхностей. Для последних  $Y=0$ .

Переходя к решению поставленной задачи, зададим на  $s_0$  семейство вспомогательных электрических токов  $\{K_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), касательных к  $s_0$ ; требования к ним будут сформулированы ниже. Применяв лемму Лоренца (во внешней и внутренней относительно  $s_0$  областях) к искомому вторичному полю  $E, H$  и вспомогательному полю  $E\{K_n; s_0\}, H\{K_n; s_0\}$ , возбуждаемому током  $K_n$ , распределенным на  $s_0$ , найдем

$$(2) \quad \int_{(s_0)} \{ [E(H^+\{K_n; s_0\} - H^-\{K_n; s_0\})] - [E\{K_n; s_0\}(H^+ - H^-)] \} ds = 0,$$

где

$$ds = n^+ ds.$$

Учитывая вторую формулу (1) и очевидное соотношение

$$K_n = [n^+(H^+\{K_n; s_0\} - H^-\{K_n; s_0\})] \text{ на } s_0,$$

перепишем (2) в следующем виде:

$$(3) \quad \int_{(s_0)} \{ EK_n - YE\{K_n; s_0\}(E_t + E_t^0) \} ds = 0$$

или, вводя обозначения

$$(4) \quad \bar{\Phi}_n = -K_n + YE_t\{K_n; s_0\},$$

$$b_n = - \int_{(s_0)} YE\{K_n; s_0\} E_t^0 ds,$$

придадим (3) окончательную форму

$$(5) \quad \int_{(s_0)} E \bar{\Phi}_n ds = b_n, \quad n=1, 2, \dots$$

Черта — знак комплексного сопряжения. В (5)  $\Phi_n$  — известное векторное поле, касательное к  $s_0$ , а  $b_n$  — известное число (поскольку  $K_n$  и  $E^0$  заданы).

## 2. ПОВЕРХНОСТЬ $s_0$ С ОГРАНИЧЕННЫМ АДМИТАНСОМ ( $|Y| \leq \beta < \infty$ )

В этом случае  $E_t$  на  $s_0$  следует искать в пространстве векторных функций с суммируемым квадратом ( $E_t \in L^2(s_0)$ ), поскольку мгновенная мощность (а значит и комплексная, равная  $1/2 \int_{\Delta s} |E_t + E_t^0|^2 Y ds$ ), поступающая

в любую часть  $\Delta s$  поверхности  $s_0$ , должна быть конечна\*. Как следует из (5), числа  $\{b_n\}$  являются коэффициентами типа Фурье искомой величины  $E_t$  по известной системе функций  $\{\Phi_n\}$  и могут быть использованы для нахождения вектора  $E_t$  на  $s_0$ . Однако для этого необходимо, чтобы семейство  $\{\Phi_n\}$  было полно в  $L^2(s_0)$ \*\* . Полнота будет иметь место, если, например, токи  $\{K_n\}$  принадлежат пространству  $C^1(s_0)$  и их линейные комбина-

\* Суммируемость  $|E_t|^2$  на части  $s_0$ , где  $Y=0$ , не следует из сказанного и нуждается в специальном рассмотрении, на чем мы не останавливаемся.

\*\* В нашем случае элементами  $L^2(s_0)$  являются вектор-функции, заданные на  $s_0$  и касательные к ней.

ции всюду плотны в нем \*. Докажем это, т. е. установим, что из равенств

$$(6) \quad \int_{(s_0)} A \bar{\Phi}_n ds = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

где  $A$  — векторное поле, принадлежащее  $L^2(s_0)$ , следует, что  $A=0$  на  $s_0$ . Переходя к доказательству, заменим в (6)  $\Phi_n$  его значением из (4), после чего (6) примет вид

$$\int_{(s_0)} AK_n ds = \int_{(s_0)} YA E\{K_n; s_0\} ds.$$

Заменяя правую часть при помощи леммы Лоренца, получим \*\*

$$\int_{(s_0)} AK_n ds = \int_{(s_0)} E\{YA; s_0\} K_n ds$$

или окончательно

$$(7) \quad \int_{(s_0)} (A - E_t\{YA; s_0\}) K_n ds = 0 \quad \text{при } n=1, 2, \dots$$

Установим, каким пространствам принадлежат фигурирующие выше векторы. Для этого понадобится следующая

Теорема [4]. Пусть ток  $K \in H^\alpha(s_0)$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ) распределен на поверхности  $s_0$ . Тогда  $E_t\{K; s_0\} \in H^{\alpha-1}(s_0)$ .

Здесь  $H^\alpha(s_0)$  — пространство функций Соболева — Слободецкого [5]. Поскольку  $A \in L^2(s_0)$ , а  $Y$  — кусочно-непрерывная функция, то  $YA \in L^2(s_0) \equiv H^0(s_0)$  и на основании теоремы  $E_t\{YA; s_0\} \in H^{-1}(s_0)$ . Так как  $K_n \in C^1(s_0)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и их линейные комбинации плотны в  $C^1(s_0)$ , то они плотны также в  $H^1(s_0)$  по норме  $H^1(s_0)$ . Поэтому из (7) следует, что обобщенная функция (функционал), стоящая в круглых скобках в (7) и принадлежащая  $H^{-1}(s_0)$ , равна нулю на всех функциях, принадлежащих  $H^1(s_0)$ , на которых она определена, т. е.

$$(8) \quad A - E_t\{YA; s_0\} \equiv 0 \quad (\text{на } s_0).$$

Пусть  $V = YA (\in L^2(s_0))$ , тогда (8) можно записать так:

$$V = YE_t\{V; s_0\} \quad \text{на } s_0.$$

В силу теоремы единственности (см. выше) отсюда следует \*\*\*, что  $V=0$  на  $s_0$ , а значит, если  $Y \neq 0$ , и  $A=0$  на  $s_0$ . Если  $Y=0$  на  $\Sigma_1 \subset s_0$ , то (8) принимает вид

$$A = E_t\{YA; \Sigma_2\} \quad \text{на } s_0, \quad \text{где } \Sigma_1 + \Sigma_2 = s_0.$$

Это равенство разбивается на два

$$V = YE_t\{V; \Sigma_2\} \quad \text{на } \Sigma_2 \quad \text{и} \quad A = E_t\{V; \Sigma_2\} \quad \text{на } \Sigma_1 \quad (V = YA).$$

Отсюда опять следует, что  $V=0$  на  $\Sigma_2$  и, значит,  $A=0$  на  $s_0$ . Таким образом, полнота системы  $\{\Phi_n\}$  в  $L^2(s_0)$  доказана.

\* Можно наложить менее ограничительное условие, заменив  $C^1(s_0)$  на  $H^1(s_0)$  (см. ниже).

\*\* В [4] показано, что лемма Лоренца справедлива для токов из  $H^\alpha(s_0)$ . Когда  $E$  — обобщенная функция, в [4] вместо обозначения  $\{EK_n ds\}$  используется  $\langle EK_n \rangle$ .

\*\*\* Теорема единственности для токов из  $H^\alpha(s_0)$  сохраняется [6].

Можно показать, что если система  $\{K_n\}$  линейно независима, то семейство  $\{\Phi_n\}$  также линейно независимо (см. ниже) и принадлежит  $L^2(s_0)$  (см. теорему). Из последнего, в частности, следует, что при  $E_t \in L^2(s_0)$  интеграл в (5) имеет смысл.

### 3. ПОВЕРХНОСТЬ $s_0$ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ АДМИТАНСОМ

Пусть на части  $s$  поверхности  $s_0$  адмитанс  $Y = \infty$ ; другими словами, эта часть поверхности (которая может быть и многосвязной) обладает идеальной электрической проводимостью. В этом случае формулы (5) должны быть изменены. Полагая временно, что  $Y$  ограничен на  $s_0$ , перепишем (5) с учетом (4) так:

$$(9) \quad - \int_{(s)} \mathbf{E} \bar{\Phi}_n ds + \int_{(s)} \{ \mathbf{E} K_n - Y (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t^0) \mathbf{E} \{ K_n; s_0 \} \} ds = \\ = \int_{(s)} Y \mathbf{E} \{ K_n; s_0 \} \mathbf{E}_t^0 ds.$$

Здесь  $\Sigma$  — поверхность, дополняющую  $s$  до  $s_0$ , т. е.  $s_0 = s + \Sigma$ . Перейдем теперь в этом равенстве к пределу, когда  $Y \rightarrow \infty$  на  $s$  (на  $\Sigma$  он остается ограниченным). Поскольку (см. (1))

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t^0) = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} Y (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t^0) = \mathbf{K} \text{ на } s,$$

где  $\mathbf{K}$  — плотность двухстороннего электрического тока на идеально проводящей поверхности  $s$ , то равенство (9) принимает вид

$$\int_{(s)} \mathbf{E} \bar{\Phi}_n ds + \int_{(s)} \mathbf{K} \mathbf{E} \{ K_n; s_0 \} ds = - \int_{(s)} Y \mathbf{E} \{ K_n; s_0 \} \mathbf{E}_t^0 ds - \int_{(s)} \mathbf{E}^0 K_n ds.$$

Вводя обозначения

$$(10) \quad \mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s, \\ \mathbf{E}_t & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad \bar{\mathbf{F}}_n = \begin{cases} \mathbf{E}_t \{ K_n; s_0 \} & \text{на } s, \\ \bar{\Phi}_n & \text{на } \Sigma, \end{cases}$$

придадим предыдущему равенству окончательный вид

$$(11) \quad \int_{(s_0)} \mathbf{I} \bar{\mathbf{F}}_n ds = a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$(12) \quad a_n = - \int_{(s)} Y \mathbf{E} \{ K_n; s_0 \} \mathbf{E}_t^0 ds - \int_{(s)} \mathbf{E}^0 K_n ds.$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — искомый вектор, а  $\bar{\mathbf{F}}_n$  и  $a_n$  — известные величины. Легко видеть, учитывая условия типа Мейкснера, что вектор  $\mathbf{I}$ , в общем случае, не принадлежит  $L^2(s_0)$ . Поэтому будем искать его в пространстве  $L_R^2(s_0)$ , элементами которого являются вектор-функции, заданные на  $s_0$  и касательные к ней. Скалярное произведение задается в нем выражением [4]

$$(13) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{(s_0)} \mathbf{A} \cdot \overline{R\mathbf{B}} ds.$$

Здесь  $R$  — квадратная диагональная (в ортогональной системе координат) матрица второго порядка с неотрицательными элементами  $R_{11}$  и  $R_{22}$ . Если координатная линия  $x_1 = \text{const}$  совпадает с контуром  $\mathcal{L}$ , при переходе через который адмитанс  $Y$  меняется скачком от значения  $Y^+$  до  $Y^-$ , то  $R_{11} = O(\rho^{\alpha_1^+})$ ,  $R_{22} = O(\rho^{\alpha_2^+})$  ( $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ ) при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны, где  $Y = Y^+$ , и  $R_{11} = O(\rho^{\alpha_1^-})$ ,  $R_{22} = O(\rho^{\alpha_2^-})$  при приближении со стороны, где  $Y = Y^-$ .

	$Y^+ = \infty, Y^- = 0$	$Y^+ = \infty, 0 <  Y^-  < \infty$	$\frac{\infty}{ Y^+ } < \frac{\infty}{ Y^- }$	$\frac{\infty}{ Y^+ } \leq \frac{\infty}{ Y^- }$
$\alpha_1^+$	-0,5	-0,5	0	0
$\alpha_2^+$	+0,5	+0,5	0	+0,5
$\alpha_1^-$	+0,5	0	0	+0,5
$\alpha_2^-$	0	0	0	0

Показатели  $\alpha$  выбираются из первых трех столбцов таблицы. При таком выборе  $\alpha$  каждый элемент  $L_R^2(s_0)$  удовлетворяет условиям типа Мейкснера при приближении к контуру  $\mathcal{L}$ , искомое решение  $I \in L_R^2(s_0)$  и каждый член ряда (26) для  $I$  (см. § 4) в отдельности имеет на контуре  $\mathcal{L}$  особенности, реализующиеся для  $I$ . Если отказаться от последнего условия (поскольку оно не обязательно), то возможен и иной выбор  $\alpha$  (см. [4]), например, указанный в четвертом столбце. В остальном (вне  $\mathcal{L}$ )  $R_{11}$  и  $R_{22}$  могут быть заданы на  $s_0$  произвольно в виде положительных непрерывных функций.

Формулы (11) теперь можно записать так:

$$(14) \quad (I, R^{-1}F_n) = a_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

$R^{-1}$  — матрица, обратная  $R$ .

Будем полагать в этом параграфе, что семейство  $\{K_n\}$  линейно независимо, принадлежит  $C^2(s_0)$  и его линейные комбинации плотны в  $C^2(s_0)$ .

Способом, аналогичным приведенному в [4] (стр. 30), легко показать, что  $R^{-1}F_n \in L_R^2(s_0)$  и, значит, левая часть (14), а следовательно и (11), при  $I \in L_R^2(s_0)$  имеют смысл. Докажем, что семейство  $\{R^{-1}F_n\}$  полно в  $L_R^2(s_0)$ , т. е. что из равенств

$$(15) \quad (A, R^{-1}F_n) = 0 \quad \text{при } n=1, 2, \dots,$$

где  $A \in L_R^2(s_0)$ , следует  $A=0$  на  $s_0$ . Учитывая (13), (10) и (4), перепишем (15) в виде

$$\int_{(s)} A E\{K_n; s_0\} ds + \int_{(\Sigma)} A (Y E\{K_n; s_0\} - K_n) ds = 0$$

или, используя лемму Лоренца,

$$(16) \quad \int_{(s_0)} (E\{A; s\} + E\{YA; \Sigma\}) K_n ds - \int_{(\Sigma)} A K_n ds = 0.$$

Введем обозначения

$$(17) \quad B = \begin{cases} A & \text{на } s, \\ YA & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad F = \begin{cases} E_t\{B; s_0\} & \text{на } s, \\ E_t\{B; s_0\} - A & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Тогда, учитывая, что  $E\{B; s_0\} = E\{A; s\} + E\{YA; \Sigma\}$ , запишем (16) так.

$$(18) \quad \int_{(s_0)} F K_n ds = 0 \quad \text{при } n=1, 2, \dots$$

Поскольку  $A$  и  $B$  принадлежат  $L_R^2(s_0)$ , а  $L_R^2(s_0) \subset H^{-\alpha_0}(s_0)$ , где  $0 < \alpha_0 < 0,5$  [4], то на основании теоремы  $F \in H^{-\alpha_0-1}(s_0) \subset H^{-2}(s_0)$ . Так как линейные

комбинации  $\mathbf{K}_n$  плотны в  $C^2(s_0)$ , то они плотны также в  $H^2(s_0)$  и из (18) сразу следует, что  $\mathbf{F}=0$  на  $s_0$ . Последнее равенство, учитывая (17), запишем в виде

$$(19) \quad \mathbf{E}_t\{\mathbf{B}; s_0\}=0 \text{ на } s, \quad \mathbf{A}=\mathbf{E}_t\{\mathbf{B}; s_0\} \text{ на } \Sigma.$$

Если  $Y=0$  на  $\Sigma_1 \subset \Sigma$ , то (19) можно переписать так ( $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ ):

$$(20) \quad \mathbf{E}_t\{\mathbf{B}, s+\Sigma_2\}=0 \text{ на } s, \quad \mathbf{A}=\mathbf{E}_t\{\mathbf{B}; s+\Sigma_2\} \text{ на } \Sigma,$$

поскольку  $\mathbf{B}=0$  на  $\Sigma_1$  (см. (17)). Вводя адмитанс  $Y_0$ , равный  $\infty$  на  $s$  и  $Y$  на  $\Sigma_2$ , придадим равенствам (20) вид

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= Y_0 \mathbf{E}_t\{\mathbf{B}; s+\Sigma_2\} \text{ на } s+\Sigma_2, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E}_t\{\mathbf{B}; s+\Sigma_2\} \text{ на } \Sigma_1. \end{aligned}$$

Из первого соотношения на основании теоремы единственности (которая справедлива и для неограниченного адмитанса) следует, что  $\mathbf{B}=0$  на  $s+\Sigma_2$ , а значит (см. первую формулу (17) и вторую (21)) и  $\mathbf{A}=0$  на  $s_0$ . Таким образом, полнота системы  $\{R^{-1}\mathbf{F}_n\}$  в  $L_R^2(s_0)$  доказана.

Покажем еще, что последовательность  $\{R^{-1}\mathbf{F}_n\}$  линейно независима, т. е. из условия

$$(22) \quad c_1 R^{-1}\mathbf{F}_1 + c_2 R^{-1}\mathbf{F}_2 + \dots + c_N R^{-1}\mathbf{F}_N = 0 \text{ на } s_0,$$

где  $c_n$  — постоянные, следует, что  $c_n=0$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Воздействуя на (22) матрицей  $R$  слева, найдем

$$(23) \quad c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2 + \dots + c_N \mathbf{F}_N = 0 \text{ на } s_0.$$

Учитывая обозначения (10), (4) и линейность оператора  $\mathbf{E}_t\{\}$ , запишем (23) так:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t\left\{\sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n; s_0\right\} &= 0 \text{ на } s, \\ \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n &= Y \mathbf{E}_t\left\{\sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n; s_0\right\} \text{ на } \Sigma \end{aligned}$$

или, вводя обозначение  $Y^0=Y$  на  $\Sigma$  и  $\infty$  на  $s$ ,

$$\sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n = Y^0 \mathbf{E}_t\left\{\sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n; s_0\right\} \text{ на } s_0.$$

Отсюда, вследствие теоремы единственности, получим

$$(24) \quad \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n = 0 \text{ на } s_0.$$

Поскольку семейство  $\{\mathbf{K}_n\}$  линейно независимо по определению, то из (24) следует, что  $c_n=0$  ( $1 \leq n \leq N$ ) и линейная независимость системы  $\{R^{-1}\mathbf{F}_n\}$  доказана.

Аналогично доказывается линейная независимость семейства  $\{\Phi_n\}$  в § 2. Подобным же приемом можно показать, что если последовательность  $\{\mathbf{K}_n\}$  минимальна в  $C^2(s_0)$ , то система  $\{R^{-1}\mathbf{F}_n\}$  минимальна в  $L_R^2(s_0)$ .

## 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ И ПОЛЕЙ

Равенства (5) и (11) однотипны и первые из них являются частным случаем вторых, когда  $s=0$  и  $s_0=\Sigma$ . Поэтому в дальнейшем будем исходить из (11), а точнее из равносильных им равенств (14). Вследствие доказанной выше полноты их можно использовать для определения  $\mathbf{I}$ , т. е. (см. (10)) тока на  $s$  и поля на  $\Sigma$ . Это может быть сделано одним из следующих трех способов.

1. Переходом от  $R^{-1}\mathbf{F}_n$  к ортонормированному в  $L_R^2(s_0)$  семейству функций

$$(25) \quad \mathbf{u}_m = \sum_{n=1}^m a_n^{(m)} R^{-1}\mathbf{F}_n \quad (m=1, 2, \dots)$$

при помощи процесса Шмидта. Тогда, учитывая (14), получим

$$(26) \quad \mathbf{I} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathbf{u}_m, \quad \text{где } c_m = \sum_{n=1}^m a_n \overline{a_n^{(m)}}.$$

Так как система  $\{\mathbf{u}_m\}$  также полна в  $L_R^2(s_0)$ , то ряд для  $\mathbf{I}$  сходится по норме  $L_R^2(s_0)$ .

2. Переходом от (14) к системе линейных уравнений для  $c_m$ . При этом  $\mathbf{I}$  представляется в виде ряда типа (26), где  $\mathbf{u}_m$  — подходящая полная (но не обязательно ортогональная) система функций. Тогда, подставляя ряд (26) в (14), найдем

$$(27) \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\mathbf{u}_m, R^{-1}\mathbf{F}_n) = a_n, \quad n=1, 2, \dots$$

В качестве  $\mathbf{u}_m$  можно взять, например,  $R^{-1}\mathbf{F}_m$ . В этом случае отрезок из первых  $N$  членов ряда (26), где коэффициенты  $c_m$  определяются из соответствующих  $N$  укороченных уравнений (27), дает наилучшую (в смысле метрики  $L_R^2(s_0)$ ) аппроксимацию  $\mathbf{I}$ .

3. Используя результаты работы [7], можно написать

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n; \quad \psi_n = \frac{R^{-1}\mathbf{F}_n}{\|R^{-1}\mathbf{F}_n\|}, \\ c_n = \hat{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i (\psi_i, \psi_n), \\ c_1 = \hat{a}_1, \quad \hat{a}_n = \frac{a_n}{\|R^{-1}\mathbf{F}_n\|}. \end{array} \right.$$

Если выполнены соответствующие неравенства [7], то ряд (28) сходится по норме  $L_R^2(s_0)$ .

Определив  $\mathbf{I}$  одним из перечисленных способов, можно перейти к нахождению вторичного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  внутри и вне  $s_0$ . Для этого учтем, что тангенциальная составляющая  $\mathbf{E}_t$  непрерывна при переходе через  $s_0$ , а  $\mathbf{H}_t$  терпит скачок, определяемый на  $\Sigma$  условиями (1), а на  $s$  электрическим током  $\mathbf{K}(s_0=s+\Sigma)$ . Поэтому поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  совпадает во всем пространстве с

полем, возбуждаемым током, распределенным на  $s_0$  с плотностью [8]

$$(29) \quad \mathbf{K}_{\text{эвк}} = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s, \\ Y(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t^0) & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Зная  $\mathbf{I}$ , сразу же находим  $\mathbf{K}_{\text{эвк}}$  (см. (10)), а затем поле по известным формулам

$$(30) \quad \mathbf{E} = (\text{grad div} + k_0^2) \Pi, \quad \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \text{rot } \Pi;$$

$$\Pi = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0} \int_{(s_0)} \mathbf{K}_{\text{эвк}} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} ds.$$

Подставляя в них значение  $\mathbf{K}_{\text{эвк}}$  с учетом (10) и, например, (26), получим соответствующие ряды для поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Важно подчеркнуть, что они сходятся равномерно всюду вне  $s_0$  [4].

Отметим, что на  $\Sigma_1$ , где  $Y=0$ , вспомогательные токи  $\mathbf{K}_n$  могут быть взяты равными нулю, если их наличие там не дает вычислительных преимуществ.

Рассмотренными приемами могут быть решены, например, задачи об излучении антенн при наличии обтекателей, защитных колпаков, как чисто диэлектрических, так и с металлическими включениями.

#### ДОПОЛНЕНИЕ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Аналогичным методом может быть решена задача определения поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в пространстве  $v$  с однородными параметрами, ограниченном, например, изнутри замкнутой поверхностью  $s$ , на которой задано  $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}$ . Вектор  $\mathbf{e}$  известен и должен удовлетворять требованию физической реализуемости. Применяя опять лемму Лоренца к полям  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n; s\}, \mathbf{H}\{\mathbf{K}_n; s\}$  в области  $v$ , получим

$$(31) \quad \int_{(s)} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}\{\mathbf{K}_n; s\}] - [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n; s\}\mathbf{H}]\} ds = 0.$$

При нахождении поля  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n; s\}, \mathbf{H}\{\mathbf{K}_n; s\}$ , возбуждаемого вспомогательным током  $\mathbf{K}_n$ , распределенным на  $s$ , все пространство (включая область внутри  $s$ ) считается заполненным однородной средой с параметрами такими же, как внутри  $v$ . Равенство (31) можно переписать так:

$$\int_{(s)} [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n; s\}\mathbf{H}] ds = \int_{(s)} [\mathbf{e}\mathbf{H}\{\mathbf{K}_n; s\}] ds.$$

Вводя обозначения

$$(32) \quad \bar{\mathbf{A}}_n = [\mathbf{n}^+ \mathbf{E}\{\mathbf{K}_n; s\}], \quad \beta_n = \int_{(s)} [\mathbf{e}\mathbf{H}\{\mathbf{K}_n; s\}] ds,$$

запишем предыдущее равенство в виде

$$(33) \quad \int_{(s)} \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{A}}_n ds = \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\beta_n$  — известное число, а  $\mathbf{A}_n$  — известный вектор. Равенства (33) аналогичны (5) и (11), и их можно использовать для нахождения \*  $\mathbf{H}_t$  одним

\* Случай, когда в среде отсутствуют потери и частота совпадает с резонансной частотой внутреннего резонатора, ограниченного  $s$ , нуждается в особом рассмотрении [1].

из способов, указанных в § 4. При этом если заранее известно, что  $\mathbf{H}_t \in L^2(s)$ , то следует пользоваться метрикой  $L^2(s)$  (см. § 2). Во всех остальных случаях, поскольку  $\mathbf{H}_t$  всегда включено в  $L_R^2(s_0)$ , следует применять метрику этого пространства (см. § 3). Определив  $\mathbf{H}_t$ , мы знаем  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  на поверхности  $s$  и, поэтому, поле в любой точке  $\nu$  находится при помощи квадратур, например, при помощи эквивалентных электрических и магнитных токов, вводимых на  $s$  [8].

Выражаю признательность М. С. Аграновичу за просмотр рукописи и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, 1-я Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Паланга, 1965. Тексты лекций, Москва — Харьков, 1968.
2. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, Изд. Советское радио, 1966.
3. А. Б. Маненков, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1975, 18, 7, 1025.
4. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1975, 20, 1, 28.
5. Г. И. Эскин, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, Изд. Наука, 1973.
6. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1974, 19, 5, 927.
7. М. А. Алексидзе, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1968, 8, 5, 965.
8. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. 1, Изд. ВВИА, им. Н. Е. Жуковского, 1955.

Поступила в редакцию  
29 VIII 1978



## К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

*(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 28 II 1979)*

В настоящей заметке метод Боргниса—Дебая (<sup>1-3</sup>) обобщается в двух направлениях: на случай **н е о д н о р о д н ы х** уравнений Максвелла

$$(1) \quad \text{rot } \mathbf{H} - i \omega \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{I}, \quad \text{rot } \mathbf{E} + i \omega \mu \mathbf{H} = -\mathbf{j},$$

где справа стоят заданные электрические и магнитные токи, и **н е о д н о р о д н ы х** сред, параметры которых зависят от одной (главной) координаты.

Введем криволинейные, ортогональные координаты  $x_1, x_2, x_3$  с коэффициентами Ляме, удовлетворяющими условиям Боргниса\*

~~В соответствии со сказанным выше~~

$$(2) \quad h_1 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_3} \right) = 0.$$

В соответствии со сказанным выше

$$(3) \quad \epsilon = \epsilon(x_1), \quad \mu = \mu(x_1).$$

Ниже условия (2) и (3) всегда предполагаются выполненными.

Покажем прежде всего, что справедлива следующая

**Т е о р е м а 1.** *Если токи удовлетворяют условиям:*

$$(4) \quad I = I_1, \quad I_2 = I_3 = 0; \quad j_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

*то  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — поле электрического типа ( $H_1 = 0$ ) и может быть выражено с помощью одной скалярной функции.*

Для доказательства запишем (1) в координатной форме:

$$(5) \quad \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 H_2) \right\} - i \omega \epsilon E_1 = I_1,$$

$$(6) \quad \frac{1}{h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 H_3) \right\} - i \omega \epsilon E_2 = 0,$$

$$(7) \quad \frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1 \right\} - i \omega \epsilon E_3 = 0,$$

$$(8) \quad \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 E_2) \right\} + i \omega \mu H_1 = 0,$$

$$(9) \quad \frac{1}{h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 E_3) \right\} + i \omega \mu H_2 = -j_2,$$

$$(10) \quad \frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1 \right\} + i \omega \mu H_3 = -j_3;$$

\* Координата  $x_1$  называется главной.

при этом учтены условия (2) и (4). Полагая  $H_1 = 0$ , удовлетворим уравнению (8), определив  $E_2, E_3$  формулами

$$(11) \quad E_2 = \frac{1}{\epsilon h_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad E_3 = \frac{1}{\epsilon h_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3};$$

здесь  $U$  – скалярная функция – потенциал. Подставляя эти выражения в равенства (7) и (6), удовлетворим им, полагая

$$(12) \quad H_2 = \frac{i \omega}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad H_3 = - \frac{i \omega}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

Уравнение (5) определяет  $E_1$  и после подстановки в него (12) дает

$$(13) \quad E_1 = - \frac{1}{\epsilon h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right\} - \frac{1}{i \omega \epsilon} I_1.$$

Неиспользованные уравнения (9), (10) с учетом (11)–(13) и условия (3) запишутся так:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (L U) = \epsilon h_3 j_2 - \frac{1}{i \omega} \frac{\partial I_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (L U) = -\epsilon h_2 j_3 - \frac{1}{i \omega} \frac{\partial I_1}{\partial x_2},$$

где

$$(14) \quad L U \equiv \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right\} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + k^2 U,$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Для того чтобы эти два уравнения были совместны, необходимо и достаточное выполнение равенства

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 j_2) = - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 j_3),$$

которое, вследствие (2), эквивалентно условию  $\text{div } j = 0$  и поэтому (см. (4)) выполняется. Таким образом, выписанные уравнения совместны и им можно удовлетворить, подчинив функцию  $U$  следующему равенству:

$$(16) \quad L U = \frac{i}{\omega} I_1 + p.$$

Величина  $p$  находится из соотношений

$$(17) \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \epsilon h_3 j_2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\epsilon h_2 j_3,$$

которые совместны, как это следует из (15). Интегрируя их, получим

$$(18) \quad p = \epsilon \int_{x_3^0}^{x_3} h_3 j_2 dx_3 - \epsilon \int_{x_2^0}^{x_2} h_2 j_3 \Big|_{x_3 = x_3^0} dx_2,$$

где  $x_3^0$  и  $x_2^0$  – произвольные функции от  $x_1$ . Таким образом, теорема 1 доказана. Одновременно получены формулы (11)–(13), выражающие поле через один

скалярный потенциал  $U$ , удовлетворяющий уравнению (16). Последнее позволяет упростить формулу (13), заменив ее следующей:

$$(13a) \quad E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \omega^2 \mu U - \frac{p}{\epsilon}.$$

Рассмотрим теперь распределение токов, дополнительное по отношению к фигурирующему в теореме 1. При этом справедлива

**Теорема 2.** Если токи удовлетворяют условиям

$$(19) \quad I_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{I} = 0; \quad j = j_1, \quad j_2 = j_3 = 0,$$

то  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  – поле магнитного типа ( $E_1 = 0$ ) и может быть выражено с помощью одной скалярной функции.

Эта теорема следует из теоремы 1 на основании перестановки:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{I}, \quad \epsilon \rightarrow \mu, \quad \mu \rightarrow \epsilon,$$

сохраняющей инвариантными уравнения Максвелла (1). Применяя ее к формулам (11), (12), (13a), (16), (14) и (18), найдем

$$(20) \quad H_2 = \frac{1}{\mu h_2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad H_3 = \frac{1}{\mu h_3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$(21) \quad E_2 = -\frac{i \omega}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{i \omega}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2},$$

$$(22) \quad H_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \omega^2 \epsilon V - \frac{1}{\mu} q, \quad E_1 = 0,$$

$$(23) \quad \mathcal{L}V = \frac{i}{\omega} j_1 + q,$$

где

$$\mathcal{L}V \equiv \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + k^2 V,$$

$$q = -\mu \int_{x_3^0}^{x_3} h_3 I_2 dx_3 + \mu \int_{x_2^0}^{x_2} h^2 I_3 \Big|_{x_3 = x_3^0} dx_2.$$

Как видим, в отличие от известного случая, когда  $\epsilon, \mu = \text{const}$  и  $\mathbf{I} = \mathbf{j} = 0$ , потенциалы  $U, V$  удовлетворяют теперь различным неоднородным уравнениям, а в формулы (11) и (20) входят множители  $1/\epsilon$  и  $1/\mu$  соответственно.

При произвольном распределении электрических и магнитных токов справедливо следующее утверждение. Если заданная система токов  $\mathbf{I}, \mathbf{j}$  допускает разбиение на две системы, удовлетворяющие требованиям (4) и (19) соответственно, то полное поле представляет собой суперпозицию полей электрического и магнитного типов, которые могут быть выражены при помощи вышеприведенных формул. Сказанное есть следствие линейности уравнений Максвелла (1) и краевых условий для них. Таким образом, для произвольных распределений токов  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{j}$ , поперечные (относительно главной координаты) части которых соленоидальны, и для любой среды, параметры которой зависят от одной – главной – координаты, поле может быть выражено через два скалярных потенциала методом, аналогичным методу Борнгиса – Дебая. Все здесь сказанное относится, понят-

но, к случаю, когда координатная система удовлетворяет условию (2). Как известно<sup>3</sup>, этому условию удовлетворяют сферическая и любые цилиндрические системы координат. Поэтому рассмотренным методом могут изучаться слоисто-сферические и плоско-слоистые среды с непрерывными и скачкообразно изменяющимися параметрами  $\epsilon(x_1)$ ,  $\mu(x_1)$ .

В заключение необходимо подчеркнуть, что теорема 1 (соответственно теорема 2) справедлива только тогда, когда условия (3), (4) (условия (3), (19)) выполняются во всем бесконечном пространстве. Если они выполнены лишь в части  $Q$  пространства, то истинное поле в  $Q$  может слагаться из поля электрического (магнитного) типа, определяемого формулами (11)–(13), (16) ((20–23)) и полем магнитного (электрического) типа, являющегося решением соответствующей однородной задачи (т.е. при токах, равных нулю внутри  $Q$ ). Последнее поле обязано своим существованием характеру среды и распределению токов в остальной области пространства вне  $Q$ . Исключение составляют, например, частичные области  $Q$ , ограниченные идеально проводящими стенками, совпадающими с координатными поверхностями  $x_n = \text{const}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), для которых теоремы 1 и 2 выполняются.

Поступило  
6 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> *Bornis*, Ann. Phys., v. 35, 279 (1939). <sup>2</sup> *Луи де-Бройль*, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, М., ГИИЛ, 1948. <sup>3</sup> *Л.А. Вайнштейн*, Электромагнитные волны. "Сов. радио", 1957.

УДК 621.396.67.01

## ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ

*И. Б. Абрамов, Н. С. Бахвалов, М. Г. Белкина,  
Я. М. Жилейкин, Я. Н. Фельд*

Излагаются методика и результаты расчета диаграмм направленности антенны переменного профиля. При этом учитывается, что щиты, образующие основное зеркало антенны, находятся в зоне Френеля облучателя. Расчет проводится токовым методом, что для данной антенны дает достоверные результаты в области главного и большого числа боковых лепестков. Определены условия оптимального в отношении кнд облучения зеркала.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье излагаются методика и результаты расчетов диаграмм направленности многоэлементной антенны переменного профиля (АПП) [1], у которой основное зеркало состоит из большого числа отдельных одинаковых подвижных элементов (щитов), облучаемых единым источником. Изменяя положение и наклон щитов в двух плоскостях, можно изменять форму зеркала в целом, что в совокупности с изменением положения источника позволяет осуществлять перемещение луча в угломестной плоскости. Поворот диаграммы по азимуту обеспечивается перемещением рабочего сектора щитов при соответствующем повороте диаграммы направленности источника.

Ранее диаграммы направленности АПП вычислялись по эквивалентному раскрытию [2] или по кривой центрального сечения зеркала. Метод эквивалентного раскрытия состоит в том, что основное зеркало считается сплошным, а излучающий раскрыв определяется как проекция зеркала на плоскость, ортогональную направлению максимума излучения, и диаграмма определяется интегралом типа Кирхгофа от поля по этому раскрытию. Такой метод, как известно, дает достаточно точные результаты только в пределах главного и нескольких боковых лепестков диаграммы направленности всей антенны и, естественно, не учитывает дискретность поверхности основного зеркала и переливание энергии за его края по вертикали. Что касается расчета диаграммы путем интегрирования тока по кривой центрального сечения, которой заменяется основное зеркало, являющееся узкой вырезкой из эллиптического конуса, то этот метод обладает всеми недостатками предыдущего и, кроме того, дает достаточно достоверные результаты только в двух главных сечениях диаграммы АПП.

В настоящей работе расчет поля в дальней зоне проводится путем суммирования полей, создаваемых отдельными щитами, которые, в свою очередь, вычисляются токовым методом. Отдельный элемент антенны — щит — представляет собой вырезку из цилиндра очень большого радиуса и конечной высоты, ограниченную двумя образующими. Так как диаграмма направленности отдельного щита во много раз шире диаграммы всей системы, то последняя вычисляется достаточно достоверно для главного

и значительно большего числа боковых лепестков, чем в ранее использованных методах.

Расчет распределения тока на щите производился в приближении Кирхгофа через удвоенное значение соответствующей составляющей магнитного вектора падающего на щит первичного поля облучателя. При этом не предполагалось, что щиты находятся в дальней зоне, и не делались никаких пренебрежений в подынтегральных функциях. Облучатель имитировался вертикальной узкой лентой высоты  $h$  и ширины  $a$ . Ток на ленте принимался постоянным по горизонтали и косинусоидально спадающим по вертикали.

В следующем параграфе дан вывод расчетных формул и приведены методы вычисления получаемых интегралов.

### 1. РАСЧЕТ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ

Рассмотрим цилиндрическую систему координат  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $z$ , связанную с декартовой системой  $x$ ,  $y$ ,  $z$  формулами

$$x = -\rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad z = z.$$

Рассмотрим также [1] поверхность эллиптического конуса с вершиной на оси  $z$

$$(1) \quad \rho = \frac{z \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos \psi} \quad \left( 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Сечение этого конуса плоскостью, нормальной к оси  $z$ , образует эллипс, один из фокусов которого лежит на оси  $z$ .

Вырежем узкую полосу из поверхности (1) двумя плоскостями, нормальными к оси  $z$ , так, что центральная линия этой полосы образует эллипс

$$(2) \quad \rho = \frac{p}{1 + \cos \delta \cos \psi},$$

где параметр  $p$  задается формулой

$$(3) \quad p = \left( 1 - \frac{\cos^2 \delta (1 - \cos \Psi)}{2 + \cos \delta (2 + \cos \delta) (1 + \cos \Psi)} \right) R_0$$

(см. рис. 1. Величины  $R_0$  и  $\Psi$  определены ниже).

Эллипс (2) расположен в плоскости

$$(4) \quad z = \frac{p}{\sin \delta}.$$

Зеркало АПП представляет собой часть этой полосы, симметричную относительно большей оси эллипса (2).

Цилиндрическая волна с осью  $z$ , отражаясь от этой полосы, преобразуется в плоскую волну [1], распространяющуюся в направлении, лежащем в плоскости  $zOx$ , проходящей через ось  $z$  и большую ось эллипса, и составляет с последней угол  $\delta$  (рис. 1).

Указанная полоса аппроксимируется щитами, каждый из которых представляет собой кусок цилиндрической поверхности высотой  $h$  и шириной  $b$  (см. рис. 2). С каждым щитом связывается местная декартова система координат  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  (рис. 2), в которой уравнение направляющей щита

имеет вид \*

$$\xi'^2 + \eta'^2 + 2\eta'R_0 = 0.$$

При  $\delta = 90^\circ$  центры щитов расположены на некоторой исходной окружности радиуса  $R_0$ . При изменении  $\delta$  центр каждого щита перемещается по радиусу до совпадения с точкой пересечения этого радиуса с кривой (2),

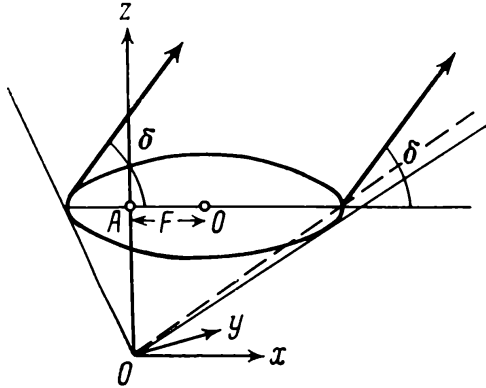


Рис. 1. Эллиптический конус

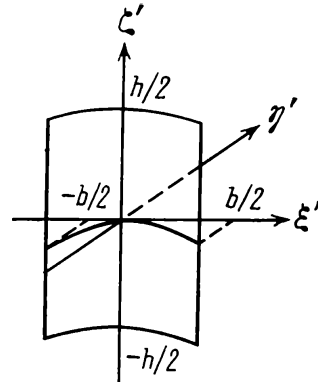


Рис. 2. Элемент антенны (цилиндрический щит)

а сам щит поворачивается вокруг своих вертикальной и горизонтальной осей так, чтобы касательная плоскость к щиту в его центре совпала с касательной плоскостью к поверхности (1) в общей со щитом точке. Облучатель перемещается параллельно самому себе из центра круга в точку  $A$  на расстояние

$$(5) \quad F = R_0 - \frac{p}{1 + \cos \delta}.$$

Угол  $\Psi$  в формуле (3) есть половина угла облучения зеркала источником, находящимся в точке  $A$  (см. рис. 3).

Ниже используются сферическая система координат  $r, \vartheta, \varphi$  и цилиндрическая система координат  $\rho, \psi, z_1$ , которая получается из  $\rho, \psi, z$  параллельным переносом вдоль оси  $z$  на расстояние, определяемое формулой (4), а также обозначения:  $M(y, z_1)$  — произвольная точка на ленте  $S(-h/2 \leq z_1 \leq h/2, -a/2 \leq y \leq a/2)$ , имитирующей облучатель,  $Q_n^0(\rho_n, \psi_n)$  — центр  $n$ -го щита,  $Q_n'(\xi', \eta', \zeta')$  — произвольная точка на  $n$ -м щите,  $P$  — точка наблюдения, зависящая от координат  $r, \vartheta, \varphi$  или  $\xi_n', \eta_n', \zeta_n'$ . Ниже для краткости вместо  $z_1$  мы будем писать  $z$ .

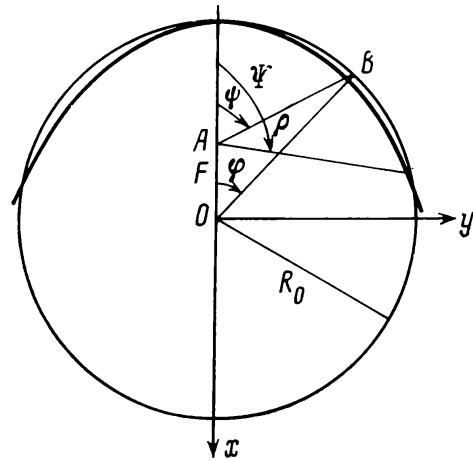


Рис. 3. Расположение облучателя на исходной окружности

Ток на ленте (облучателе)  $S$  зададим в виде  $j^0 e^{-i\omega t}$ , тогда векторный потенциал  $A^0$  электромагнитного поля, создаваемый этим током в произвольной точке пространства  $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ , определяется равенством

$$A^0(x_Q, y_Q, z_Q) = \frac{1}{c} \iint_S \frac{e^{ikR_{QM}}}{R_{QM}} j^0(M) dS_M,$$

\* Здесь и ниже штрихами отмечены величины, заданные в местной системе координат рассматриваемого щита.

где

$$R_{QM} = [(x_Q + F)^2 + (y_Q - y_M)^2 + (z_Q - z_M)^2]^{1/2},$$

а интегрирование осуществляется по поверхности ленты  $S$ .

Пусть  $j_x^0 = j_y^0 = 0$ ,  $j_z^0 = J_0 \cos \beta z$ . Тогда составляющие вектора  $\mathbf{H}^0$  выражаются следующим образом:

$$H_x^0 = \frac{\partial}{\partial y} A_z^0, \quad H_y^0 = -\frac{\partial}{\partial x} A_z^0, \quad H_z^0 = 0.$$

Вектор плотности электрического тока, наведенного на поверхности щита, принимается равным

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{2\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{H}^0].$$

Здесь

$$\mathbf{n} = \frac{\xi'}{R_0} \mathbf{e}_{\xi'} + \left( \frac{\eta'}{R_0} + 1 \right) \mathbf{e}_\eta.$$

— нормаль к щиту, направленная в сторону положительного направления оси  $\eta'$ , а  $\mathbf{H}^0$  — вектор магнитного поля первичной падающей волны с компонентами

$$(6) \quad \begin{aligned} H_x^0 &= \frac{J_0}{c} \iint_S \frac{e^{ikR_{Q_n'M}} (ikR_{Q_n'M} - 1)(y_{Q_n'} - \bar{y})}{R_{Q_n'M}^3} \cos \beta z \, dz \, dy, \\ H_y^0 &= \frac{J_0}{c} \iint_S \frac{e^{ikR_{Q_n'M}} (ikR_{Q_n'M} - 1)(x_{Q_n'} + F)}{R_{Q_n'M}^3} \cos \beta z \, dz \, dy, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{Q_n'M} &= [(\rho_n \cos(\psi_n + \gamma) - \xi' + y \sin \gamma)^2 + (\rho_n \sin(\psi_n + \gamma) + \\ &+ \eta' \cos \alpha + \zeta' \sin \alpha - y \cos \gamma)^2]^{1/2}, \\ x_{Q_n'} + F &= -\rho_n \cos \psi_n - (\eta' \cos \alpha + \zeta' \sin \alpha) \sin \gamma + \xi' \cos \gamma, \\ y_{Q_n'} &= \rho_n \sin \psi_n + (\eta' \cos \alpha + \zeta' \sin \alpha) \cos \gamma + \xi' \sin \gamma. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  — угол между осями  $\zeta'$  и  $z$ ,  $\gamma$  — угол между осями  $\xi'$  и  $x$  (рис. 2 и 1).

Пусть точка наблюдения  $P$  находится в дальней зоне. Введем обозначения

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{c}{J_0} H_y^0, \quad S_2 = \frac{c}{J_0} H_x^0, \quad d_0 = \frac{J_0}{2\pi c} \frac{e^{ikR_{Q_n^0P}}}{R_{Q_n^0P}}, \\ r' \cos \Omega &= \frac{\xi_P' \xi' + \eta_P' \eta' + \zeta_P' \zeta'}{R_{Q_n^0P}}, \end{aligned}$$

где  $Q_n^0$  — центр щита. Векторный потенциал поля в точке  $P$ , создаваемого токами, распределенными на  $n$ -м щите, определяется тогда выражениями

$$(7) \quad \begin{aligned} A_{\xi'} &= d_0 \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikr' \cos \Omega} \sin \alpha [S_2 \sin \gamma - S_1 \cos \gamma] d\xi' d\zeta', \\ A_{\eta'} &= -d_0 \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikr' \cos \Omega} [S_2 \sin \gamma - S_1 \cos \gamma] \frac{\xi' d\xi'}{\sqrt{R_0^2 - \xi'^2}} d\zeta', \end{aligned}$$



$$A_{\zeta'} = d_0 \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikr' \cos \alpha} \left\{ \frac{\xi'}{\sqrt{R_0^2 - \xi'^2}} [S_2 \sin \gamma - S_1 \cos \gamma] + [S_2 \cos \gamma + S_1 \sin \gamma] \right\} d\xi' d\zeta'.$$

Компоненты векторов поля, создаваемые токами щита в дальней зоне, имеют вид

$$E_r = 0; \quad E_\phi = ikA_\phi; \quad E_\varphi = ikA_\varphi; \\ H_r = 0; \quad H_\phi = -ikA_\phi; \quad H_\varphi = ikA_\phi,$$

а составляющие  $A_\phi$  и  $A_\varphi$  могут быть представлены следующим образом:

$$A_\phi = d_1 c_0 [J_{11} c_{21} + J_{12} c_{22} + J_{21} c_{23} + J_{22} c_{24}]; \\ A_\varphi = d_1 c_0 [J_{11} c_{11} + J_{12} c_{12} + J_{21} c_{13}],$$

где

$$J_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik(b_1 \xi' + b_2 \eta' + b_3 \zeta')} f_i S_j(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'; \quad i, j = 1, 2;$$

$$f_1 = 1; \quad f_2 = \frac{\xi'}{\sqrt{R_0^2 - \xi'^2}}; \quad d_1 = \frac{J_0 e^{ikr}}{2\pi cr};$$

$$c_0 = e^{ik\rho_n \sin \vartheta \sin(\varphi_n + \varphi)};$$

$$c_{11} = -\sin \alpha \sin(\varphi - 2\gamma); \quad c_{12} = \sin \alpha \cos \varphi;$$

$$c_{13} = -\sin 2\alpha \cos \gamma \cos(\varphi - 2\gamma);$$

$$c_{21} = \sin \alpha \cos \vartheta \cos(\varphi - 2\gamma) - \cos \alpha \sin \gamma \sin \vartheta;$$

$$c_{22} = \sin \alpha \cos \vartheta \sin \varphi - \cos \alpha \cos \gamma \sin \vartheta;$$

$$c_{23} = [\cos 2\alpha \cos \gamma \sin \vartheta - \sin 2\alpha \cos \gamma \sin(\varphi - \gamma)] \cos \vartheta;$$

$$c_{24} = -\sin \gamma \sin \vartheta;$$

$$b_1 = \sin \vartheta \cos(\varphi - \gamma);$$

$$b_2 = \cos \alpha \sin \vartheta \sin(\varphi - \gamma) - \sin \alpha \cos \vartheta;$$

$$b_3 = \sin \alpha \sin \vartheta \sin(\varphi - \gamma) + \cos \alpha \cos \vartheta.$$

Результирующий потенциал  $A^T$  всей антенны есть сумма потенциалов отдельных щитов, попадающих в область облучения  $[-\Psi, \Psi]$ .

Тогда нормированные диаграммы направленности даются выражениями

$$\bar{P}_\phi(\vartheta, \varphi) = \frac{|A_\phi^T(\vartheta, \varphi)|^2}{\Gamma}; \quad \bar{P}_\varphi(\vartheta, \varphi) = \frac{|A_\varphi^T(\vartheta, \varphi)|^2}{\Gamma}.$$

Здесь

$$\Gamma = \max\{|A_\phi^T(\vartheta_0, \varphi_0)|^2; |A_\varphi^T(\vartheta_0, \varphi_0)|^2\};$$

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \varphi_0 = 0.$$

Расчет диаграммы представляет некоторые трудности в связи с необходимостью вычисления большого числа четырехкратных интегралов от осциллирующих функций (см. (7) и (6)).

Для интегрирования по переменной  $y$  была получена асимптотическая формула. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{ikRQ_n^0 M} (ikRQ_n^0 M - 1)}{R_{Q_n^0 M}^3} g(y) dy,$$

где  $g(y)$  равно 1 или  $y$  (ср. формулы (6)). Величина  $R_{Q_n^0 M_0}$  заменялась ее разложением по формуле Тейлора с точностью до членов второго порядка малости. Тогда

$$I \simeq \frac{ikR_{Q_n^0 M_0} - 1}{R_{Q_n^0 M_0}^3} e^{ikR_{Q_n^0 M_0}} \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left\{ ik \left( \frac{yt}{R_{Q_n^0 M_0}} + \frac{y^2}{2R_{Q_n^0 M_0}} \left( 1 - \frac{\rho_n^2 \sin^2 \psi_n}{R_{Q_n^0 M_0}} \right) \right) \right\} g(y) dy,$$

где

$$t = -\rho_n \sin \psi_n - \xi' \sin \gamma - \eta' \cos \alpha \cos \gamma - \zeta' \sin \alpha \cos \gamma,$$

а  $R_{Q_n^0 M_0}$  — расстояние между центром щита и точкой  $M_0(0, z)$  на оси ленты  $S$ .

В рассматриваемом нами случае ( $a \sim \lambda$ ,  $R_{Q_n^0 M_0} \sim 25\lambda$ ) относительная погрешность от этой замены не превосходит  $10^{-4}$ .

Для вычисления интегралов

$$I_1 = \int_{-a/2}^{a/2} e^{iBy} e^{iAy^2} dy, \quad I_2 = \int_{-a/2}^{a/2} e^{iBy} e^{iAy^2} y dy$$

применялся асимптотический метод, который состоял в разложении сомножителей подынтегральной функции в ряд и в последующем интегрировании в явном виде.

Результатом были следующие формулы:

1. Если  $|Ba/2| \leq 0,05$ , то

$$I_1 \simeq a \left( 1 - \frac{B^2 a^2}{24} \right) + iA \frac{a^3}{12},$$

$$I_2 \simeq -\frac{AB}{80} a^5 + i \frac{Ba^3}{12} \left[ 1 - \frac{B^2 a^2}{40} \right].$$

2. Если  $Aa^2/4 \leq 10^{-6}$ , то

$$I_1 \simeq \frac{2}{B} \sin \frac{Ba}{2}, \quad I_2 \simeq i \left[ -\frac{a}{B} \cos \frac{Ba}{2} + \frac{2}{B^2} \sin \frac{Ba}{2} \right].$$

3. В остальных случаях

$$I_1 \simeq \frac{1}{B} \left( 2 + \frac{Aa^2}{2} - \frac{4A}{B^2} \right) \sin \frac{Ba}{2} + i \frac{2Aa}{B^2} \cos \frac{Ba}{2},$$

$$I_2 \simeq \frac{A}{B} \frac{a^3}{4} \cos \frac{Ba}{2} - \frac{3a}{B} \left[ \frac{a^2}{2B} \sin \frac{Ba}{2} + \frac{2}{B} \left( \frac{a}{B} \cos \frac{Ba}{2} - \frac{2}{B^2} \sin \frac{Ba}{2} \right) \right] + i \left( -\frac{a}{B} \cos \frac{Ba}{2} + \frac{2}{B^2} \sin \frac{Ba}{2} \right).$$

Относительная погрешность приближенного вычисления интегралов  $I_1$  и  $I_2$  по этим формулам не превосходит  $10^{-5}$ .

Для вычисления интегралов по переменным  $\xi'$ ,  $\zeta'$ ,  $z$  применялись квадратурные формулы Гаусса. Для достижения относительной точности  $10^{-6}$  в интересовавших нас случаях было достаточно взять число узлов квадратур Гаусса по этим переменным  $N_1=12$ ,  $N_2=24$ ,  $N_3=32$ . Рабочим вариантом, гарантирующим четыре верные значащие цифры, был взят набор  $N_1=10$ ,  $N_2=20$ ,  $N_3=24$ .

Вычисление диаграммы направленности проводилось группами по  $k$  точек, причем интеграл по переменной  $z$  вычислялся один раз для всех значений  $\theta$ ,  $\varphi$ , так как он от них не зависит. Количество машинного времени, затраченного на вычисление серии интегралов, оценивается фор-

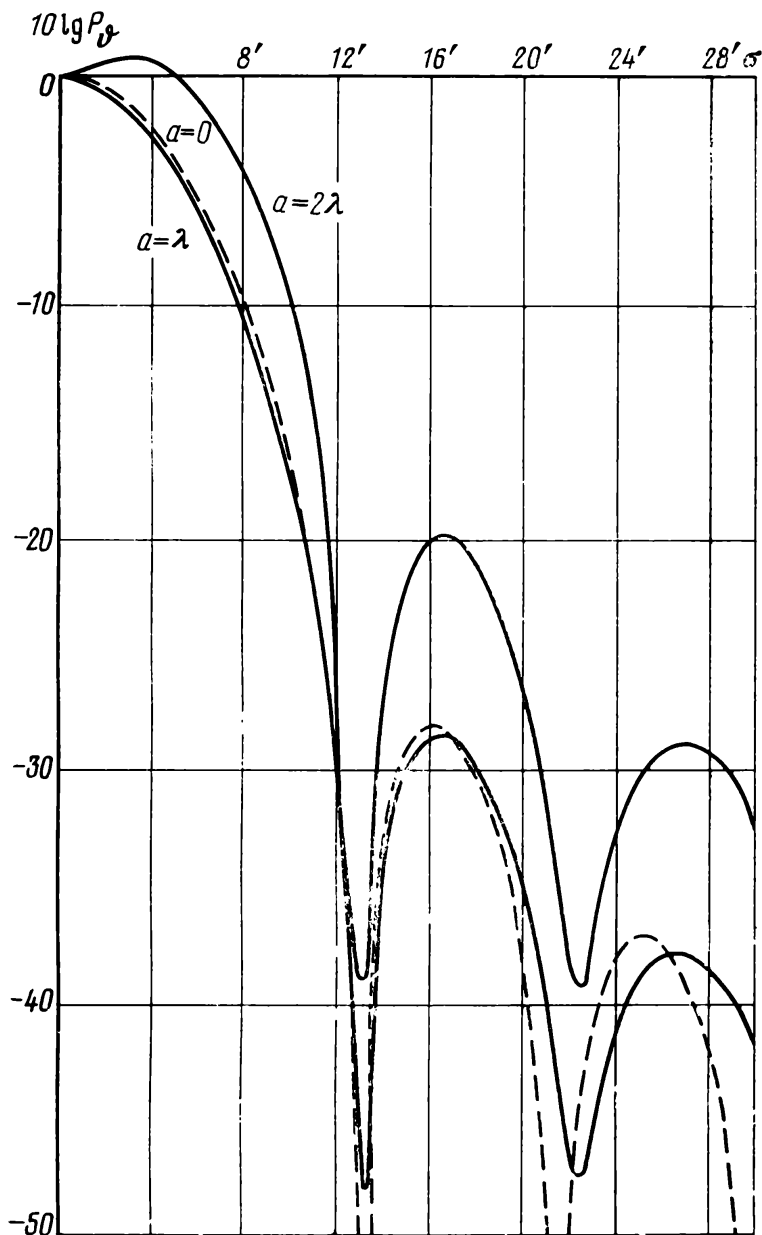


Рис. 4 ( $\delta=5^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_1$ ;  $\chi=0^\circ$ )

мулой

$$A = A_0(k + N_3)N_1N_2 = A_0kN_1N_2 \left( 1 + \frac{N_3}{k} \right),$$

где  $A_0$  — среднее время, затраченное на вычисление подынтегральной функции в одной точке.

Из этой формулы видно, что число  $k$  целесообразно брать как можно больше, чтобы время, приходящееся на одну точку, было как можно меньше и близко к  $A_0N_1N_2$ . В рабочих вариантах число  $k$  бралось равным 60, при этом время, затраченное на вычисление одной точки диаграммы направленности на ЭВМ «БЭСМ-6», в среднем равнялось 0,5 с.

Расчеты диаграмм направленности были проведены также и для случая облучения антенны строго цилиндрической волной. Диаграммы направ-

ленности вычислялись для углов  $\delta=5; 50; 85^\circ$ . При вычислении двухкратных интегралов по переменным  $\xi'$  и  $\zeta'$  применялись либо квадратурные формулы Гаусса, если коэффициент, характеризующий число линейных осцилляций по данной переменной, не превосходил некоторого параметра  $\varepsilon_{\text{осц}}$ , либо квадратурная формула типа Гаусса для осциллирующих функций (см. [3, 4]), если этот коэффициент был больше  $\varepsilon_{\text{осц}}$ .

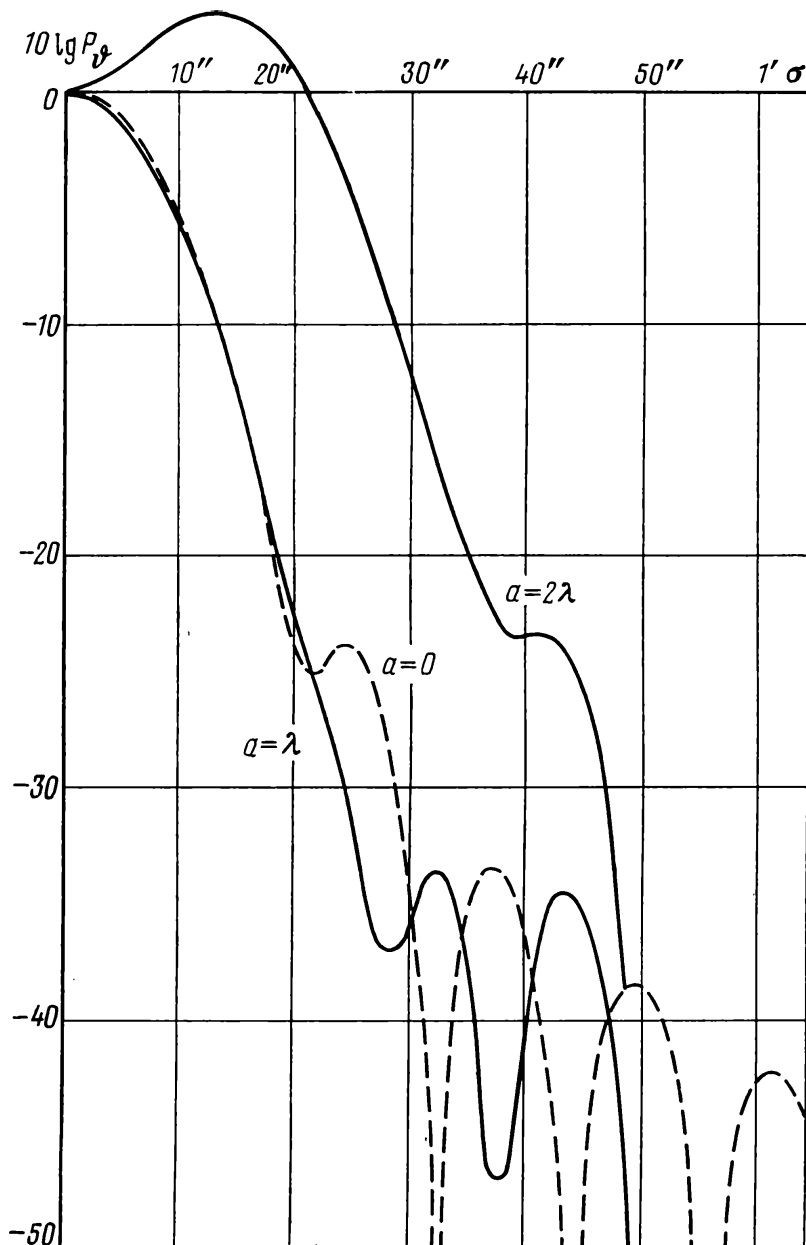


Рис. 5 ( $\delta=5^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_1$ ;  $\chi=90^\circ$ )

Рабочим вариантом, гарантирующим четыре верных знака, был набор  $N_1=10$ ,  $N_2=10$ .

Вычисления проводились на ЭВМ «БЭСМ-4», время вычисления одной точки диаграммы направленности составляло  $1'40''$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

По изложенной выше методике были выполнены расчеты диаграмм направленности АПП. Расчеты проводились с целью уточнения формы диаграмм по сравнению с вычисленными по методу эквивалентного раскрыва [2] и для выбора направленности облучателя в горизонтальной плоскости (размера облучателя  $a$ ).

Диаграммы направленности рассчитывались для следующих параметров АПП (см. рис. 3) (параметр  $\beta$  находился из условия  $\cos(\beta h/2)=0$ ): относительный радиус  $R_0/\lambda_1=16\,000$  и  $R_0/\lambda_2=4\,000$ , относительная высота  $h/\lambda_1=400$ ,  $h/\lambda_2=100$ , угол облучения  $2\Psi$  щитов полагался при всех углах места равным  $120^\circ$ . Поэтому число участвующих в формировании диаграм-

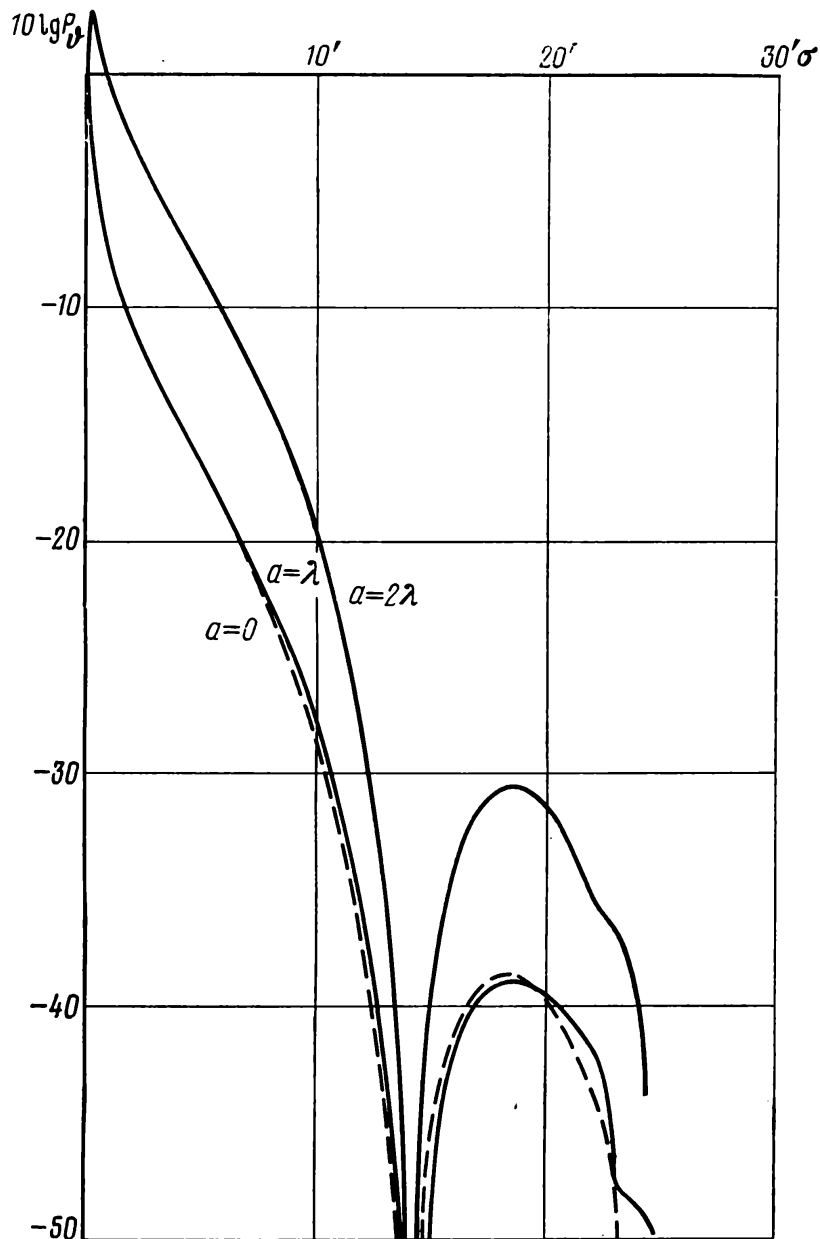


Рис. 6 ( $\delta=85^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_1$ ;  $\chi=0^\circ$ )

мы направленности щитов увеличивается с ростом угла  $\delta$  и направленность антенны в обеих плоскостях растет.

Результаты расчета приводятся для углов места  $\delta=5^\circ$  и  $\delta=85^\circ$ . При этих углах расстояние между облучателем и зеркалом антенны соответственно составляет (см. рис. 3)  $R_0-F=18,5h$  и  $R_0-F=36,75h$ .

Для выбора направленности облучателя в горизонтальной плоскости рассчитывались диаграммы при разной ширине  $a$  облучателя в предположении, что распределение тока на облучателе в этой плоскости равномерное. Ширина  $a$  менялась от 0 до двух длин волн. При расчетах проводилась также оценка изменения коэффициента направленного действия (кнд) антенны в зависимости от ширины облучателя.

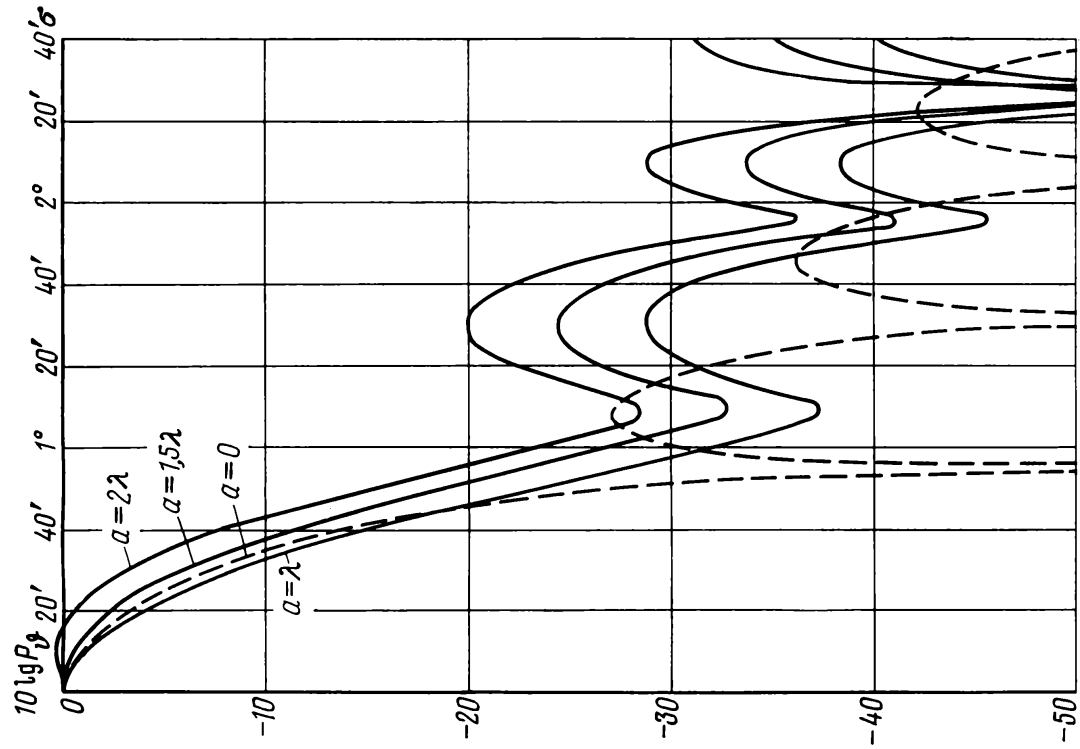


Рис. 8 ( $\delta=5^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_2$ ;  $\chi=0^\circ$ )

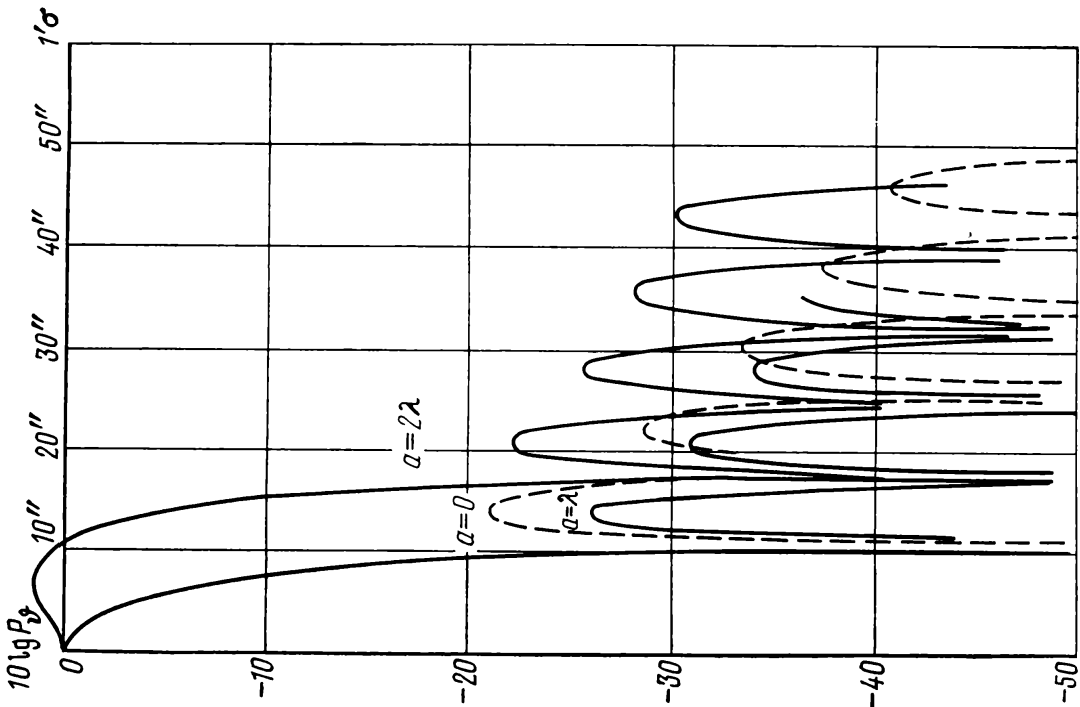


Рис. 7 ( $\delta=85^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_1$ ;  $\chi=90^\circ$ )

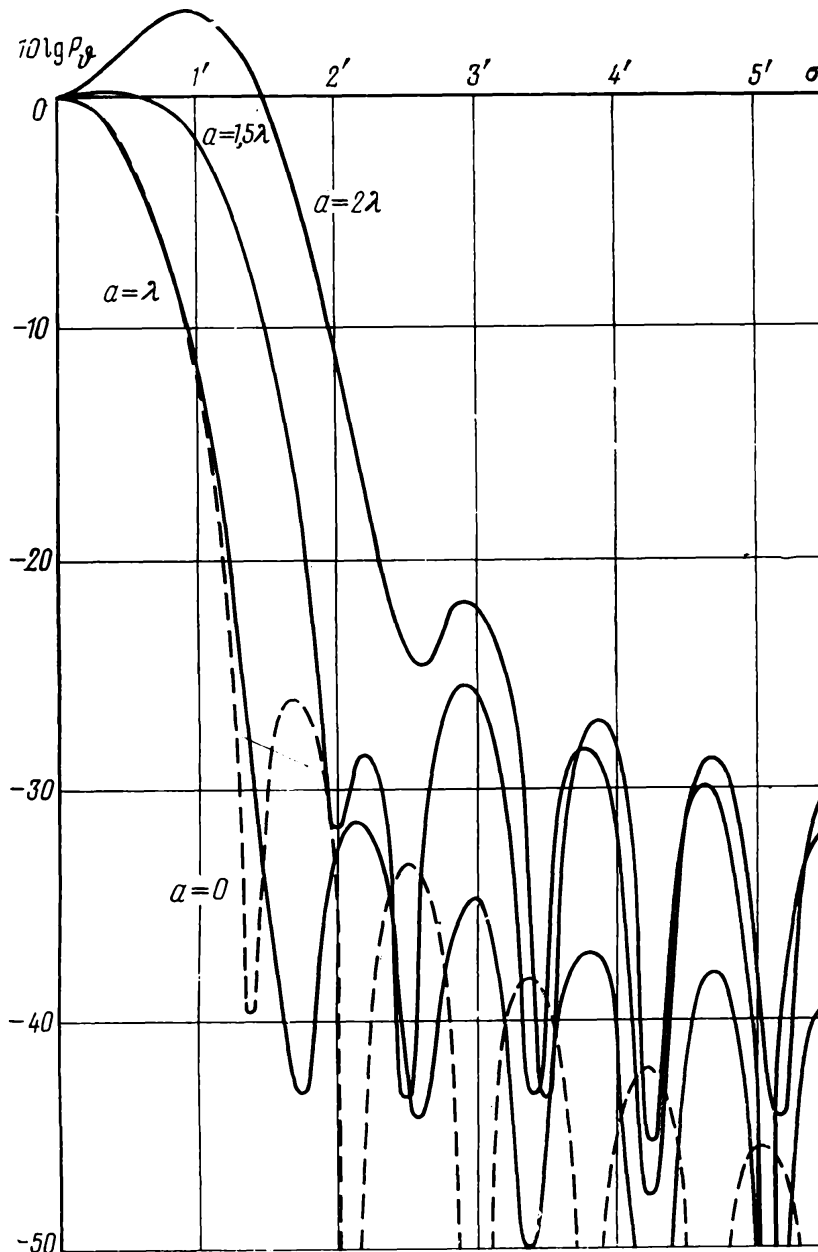


Рис. 9 ( $\delta=5^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_2$ ;  $\chi=90^\circ$ )

Зависимость относительного кнд от ширины ленты определялась по формуле

$$\text{кнд}_{\text{отн}} = \frac{\Gamma(a)}{J(a)},$$

где  $\Gamma(a)$  — квадрат поля, излучаемого АПП в направлении максимума диаграммы, а величина  $J(a)$  вычислялась по формуле

$$J(a) = a^2 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 d\vartheta,$$

где  $x=1/2ka \sin \vartheta$ . При фиксированных плотности тока и высоте  $h$  ленты облучателя, а также неизменном законе распределения тока (по высоте косинусоидальным, спадающим на концах до нуля, и равномерным по ширине) этот интеграл пропорционален полной мощности, излучаемой ленточным облучателем.

Вычисленные диаграммы направленности для  $\delta=5^\circ$  и  $\delta=85^\circ$  при  $h/\lambda_1=400$  и  $h/\lambda_2=100$  приведены на рис. 4–11 для  $a=0$ ,  $a=\lambda$  и  $a=2\lambda$ . На рисунках построены главные сечения пространственной диаграммы, проходящие через направление максимума. Под направлением максимума здесь понимается направление главного максимума диаграммы при облучении АПП чисто цилиндрической волной. Значение  $\chi=0^\circ$  соответствует верти-

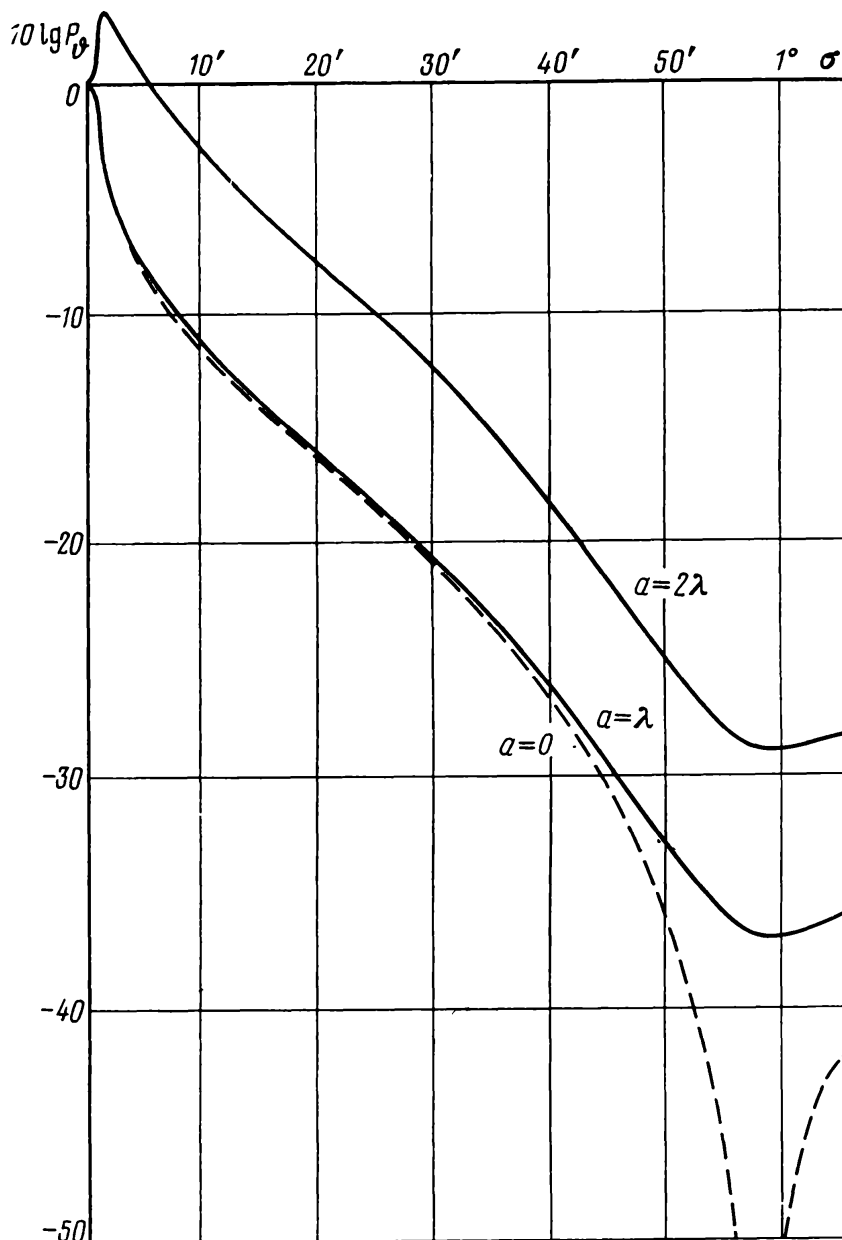


Рис. 10 ( $\delta=85^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_2$ ;  $\chi=0^\circ$ )

кальному (меридиональному) сечению, а сечение  $\chi=90^\circ$  ортогонально сечению  $\chi=0^\circ$  и проходит через направление максимума. На рисунках приведена в логарифмическом масштабе зависимость квадрата основной составляющей поля  $P_0$  от угла  $\sigma$ , отсчитываемого в каждом сечении от направления максимума. На каждом рисунке приведена половина диаграммы, так как она симметрична. Зависимость относительного кнд от ширины облучателя приведена на рис. 12. На рис. 13 приведены диаграммы направленности АПП на паразитной поляризации для угла места  $\delta=85^\circ$  при  $h/\lambda=400$ . Из приведенных графиков можно сделать следующие выводы.

1. То обстоятельство, что в вертикальной плоскости зеркало расположе-



но в зоне Френеля облучателя, практически не сказывается на форме вертикального сечения диаграммы направленности. Главную роль в формировании пространственной диаграммы АПП играет амплитудно-фазовое распределение поля в горизонтальной плоскости. Это объясняется тем, что в антенне переменного профиля зеркало имеет вид узкой ленты (отношение его горизонтального размера к вертикальному не менее 20) и

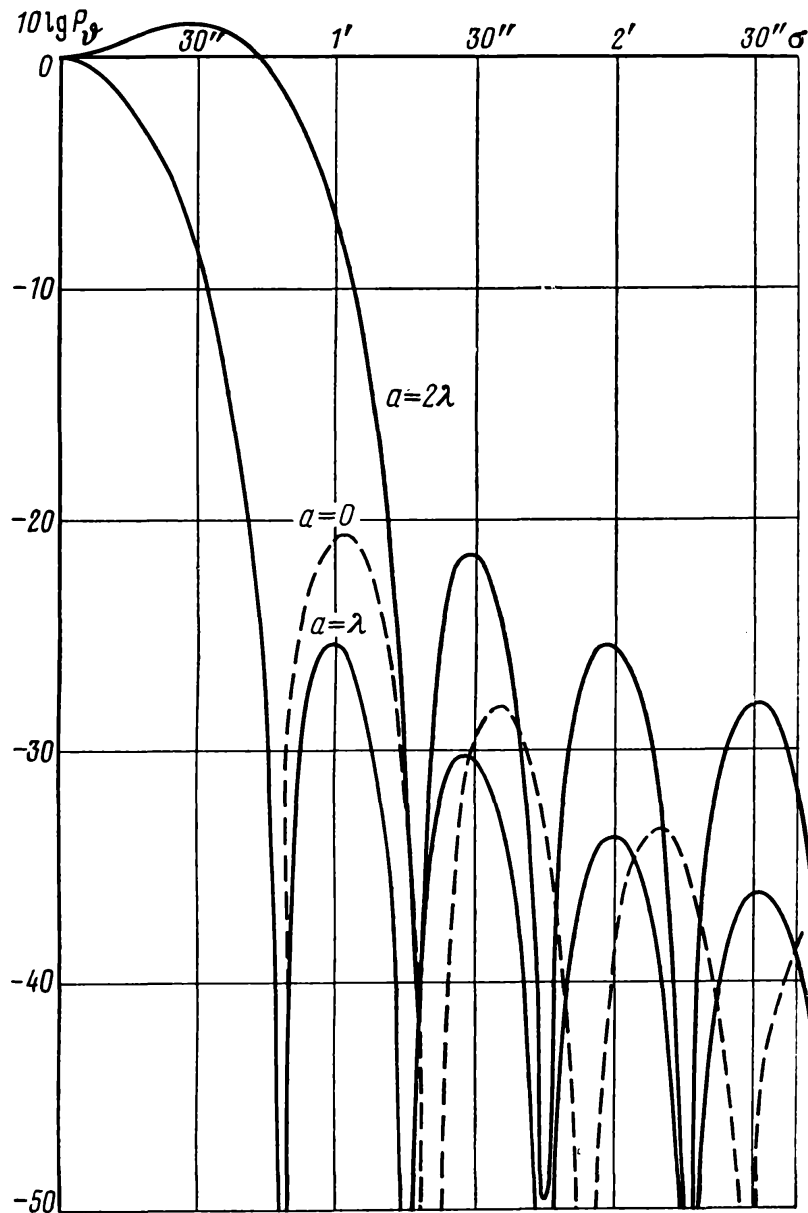
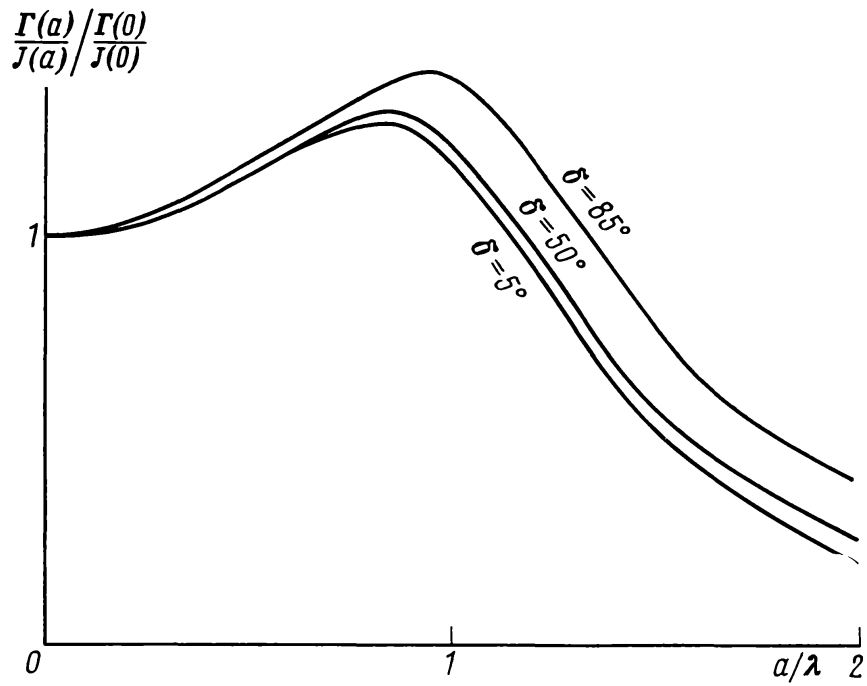
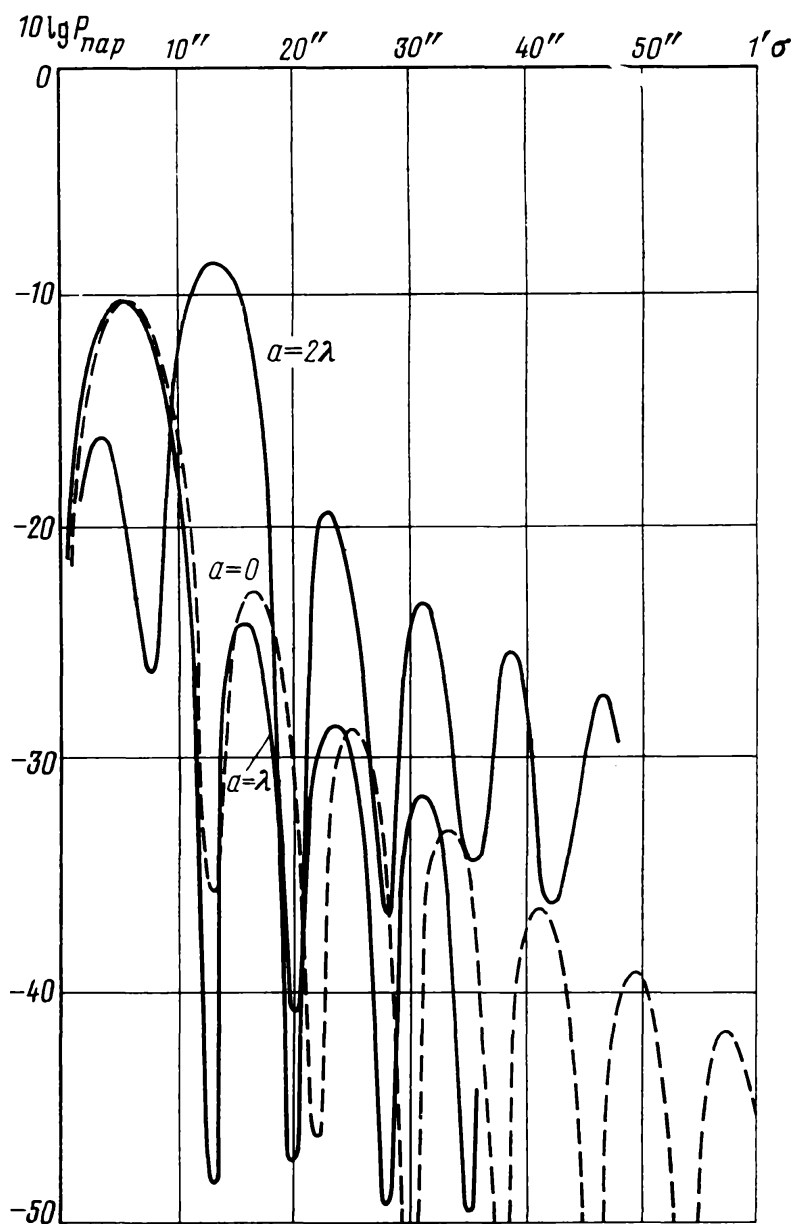


Рис. 11 ( $\delta=85^\circ$ ;  $\lambda=\lambda_2$ ;  $\chi=90^\circ$ )

форма вертикального сечения диаграммы определяется в основном горизонтальным размером зеркала, точнее, его глубиной, соизмеримой с горизонтальным размером. Действительно, при расчете вертикального сечения диаграммы можно было бы спроектировать центры излучателей (щитов) с соответствующими амплитудами на вертикальную плоскость. В результате мы пришли бы к эквивалентной антенне бегущей волны длиной, равной глубине зеркала, и с несимметричным спадающим амплитудным распределением. При этом длина эквивалентной антенны увеличивается по мере увеличения угла места  $\delta$ , что влечет за собой сужение вертикальной диаграммы.

2. На форму диаграммы направленности и кнд антенны существенное влияние оказывают условия облучения зеркала, т. е. диаграмма направлен-

Рис. 12 ( $\lambda = \lambda_2$ )Рис. 13 ( $\delta = 85^\circ$ ;  $\lambda = \lambda_1$ ;  $\chi = 90^\circ$ )

ности облучателя в горизонтальной плоскости. Оптимальный в отношении КНД размер облучателя равен примерно одной волне (см. рис. 12). В этом случае находящаяся в пределах угла  $\pm 60^\circ$  рабочая часть зеркала (щитов) облучается только главным лепестком диаграммы первичного источника.

В случае увеличения ширины облучателя его диаграмма сужается и рабочий участок зеркала облучается как главным, так и боковыми лепестками, что приводит к расфазировке поля на зеркале, т. е. к большим искажениям пространственной диаграммы направленности антенны (см., например, рис. 6 и 10) и резкому падению КНД (см. рис. 12). При этом примерно одинаково искажаются как горизонтальные, так и вертикальные ее сечения.

3. Из рис. 13 видно, что при увеличении ширины облучателя от одной до двух длин волн увеличивается примерно на 8–10 дБ уровень поля, излучаемого на паразитной поляризации. На рисунке приведены данные для угла места  $\delta = 85^\circ$ . При уменьшении угла места уровень паразитной поляризации вообще уменьшается (так, при  $\delta = 5^\circ$  он не превышает –35 дБ), однако характер зависимости его от ширины облучателя (ленты) остается тем же.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина, О. Н. Шиврис, Изв. ГАО, 1960, 21, вып. 5, № 164, стр. 3.
2. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Ю. Н. Парийский, Н. А. Есепкина, Радиотелескоп «РАТАН-600», Изв. ГАО, 1972, № 188.
3. Я. М. Жилейкин, Комплекс стандартных программ для расчета характеристик диаграммы направленности антенн переменного профиля, ВЦ МГУ, Ротапринт. Серия «Стандартные программы решения типовых математических задач на машине М-20», вып. 41, 1970.
4. Н. С. Бахвалов, Л. Г. Васильева, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1968, 8, 1.

Поступила в редакцию  
23 XI 1979

## РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXV

Декабрь 1980

Вып. 12

МОСКВА

УДК 621.372.8.001.24

ВОЗБУЖДЕНИЕ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ШАРА  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И МАГНИТНЫМИ ТОКАМИ*Я. Н. Фельд, С. Я. Фельд*

Рассмотрена задача о возбуждении неоднородного магнитоэлектрического шара произвольной системой токов. Получены выражения для поля в виде разложений по волнам дискретного и непрерывного спектров в форме, характерной для теории возбуждения волноводов. Решение найдено методом вариации постоянных с выделенной меридиональной переменной  $\vartheta$ .

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье «метод вариации постоянных», развитый в [1–3] для решения задач возбуждения тел произвольной системой токов, обобщается на случай, когда необходимо учитывать наличие волн непрерывного спектра. Рассмотрим это на примере магнитоэлектрического шара радиуса  $a$  с комплексными параметрами  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$ . Параметры внешней среды обозначим через  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ . Задача сводится к интегрированию уравнений Максвелла с заданными электрическими  $\mathbf{J}$  и магнитными  $\mathbf{J}^m$  токами:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{ik}{\rho} \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\rho \mathbf{H} - \mathbf{J}^m$$

при соответствующих краевых условиях на поверхности шара и на бесконечности\*.

В (1)  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ ,  $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$  и зависимость от времени взята в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

Всюду ниже используется сферическая система координат  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  с центром в центре шара. Внутри шара  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $\rho$  являются заданными функциями одной координаты  $r$  и снабжаются индексом 1. При  $r > a$  среда однородна, а указанные параметры снабжаются индексом 0.

Решение рассматриваемой задачи будем строить при помощи разложений по парциальным волнам соответствующих спектров с коэффициента-

\* Непрерывность тангенциальных составляющих векторов поля при  $r=a$  и принцип излучения на бесконечности.

ми, зависящими от одной «выделенной» \* координаты  $\vartheta$ . Задачи, близкие к сформулированной, уже изучались [4, 5] другими методами. Отличие в постановке настоящей задачи заключается в следующем.

1. Рассматривается возбуждение произвольным распределением трехкомпонентных электрических и магнитных токов; в [4] рассматривается однокомпонентный, а в [5] — двухкомпонентный электрический ток.

2. В отличие от [4, 5] рассматриваются поля, зависящие от азимутального угла.

Наконец, что является с нашей точки зрения наиболее существенным, решение получено в стандартной, для теории возбуждения волноводов, форме.

### 1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА

Эти волны выражаются при помощи потенциала типа Дебая по формулам \*\* [6]

$$(2) \quad \begin{cases} E_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \omega^2 \mu V; & H_r = 0; \\ E_\vartheta = \frac{1}{r\varepsilon} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \vartheta}; & H_\vartheta = -\frac{i\omega}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}; \\ E_\varphi = \frac{1}{r\varepsilon \sin \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}; & H_\varphi = \frac{i\omega}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению

$$(3) \quad \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right\} + k^2 V = 0.$$

Предполагается, что (3) выполняется в области  $0 < \vartheta < \pi$ , а источники парциальной волны находятся на лучах  $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi$ . Краевые условия для парциальной волны сохраняются такими же, как и для искомого поля.

Интегрируя (3) методом разделения переменных, найдем

$$(4) \quad V = R_\nu(r) P_\nu^m(\pm \cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $P_\nu^m$  — присоединенная функция Лежандра, а  $R_\nu(r)$  удовлетворяет уравнению

$$(5) \quad \varepsilon \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{dR_\nu}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} \right) R_\nu = 0,$$

где  $\nu(\nu+1)$  — постоянная разделения.

При  $r > a$ , когда  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$  и  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ , в качестве  $R_\nu$  выбирается частное решение уравнения (5), обеспечивающее выполнение принципа излучения, т. е.

$$(6) \quad R_\nu(r) = \zeta_\nu(k_0 r) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} k_0 r H_{\nu+1/2}^{(1)}(k_0 r).$$

При  $r < a$ , когда  $\varepsilon = \varepsilon_1(r)$ ,  $\mu = \mu_1(r)$ , выбирается решение (5), обеспечивающее непрерывность тангенциальных составляющих векторов поля на сфе-

\* «Преимущественной» по терминологии работы [2].

\*\* Отличие в знаке у  $i$  связано с тем, что в [6] зависимость от времени взята в виде  $\exp(i\omega t)$ .

ре  $r=a$  \*. Учитывая (2) и (4), легко убедиться, что этому удовлетворяет решение с краевыми условиями типа Коши:

$$(7) \quad R_\nu(a-0) = R_\nu(a+0), \quad \frac{1}{\varepsilon_1(a)} R'_\nu(a-0) = \frac{1}{\varepsilon_0} R'_\nu(a+0).$$

Фактическое нахождение  $R_\nu(r)$  в области  $r < a$  зависит от вида заданных функций  $\varepsilon_1(r)$  и  $\mu_1(r)$ , но всегда может быть проведено, например, методом ВКБ при медленно меняющихся  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ . Общий интеграл уравнения (5) при  $r < a$  запишем в виде

$$(8) \quad R_\nu(r) = A_\nu y_\nu^{(1)}(r) + B_\nu y_\nu^{(2)}(r),$$

где  $y_\nu^{(1)}(r)$  и  $y_\nu^{(2)}(r)$  — два частных линейно независимых решения (5), которые ведут себя при  $r \rightarrow 0$  как \*\*

$$(9) \quad y_\nu^{(1)}(r) = r^{1+\nu} + O(r^{2+\nu}) \quad \text{и} \quad y_\nu^{(2)}(r) = r^{-\nu} + O(r^{1-\nu}).$$

а. Волны непрерывного спектра. Для этих волн постоянная разделения  $\nu$  выбирается так:

$$(10) \quad \nu = i\sigma - \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \sigma < \infty,$$

а постоянные  $A_\nu$  и  $B_\nu$  в (8) находятся из условий (7). Действительно, подставляя (8) и (6) в (7) и разрешая полученные равенства относительно  $A_\nu$  и  $B_\nu$ , найдем

$$(11) \quad \begin{aligned} A_\nu &= \frac{i}{2\sigma} \left\{ \frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(a)} \zeta_\nu y_\nu^{(2)'} - \frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_0} k_0 \zeta_\nu' y_\nu^{(2)} \right\}; \\ B_\nu &= \frac{i}{2\sigma} \left\{ \frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_0} k_0 \zeta_\nu' y_\nu^{(1)} - \frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(a)} \zeta_\nu y_\nu^{(1)'} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже

$$\begin{aligned} y_\nu^{(m)} &\equiv y_\nu^{(m)}(a), \quad y_\nu^{(m)'} \equiv y_\nu^{(m)'}(a), \quad m=1, 2; \\ \zeta_\nu &\equiv \zeta_\nu(k_0 a), \quad \zeta_\nu' \equiv \zeta_\nu'(k_0 a). \end{aligned}$$

Для значений  $A_\nu$  и  $B_\nu$ , определяемых (11), непрерывность соответствующих компонент поля при  $r=a$  обеспечивается для любых  $\sigma \geq 0$ . Отрицательные значения  $\sigma$  не рассматриваются, так как они не дают новых парциальных волн.

Выбор  $\nu$  в виде (10) обеспечивает наименьшую возможную особенность для парциальных волн в точке  $r=0$ ; при этом выполняется требование конечности энергии искомого поля в этой точке (см. ниже).

Таким образом, непрерывный спектр значений  $\nu$ , а следовательно и соответствующих волн, определяется выражением (10).

б. Волны дискретного спектра. Волны дискретного типа получим, положив в (8)  $B_\nu=0$ . Тогда из (11) найдем

$$(12) \quad \frac{\varepsilon_1(a)}{\varepsilon_0} k_0 \zeta_\nu' y_\nu^{(1)} = \zeta_\nu y_\nu^{(1)'}; \quad A_\nu = \zeta_\nu / y_\nu^{(1)}.$$

\* И на сферах  $r=a_n < a$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ), если функции  $\varepsilon_1(r)$ ,  $\mu_1(r)$  терпят разрыв при  $r=a_n$ .

\*\* Предполагается, что  $\varepsilon_1'(r)/\varepsilon_1(r) = O(1)$ ;  $\mu_1'(r)/\mu_1(r) = O(1)$ ;  $\varepsilon_1(r)\mu_1(r) = O(1)$  при  $r \rightarrow 0$ .

Первое из этих равенств определяет дискретную последовательность допустимых  $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots$  (дискретный спектр), которому соответствуют парциальные волны (2), (4) с

$$(13) \quad R_\nu(r) = \begin{cases} \xi_\nu(k_0 r) & \text{при } r > a, \\ \frac{\xi_\nu}{y_\nu^{(1)}} y_\nu^{(1)}(r) & \text{при } r < a. \end{cases}$$

Нас будут интересовать корни (12) с  $\text{Re } \nu > 0$ .

## 2. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ МАГНИТНОГО ТИПА

Вследствие инвариантности уравнений (1) и рассматриваемых крайних условий относительно перестановки

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}^\mu, \quad \mathbf{J}^\mu \rightarrow -\mathbf{J}, \\ \varepsilon \rightarrow \mu, \quad \mu \rightarrow \varepsilon \quad (k \rightarrow k, \quad \rho \rightarrow 1/\rho) \end{aligned}$$

формулы для парциальных волн магнитного типа могут быть получены из соответствующих формул для волн электрического типа при помощи указанной перестановки. Выпишем их, сохранив для них те же номера с добавлением буквы  $\alpha$ :

$$(2\alpha) \quad \begin{cases} E_r = 0; & H_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \omega^2 \varepsilon V; \\ E_\vartheta = \frac{i\omega}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}; & H_\vartheta = \frac{1}{r\mu} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \vartheta}; \\ E_\varphi = -\frac{i\omega}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}; & H_\varphi = \frac{1}{r\mu \sin \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}; \end{cases}$$

$$(3\alpha) \quad \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right\} + k^2 V = 0;$$

$$(5\alpha) \quad \mu \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\mu} \frac{dR_\nu}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} \right) R_\nu = 0;$$

$$(7\alpha) \quad R_\nu(a-0) = R_\nu(a+0), \quad \frac{1}{\mu_1(a)} R_\nu'(a-0) = \frac{1}{\mu_0} R_\nu'(a+0);$$

$$(11\alpha) \quad A_\nu = \frac{i}{2\sigma} \left\{ \frac{\mu_1(0)}{\mu_1(a)} \xi_\nu y_\nu^{(2)'} - \frac{\mu_1(0)}{\mu_0} k_0 \xi_\nu' y_\nu^{(2)} \right\};$$

$$B_\nu = \frac{i}{2\sigma} \left\{ \frac{\mu_1(0)}{\mu_0} k_0 \xi_\nu' y_\nu^{(1)} - \frac{\mu_1(0)}{\mu_1(a)} \xi_\nu y_\nu^{(1)'} \right\};$$

$$(12\alpha) \quad \frac{\mu_1(a)}{\mu_0} k_0 \xi_\nu' y_\nu^{(1)} = \xi_\nu y_\nu^{(1)'}; \quad A_\nu = \xi_\nu / y_\nu^{(1)}.$$

Все остальные формулы § 1 сохраняются без изменений.

### 3. НУМЕРАЦИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН И ИХ ИСТОЧНИКИ

Введенные при помощи формул (2), (4) и (2а), (4) электрические и магнитные волны непрерывного спектра будем обозначать буквами  $E_\sigma^p, H_\sigma^p$ , где верхний дискретный индекс нумерует волны при фиксированном значении нижнего индекса  $\sigma$ , пробегающего луч  $[0, \infty)$ . Поскольку существует счетное множество электрических и магнитных волн при фиксированном  $\sigma$ , то их можно перенумеровать при помощи одного индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения, кроме нуля. Сделаем это при единственном условии, чтобы волны  $E_\sigma^p, H_\sigma^p$  и  $E_\sigma^{-p}, H_\sigma^{-p}$  отличались только знаком у  $\cos \vartheta$  в выражении для потенциала (4). При этом индексу  $p > 0$  пусть соответствует знак «-» и наоборот. Таким образом, волны, отличающиеся только знаком у  $p$ , однотипны, но распространяются в противоположных направлениях по  $\vartheta$ .

Эти волны удовлетворяют принципу излучения (см. (4), (6)) и имеют источники, расположенные на луче  $\vartheta=0$  при  $p > 0$  и на луче  $\vartheta=\pi$  при  $p < 0$ . Вне этих лучей они удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла и краевым условиям рассматриваемой задачи при  $r=a$ . Отметим, что в отличие от волн непрерывного спектра, введенных в работах [7, 8], у которых источники находятся на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) и нарушается принцип излучения (для отдельной волны), в нашем случае источники расположены вдоль луча и принцип излучения выполняется для каждой волны спектра.

Перейдем к нумерации волн дискретного спектра. Уравнения (12) и (12а) имеют счетное число корней  $\nu$ , поэтому, учитывая (4), убеждаемся, что существует только счетное число парциальных волн электрического и магнитного типов. Перенумеруем их при помощи одного (верхнего) индекса, пробегающего все целочисленные значения, кроме нуля. Как и выше, будем полагать, что волны дискретного спектра  $E^p, H^p$  и  $E^{-p}, H^{-p}$  отличаются только знаком у  $\cos \vartheta$  в выражении для потенциала (4).

Источники волн дискретного спектра расположены так же, как и непрерывного, т. е. при  $p > 0$  на луче  $\vartheta=0$ , а при  $p < 0$  — на луче  $\vartheta=\pi$ . Подчеркнем еще раз, что волны непрерывного и дискретного спектров строятся так, чтобы внутри интервала изменения выделенной переменной  $\vartheta$  они удовлетворяли однородным уравнениям Максвелла и на одном конце интервала выполнялись естественные краевые условия задачи для волн с  $p > 0$ , а на другом — с  $p < 0$ . На противоположном конце интервала, для каждой волны, эти условия нарушаются, и там располагаются ее источники.

### 4. ОРТОНОРМИРОВКА ВОЛН НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРОВ

Покажем теперь, что введенные выше волны удовлетворяют следующим условиям ортонормировки:

$$(15) \quad \int_{s(\vartheta)} [E_\sigma^p, H_\sigma^q] ds = D_\sigma(p, q) \delta_{|p||q|} \delta(\sigma - \sigma'),$$

$$(16) \quad \int_{s(\vartheta)} [E_\sigma^p, H^q] ds = \int_{s(\vartheta)} [E^q, H_\sigma^p] ds = 0,$$

$$(17) \quad \int_{s(\vartheta)} [E^p, H^q] ds = D(p, q) \delta_{|p||q|},$$

где  $s(\vartheta)$  — поверхность конуса:  $\vartheta = \text{const}$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $\delta_{|p||q|}$  — символ Кронекера, а  $\delta(\sigma)$  — дельта-функция Дирака. Как следует из (15) и (17),



значения величин  $D_\sigma(p, q)$  и  $D(p, q)$  существенны лишь при  $q = \pm p$ . Они определяются этими же формулами, из которых находим

$$D_\sigma(p, \pm p) = \int_0^\infty \int_{s(\vartheta)} [E_\sigma^p, H_\sigma^{\pm p}] ds d\sigma';$$

(18)

$$D(p, \pm p) = \int_{s(\vartheta)} [E^p, H^{\pm p}] ds.$$

Отсюда видно, что  $D_\sigma$  и  $D$  зависят также от  $\vartheta$ , что явно не указано.

Докажем прежде всего (15)–(17) для случая, когда индексам  $p$  и  $q$  соответствуют волны электрического типа. Начнем с (15). Используя (2), (4) и (5), найдем \*

$$(19) \quad \int_{s(\vartheta)} [E_\sigma^p, H_\sigma^q] ds = i\pi\omega \left( \sigma^2 + \frac{1}{4} \right) \sin \vartheta \times \\ \times P_\nu^{m_p}(\pm \cos \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} P_\nu^{m_q}(\pm \cos \vartheta) I \delta_{|p||q|},$$

где

$$I = \int_0^\infty R_\nu R_{\nu'} \frac{dr}{r^2 \varepsilon};$$

$m_p$  — значение  $m$  для  $p$ -й волны. Последний интеграл, как легко показать, учитывая (5) и (7), равен

$$(20) \quad I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_\nu(r) R_{\nu'}(r) - R_{\nu'}(r) R_\nu(r)}{(\nu - \nu')(\nu + \nu' + 1) \varepsilon_1(r)}.$$

Принимая во внимание (8) и (9), получим после элементарных преобразований

$$(21) \quad I = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_1(0)} \left\{ (A_\nu B_{\nu'} - A_\nu B_{\nu'}) \frac{\cos \xi(\sigma - \sigma')}{i(\sigma - \sigma')} + \right. \\ \left. + (A_\nu B_\nu + A_\nu B_{\nu'}) \frac{\sin \xi(\sigma - \sigma')}{\sigma - \sigma'} + (B_\nu B_{\nu'} - A_\nu A_{\nu'}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos \xi(\sigma + \sigma')}{i(\sigma + \sigma')} + (B_\nu B_{\nu'} + A_\nu A_{\nu'}) \frac{\sin \xi(\sigma + \sigma')}{\sigma + \sigma'} \right\}$$

где  $\xi = -\ln r$ .

На основании соображений, аналогичных, например, приведенным в [7], стр. 360, можно положить

$$(21a) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin \xi(\sigma - \sigma')}{\sigma - \sigma'} = \pi \delta(\sigma - \sigma'), \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin \xi(\sigma + \sigma')}{\sigma + \sigma'} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \cos \xi(\sigma \pm \sigma') = 0.$$

Эти символические равенства имеют следующий смысл. Если помножить их на достаточно гладкую функцию от  $\sigma'$  и проинтегрировать по  $\sigma'$  от нуля

\* При  $m_p = m_q = 0$  правые части (19) и (22) следует умножить на 2.

до  $\infty$ , а затем перейти к пределу при  $\xi \rightarrow \infty$ , то получим тождества. Учитывая их, перепишем (21) так \*:

$$I = \frac{2\pi}{\varepsilon_1(0)} A_\nu B_\nu \delta(\sigma - \sigma').$$

Из этого выражения, с учетом (19), вытекает справедливость (15) и, в частности, формула

$$(22) \quad D_\sigma(p, q) = \frac{2\pi^2 i \omega}{\varepsilon_1(0)} \left( \sigma^2 + \frac{1}{4} \right) A_\nu B_\nu \sin \vartheta \times \\ \times P_\nu^{m_p}(\pm \cos \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} P_\nu^{m_q}(\pm \cos \vartheta).$$

Здесь при  $p > 0$  ( $q > 0$ ) следует брать у  $\cos \vartheta$  в аргументе соответствующей функции знак «-», а при  $p < 0$  ( $q < 0$ ) — знак «+». Докажем теперь соотношение (16). Для первого интеграла (16) также справедливы выражения типа (19), (20). Отличие заключается лишь в том, что в них следует заменить  $\nu'$  на  $\nu_q$ , где  $\nu_q$  — корень уравнения (12), соответствующий  $q$ -й волне дискретного спектра. Формула (20) при этом запишется так:

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_\nu(r) R'_{\nu_q}(r) - R_{\nu_q}(r) R'_\nu(r)}{(\nu - \nu_q)(\nu + \nu_q + 1) \varepsilon_1(r)}, \quad \text{Re } \nu_q > 0.$$

Поскольку  $R_\nu(r) = O(r^{1/2})$  (см. (8)–(10)), а  $R_{\nu_q} = O(r^{1+\text{Re } \nu_q})$  (см. (13), (9)) при  $r \rightarrow 0$ , то  $I = 0$  и, следовательно, обращается в нуль (см. (19)) первый интеграл (16). Аналогично доказывается равенство нулю второго интеграла (16). Перейдем к доказательству (17). Входящий туда интеграл по-прежнему выражается формулами типа (19), (20) с заменой в них  $\nu$  на  $\nu_p$  и  $\nu'$  на  $\nu_q$ . При этом если  $\nu_p \neq \nu_q$ , то  $I = 0$  и  $p \neq \pm q$ . Если  $\nu_p = \nu_q$  и  $p \neq \pm q$ , то  $I \neq 0$  и интеграл в (17) обращается в нуль благодаря символу  $\delta_{|p||q|}$ , стоящему в (19). Для волн магнитного типа справедливость (15)–(17) следует из доказанного выше благодаря принципу перестановочной двойственности (14). В формуле (22) при этом следует заменить  $\varepsilon_1(0)$  на  $\mu_1(0)$ , а  $A_\nu$  и  $B_\nu$  определять по формулам (11а).

Остается рассмотреть интегралы в (15)–(17) для случая, когда волна  $p$  — электрического, а  $q$  — магнитного типа. При  $m_p \neq m_q$  эти интегралы равны нулю вследствие ортогональности азимутальных зависимостей волн на интервале  $(0, 2\pi)$ . Поэтому вычислим их для  $m_p = m_q$ . При фиксированных  $m_p = m_q$ ,  $\nu(\nu_p)$ ,  $\nu'(\nu_q)$  следует различать четыре возможных случая (см. (4)). Два из них дают нуль из-за ортогональности  $\sin m\vartheta$  и  $\cos m\vartheta$ , а для остальных найдем, используя (2), (4), (2а),

$$(23) \quad \int_{s(\vartheta)} [E^p, H^q] ds = \pm \pi m_p P_\nu^{m_p}(\pm \cos \vartheta) P_\nu^{m_q}(\pm \cos \vartheta) \times \\ \times \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_{\nu'}(r) R_{\nu'}(r)}{\varepsilon_1(r) \mu_1(r)}.$$

Эта формула справедлива для трех случаев (15)–(17) комбинирования волн различных спектров. Так, если  $p$ -волна непрерывного спектра, то следует заменить  $E^p$  на  $E_{\sigma^p}$ , а если дискретного, то  $\nu$  на  $\nu_p$ . Аналогично для  $q$ -волны —  $H^q$  на  $H_{\sigma^q}$  или  $\nu'$  на  $\nu_q$ . Предел в правой части (23) равен

\* В коэффициенте при дельта-функции положено  $\sigma' = \sigma$ , так как носителем  $\delta$ -функции служит одна эта точка.

нулю, когда  $p$  и  $q$  — волны дискретного спектра или одна из них дискретного, а вторая непрерывного. Это следует из формул  $R_{\nu}'(r) = O(r^{-1/2})$ ,  $R_{\nu p}'(r) = O(r^{\text{Re } \nu_p})$  при  $r \rightarrow 0$ , поскольку  $\text{Re } \nu_p > 1/2$ . Когда  $p$  и  $q$  — волны непрерывного спектра, нужно опять положить (см. (8), (9))

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{\nu}'(r) = (1 + \nu) A_{\nu} \lim_{r \rightarrow 0} r^{i\sigma - 1/2} - \nu B_{\nu} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-i\sigma - 1/2} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

и аналогично для  $R_{\nu p}'(r)$ . Это символическое равенство имеет тот же смысл, что и (21а). Наконец, если в (15)–(17)  $p$  — волна магнитного типа, а  $q$  — электрического, то справедливость этих равенств очевидна. На этом доказательство соотношений (15)–(17) закончено.

### 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ [1–3]

Будем искать решение (1) в виде

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(\vartheta) \mathbf{E}^p + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \gamma_p(\vartheta; \sigma) \mathbf{E}_{\sigma}^p d\sigma + \mathbf{F}, \\ \mathbf{H} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(\vartheta) \mathbf{H}^p + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \gamma_p(\vartheta; \sigma) \mathbf{H}_{\sigma}^p d\sigma + \mathbf{f}. \end{aligned} \right.$$

Здесь  $C_p(\vartheta)$  и  $\gamma_p(\vartheta; \sigma)$  — коэффициенты разложения по волнам дискретного и непрерывного спектров, а  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{f}$  — дополнительные члены [1, 2]. Учитывая, что парциальные волны удовлетворяют при  $0 < \vartheta < \pi$  однородным уравнениям Максвелла, найдем, подставляя (24) в (1),

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{H}^p] + \sum_p \int [\nabla \gamma_p, \mathbf{H}_{\sigma}^p] d\sigma + \text{rot } \mathbf{f} &= \frac{k}{i\rho} \mathbf{F} + \mathbf{J}, \\ \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{E}^p] + \sum_p \int [\nabla \gamma_p, \mathbf{E}_{\sigma}^p] d\sigma + \text{rot } \mathbf{F} &= ik\rho \mathbf{f} - \mathbf{J}^{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Число неизвестных здесь больше, чем может быть определено. Поэтому положим

$$(26) \quad F_r = F_{\varphi} = f_r = f_{\varphi} = 0.$$

При этом система (25) расщепляется на две:

$$(27) \quad F_{\vartheta} = \frac{\rho}{ik} J_{\vartheta}, \quad f_{\vartheta} = \frac{1}{ik\rho} J_{\vartheta}^{\mu}$$

и

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{H}^p] + \sum_p \int [\nabla \gamma_p, \mathbf{H}_{\sigma}^p] d\sigma + \text{rot } \mathbf{f} &= \mathbf{J}_{\perp}, \\ \sum_p [\nabla C_p, \mathbf{E}^p] + \sum_p \int [\nabla \gamma_p, \mathbf{E}_{\sigma}^p] d\sigma + \text{rot } \mathbf{F} &= -\mathbf{J}_{\perp}^{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Здесь, например,  $J_{\perp}$  — поперечная, относительно орта  $i_{\vartheta}$ , часть вектора  $J$ . Умножим первое равенство (28) на  $rE_{\sigma}^{-q}$ , второе — на  $rH_{\sigma}^{-q}$  и проинтегрируем по  $s(\vartheta)$  ( $0 < \vartheta < \pi$ ). Тогда, учитывая (15) — (17), найдем

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{d\gamma_q}{d\vartheta} D_{\sigma}(-q, q) + \frac{d\gamma_{-q}}{d\vartheta} D_{\sigma}(-q, -q) = \int_{s(\vartheta)} E_{\sigma}^{-q} (\text{rot } f - J_{\perp}) r ds, \\ \frac{d\gamma_q}{d\vartheta} D_{\sigma}(q, -q) + \frac{d\gamma_{-q}}{d\vartheta} D_{\sigma}(-q, -q) = - \int_{s(\vartheta)} H_{\sigma}^{-q} (\text{rot } F + J_{\perp}^{\mu}) r ds. \end{cases}$$

В этих равенствах опущен штрих у  $\sigma$ . Разрешая (29) относительно  $d\gamma_q/d\vartheta$ , получим

$$(30) \quad \frac{d\gamma_q}{d\vartheta} = \frac{\int_{s(\vartheta)} \{E_{\sigma}^{-q} (\text{rot } f - J_{\perp}) + H_{\sigma}^{-q} (\text{rot } F + J_{\perp}^{\mu})\} r ds}{D_{\sigma}(-q, q) - D_{\sigma}(q, -q)}.$$

Используя легко доказываемые соотношения типа

$$\begin{aligned} \int_{s(\vartheta)} E^q \text{rot } f \cdot r ds &= \int_{s(\vartheta)} J_{\vartheta}^{\mu} H_{\vartheta}^q r ds; \\ \int_{s(\vartheta)} H^q \text{rot } F \cdot r ds &= - \int_{s(\vartheta)} J_{\vartheta} E_{\vartheta}^q r ds \end{aligned}$$

и формулы (18), придадим выражению (30) вид

$$\frac{d\gamma_q}{d\vartheta} = \frac{\int_{s(\vartheta)} (J E_{\sigma}^{-q} - J^{\mu} H_{\sigma}^{-q}) r ds}{\int_0^{\infty} \int_{s(\vartheta)} \{[E_{\sigma}^q, H_{\sigma'}^{-q}] - [E_{\sigma'}^{-q}, H_{\sigma}^q]\} ds d\sigma'}.$$

Из равенства (19), выражения для вронскиана присоединенных функций Лежандра и принципа (14) следует, что знаменатель не зависит от  $\vartheta$  (см. ниже). Поэтому, интегрируя предыдущее равенство, найдем

$$(31) \quad \gamma_q(\vartheta; \sigma) = \frac{\pm \int_{\vartheta^{\pm}} (J E_{\sigma}^{-q} - J^{\mu} H_{\sigma}^{-q}) dv}{\int_0^{\infty} \int_{s(\vartheta)} \{[E_{\sigma}^q, H_{\sigma'}^{-q}] - [E_{\sigma'}^{-q}, H_{\sigma}^q]\} ds d\sigma'}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Умножая первое равенство (28) на  $rE^{-q}$ , второе — на  $rH^{-q}$  и интегрируя по  $s(\vartheta)$ , получим, аналогично предыдущему,

$$(32) \quad C_q(\vartheta) = \frac{\pm \int_{\vartheta^{\pm}} (J E^{-q} - J^{\mu} H^{-q}) dv}{\int_{s(\vartheta)} \{[E^q, H^{-q}] - [E^{-q}, H^q]\} ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

В формулах (31), (32) знаки «+» берутся, когда  $q > 0$ , а знаки «-», когда  $q < 0$ ;  $v^+$  — объем, ограниченный поверхностями  $s(\alpha)$  и  $s(\vartheta)$ ,  $v^-$  — объем, ограниченный  $s(\vartheta)$  и  $s(\beta)$ ; предполагается, что токи находятся в области  $\alpha < \vartheta < \beta$ , на конечном расстоянии от  $r=0$ . Приведем еще выражения для расчета знаменателей в (31) и (32). Если волна  $q$  — электрического типа, то они равны соответственно \*

$$(31a) \quad -\frac{q}{|q|} \frac{4\pi^2 i \omega}{\epsilon_1(0)} \left( \sigma^2 + \frac{1}{4} \right) A_\nu B_\nu P_\nu^m(0) P_\nu^{m'}(0);$$

$$(32a) \quad \frac{q}{|q|} 2\pi i \omega \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1} P_\nu^m(0) P_\nu^{m'}(0) (\xi_\nu)^2 \times \\ \times \frac{d}{d\nu} \left( \frac{1}{\epsilon_1(a)} \frac{y_\nu}{y_\nu^{(1)}} - \frac{k_0}{\epsilon_0} \frac{\xi_\nu'}{\xi_\nu} \right) \Big|_{\nu=\nu_q}$$

При  $m=0$  эти выражения нужно умножить на 2. Если волна  $q$  — магнитная, в (31a) и (32a) следует всюду заменить  $\epsilon$  на  $\mu$ .

Волны непрерывного спектра имеют при  $r=0$  особенность типа (см. (2), (2a), (4), (8))  $E, H = O(r^{-1/2 \pm i\sigma})$ , где  $\sigma \geq 0$ . Однако легко видеть, что решение (24) удовлетворяет условию Мейкснера при  $r=0$ , так как на основании теоремы Римана — Лебега интегралы в (24) ведут себя как  $o(r^{-1/2})$  при  $r \rightarrow 0$ .

Итак, формулы (24) совместно с (31), (32) и (26), (27) дают решение задачи о возбуждении неоднородного (по координате  $r$ ) шара произвольной системой токов.

Несложный расчет для случая однородного шара, возбуждаемого радиальным электрическим диполем, приводит к выражениям, совпадающим с известным решением [9], стр. 9, формула (6).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1976, 21, 12, 2615.
2. Я. Н. Фельд, С. Я. Фельд, Радиотехника и электроника, 1977, 22, 9, 1829.
3. Я. Н. Фельд, С. Я. Фельд, Радиотехника и электроника, 1978, 23, 10, 2212.
4. П. Е. Краснушкин, Докл. АН СССР, 1961, 138, 4, 813.
5. П. Е. Краснушкин, Докл. АН СССР, 1969, 185, 6, 1262.
6. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1979, 247, 6, 1359.
7. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, Изд. Советское радио, 1966.
8. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, Изд. Наука, 1969.
9. Г. И. Макаров, А. В. Рыжков, Проблемы дифракции и распространения волн, XV, Изд. Ленинградск. ун-та, 1977.

Поступила в редакцию  
3 III 1980

\* При выводе (32a) предполагалось, что  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  непрерывны внутри шара.

РиЭ.— 1981.— Т.26, №1.— С.170-172.

УДК 537.874.6

## К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТЯХ С НЕОДНОРОДНЫМ АДМИТАНСОМ

*И. Н. Фельд*

В настоящем сообщении метод, развитый в [1, 2] для решения задач дифракции волн на поверхностях с неоднородным адмитансом, несколько упрощается. Это упрощение связано с тем, что вместо вторичного — дифрагированного поля ищется полное поле. При этом, как будет показано ниже, в большинстве практических задач удается избежать вычисления двух поверхностных интегралов.

Итак, рассмотрим поверхность  $s_0$ . Она может, в общем случае, состоять из нескольких замкнутых или разомкнутых поверхностей. Пусть на  $s_0$  падает первичная волна, возбуждаемая заданными электрическими токами с плотностью  $\mathbf{j}^0$  и зависимостью от времени вида  $\exp(i\omega t)$ . Полное поле задачи обозначим через  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Пусть на части  $s$  поверхности  $s_0$  адмитанс  $Y = \infty$ , а на части  $\Sigma$ , дополняющей  $s$  до  $s_0$ , представляет собой кусочнонепрерывную функцию. Тогда искомое поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$(1) \quad [\mathbf{n}^+(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-)] = 0 \text{ на } s_0; \quad [\mathbf{n}^+(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] = Y\mathbf{E}_t \text{ на } \Sigma; \quad \mathbf{E}_t = 0 \text{ на } s.$$

Индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения величин при стремлении к  $s_0$  со стороны, куда направлена нормаль  $\mathbf{n}^+$ , и с противоположной соответственно. У непрерывных, при переходе через  $s_0$ , величин эти индексы не ставятся. Индексом  $t$  отмечены касательные к  $s_0$  составляющие. Предполагается, что  $\operatorname{Re} Y \geq 0$  и, следовательно, задача имеет единственное решение.

Зададим на  $s_0$  семейство вспомогательных электрических токов  $\{\mathbf{K}_m\}$  ( $m=1, 2, \dots$ ), касательных к  $s_0$ . Применяв лемму Лоренца к полному полю  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и вспомогательному полю  $\mathbf{E}_m$ ,  $\mathbf{H}_m$ , возбуждаемому током  $\mathbf{K}_m$ , найдем

$$(2) \quad \int_{(s_0)} \{[\mathbf{E}(\mathbf{H}_m^+ - \mathbf{H}_m^-)] - [\mathbf{E}_m(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)]\} ds = - \int_{(v_0)} \mathbf{j}^0 \mathbf{E}_m dv.$$

Здесь  $v_0$  — объем, в котором распределен ток  $\mathbf{j}^0$ , а  $d\mathbf{s} = \mathbf{n}^+ ds$ . Учитывая известные соотношения для поверхностных токов

$$(3) \quad \mathbf{K} = [\mathbf{n}^+(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] \text{ на } s; \quad \mathbf{K}_m = [\mathbf{n}^+(\mathbf{H}_m^+ - \mathbf{H}_m^-)] \text{ на } s_0$$

и условия (1), перепишем (2) так:

$$(4) \quad \int_{(\Sigma)} \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{E}_{m,t} - \mathbf{K}_m) ds + \int_{(s)} \mathbf{E}_m \mathbf{K} ds = - \int_{(v_0)} \mathbf{j}^0 \mathbf{E}_m dv.$$

Подчеркнем, что  $\mathbf{K}$  – электрический ток, индуцированный первичным полем на поверхности  $s$  с бесконечным адмитансом. Вводя обозначения

$$(5) \quad \mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s, \\ \mathbf{E}_t & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad \bar{\mathbf{F}}_m = \begin{cases} \mathbf{E}_{m,t} & \text{на } s, \\ \mathbf{Y}\mathbf{E}_{m,t} - \mathbf{K}_m & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad a_m = - \int_{(v_0)} \mathbf{j}^0 \mathbf{E}_m dv,$$

придадим равенству (4) окончательный вид

$$(6) \quad \int_{(s_0)} \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{F}}_m ds = a_m, \quad m=1, 2, \dots$$

Черта сверху – знак комплексного сопряжения. В большинстве задач первичные токи задаются обычно в виде одного (или нескольких) элементарного диполя. При этом будем иметь ( $\mathbf{p}$  – момент диполя)

$$(7) \quad a_m = i\omega \mathbf{p} \mathbf{E}_m,$$

где  $\mathbf{E}_m$  берется в точке нахождения диполя.

В работе [2] получены уравнения, аналогичные (6), однако поскольку там под  $\mathbf{E}$  понимается только вторичное поле, то выражение для  $a_m$  содержит два интеграла по поверхностям  $\Sigma$  и  $s$  при любых первичных источниках (см. [2], формулы (11) и (12)).

На решении уравнений (6), т. е. нахождении  $\mathbf{I}$  (величины  $\bar{\mathbf{F}}_m$  и  $a_m$  известны) мы не останавливаемся, так как оно подробно описано в [1, 2]. Там же приводятся требования, которым должно удовлетворять семейство вспомогательных токов  $\{\mathbf{K}_m\}$ . Отметим только, что когда размер  $s_0$  велик по сравнению с длиной волны, то сходимость процессов, используемых при решении (6), можно ускорить, подставляя вместо  $\mathbf{I}$  выражение  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^0 + \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{I}^0$  – нулевое приближение, найденное, например, методом Кирхгофа, геометрической оптики и т. п. Тогда для искомого  $\mathbf{A}$  будем иметь систему уравнений

$$(8) \quad \int_{(s_0)} \mathbf{A} \bar{\mathbf{F}}_m ds = a_m - \int_{(s_0)} \mathbf{I}^0 \bar{\mathbf{F}}_m ds, \quad m=1, 2, \dots,$$

которая решается теми же методами.

Выясним еще существо ошибки, которую мы допускаем, сводя задачу о дифракции волны на криволинейном неоднородном слое толщины  $d$  с параметрами  $\epsilon, \mu_0$  ( $\epsilon_0, \mu_0$  – параметры окружающего слой пространства) к задаче о дифракции на средней поверхности  $s_0$  этого слоя с первыми двумя краевыми условиями (1). Поскольку при этом  $s=0$  и  $s_0=\Sigma$ , основное равенство (4) примет вид

$$(9) \quad \int_{(s_0)} \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{E}_{m,t} - \mathbf{K}_m) ds = - \int_{(v_0)} \mathbf{j}^0 \mathbf{E}_m dv.$$

Найдем теперь точное уравнение типа (9) для рассматриваемой задачи. Для этого используем второй принцип эквивалентности [3] и заменим пространство с рассматриваемым слоем однородной средой с параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$ , в которой на месте слоя распределены эквивалентные токи с плотностью  $i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$ .  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , как и выше, – полное поле задачи. Применяя лемму Лоренца к полям  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$  с учетом только что сказанного, найдем

$$(10) \quad \int_{(s_0)} \mathbf{E} \mathbf{K}_m ds = \int_{(v_i)} i\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \mathbf{E}_m dv + \int_{(v_0)} \mathbf{E}_m \mathbf{j}^0 dv.$$

Здесь  $v_i$  – область, занимаемая слоем. Строгое равенство (10) переходит в приближенное (9), если положить

$$(11) \quad \int_{(v_i)} i\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \mathbf{E}_m dv \approx \int_{(s_0)} \mathbf{Y} \mathbf{E} \mathbf{E}_{m,t} ds.$$

Поскольку для рассматриваемого диэлектрического слоя адмитанс  $Y=i\omega(\epsilon-\epsilon_0)d$  (см. [2]), то соотношение (11), а значит и вышеуказанное сведение справедливы, если:

1) внутри слоя  $v_i$  можно пренебречь средним (по толщине слоя) значением произведения нормальных компонент электрических векторов по сравнению с тангенциальными,

2) произведение  $EE_{m,t}$  на  $s_0$  достаточно хорошо совпадает со средним (по толщине слоя) его значением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1975, 20, 1, 28.
2. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 1979, 24, 3, 456.
3. А. З. Фрадин, Антенны сверхвысоких частот, Изд. Советское радио, 1957.

Поступило в редакцию  
19 III 1980



РиЭ.— 1981.— Т.26, №1.— С.178-179.

УДК 621.396.67.01

## К РАСЧЕТУ ПОЛЯ АПЕРТУРНЫХ АНТЕНН

*Я. Н. Фельд*

В настоящем сообщении обращается внимание на следующий, оставшийся до сего времени незамеченным, факт.

Поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  любой антенны с плоским излучающим раскрывом  $s$ , рассчитанное методом эквивалентных токов [1] по заданным на  $s$  касательным составляющим электрического и магнитного векторов  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ , тождественно совпадает с полем, рассчитанным с использованием модели Макдональда [2, 3] в предположении, что касательные составляющие векторов поля на  $s$  сохраняются теми же, а раскрыв  $s$  дополняется до бесконечной плоскости абсолютно черным фланцем  $\Sigma$ . При этом имеется в виду тождественность найденных полей в полупространстве (вне антенны), ограниченном этой бесконечной плоскостью  $s+\Sigma$ .

Докажем это. Начнем с метода эквивалентных токов. Поле антенны в окружающем ее пространстве находится при этом как поле электрических  $\mathbf{K}$  и магнитных  $\mathbf{K}^\mu$  поверхностных токов, распределенных на раскрыве  $s$  с плотностью

$$(1) \quad \mathbf{K} = [\mathbf{nh}] \quad \text{и} \quad \mathbf{K}^\mu = -[\mathbf{ne}] \quad \text{на} \quad s.$$

Здесь  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  — заданные на раскрыве касательные составляющие поля антенны, т. е.  $\mathbf{e} = \mathbf{E}_t$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}_t$  на  $s$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к раскрыву.

При расчете поля предполагается, что эквивалентные токи (1) находятся в пустом пространстве.

Перейдем ко второму методу расчета. При этом, как было уже сказано, поле определяется в полупространстве, ограниченном плоскостью  $s+\Sigma$ , по заданным на раскрыве  $s$  величинам  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  и при краевых условиях, соответствующих «черному» телу \*\*, на фланце  $\Sigma$  (рисунок).

В соответствии с концепцией \*\*\* Макдональда [2] искомое поле равно полусумме полей, найденных при следующих краевых условиях на  $s+\Sigma$ .

1. Поле  $\mathbf{E}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$  удовлетворяет условиям (первая краевая задача [1])

$$(2) \quad \mathbf{E}_t^{(1)} = \mathbf{e} \quad \text{на} \quad s \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_t^{(1)} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

2. Поле  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$  удовлетворяет условиям (вторая краевая задача [1])

$$(3) \quad \mathbf{H}_t^{(2)} = \mathbf{h} \quad \text{на} \quad s \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_t^{(2)} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

\* Касательные составляющие этих векторов на остальной внешней поверхности антенны предполагаются при этом равными нулю.

\*\* Как известно, такие условия не могут быть точно сформулированы в пределах классической электродинамики.

\*\*\* Отличие от нее заключается в том, что вместо первичных источников нами задаются  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  на  $s$ .

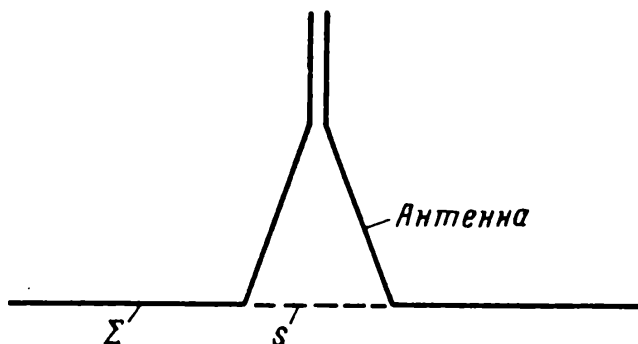
Искомое поле равно

$$(4) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}); \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}).$$

На основании теоремы 1 ([1], стр. 167) и принципа зеркальных изображений для магнитных токов, находящихся у плоскости, обладающей идеальной электрической проводимостью, поле  $\mathbf{E}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$  совпадает с полем поверхностного магнитного тока, распределенного на  $s$  с плотностью

$$(5) \quad \mathbf{K}_1 = -2[\mathbf{n}\mathbf{e}] \text{ на } s.$$

Аналогично этому вследствие теоремы 2 ([1], стр. 169) и принципа зеркальных изображений для электрических токов, находящихся у плоскости с идеальной маг-



нитной проводимостью, поле  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$  совпадает с полем поверхностного электрического тока, распределенного на  $s$  с плотностью

$$(6) \quad \mathbf{K}_2 = 2[\mathbf{n}\mathbf{h}] \text{ на } s.$$

При расчете полей  $\mathbf{E}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$  токи  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  следует считать находящимися в пустом пространстве.

Очевидно, поле, создаваемое токами (1), и полусумма полей, создаваемых токами (5) и (6), в пустом пространстве, тождественно равны друг другу. На этом доказательство высказанного в начале работы положения закончено.

Выявленная здесь эквивалентность двух различных подходов к расчету поля излучения (диаграмм направленности) апертурных антенн довольно естественна. Действительно, используемое при расчете методом эквивалентных токов (апертурный метод) предположение об отсутствии на наружной поверхности антенны затекающих туда токов ( $\mathbf{H}_t = 0$ ) возможно лишь при полной экранировке этой поверхности от раскрытия антенны. При втором методе расчета (4) такая экранировка обеспечивается наличием «черного» фланца  $\Sigma$ .

Отметим еще, что краевые условия на поверхности «черного» фланца и условия  $\mathbf{E}_t = \mathbf{H}_t = 0$  на наружной поверхности антенны в равной мере противоречивы, хотя ими и широко пользуются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. 1, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
2. Н. М. Macdonald, A class of diffraction problem, Philos. Trans., Sec. A, 1912, 212, p. 337.
3. Л. Н. Захарьев, А. А. Леманский, Рассеяние волн «черными» телами, Изд. Советское радио, 1972.

Поступило в редакцию  
12 III 1980

Я.Н. ФЕЛЬД

### СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 22 IX 1980)

Эта задача сводится к нахождению электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  частоты  $\omega$  в некоторой области  $V$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ , по заданным на ней значениям тангенциальных составляющих:

$$(1) \quad \mathbf{E}_t^+ = \mathbf{e} \text{ на } S_1, \quad \mathbf{H}_t^+ = \mathbf{h} \text{ на } S_2,$$

где  $S_1 + S_2 = S$ , а  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  — заданные вектор-функции. Индексами "плюс" и "минус" здесь и ниже обозначаются предельные значения величины при стремлении к  $S$  со стороны области  $V$  и с противоположной соответственно; у непрерывных при переходе через  $S$  величин индексы "плюс" и "минус" опускаются. Ниже для искомого поля мы будем полагать  $\mathbf{E}_t^+ = \mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t^+ = \mathbf{H}_t$  на  $S$ , поскольку  $\mathbf{E}_t^-$  и  $\mathbf{H}_t^-$  нигде не фигурируют.

Поверхность  $S$  может ограничивать область  $V$  изнутри или снаружи; в соответствии с этим различают внешнюю и внутреннюю задачи.

Внешняя задача имеет единственное решение, удовлетворяющее принципу излучения, для нахождения которого воспользуемся методом, аналогичным предложенному в (1, 2). Для этого зададим на  $S$  семейство вспомогательных поверхностных электрических токов  $\{\mathbf{K}_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , касательных к  $S$ . Обозначим через  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}$ ,  $\mathbf{H}\{\mathbf{K}_n, S\}$  поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_n$ , распределенным на  $S$ , при расчете которого все пространство (включая область внутри  $S$ ) считается заполненным однородной средой с теми же параметрами, что и внутри  $V$ .

Применив лемму Лоренца к искомому полю  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и вспомогательному  $\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}$ ,  $\mathbf{H}\{\mathbf{K}_n, S\}$  в области  $V$ , найдем

$$(2) \quad \int_{(S)} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}^+\{\mathbf{K}_n, S\}] - [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{H}]\} dS = 0;$$

здесь  $dS = \mathbf{n}^+ dS$ , где  $\mathbf{n}^+$  — нормаль к  $S$ , направленная внутрь  $V$ .

Учитывая (1), перепишем равенство (2) так:

$$(3) \quad \int_{(S_2)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^+\{\mathbf{K}_n, S\}] dS - \int_{(S_1)} [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{H}] dS = \int_{(S_2)} [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{h}] dS - \int_{(S_1)} [\mathbf{e}\mathbf{H}^+\{\mathbf{K}_n, S\}] dS.$$

Введя обозначения\*

$$(4) \quad \mathbf{J} = \begin{cases} \mathbf{H}_t \text{ на } S_1, \\ \mathbf{E}_t \text{ на } S_2, \end{cases} \quad \bar{\mathbf{F}}_n = \begin{cases} [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{n}^+] \text{ на } S_1, \\ [\mathbf{H}^+\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{n}^+] \text{ на } S_2, \end{cases}$$

придадим равенству (3) вид

$$(5) \quad \int_{(S)} \mathbf{J} \bar{\mathbf{F}}_n dS = a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$(5a) \quad a_n = \int_{(S_1)} [\mathbf{H}^+\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{e}] dS + \int_{(S_2)} [\mathbf{E}\{\mathbf{K}_n, S\}\mathbf{h}] dS;$$

\* Черта над буквой — знак комплексного сопряжения.

здесь  $F_n$  — известный вектор, а  $a_n$  — известное число, поскольку (см. формулы (4) и (5a))  $e, h$  заданы, а  $E \{K_n, S\}, H \{K_n, S\}$  определяются по заданному вспомогательному току с помощью известных квадратур.

Равенства (5) могут быть использованы для нахождения вектор-функции  $J$  на  $S$ . Действительно, числа  $\{a_n\}$  являются коэффициентами типа Фурье иско-мой величины  $J$  по биортогональной к  $\{F_n\}$  системе. Если  $\{F_n\}$  полна в некото-ром гильбертовом пространстве, к которому принадлежит  $J$ , то после ее орто-гонализации можно построить  $J$  в виде ряда Фурье  $(1, 2)$ . Найдя  $J$  с учетом (1) мы получаем  $E_t$  и  $H_t$  на всей замкнутой поверхности  $S$  и, следовательно, можем определить  $E, H$  во всей области  $V$  при помощи формул типа Гюйген-са — Кирхгофа  $(3)$ .

Для того чтобы придать приведенным эвристическим рассуждениям стро-гий характер, необходимо:

- 1) указать, каким пространствам должны принадлежать вектор-функции  $e$  и  $h$ ;
- 2) указать, как следует задавать вспомогательные токи  $\{K_n\}$ ;
- 3) выбрать пространство, которому должно принадлежать  $J$ ;
- 4) доказать, что семейство  $\{F_n\}$  полно в выбранном пространстве;
- 5) доказать, что найденное решение единственно.

Перейдем к выполнению этой программы. Будем полагать, что  $e \in L^2(S_1)$ , а  $h \in L^2(S_2)$ , и искать  $J$  в пространстве\*  $L^2(S)$ . Вспомогательные токи  $\{K_n\}$  бу-дем считать линейно-независимыми, принадлежащими пространству  $H^1(S)$ , и их линейные комбинации всюду плотными в нем. Здесь и ниже  $H^\alpha(S)$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ , — пространство функций Соболева — Слободецкого  $(4, 5)$ . Перейдем к доказательству полноты семейства  $\{F_n\}$  в  $L^2(S)$ . Для этого понадобится следующая

*Теорема  $(2, 6)$ . Пусть поверхностный электрический ток распределен с плотностью  $K \in H^\alpha(S)$  на замкнутой поверхности  $S$ .*

*Тогда, касательная к  $S$  составляющая электрической напряженности поля, создаваемого этим током  $E_t \in H^{\alpha-1}(S)$ , а магнитной —  $H_t^\pm \in H^\alpha(S)$ .*

Из этой теоремы, в частности, следует, что поскольку  $K_n \in H^1(S)$ , то  $F_n \in H^0(S) \equiv L^2(S)$  (см. (4)).

Семейство  $\{F_n\}$  полно, если для любого векторного поля  $A \in L^2(S)$  из равенств

$$(6) \quad \int_{(S)} A \bar{F}_n dS = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

следует, что  $A = 0$  на  $S$ . Переходя к доказательству, заменим в (6)  $\bar{F}_n$  его зна-чением из (4), после чего оно примет вид

$$\int_{(S_1)} A [E \{K_n, S\} n^+] dS + \int_{(S_2)} A [H^+ \{K_n, S\} n^+] dS = 0,$$

или

$$(7) \quad \int_{(S_1)} E \{K_n, S\} B dS - \int_{(S_2)} H^+ \{K_n, S\} B^\mu dS = 0,$$

где

$$(7a) \quad [n^+ A] = \begin{cases} B & \text{на } S_1, \\ -B^\mu & \text{на } S_2. \end{cases}$$

\* Элементы  $L^2(S)$  — касательные к  $S$  векторы.

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_{(S_1)} \mathbf{E} \{ \mathbf{K}_n, S \} \mathbf{B} dS &= \int_{(S)} \mathbf{E} \{ \mathbf{B}, S_1 \} \mathbf{K}_n dS; \\ \int_{(S_2)} \mathbf{H}^+ \{ \mathbf{K}_n, S \} \mathbf{B}^\mu dS &= - \int_{(S)} \mathbf{E}^- \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \} \mathbf{K}_n dS; \end{aligned}$$

здесь  $\mathbf{E} \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \}$  — электрический вектор, возбуждаемый поверхностным магнитным током  $\mathbf{B}^\mu$ , распределенным на  $S_2$ . Учитывая эти соотношения, равенство (7) перепишем так:

$$(9) \quad \int_{(S)} (\mathbf{E} \{ \mathbf{B}, S_1 \} + \mathbf{E}^- \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \}) \mathbf{K}_n dS = 0.$$

Подчеркнем, что при расчете полей, фигурирующих в (7) — (9), все пространство считается заполненным средой с теми же параметрами, что и внутри  $V$ . Поскольку  $\mathbf{A} \in L^2(S)$  (см. (7a)), то на основании теоремы \*  $\mathbf{E}_t \{ \mathbf{B}, S_1 \} \in H^{-1}(S)$  и, учитывая принцип перестановочной инвариантности (3),  $\mathbf{E}_t^- \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \} \in H^0(S)$ . Так как  $H^0(S) \subset H^{-1}(S)$ , имеем

$$\mathbf{E}_t \{ \mathbf{B}, S_1 \} + \mathbf{E}_t^- \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \} \in H^{-1}(S).$$

Линейные комбинации  $\{ \mathbf{K}_n \}$  плотны в  $H^1(S)$ . Поэтому из (9) следует, что обобщенная функция, стоящая в круглых скобках в (9), равна нулю на всех функциях, принадлежащих  $H^1(S)$ , на которых она определена, т.е.

$$(10) \quad \mathbf{E}_t \{ \mathbf{B}, S_1 \} + \mathbf{E}_t^- \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \} \equiv 0 \quad (\text{на } S).$$

Здесь слева фигурирует касательная составляющая (точнее, ее предельное значение с внутренней стороны) электрического вектора поля, возбуждаемого электрическим током  $\mathbf{B}$ , распределенным на  $S_1$ , и магнитным током  $\mathbf{B}^\mu$ , распределенным на  $S_2$ . Поэтому на основании теоремы единственности\*\* (6) вектор  $\mathbf{B} \equiv 0$  на  $S_1$  и  $\mathbf{B}^\mu \equiv 0$  на  $S_2$ , а значит, и вектор  $\mathbf{A} \equiv 0$  на  $S$ . Таким образом, полнота семейства  $\{ \mathbf{F}_n \}$  в  $L^2(S)$  доказана.

Покажем еще, что последовательность  $\{ \mathbf{F}_n \}$  линейно независима, т.е. из условия

$$(11) \quad c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2 + \dots + c_N \mathbf{F}_N = 0 \quad \text{на } S,$$

где  $c_n$  — постоянные, следует  $c_n = 0$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Учитывая обозначения (4) и линейность операторов  $\mathbf{E} \{ \cdot \}$  и  $\mathbf{H} \{ \cdot \}$ , перепишем (11) так:

$$\left[ \mathbf{E} \left\{ \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n; S \right\} \mathbf{n}^+ \right] = 0 \quad \text{на } S_1, \quad \left[ \mathbf{H}^+ \left\{ \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n; S \right\} \mathbf{n}^+ \right] = 0 \quad \text{на } S_2.$$

Отсюда, вследствие теоремы единственности, получим

$$(12) \quad \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n = 0 \quad \text{на } S.$$

Поскольку семейство  $\{ \mathbf{K}_n \}$  линейно независимо по определению, то из (12) следует, что  $c_n = 0$ ,  $1 \leq n \leq N$ , и линейная независимость  $\{ \mathbf{F}_n \}$  доказана.

Единственность решения смешанной краевой задачи следует из полноты последовательности  $\{ \mathbf{F}_n \}$ . Действительно, если существует еще одно решение  $\mathbf{I} \in$

\* Если  $\mathbf{V}_1$  — продолжение  $\mathbf{V}$  на  $S$  нулем вне  $S_1$ , а  $\mathbf{V}_1^\mu$  — продолжение  $\mathbf{V}^\mu$  на  $S$  нулем вне  $S_2$ , то  $\mathbf{E} \{ \mathbf{B}, S_1 \} = \mathbf{E} \{ \mathbf{V}_1, S \}$ ;  $\mathbf{E} \{ \mathbf{B}^\mu, S_2 \} = \mathbf{E} \{ \mathbf{V}_1^\mu, S \}$  и теорему можно применять, так как  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1^\mu \in H^0(S)$ .

\*\* Случай, когда в среде отсутствуют потери и частота  $\omega$  совпадает с резонансной частотой внутренней области, ограниченной  $S$ , пока исключается.

$\in L^2(S)$ , то оно также удовлетворяет системе (5). Поэтому для разности справедливы равенства 665

$$\int (J - I) \bar{F}_n dS = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (S)$$

откуда вытекает, что  $J = I$ .

Таким образом, доказано, что если решение  $J \in L^2(S)$ , то, применив, например, метод ортогонализации  $\{F_n\}$ , получим для  $J$  ряд типа Фурье, сходящийся по норме  $L^2(S)$ : Ряды для искомого поля  $E, H$  в области  $V$ , найденные при помощи  $J$ , будут при этом сходиться равномерно <sup>(2)</sup>.

В исключенном ранее случае (см. сноску\*\* на стр. 6), когда потери в среде отсутствуют и  $\omega$  совпадает с собственной частотой внутреннего резонатора, ограниченного  $S$ , при краевом условии  $E_t^- = 0$  на  $S$ , использованная выше теорема единственности нарушается и семейство  $\{F_n\}$  оказывается не полным. Однако и в этом случае решение может быть найдено аналогичным способом, если заменить вспомогательное семейство электрических токов  $\{K_n\}$  на магнитные  $\{K_n^\mu\}$ . Формулы (2) — (5a) при этом сохраняются, но индекс "плюс" переносится с  $H^+ \{K_n^\mu, S\}$  на  $E \{K_n^\mu, S\}$ . При доказательстве полноты  $\{F_n\}$  мы приходим теперь вместо (10) к равенству

$$(10a) \quad H_t^- \{B, S_1\} + H_t \{B^\mu, S_2\} \equiv 0 \quad (\text{на } S).$$

На основании теоремы единственности отсюда следует, что  $B = 0$  на  $S_1$  и  $B^\mu = 0$  на  $S_2$ , т.е.  $A = 0$  на  $S$ , за исключением случая, когда отсутствуют потери и  $\omega$  совпадает с собственной частотой внутреннего резонатора при краевом условии  $H_t^- = 0$  на  $S$ .

Таким образом, семейство  $\{F_n\}$  опять полно, а исключительные случаи при введении  $\{K_n\}$  и  $\{K_n^\mu\}$  не совпадают, так как собственные частоты резонатора при краевых условиях  $E_t^- = 0$  и  $H_t^- = 0$  различны.

Возможен еще один вариант введения вспомогательных токов, когда, в отличие от предыдущего,  $K_n$  на  $S_1$  считается электрическим поверхностным током, а на  $S_2$  — магнитным. Подробнее на нем останавливаться не будем. На практике могут иметь место случаи, когда  $e \in L^2(S_1)$ ,  $h \in L^2(S_2)$  и  $J \in L^2(S)$ . При этом они всегда принадлежат пространству  $L_R^2$  (см. (2, 7)), и решение смешанной задачи (1) может быть получено и обосновано аналогичным приемом в результате замены пространств  $L^2$  на  $L_R^2$ ,  $H^1(S)$  на  $H^2(S)$  и  $H^{-1}(S)$  на  $H^{-2}(S)$  подобно тому, как это сделано в (7) при решении задачи дифракции.

Внутренняя смешанная краевая задача, когда поверхность ограничивает область  $V$  снаружи, решается тождественным образом. Отличие имеет место только для случая, когда нарушается единственность и к искомому полю может быть добавлено любое  $N$ -кратно вырожденное собственное колебание  $E^n, H^n$  при краевых условиях

$$(13) \quad E_t^{n+} = 0 \text{ на } S_1, \quad H_t^{n+} = 0 \text{ на } S_2,$$

или их линейная комбинация. Внутреннюю задачу можно было бы трактовать также как задачу о возбуждении резонатора заданными магнитными  $K^\mu = [en^+]$  и электрическими  $K = [n^+h]$  поверхностными токами, распределенными на идеально проводящих: электрически — поверхности  $S_1$  и магнитно —  $S_2$  соответственно <sup>(3)</sup>. Тогда при резонансе и отсутствии потерь в среде амплитуда поля в общем случае должна обращаться в бесконечность. Однако в рассматриваемом случае этого не происходит, так как указанные выше токи не совершают работу, ибо они ортогональны к собственным колебаниям. Действительно, применяя сопряженную лемму типа Лоренца <sup>(8)</sup> к искомому полю  $E, H$  и собственному колебанию  $E^n, H^n$  в

$$\int_{(S)} \{ [E^{n+} \bar{H}] + [\bar{E} H^{n+}] \} dS = 0,$$

или, учитывая (1), (13) и введенные только что токи,

$$\int_{(S_1)} H^{n+} \bar{K}^\mu dS + \int_{(S_2)} E^{n+} \bar{K} dS = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Отсюда видно, что мощность токов равна нулю. И, наконец, следует отметить, что при  $S_2 = 0$  и  $S = S_1$  смешанная задача превращается в первую краевую задачу, а при  $S_1 = 0$  и  $S = S_2$  — во вторую (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

Поступило  
4 X 1980

- <sup>1</sup> Я.Н. Фельд, ДАН, т. 212, № 1 (1973). <sup>2</sup> Я.Н. Фельд, Радиотехника и электроника, т. 20, № 1 (1975). <sup>3</sup> Я.Н. Фельд, Л.С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. 1, 1955. <sup>4</sup> Г.И. Эскин, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, "Наука", 1973. <sup>5</sup> Функциональный анализ, Справочн. матем. библиотека, "Наука", 1972. <sup>6</sup> Я.Н. Фельд, Радиотехника и электроника, т. 19, № 5 (1974). <sup>7</sup> Я.Н. Фельд, Там же, т. 24, № 3 (1979). <sup>8</sup> Я.Н. Фельд, ДАН, т. 56, № 5 (1947).

УДК 621.396.67.01

## СМЕШАННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ АНТЕНН

Фельд Я. Н.

Рассматривается задача синтеза электрических токов на части заданной замкнутой поверхности и магнитных токов на остальной части этой поверхности, реализующих заданную диаграмму направленности.

Находятся коэффициенты типа Фурье для указанных токов по некоторой системе функций, а затем строится ряд Фурье, сходящийся по норме  $L^2$ . Указан также метод сведения задачи определения токов к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, позволяющими получить наилучшую в  $L^2$  аппроксимацию токов.

Под обратной задачей теории антенн обычно понимают задачу синтеза антенны, точнее тока или поля в ее раскрыве, по заданной диаграмме направленности. При этом в большинстве случаев антенна полагается линейной, либо с плоским раскрывом<sup>1</sup>.

Здесь мы сформулируем обратную смешанную задачу следующим образом.

Пусть заданы конечная, замкнутая геометрическая поверхность  $s$  и диаграмма направленности  $F(\vartheta, \varphi)$  ( $r, \vartheta, \varphi$  — сферическая система координат с центром внутри  $s$ ). Разобьем  $s$  на две части  $s_1$  и  $s_2$  ( $s = s_1 + s_2$ ), которые могут быть и многосвязными. Задача будет заключаться в нахождении (синтезировании) поверхностных электрических токов плотности  $\mathbf{K}$  на  $s_1$  и магнитных — плотности  $\mathbf{K}^u$  на  $s_2$ , реализующих диаграмму  $F(\vartheta, \varphi)$ . Предполагается, что зависимость от времени взята в виде  $\exp(i\omega t)$ . Подчеркнем еще раз, что диаграмма  $F$  и поверхности  $s, s_1, s_2$  считаются заданными. Ниже будет доказано, что решение этой задачи единственно и указано, как его найти. Зададим на сфере  $S$  радиуса  $r=R$ , содержащей внутри  $s$ , семейство поверхностных электрических токов  $\{\mathbf{K}_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Пусть  $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$  — поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_n$ , а  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — поле, возбуждаемое искомыми токами  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}^u$ , с диаграммой  $F$ . Применяя к этим полям лемму Лоренца во всем пространстве, найдем

$$(1) \quad \int_{(s_1)} \mathbf{K} \mathbf{E}^n ds - \int_{(s_2)} \mathbf{K}^u \mathbf{H}^n ds - \int_{(s)} \mathbf{K}_n \mathbf{E} ds = 0.$$

Введем обозначения

$$(2) \quad \mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s_1, \\ \mathbf{K}^u & \text{на } s_2, \end{cases} \quad \overline{\Phi}_n = \begin{cases} \mathbf{E}_t^n & \text{на } s_1, \\ -\mathbf{H}_t^n & \text{на } s_2, \end{cases}$$

где черта над буквой — знак комплексного сопряжения, а индексом  $t$  (снизу) отмечены тангенциальные к  $s$  составляющие векторов. Запишем

<sup>1</sup> Исключением является работа [1], где дана строгая постановка задачи синтеза для криволинейной апертуры.



теперь равенство (1) с учетом (2) так

$$(3) \quad \int_{(s)} \overline{\mathbf{I}\Phi_n} ds = \int_{(s)} \mathbf{K}_n \mathbf{E} ds.$$

Поле  $\mathbf{E}$  при достаточно большом  $r$  имеет вид

$$(4) \quad \mathbf{E} = \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{F}(\vartheta, \varphi) + O(r^{-2}).$$

Здесь  $k$  — волновое число.

Аналогично этому можно записать и вспомогательные токи на  $S$

$$(5) \quad \mathbf{K}_n = \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{j}_n(\vartheta, \varphi), \quad n=1, 2, \dots$$

Подставляя эти выражения в (3) и переходя к пределу, когда радиус  $R$  сферы  $S$  стремится к бесконечности, найдем

$$(6) \quad \int_{(s)} \overline{\mathbf{I}\Phi_n^0} ds = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\vartheta, \varphi) \mathbf{j}_n(\vartheta, \varphi) d\Omega \quad (n=1, 2, \dots),$$

где  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , и интегрирование идет по единичной сфере  $\Omega$ ; в интеграле, стоящем слева,

$$(6a) \quad \Phi_n^0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \Phi_n.$$

Семейство вектор-функций  $\{\mathbf{j}_n\}$  будем считать линейно независимым, принадлежащим пространству  $L^2(\Omega)$  и полным в нем. Очевидно, реализуемая диаграмма  $\mathbf{F}$  должна также принадлежать  $L^2(\Omega)$ , поскольку ваттная мощность, излучаемая токами  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}^\mu$ , должна быть конечна. Из сказанного следует, что интеграл в правой части (6) имеет смысл (конечен). В нашем случае пространство  $L^2(\Omega)$ , так же как и используемое ниже пространство  $L^2(s)$ , состоит из вектор-функций, заданных на соответствующих поверхностях и касательных к ним, обладающих конечной нормой.

Будем искать  $\mathbf{I}$  в пространстве  $L^2(s)$ . Формулы (6), в которых правые части известны, определяют коэффициенты Фурье искомой величины  $\mathbf{I}$  по биортогональной к  $\{\Phi_n^0\}$  системе функции. Чтобы использовать (6) для нахождения  $\mathbf{I}$ , необходимо убедиться, что семейство  $\{\Phi_n^0\}$  полно в  $L^2(s)$ . Для этого докажем, что если

$$(7) \quad \int_{(s)} \overline{\mathbf{A}\Phi_n^0} ds = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

для любого  $\mathbf{A} \in L^2(s)$ , то отсюда следует  $\mathbf{A} \equiv 0$  на  $s$ .

Учитывая (6a) и (2), напомним

$$(8) \quad \overline{\Phi_n^0} = \lim_{R \rightarrow \infty} \begin{cases} \mathbf{E}_t^n & \text{на } s_1 \\ -\mathbf{H}_t^n & \text{на } s_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} \mathbf{e}^n & \text{на } s_1, \\ -\mathbf{h}^n & \text{на } s_2. \end{cases}$$

Подставляя (8) в (7), придадим последнему вид

$$(9) \quad \int_{(s_1)} \mathbf{Ae}^n ds - \int_{(s_2)} \mathbf{Ah}^n ds = 0.$$

Лемма Лоренца позволяет получить следующие соотношения:

$$(10) \quad \begin{cases} \int_{(s_1)} \mathbf{A} \mathbf{E}^n ds = \int_{(S)} \mathbf{K}_n \mathbf{E} \{ \mathbf{A}; s_1 \} ds, \\ \int_{(s_2)} \mathbf{A} \mathbf{H}^n ds = - \int_{(S)} \mathbf{K}_n \mathbf{E}^\mu \{ \mathbf{A}; s_2 \} ds. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{E} \{ \mathbf{A}; s_1 \}$  и  $\mathbf{E}^\mu \{ \mathbf{A}; s_2 \}$  — электрические векторы, возбуждаемые электрическим током  $\mathbf{A}$ , распределенным на  $s_1$ , и магнитным током  $\mathbf{A}$ , распределенным на  $s_2$  соответственно. Они при  $r \rightarrow \infty$  имеют вид

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbf{E} \{ \mathbf{A}; s_1 \} = \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{F}^e(\vartheta, \varphi) + O(r^{-2}), \\ \mathbf{E}^\mu \{ \mathbf{A}; s_2 \} = \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{F}^\mu(\vartheta, \varphi) + O(r^{-2}), \end{cases}$$

где  $\mathbf{F}^e$  и  $\mathbf{F}^\mu$  — соответствующие диаграммы. Учитывая эти выражения и формулы (5) и (8), найдем, переходя в (10) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ ,

$$(12) \quad \begin{cases} \int_{(s_1)} \mathbf{A} \mathbf{e}^n ds = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^e(\vartheta, \varphi) \mathbf{j}_n(\vartheta, \varphi) d\Omega, \\ \int_{(s_2)} \mathbf{A} \mathbf{h}^n ds = - \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^\mu(\vartheta, \varphi) \mathbf{j}_n(\vartheta, \varphi) d\Omega. \end{cases}$$

Подставляя (12) в (9), получим

$$(13) \quad \int_{(\Omega)} \{ \mathbf{F}^e(\vartheta, \varphi) + \mathbf{F}^\mu(\vartheta, \varphi) \} \mathbf{j}_n(\vartheta, \varphi) d\Omega = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Поскольку

$$\mathbf{F}^e(\vartheta, \varphi) + \mathbf{F}^\mu(\vartheta, \varphi) \in L^2(\Omega),$$

а семейство  $\{ \mathbf{j}_n \}$  полно в  $L^2(\Omega)$  по определению, то из (13) следует, что

$$(14) \quad \mathbf{F}^e(\vartheta, \varphi) + \mathbf{F}^\mu(\vartheta, \varphi) = 0 \text{ на } \Omega.$$

Здесь слева стоит суммарная диаграмма, создаваемая электрическим и магнитным токами, распределенными на поверхностях  $s_1$  и  $s_2$  соответственно. Поэтому из (14), на основании теоремы единственности<sup>2</sup>, заключаем, что эти токи равны нулю, т. е. (см. (11))  $\mathbf{A} = 0$  на  $s$ .

Таким образом полнота  $\{ \Phi_n^0 \}$  в  $L^2(s)$  доказана. Исключением является случай, когда в среде отсутствуют потери и частота  $\omega$  совпадает с резонансной частотой внутреннего резонатора, ограниченного поверхностью  $s$ , при краевых условиях

$$(15) \quad \mathbf{E}_t = 0 \text{ на } s_1, \quad \mathbf{H}_t = 0 \text{ на } s_2,$$

<sup>2</sup> См. Приложение.

когда теорема единственности нарушается. Можно также убедиться в том, что семейство  $\{\Phi_n\}$  линейно независимо при любом  $R$ , т. е. из равенства

$$(16) \quad \sum_{n=1}^N c_n \Phi_n = 0 \text{ на } s,$$

где  $c_n$  — постоянные, следует, что  $c_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Действительно, учитывая обозначения (2) и линейную зависимость поля от возбуждающего его тока, перепишем (16) так<sup>3</sup>

$$\sum_{n=1}^N \bar{c}_n E_t^n = \sum_{n=1}^N \bar{c}_n E_t \{K_n; S\} = E_t \left\{ \sum_{n=1}^N \bar{c}_n K_n; S \right\} = 0 \text{ на } s_1,$$

$$\sum_{n=1}^N \bar{c}_n H_t^n = H_t \left\{ \sum_{n=1}^N \bar{c}_n K_n; S \right\} = 0 \text{ на } s_2.$$

Отсюда на основании теоремы единственности следует

$$(17) \quad \sum_{n=1}^N \bar{c}_n K_n = 0 \text{ на } S.$$

Поскольку  $\{j_n\}$  линейно независимы по определению, то (см. (5)) линейно независимы и  $\{K_n\}$  на  $S$ . Поэтому из (17) немедленно заключаем, что  $c_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Из доказанной линейной независимости  $\{\Phi_n\}$  при любом  $R$ , вытекает линейная независимость семейства  $\{\Phi_n^0\}$  на  $s$ . Учитывая последнее, можно ортонормировать  $\{\Phi_n^0\}$ , перейдя к системе функций

$$(18) \quad A_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n^m \Phi_n^0 \quad (m=1, 2, \dots).$$

Выражения для постоянных коэффициентов  $\alpha_n^m$  стандартны, и мы их не выписываем. Теперь, учитывая (6), найдем

$$(19) \quad I = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m,$$

где

$$c_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n^m \int_{(\Omega)} F(\vartheta, \varphi) j_n(\vartheta, \varphi) d\Omega.$$

Поскольку  $\{\Phi_n^0\}$  полно в  $L^2(s)$ , то полно также семейство  $\{A_n\}$ , и ряд (19) сходится по норме  $L^2(s)$  к искомой функции  $I$ . Вместо ортонормировки  $\{\Phi_n^0\}$  можно было бы искать  $I$  в виде линейного агрегата из первых  $N$  этих функций. Тогда, подставляя его в (6), мы пришли бы к системе линейных уравнений для его коэффициентов (см. ниже). При этом получили бы наилучшую (в смысле метрики  $L^2(s)$ ) аппроксимацию  $I$ .

Таким образом, найдя  $I$ , мы определили (см. (2)) искомые токи и решили поставленную обратную задачу.

Установим теперь класс функций, которому должна принадлежать задаваемая диаграмма  $F(\vartheta, \varphi)$  для того, чтобы искомое  $I \in L^2(s)$ . Выше было

<sup>3</sup> Здесь использованы обозначения для поля, аналогичные введенным в (10).

отмечено, что любая реализуемая диаграмма  $F \in L^2(\Omega)$ ; однако обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Действительно, ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ ,

где  $c_m$  — коэффициенты Фурье, определяемые второй формулой (19), должен сходиться вследствие равенства Парсеваля. Поэтому, подставляя вместо  $c_m$  его значение, найдем

$$(20) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^m \overline{\alpha_n^m} \int_{(\Omega)} F j_n d\Omega \right|^2 < \infty.$$

Это условие и определяет допустимый (реализуемый) класс диаграмм  $F$ , поскольку на основании теоремы Рисса — Фишера любой последователь-

ности постоянных  $\{c_m\}$ , удовлетворяющих неравенству  $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2 < \infty$  (т. е.

в нашем случае (20)), соответствует функция  $I \in L^2(s)$  с коэффициентами Фурье  $c_m$ .

Рассмотрим теперь вариант задания вектор-функций  $\{j_n\}$  на  $\Omega$  при помощи формул

$$(21) \quad j_n = \begin{cases} i_\vartheta \frac{d}{d\vartheta} P_\nu^m(\cos \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi & -\sin m\varphi \\ \sin m\varphi & \cos m\varphi \end{matrix} + i_\varphi \frac{m P_\nu^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \begin{matrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix}, \\ i_\vartheta \frac{m P_\nu^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \begin{matrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{matrix} + i_\varphi \frac{d}{d\vartheta} P_\nu^m(\cos \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \end{cases}$$

где  $P_\nu^m$  — присоединенная функция Лежандра, а  $\nu$  и  $m$  пробегают неотрицательные целочисленные значения,  $i_\vartheta$  и  $i_\varphi$  — соответствующие орты. Так как число вектор-функций при этом счетно, то их можно перенумеровать при помощи одного индекса  $n$ . Сделаем это любым способом при единственном условии, что верхняя строка соответствует нечетным  $n$ , а нижняя — четным. Написанные выражения линейно независимы и полны в  $L^2(\Omega)$ . Легко видеть, что функциям  $j_{2n+1}$  соответствуют волны электрического типа, а функциям  $j_{2n}$  — магнитного. Поле  $E^n$ ,  $H^n$ , возбуждаемое током  $K_n$  (см. (5)), распределенным на  $S$ , проще всего определить, вводя потенциал Дебая [2] при помощи формулы

$$(22) \quad V_n = P_\nu^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \{ A_n \zeta_\nu(kr) & \text{при } r > R, \\ \sin m\varphi \{ B_n \psi_\nu(kr) & \text{при } r < R. \end{cases}$$

Здесь

$$\zeta_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{\nu+1/2}^{(2)}(x), \quad \psi_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{\nu+1/2}(x),$$

а  $A_n$  и  $B_n$  — постоянные, которые находятся из условий непрерывности тангенциальной составляющей электрического вектора и равенства скачка тангенциальной составляющей магнитного вектора «волны  $n$ » току  $K_n$  при переходе через сферу  $r=R$ . Учитывая известные соотношения [2], связывающие поле электрических ( $n$  — нечетное) и магнитных ( $n$  —

четное) волн с потенциалом Дебая, найдем

$$(23) \quad \begin{aligned} A_n &= \frac{e^{ikR}}{k} \begin{cases} -\rho\psi_v'(kR), & n=1, 3, \dots \\ i\psi_v(kR), & n=2, 4, \dots \end{cases} \\ B_n &= \frac{e^{ikR}}{k} \begin{cases} -\rho\xi_v'(kR), & n=1, 3, \dots \\ i\xi_v(kR), & n=2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$  — волновое сопротивление. Для нахождения  $E^n$ ,  $H^n$  у поверхности  $s$ , а значит и  $\Phi_n$  (см. 2-ю формулу (2)), достаточно знать потенциал Дебая (22) при  $r < R$ , так как  $s$  находится в этой области. В основную расчетную формулу (6) входит функция  $\Phi_n^0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \Phi_n$ . Для ее определения нужно найти, таким образом, потенциал (см. (22))

$$(24) \quad V_n^0 = \lim_{R \rightarrow \infty} V_n = B_n^0 P_v^m(\cos \vartheta) \psi_v(kr) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

где (см. (23))

$$B_n^0 = \lim_{R \rightarrow \infty} B_n = -\frac{i^v}{k} \begin{cases} \rho & \text{при } n=1, 3, \dots \\ 1 & \text{при } n=2, 4, \dots \end{cases}$$

В остальные величины  $R$  не входит. Зная  $V_n^0$ , находим по известным формулам [2] поле  $E_0^n$ ,  $H_0^n$ , соответствующее этому потенциалу, а затем и величины

$$(25) \quad \mathbf{e}^n = [\mathbf{n}[E_0^n \mathbf{n}]] \text{ и } \mathbf{h}^n = [\mathbf{n}[H_0^n \mathbf{n}]],$$

через которые выражается  $\Phi_n^0$  по формуле (8). В (25)  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности  $s$  в точке наблюдения. Определив семейство  $\{\Phi_n^0\}$  и ортонормируя его, найдем  $\{A_n\}$  (см. (18)) и вектор  $\mathbf{I}$  (формула (19)), т. е. искомые токи. В вычислительном плане может оказаться более удобным, минуя ортонормировку, записать решение в виде

$$(26) \quad \mathbf{l} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \mathbf{u}_m,$$

где  $\{\mathbf{u}_m\}$  — подходящая, полная в  $L^2(s)$  (но не обязательно ортогональная) система функций. Тогда, коэффициенты  $C_m$  можно определить, подставляя (26) в (6), из системы линейных уравнений

$$(27) \quad \sum_{m=1}^{\infty} C_m (\mathbf{u}_m, \Phi_n^0) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F} \mathbf{j}_n d\Omega, \quad n=1, 2, \dots,$$

где

$$(\mathbf{u}_m, \Phi_n^0) = \int_{(s)} \mathbf{u}_m \overline{\Phi_n^0} ds.$$

Если, в частности, положить  $\mathbf{u}_m = \Phi_m^0$ , то первые  $N$  членов ряда (26) дадут наилучшую аппроксимацию  $\mathbf{I}$ .

В частных случаях, когда  $s=s_1$ ,  $s_2=0$  или  $s=s_2$ ,  $s_1=0$ , смешанная задача сводится к первой или второй обратной задаче теории антенн соответственно<sup>4</sup>.

Отметим, что почти все полученные в статье результаты сохраняются и для разомкнутых поверхностей  $s$ .

<sup>4</sup> Первая обратная задача для двумерного случая рассматривалась в несколько другой постановке в работе [3].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем пространство  $M(s)$ , элементами которого являются вектор-функции  $J$ , заданные на замкнутой поверхности  $s$  и касательные к ней; при этом  $J(\in M(s))$  на части  $s_1$  поверхности  $s$  трактуется как плотность электрического поверхностного тока, а на остальной части  $s_2$  — как магнитного тока.

Сформулируем теперь теорему «единственности»:

Каждой заданной диаграмме направленности<sup>5</sup> соответствует только одно распределение тока  $J \in M(s)$ , реализующее ее<sup>6</sup>.

Для дальнейшего понадобится следующая лемма.

Если  $J \in M(s)$  и диаграмма направленности этого тока  $F(\vartheta, \varphi) = 0$  на  $\Omega$ , то  $J = 0$  на  $s$ .

Действительно, если диаграмма  $F = 0$ , то из формулы (4) следует, что поле убывает с ростом  $r$  быстрее, чем  $r^{-1}$ . Отсюда заключаем на основании теоремы Реллиха [4], что поле в рассматриваемой области, т. е. вне  $s$ , тождественно равно нулю<sup>7</sup>. Поскольку  $E_t$  непрерывно при переходе через  $s_1$ , а  $H_t$  непрерывно при переходе через  $s_2$ , т. к. на этих поверхностях распределены электрические и магнитные токи соответственно, то поле внутри  $s$  удовлетворяет краевым условиям (15). Откуда следует, что это поле внутри  $s$  также равно нулю, ибо внутри источников нет, а случай резонанса внутренней области мы исключили (см. выше). Поскольку поле всюду равно нулю, то скачки  $E_t$  и  $H_t$  на  $s$  отсутствуют и ток  $J = 0$  на  $s$ . Таким образом лемма доказана. Из нее сразу получается теорема «единственности». Действительно, если существуют два тока  $J$  и  $J_1$  из  $M(s)$ , имеющие одну и ту же диаграмму, то у их разности диаграмма равна нулю и мы приходим к противоречию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Полищук И. М., Черенков В. С.* Об электродинамическом подходе к задаче синтеза антенн с излучающим отверстием в металлической поверхности.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 2, с. 242.
2. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1957.
3. *Каценеленбаум Б. З., Коршунова Е. Н., Пангонис Л. И., Сивов А. Н.* Определение формы поверхности антенны и токов на ней по заданной диаграмме направленности и метод возбуждения этих токов. Препринт № 19 (302). М.: Ин-т радиотехники и электроники АН СССР, 1980.
4. *Хэнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию  
18.XI.1980

<sup>5</sup> Предполагается, что она реализуема.

<sup>6</sup> Случай нарушения этой теоремы указаны выше.

<sup>7</sup> Предполагается, что потери в среде отсутствуют.

УДК 621.396.67.01

## СИНТЕЗ АНТЕНН ПО МАКСИМУМУ КОЭФФИЦИЕНТА НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ

Фельд Я. Н.

Синтезируется распределение тока или поля в апертуре антенны, реализующее максимум КНД в заданном направлении. Для существования этого максимума вводятся различные добавочные условия, обеспечивающие разрешимость поставленной задачи.

### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе в отличие от синтеза по заданной диаграмме рассматривается синтез по максимуму КНД<sup>1</sup> в заданном направлении  $\theta_0, \varphi_0$  ( $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат с центром в области, занимаемой антенной) для интересующей нас компоненты электрического вектора  $\mathbf{E}$ . В дальнейшем анализируются антенны с объемным или поверхностным распределением электрических токов, а также апертурного типа, причем основное внимание уделяется последним.

### 1. ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

Пусть антенна занимает некоторую трехмерную область  $Q$ , в которой распределен электрический ток с плотностью  $\mathbf{J}$ . Требуется найти оптимальное распределение этого тока, обеспечивающее максимум КНД в направлении  $\theta_0, \varphi_0$  для компоненты  $E_p$ . Будем предполагать в дальнейшем, что ток  $\mathbf{J}$  связан с напряженностью  $\mathbf{E}$  в области  $Q$  соотношением типа закона Ома

$$(1) \quad \mathbf{E} = -Z\mathbf{J},$$

где  $Z$  — некоторая скалярная функция, имеющая размерность удельного сопротивления, у которой  $\operatorname{Re} Z > 0$ ; знак минус в (1) поставлен потому, что эта система токов излучает энергию.

Поле антенны, возбуждаемое током  $\mathbf{J}$ , обозначим  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , а поле вспомогательного диполя, расположенного в точке  $q_0 (r_0, \theta_0, \varphi_0)$  с единичным моментом  $\mathbf{p}_0$ , буквами  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$ . Применяя ко всему бесконечному пространству лемму Лоренца для полей  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$ , найдем после элементарных выкладок

$$(2) \quad E_{p_0}(q_0) = \frac{1}{i\omega} \int_{(Q)} \mathbf{J} \mathbf{e} dV,$$

$E_{p_0}$  — проекция  $\mathbf{E}$  на направление вектора  $\mathbf{p}_0$ . В отдельных случаях, когда может возникнуть путаница, мы будем пользоваться обозначениями

$$(3) \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}\{q; q_0, \mathbf{p}_0\}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}\{q; q_0, \mathbf{p}_0\},$$

смысл которых ясен;  $q$  — точка наблюдения. КНД такой системы в направлении  $\theta_0, \varphi_0$  для составляющей  $E_{p_0}$  будет, очевидно, равен<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Аналогичный подход использован в работе [1].

<sup>2</sup> Мы говорим о КНД в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ , поскольку в классическом случае он определяется для точки  $q_0$ , находящейся в дальней зоне. Однако, поскольку величина (4) может представлять интерес и для зоны Френеля, в данной статье никаких ограничений на расположение  $q_0$  не накладываемся.

$$(4) \quad D = \frac{4\pi r_0^2}{\rho} \frac{|E_{p_0}(q_0)|^2}{-\operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{(Q)} \mathbf{E} \mathbf{J}^* dv}.$$

Здесь  $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$  — волновое сопротивление свободного пространства, звездочка — знак комплексного сопряжения.

Подставляя в (4) значение  $E_{p_0}(q_0)$  из формулы (2) и заменяя в знаменателе  $\mathbf{E}$  по формуле (1), найдем

$$(5) \quad D = \frac{\left| \int_{(Q)} \mathbf{J} edv \right|^2 \beta}{\int_{(Q)} |\mathbf{J}|^2 \operatorname{Re} Z dv},$$

где  $\beta = 8\pi r_0^2 / \rho \omega^2$  — постоянный несущественный коэффициент. Поскольку, вследствие неравенства Коши — Буняковского,

$$\left| \int_{(Q)} \mathbf{J} edv \right|^2 \leq \int_{(Q)} |\mathbf{J}|^2 \operatorname{Re} Z dv \int_{(Q)} |e|^2 \frac{1}{\operatorname{Re} Z} dv$$

(под интегралом левой части подразумевается наличие множителя  $\operatorname{Re} Z / \operatorname{Re} Z$ ), то можно написать

$$(6) \quad D \equiv \beta \frac{\left| \int_{(Q)} \mathbf{J} edv \right|^2}{\int_{(Q)} |\mathbf{J}|^2 \operatorname{Re} Z dv} \leq \beta \int_{(Q)} |e|^2 \frac{1}{\operatorname{Re} Z} dv.$$

Знак равенства здесь реализуется при

$$(7) \quad \mathbf{J} = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Z} \mathbf{e}^*.$$

где  $\alpha$  — произвольное постоянное число. Действительно, подставляя в (6) выражение (7), сразу же убеждаемся в справедливости сказанного. Таким образом, максимум КНД<sup>3</sup> реализуется при распределении тока, определяемом формулой (7); ее можно записать также более подробно (см. (3)):

$$(7') \quad \mathbf{J}(q) = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Z(q)} \mathbf{e}^* \{q; q_0, \mathbf{p}_0\}, \quad q \in Q.$$

Когда электрический ток в рассматриваемой антенне распределен на некоторой поверхности  $s$  (замкнутой или разомкнутой) с поверхностной плотностью  $\mathbf{K}$ , то рассуждения, аналогичные приведенным выше, дают для оптимального распределения

$$(8) \quad \mathbf{K}(q) = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Z(q)} \mathbf{e}_i^* \{q; q_0, \mathbf{p}_0\}, \quad q \in s,$$

поскольку вектор  $\mathbf{K}$  должен быть касателен к  $s$ ;  $\mathbf{e}_i^*$  — касательная к  $s$  составляющая  $\mathbf{e}^*$ . При этом следует также учитывать, что вместо (1) имеем теперь<sup>4</sup>

$$(8') \quad \mathbf{E}_t = -Z\mathbf{K} \quad \text{на } s,$$

где  $(-Z)$  — поверхностный импеданс.

<sup>3</sup> Задачу о максимуме (5) можно также трактовать как нахождение максимума  $|E_{p_0}(q_0)|^2$  при заданных потерях в антенне, если под  $\operatorname{Re} Z$  понимать удельное сопротивление потерь.

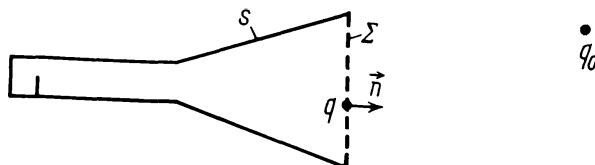
<sup>4</sup> Формула (8) для оптимального  $\mathbf{K}$  сохраняется также, если заменить (8') более общей:  $\mathbf{E}_t = -Z\mathbf{K} + Z_1[\mathbf{n}\mathbf{K}]$  на  $s$ , где  $\operatorname{Re} Z > 0$ ,  $\operatorname{Im} Z_1 = 0$ , а  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $s$ .



Величина  $\alpha$  произвольная постоянная, т. е. не зависящая от  $q$ . Однако она может зависеть от параметра  $r_0$  (расстояние до  $q_0$ ). Поэтому, когда  $q_0$  находится в дальней зоне, удобно положить  $\alpha = \alpha_0 r_0 e^{-ikr_0}$ , и переходя в формулах (7), (8) к пределу при  $r_0 \rightarrow \infty$ , можно трактовать  $\lim \alpha^* e\{q; q_0, \mathbf{p}_0\}$  как поле, возбуждаемое плоской волной, падающей на антенну с направления  $\theta_0, \varphi_0$ , электрический вектор которой поляризован параллельно  $\mathbf{p}_0$ . Это замечание относится также и к следующим параграфам.

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ В АПЕРТУРЕ АНТЕННЫ

Рассмотрим теперь антенну, апертура которой  $\Sigma$  замыкает металлическую поверхность  $s$ , которую будем считать идеально проводящей (рисунок). Выпишем прежде всего формулу, заменяющую (2) и позволяющую определять поле вне антенны по заданным на замкнутой поверхности  $s_0 = s + \Sigma$  касательным составляющим векторов поля.



Применяя лемму Лоренца к полям  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  для пространства, находящегося вне  $s_0$ , получим, после несложных выкладок [2],

$$(9) \quad E_{p_0}(q_0) = \frac{1}{i\omega} \int_{(s_0)} \{[\mathbf{E}\mathbf{h}] - [\mathbf{e}\mathbf{H}]\} ds.$$

Здесь  $ds = nds$ , где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $s_0$ . Следует подчеркнуть, что, как это следует из вывода, при расчете поля  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  параметры среды, находящейся внутри  $s_0$ , можно брать любыми, не имеющими ничего общего со средой, фактически заполняющей область внутри  $s_0$ . Например, можно считать среду внутри  $s_0$  идеально проводящей [2]. Тогда формула (9) примет вид

$$(10) \quad E_{p_0}(q_0) = \frac{1}{i\omega} \int_{(s_0)} [\mathbf{E}\mathbf{h}] ds,$$

так как при этом  $e_t = 0$  на  $s_0$ .

*Первый вариант.* Используем формулу (10) для составляющей поля  $E_{p_0}$  антенны в точке  $q_0$ . Поскольку  $E_t = 0$  на  $s$ , имеем

$$(11) \quad E_{p_0}(q_0) = \frac{1}{i\omega} \int_{(\Sigma)} [\mathbf{E}\mathbf{h}] ds = \frac{1}{i\omega} \int_{(\Sigma)} \mathbf{E}[\mathbf{h}\mathbf{n}] ds.$$

Будем полагать, что касательные составляющие векторов поля антенны на апертуре связаны соотношением

$$(12) \quad Y\mathbf{E}_t = [\mathbf{H}\mathbf{n}] \quad \text{на } \Sigma,$$

аналогичным имеющему место в локально-плоской волне. В дальнейшем предполагается, что  $Y$  — заданная скалярная функция точки на  $\Sigma$ , у которой  $\text{Re } Y > 0$ . Последнее обеспечивает выполнение соотношения (12) для любых антенн, у которых  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  на  $\Sigma$  ортогональны и вещественная часть нормальной к  $\Sigma$  компоненты комплексного вектора Пойнтинга не меняет знака на апертуре антенны. Ваттная мощность, излучаемая антенной, с учетом (12) равна:

$$(13) \quad W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{(\Sigma)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = \frac{1}{2} \int_{(\Sigma)} |\mathbf{E}_t|^2 \text{Re } Y ds.$$

<sup>5</sup> Обозначения те же, что и в § 1.

$$(14) \quad D \equiv \frac{4\pi r_0^2}{\rho} \frac{|E_{p_0}(q_0)|^2}{W_\Sigma} = \frac{8\pi r_0^2}{\rho \omega^2} \frac{\left| \int_{(\Sigma)} E[\mathbf{h}\mathbf{n}] ds \right|^2}{\int_{(\Sigma)} |E_t|^2 \operatorname{Re} Y ds}.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, найдем

$$\left| \int_{(\Sigma)} E[\mathbf{h}\mathbf{n}] ds \right|^2 \leq \int_{(\Sigma)} |[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2 \frac{ds}{\operatorname{Re} Y} \int_{(\Sigma)} |E_t|^2 \operatorname{Re} Y ds.$$

Применяя написанное неравенство к формуле (14), найдем

$$(15) \quad D \leq \frac{8\pi r_0^2}{\rho \omega^2} \int_{(\Sigma)} |[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2 \frac{1}{\operatorname{Re} Y} ds.$$

Равенство здесь, а значит и максимум КНД реализуются при

$$(16) \quad E_t = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Y} [\mathbf{h}^* \mathbf{n}] \text{ на } \Sigma,$$

где  $\alpha$  — постоянная, определяемая полной излучаемой мощностью. В этом легко убедиться, подставляя (16) в правую часть (14). Более подробно (16) запишется так:<sup>6</sup>

$$(17) \quad E_t(q) = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Y(q)} [\mathbf{h}^* \{q; q_0, \mathbf{p}_0\} \mathbf{n}(q)], \quad q \in \Sigma.$$

Из формулы (16) видно, что оптимальное распределение  $E_t$  на  $\Sigma$  обеспечивает синфазное сложение полей, создаваемых отдельными элементами  $\Sigma$ , в точке наблюдения  $q_0$ . Действительно, подставляя (16) в (11), найдем

$$E_{p_0}(q_0) = \frac{\alpha}{i\omega} \int_{(\Sigma)} |[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2 \frac{1}{\operatorname{Re} Y} ds.$$

Поскольку  $\operatorname{Re} Y > 0$ , то под интегралом стоит положительная величина и имеет место синфазное суммирование. Таким образом, при условии (12) максимум КНД реализуется, когда происходит синфазное сложение полей в точке  $q_0$ ; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Как известно [3], можно подобрать такое распределение тока в «токовой» антенне или поля в апертуре «апертурной» антенны (последнее во всяком случае в приближении Кирхгофа), при котором диаграмма антенны была бы как угодно близка к любой заданной узкой безлепестковой диаграмме. Отсюда следует, что КНД антенны может быть как угодно велик и задача оптимизации распределения по его максимуму не имеет смысла, что противоречит якобы полученным здесь результатам. Этот парадокс объясняется следующим образом. При рассмотрении задачи оптимизации (в данной работе) накладывалось условие (1) при  $\operatorname{Re} Z > 0$  внутри  $Q$  и условие (12) при  $\operatorname{Re} Y > 0$  на  $\Sigma$ . Эти условия и обеспечили существование решения задачи оптимизации распределения тока или поля по максимуму КНД. Поясним это на примере условия (12). Из условия  $\operatorname{Re} Y > 0$  на  $\Sigma$  и формулы (13) следует, что при этом плотность ваттного потока мощности  $0,5 \operatorname{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n$  не меняет знака на  $\Sigma$  и всюду направлена наружу в направлении  $\mathbf{n}$ . Благодаря этому исключаются быстропеременные распределения поля на апертуре (сверхнаправленность), при которых плотность потока мощности меняет направление, с чем связана высокая добротность (реактивность) системы. Таким образом, указанные условия эквивалентны

<sup>6</sup> Формулы (14), (16), (17) сохраняются также, если заменить (12) более общим условием:  $\mathbf{H}_t = Y[\mathbf{n}\mathbf{E}] + Y_t \mathbf{E}_t$  на  $\Sigma$ , где  $\operatorname{Re} Y > 0$ , а  $\operatorname{Im} Y_t = 0$ .

ограничению добротности, при котором, как известно, рассматриваемая задача имеет решение.

Соотношение (12) и формула (16) могут быть обобщены следующим образом. Величины  $\mathbf{H}_t$  и  $\mathbf{E}_t$  на  $\Sigma$  в общем случае связаны соотношением

$$(18) \quad [\mathbf{Hn}] = A\mathbf{E}_t \quad \text{на } \Sigma,$$

где  $A$  — линейный оператор. Любой линейный оператор можно представить в виде  $A = A_1 + iA_2$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — самосопряженные операторы (в нашем случае в пространстве  $L^2(\Sigma)$ ). Для существования максимума КНД потребуем, чтобы оператор  $A_1$  был положительным, т. е.  $(A_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$  для любого  $\mathbf{x} \in L^2(\Sigma)$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ ; здесь  $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  — скалярное произведение в  $L^2(\Sigma)$ . Учитывая сказанное и формулы (11) и (18), можно написать

$$(19) \quad W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(\Sigma)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_t, A_1\mathbf{E}_t);$$

$$E_{p_0}(q_0) = \frac{1}{i\omega} \int_{(\Sigma)} \mathbf{E}[\mathbf{h}\mathbf{n}] ds = \frac{1}{i\omega} \int_{(\Sigma)} \mathbf{E}_t A_1 A_1^{-1} [\mathbf{h}\mathbf{n}] ds = \frac{1}{i\omega} (\mathbf{E}_t, A_1 \mathfrak{G}),$$

где  $\mathfrak{G} = A_1^{-1}[\mathbf{h}^*\mathbf{n}]$ , а  $A_1^{-1}$  — оператор, обратный  $A_1$ .

Выражение для КНД с учетом (14) и (19) запишется так:

$$(20) \quad D = \frac{8\pi r_0^2}{\rho\omega^2} \frac{|(\mathbf{E}_t, A_1 \mathfrak{G})|^2}{(\mathbf{E}_t, A_1 \mathbf{E}_t)}.$$

Поскольку  $A_1 > 0$  (положительный оператор), то справедливо обобщенное неравенство Коши — Буняковского

$$|(\mathbf{E}_t, A_1 \mathfrak{G})|^2 \leq (\mathbf{E}_t, A_1 \mathbf{E}_t) (\mathfrak{G}, A_1 \mathfrak{G});$$

подставляя его в (20), получим

$$(20') \quad D \leq \frac{8\pi r_0^2}{\rho\omega^2} (\mathfrak{G}, A_1 \mathfrak{G}).$$

Равенство здесь выполняется при

$$(21) \quad \mathbf{E}_t = \alpha \mathfrak{G} = \alpha A_1^{-1}[\mathbf{h}^*\mathbf{n}] \quad \text{на } \Sigma.$$

Это проверяется подстановкой (21) в (20) ( $\alpha$  — постоянная).

Распределение (21), обеспечивающее максимум КНД, в частном случае, когда  $A_1 = \operatorname{Re} Y$ , переходит в (16). Условие  $A_1 > 0$  является обобщением условия  $\operatorname{Re} Y > 0$ . Правая часть (20') определяет максимальный КНД.

Для расчета оптимального распределения поля на апертуре по формуле (16) или (21) необходимо решить задачу о дифракции волны, падающей на идеально проводящую замкнутую поверхность  $s_0$ , и найти магнитный вектор  $\mathbf{h}$  результирующего поля на  $\Sigma$ . Для инженерных расчетов можно ограничиться решением этой задачи в приближении Кирхгофа, т. е. считать, что  $\mathbf{h}_t = 2\mathbf{H}_t^{\text{пад}}$  на  $\Sigma$ , где  $\mathbf{H}^{\text{пад}}$  — магнитный вектор падающей первичной волны.

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ; ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ВАРИАНТЫ

*Второй вариант.* В этом параграфе при расчете  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  не предполагается, что поверхность  $s_0$  идеально проводящая и для нахождения составляющей поля в точке  $q_0$  используется формула (9). КНД при этом записывается в виде (ср. с (14))

$$(22) \quad D = \frac{8\pi r_0^2}{\rho\omega^2} \frac{\left| \int_{(s_0)} \{[\mathbf{E}\mathbf{h}] - [\mathbf{e}\mathbf{H}]\} ds \right|^2}{\operatorname{Re} \int_{(\Sigma)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds}.$$

Если учесть, что на части  $s$  поверхности  $s_0$  составляющая  $E_t=0$ , и пренебречь затеканием токов на наружную поверхность  $s$  антенны, то в числителе (22) можно заменить  $s_0$  на  $\Sigma$ . Максимум КНД будет, очевидно, иметь место одновременно с максимумом функционала

$$(23) \quad \mathcal{L} = \left| \int_{(\Sigma)} \{E[\mathbf{h}\mathbf{n}] + \mathbf{H}[\mathbf{e}\mathbf{n}]\} ds \right|$$

при добавочном условии

$$(23') \quad \operatorname{Re} \int_{(\Sigma)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = C \equiv \text{const}, \quad C > 0.$$

Эта задача, как уже говорилось выше, не имеет решения. Поэтому мы введем ограничение, потребовав, чтобы поля, создаваемые отдельными элементами раскрыва  $\Sigma$ , складывались в точке  $q_0$  в фазе. Это требование, так же как и условие (12) в § 2, обеспечивает существование максимума КНД. Легко видеть, что синфазное сложение реализуется при (см. (23))<sup>7</sup>

$$(24) \quad \mathbf{E}_t = \psi e^{i\gamma} [\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}] \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_t = f e^{i\gamma} [\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}] \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

где  $\psi$  и  $f$  — положительные скалярные функции, а  $\gamma$  — вещественная константа. С учетом (24) выражения (23) и (23') запишутся так:

$$(25) \quad \mathcal{L} = \int_{(\Sigma)} \{\psi |[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2 + f |[\mathbf{e}\mathbf{n}]|^2\} ds,$$

$$(25') \quad \int_{(\Sigma)} \psi f \operatorname{Re}[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]_n ds = -C.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению функций  $\psi$  и  $f$ , обеспечивающих максимум (25) при условии (25'), что эквивалентно нахождению максимума следующего функционала:

$$(26) \quad \int_{(\Sigma)} \{\psi |[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2 + f |[\mathbf{e}\mathbf{n}]|^2 + \lambda \psi f [\mathbf{e}\mathbf{h}^*]_n\} ds.$$

Здесь  $\lambda$  — множитель Лагранжа, а функции  $\psi$  и  $f$  можно варьировать независимо. Приравняв нулю вариацию (26), найдем, после несложных выкладок,

$$\psi = -\frac{1}{\lambda} \frac{|[\mathbf{e}\mathbf{n}]|^2}{\operatorname{Re}[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]_n}, \quad f = -\frac{1}{\lambda} \frac{|[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2}{\operatorname{Re}[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]_n}$$

где постоянную  $\lambda$  можно выразить через  $C$  при помощи (25'). Подставляя эти выражения в (24), получим оптимальное распределение поля<sup>8</sup> на  $\Sigma$

$$(27) \quad \mathbf{E}_t = \frac{e^{i\gamma}}{\lambda} \frac{|[\mathbf{e}\mathbf{n}]|^2}{\operatorname{Re}[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]_n} [\mathbf{n}\mathbf{h}^*]; \quad \mathbf{H}_t = \frac{e^{i\gamma}}{\lambda} \frac{|[\mathbf{h}\mathbf{n}]|^2}{\operatorname{Re}[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]_n} [\mathbf{n}\mathbf{e}^*].$$

Напомним, что теперь при расчете поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  поверхность  $s_0$  и среду внутри нее можно считать любой, в частности, имеющей параметры внешней среды; тогда поле  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  находится как поле диполя с моментом  $\mathbf{p}_0$ , расположенного в точке  $q_0$  однородной среды. Постоянную  $e^{i\gamma}/\lambda$  в (27) можно взять любой; она зависит от изучаемой антенной мощности.

*Третий вариант.* По-прежнему будем применять выражение (22) для КНД (с заменой  $s_0$  на  $\Sigma$ ). Однако в отличие от синфазного сложения полей, использованного во втором варианте, будем требовать для существования его максимума выполнения соотношения (12). Тогда выражение

<sup>7</sup> Напомним, что  $\mathcal{L}$  пропорционально  $|\mathbf{E}_{p_0}(q_0)|$ .

<sup>8</sup> Вопрос о возможности точной реализации распределений (27) здесь не рассматривается.

(22) запишется следующим образом:

$$(28) \quad D = \frac{8\pi r_0^2}{\rho\omega^2} \frac{\left| \int_{(\Sigma)} \mathbf{E}_t \{[\mathbf{h}\mathbf{n}] - Y\mathbf{e}_t\} ds \right|^2}{\int_{(\Sigma)} |\mathbf{E}_t|^2 \operatorname{Re} Y ds}.$$

Неравенство Коши – Буняковского дает

$$\left| \int_{(\Sigma)} \mathbf{E}_t \{[\mathbf{h}\mathbf{n}] - Y\mathbf{e}_t\} ds \right|^2 \leq \int_{(\Sigma)} |\mathbf{E}_t|^2 \operatorname{Re} Y ds \int_{(\Sigma)} |[\mathbf{h}\mathbf{n}] - Y\mathbf{e}_t|^2 \frac{ds}{\operatorname{Re} Y}.$$

Поэтому

$$D \leq \frac{8\pi r_0^2}{\rho\omega^2} \int_{(\Sigma)} |[\mathbf{h}\mathbf{n}] - Y\mathbf{e}_t|^2 \frac{ds}{\operatorname{Re} Y}.$$

Очевидно, равенство здесь будет иметь место при

$$(29) \quad \mathbf{E}_t = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Y} \{[\mathbf{h}^*\mathbf{n}] - Y^*\mathbf{e}_t^*\} \text{ на } \Sigma,$$

где  $\alpha$  – константа, зависящая от мощности, излучаемой антенной. Это проверяется простой подстановкой (29) в (28). Выражение (29) и есть оптимальное распределение поля в апертуре антенны, обеспечивающее максимум КНД в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ . Распределение  $\mathbf{H}_t$  на  $\Sigma$  найдем, подставляя (29) в (12). Оптимальные распределения (27) и (29) не совпадают. Следовательно, требование синфазного сложения полей и условие (12) приводят к различным результатам.

Все полученные в работе формулы сохраняются также в случае, когда вне антенны расположены диэлектрические или металлические тела. Необходимо только учитывать их наличие при определении вспомогательного поля  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$ .

Таким образом, строгое решение прямой дифракционной задачи – нахождения поля  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  – обеспечивает строгое решение соответствующей задачи синтеза (в постановках §§ 1 и 2). Поскольку для существования максимума КНД требуются добавочные условия (типа (12) или «синфазности»), то получаемые при разных условиях максимальные КНД будут отличаться. По-видимому, можно наложить такое добавочное условие, при котором максимальный КНД будет больше, чем полученные здесь [4]. Однако если это увеличение существенно, то оно всегда будет связано с увеличением реактивности системы, т. е. со сверхнаправленностью, особенно в случае больших антенн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н. Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 2, с. 229.
2. Фельд Я. Н. Основы теории щелевых антенн. М.: Сов. радио, 1948.
3. Фельд Я. Н., Бахрах Л. Д. Радиотехника и электроника, 1963, т. 8, № 2, с. 187.
4. Полищук И. М. Радиотехника и электроника, 1982, т. 27, № 5, с. 885.

Поступила в редакцию  
15.III.1982

УДК 537.874.6

## МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ

*Фельд Я. Н.*

Развивается метод вариации постоянных для решения неоднородных задач математической физики. Изложение ведется на примере уравнения Гельмгольца. Рассматривается возбуждение радиально-неоднородного шара произвольной системой источников. Решение строится в виде разложений по парциальным волнам дискретного и непрерывного спектров с коэффициентами, зависящими от одной переменной. В зависимости от выбора последней получаются различные формы решений, пригодные для расчетов при больших или соизмеримых с волной радиусов шара. Метод проиллюстрирован на примере однородной линзы типа Люнеберга.

**ВВЕДЕНИЕ**

Цель данной статьи — показать, что метод вариации постоянных Лагранжа может быть обобщен для решения уравнений в частных производных математической физики с соответствующими краевыми условиями при наличии как дискретного, так и непрерывного спектров. Решение может быть получено в различных формах, пригодных, соответственно, для расчетов при различных значениях параметров задачи. Здесь это будет сделано на примере уравнения Гельмгольца.

Рассмотрим задачу о возбуждении радиально-неоднородного шара радиусом « $a$ » с произвольным заданным распределением источников  $f$  частоты  $\omega$ . Задача сводится к интегрированию уравнения Гельмгольца

$$(1) \quad \nabla^2 \psi + k^2 \psi = f$$

с краевыми условиями

$$(2) \quad \psi^+ = \psi^-, \quad \frac{\partial \psi^+}{\partial n} = \frac{\partial \psi^-}{\partial n},$$

обеспечивающими непрерывность  $\psi$  и ее нормальной производной  $\partial \psi / \partial n$  при переходе через поверхность шара  $r = a$ . На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) должны выполняться условия излучения Зоммерфельда. Источники  $f$  предполагаются распределенными на конечном расстоянии от центра шара. Волновое число  $k$  зависит от частоты и механических параметров среды в случае акустических волн и электромагнитных — в случае оптических. Ниже используется сферическая система координат  $r, \vartheta, \varphi$  с центром в центре шара. Внутри шара  $k$  зависит от одной координаты  $r$  и снабжается индексом 1; вне шара среда однородна и  $k$  снабжается индексом 0. Рассматриваемая задача будет решаться методом вариации постоянных [1–2] путем разложения по парциальным волнам дискретного и непрерывного спектров с коэффициентами, зависящими от одной «выделенной» координаты.

### 1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $\vartheta$

Эти парциальные волны являются решениями однородного в области  $0 < \vartheta < \pi$  уравнения Гельмгольца, а источники находятся на луче  $\vartheta = 0$  или

$\vartheta = \pi^1$ . Краевые условия для парциальной волны при  $r=a$  и  $r \rightarrow \infty$  сохраняются такими же, как и для искомого поля  $\psi$ . Однородное уравнение Гельмгольца в сферических координатах имеет вид

$$(3) \quad \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} + k^2 ru = 0.$$

Интегрируя (3) методом разделения переменных, найдем

$$(4) \quad u = R_\nu(r) P_\nu^m(\pm \cos \vartheta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $P_\nu^m$  — присоединенная функция Лежандра, а  $R_\nu(r)$  удовлетворяет уравнению

$$(5) \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR_\nu) + \left( k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} \right) R_\nu = 0,$$

где  $\nu(\nu+1)$  — постоянная разделения.

При  $r > a$ , когда  $k = k_0 = \text{const}$ , в качестве  $R_\nu$  выбирается частное решение (5), обеспечивающее выполнение принципа излучения<sup>2</sup>:

$$(6) \quad R_\nu(r) = \xi_\nu(k_0 r) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{\nu+1/2}^{(1)}(k_0 r).$$

При  $r < a$ , когда  $k = k_1(r)$ , используется решение (5), обеспечивающее выполнение краевых условий типа (2) на сфере  $r=a$ . Учитывая (4), легко видеть, что они удовлетворяются, если

$$(7) \quad R_\nu(a-0) = R_\nu(a+0), \quad R_\nu'(a-0) = R_\nu'(a+0).$$

Общий интеграл уравнения (5) при  $r < a$  запишем в виде

$$(8) \quad R_\nu(r) = A_\nu y_\nu^{(1)}(r) + B_\nu y_\nu^{(2)}(r),$$

где  $y_\nu^{(1)}(r)$  и  $y_\nu^{(2)}(r)$  — два частных линейно-независимых решения (5), которые ведут себя при  $r \rightarrow 0$  как<sup>3</sup>

$$(9) \quad y_\nu^{(1)}(r) = r^\nu + O(r^{\nu+1}), \quad y_\nu^{(2)}(r) = r^{-\nu-1} + O(r^{-\nu}).$$

### 1.1. Волны непрерывного спектра

Для этих волн постоянная разделения  $\nu$  выбирается так:

$$(10) \quad \nu = i\sigma - \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \sigma < \infty,$$

а постоянные  $A_\nu$  и  $B_\nu$  находятся из условий (7).

Подставляя (8) и (6) в (7) и разрешая полученные равенства относительно  $A_\nu$  и  $B_\nu$ , найдем

$$(11) \quad \begin{cases} A_\nu = \frac{ia^2}{2\sigma} (\xi_\nu y_\nu^{(2)'} - k_0 \xi_\nu' y_\nu^{(2)}), \\ B_\nu = \frac{ia^2}{2\sigma} (k_0 \xi_\nu' y_\nu^{(1)} - \xi_\nu y_\nu^{(1)'}). \end{cases}$$

Здесь и ниже

$$(11') \quad \begin{aligned} y_\nu^{(n)} &\equiv y_\nu^{(n)}(a), & y_\nu^{(n)'} &\equiv y_\nu^{(n)'}(a), & n &= 1, 2; \\ \xi_\nu &\equiv \xi_\nu(k_0 a), & \xi_\nu' &\equiv \xi_\nu'(k_0 a). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Поэтому условие «конечности энергии» вблизи  $r=0$  не обязательно выполняется для отдельной парциальной волны.

<sup>2</sup> Зависимость от времени взята в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

<sup>3</sup> Предполагается, что  $k_1^2(r) = O(1)$  при  $r \rightarrow 0$ .

Выбор  $\nu$  в виде (10) обеспечивает наименьшую возможную особенность для парциальных волн в точке  $r=0$ ; при этом выполняется требование конечности энергии искомого поля  $\psi$  в окрестности этой точки (см ниже). Отрицательные значения  $\sigma$  не рассматриваются, так как они не дают новых парциальных волн.

Таким образом, непрерывный спектр значений  $\nu$  определяется выражением (10).

### 1.2. Волны дискретного спектра

Волны дискретного спектра получим, положив в (8)  $B_\nu=0$ . Тогда из (11) найдем

$$(12) \quad k_0 \xi_\nu y_\nu^{(1)} - \xi_\nu y_\nu^{(1)'} = 0; \quad A_\nu = \xi_\nu / y_\nu^{(1)}.$$

При этом так же, как и при получении выражений (11), учтено значение вронскиана интегралов  $y_\nu^{(1)}$  и  $y_\nu^{(2)}$ . Первое из равенств (12) является характеристическим уравнением, корни которого  $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots$  определяют дискретный спектр. Ему соответствуют парциальные волны (4) с

$$(13) \quad R_{\nu_n}^\mp(r) = \begin{cases} \xi_{\nu_n}(k_0 r) & \text{при } r > a, \\ \frac{\xi_{\nu_n}}{y_{\nu_n}^{(1)}} y_{\nu_n}^{(1)}(r) & \text{при } r < a. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Нас будут интересовать корни с  $\text{Re } \nu_n > 0$ , так как только они обеспечивают конечность энергии искомого поля  $\psi$  в окрестности точки  $r=0$  (см. (9)).

### 1.3. Нумерация парциальных волн, их источники и ортонормировка

Введенные при помощи формул (4), (6), (8) волны непрерывного спектра будем обозначать через  $u_\sigma^p$ , где верхний дискретный индекс нумерует волны при фиксированном значении нижнего индекса  $\sigma$ , пробегающего луч  $[0, \infty)$ <sup>4</sup>. Поскольку имеется счетное множество волн при фиксированном  $\sigma$  (см. (4)), то их можно перенумеровать при помощи одного индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения, кроме нуля. Сделаем это при единственном условии, чтобы волны  $u_\sigma^p$  и  $u_\sigma^{-p}$  отличались только знаком у  $\cos \vartheta$  в выражении (4). При этом индексу  $p > 0$  пусть соответствует знак «-», а  $p < 0$  — знак «+». Таким образом, волны, отличающиеся только знаком у  $p$ , однотипны, но распространяются в противоположных направлениях по  $\vartheta$ . Эти волны удовлетворяют принципу излучения и имеют источники (особенности), расположенные на луче  $\vartheta=0$  при  $p > 0$  и на луче  $\vartheta=\pi$  при  $p < 0$ . Вне этих лучей они удовлетворяют уравнению Гельмгольца (3) и краевым условиям типа (2) при  $r=a$ .

Перейдем к нумерации волн дискретного спектра. Первое уравнение (12) имеет счетное число корней  $\nu_n$ , поэтому из (4) следует, что существует счетное число таких волн. Перенумеруем их при помощи одного (верхнего) индекса, пробегающего все целочисленные значения, кроме нуля. Как и выше, будем полагать, что волны  $u^p$  и  $u^{-p}$  отличаются только знаком у  $\cos \vartheta$  в (4); при  $p > 0$  берется  $-\cos \vartheta$ , а при  $p < 0$  берется  $+\cos \vartheta$ . Таким образом, источники волн дискретного спектра расположены так же, как и у непрерывного.

Покажем теперь, что введенные выше волны удовлетворяют следующим условиям ортонормировки:

$$(14) \quad \int_{s(\vartheta)} u_\sigma^p \frac{\partial u_{\sigma'}^q}{\partial n} ds = D_\sigma(p, q) \delta_{|p||q|} \delta(\sigma - \sigma'),$$

<sup>4</sup> Напомним, что  $\sigma$  и  $\nu$  связаны соотношением (10).



$$(15) \quad \int_{s(\vartheta)} u_{\sigma}^p \frac{\partial u^q}{\partial n} ds = \int_{s(\vartheta)} u^q \frac{\partial u_{\sigma}^p}{\partial n} ds = 0,$$

$$(16) \quad \int_{s(\vartheta)} u^p \frac{\partial u^q}{\partial n} ds = D(p, q) \delta_{|p||q|}.$$

Здесь  $s(\vartheta)$  — поверхность конуса:  $\vartheta = \text{const}$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $\partial/\partial n = (1/r)(\partial/\partial\vartheta)$  — оператор дифференцирования по нормали к  $s(\vartheta)$ ;  $\delta_{|p||q|}$  — символ Кронекера, а  $\delta(\sigma)$  — дельта-функция Дирака. Значения величин  $D_{\sigma}(p, q)$  и  $D(p, q)$  существенны лишь при  $q = \pm p$ . Они определяются формулами (14), (16), из которых находим

$$(17) \quad \begin{cases} D_{\sigma}(p, \pm p) = \int_0^{\infty} \int_{s(\vartheta)} u_{\sigma}^p \frac{\partial u_{\sigma}^{\pm p}}{\partial n} ds d\sigma', \\ D(p, \pm p) = \int_{s(\vartheta)} u^p \frac{\partial u^{\pm p}}{\partial n} ds. \end{cases}$$

Из этих формул видно, что  $D_{\sigma}$  и  $D$  зависят также от  $\vartheta$ .

Докажем прежде всего равенство (14). Используя (4), найдем<sup>5</sup>

$$(18) \quad \int_{s(\vartheta)} u_{\sigma}^p \frac{\partial u_{\sigma}^q}{\partial n} ds = \pi \delta_{|p||q|} \sin \vartheta P_{\nu}^{m_p}(\pm \cos \vartheta) \times \\ \times \frac{d}{d\vartheta} P_{\nu}^{m_q}(\pm \cos \vartheta) \int_0^{\infty} R_{\nu} R_{\nu'} dr.$$

Здесь, например,  $m_p$  — значение  $m$  для  $p$ -й волны. Учитывая (5) и (7), легко показать, что

$$(19) \quad \int_0^{\infty} R_{\nu} R_{\nu'} dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \{R_{\nu'}(r) R_{\nu}'(r) - R_{\nu}(r) R_{\nu'}'(r)\}}{(\nu - \nu')(\nu + \nu' + 1)}$$

Принимая во внимание (8)–(10), получим после элементарных вычислений, аналогичных проделанным в работе [2],

$$\int_0^{\infty} R_{\nu} R_{\nu'} dr = 2\pi A_{\nu} B_{\nu'} \delta(\sigma - \sigma').$$

Из (18), с учетом этого выражения, следует справедливость (14) и в частности формула

$$(20) \quad D_{\sigma}(p, q) = 2\pi^2 A_{\nu} B_{\nu'} \sin \vartheta P_{\nu}^{m_p}(\pm \cos \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} P_{\nu}^{m_q}(\pm \cos \vartheta),$$

где при  $p > 0$  ( $q > 0$ ) следует брать у  $\cos \vartheta$  в аргументе соответствующей функции знак «-», а при  $p < 0$  ( $q < 0$ ) — знак «+». Докажем теперь соотношения (15). Для первого интеграла также справедливы выражения типа (18), (19), но с тем отличием, что в них следует заменить  $\nu'$  на  $\nu_q$ , где  $\nu_q$  — корень уравнения (12), соответствующий  $q$ -й волне дискретного спектра. Поскольку  $R_{\nu}(r) = O(r^{-1/2})$  (см. (8)–(10)), а  $R_{\nu_q}(r) = O(r^{\text{Re } \nu_q})$  (см. (13),

(9)) при  $r \rightarrow 0$ , то  $\int R_{\nu} R_{\nu_q} dr = 0$  и, следовательно, обращается в нуль (см.

(18)) первый интеграл (15). Аналогично доказывается равенство нулю второго интеграла (15). Перейдем к доказательству (16). Входящий туда

<sup>5</sup> При  $m_p = m_q = 0$  правые части (18) и (20) следует умножить на 2.

интеграл по-прежнему выражается формулами типа (18), (19) с заменой

в них  $\nu$  на  $\nu_p$  и  $\nu'$  на  $\nu_q$ . При этом если  $\nu_p \neq \nu_q$ , то  $\int_{\bullet}^{\infty} R_{\nu_p} R_{\nu_q} dr = 0$  и  $p \neq \pm q$ .

Если же  $\nu_p = \nu_q$  и  $p \neq \pm q$ , то этот интеграл не равен нулю, а равенство (16) выполняется благодаря символу  $\delta_{|p||q|}$ , стоящему в (18). При  $p = \pm q$  равенство (16) выполняется благодаря определению  $D(p, \pm p)$  по второй формуле (17). Таким образом, доказательство соотношений (14)–(16) закончено.

## 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $\vartheta$

Будем искать решение задачи (1), (2), сформулированной во введении, в виде разложений по парциальным волнам дискретного и непрерывного спектров с переменными коэффициентами, зависящими от одной «выделенной» координаты  $\vartheta$ . Таким образом, запишем

$$(21) \quad \psi = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(\vartheta) u^p + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \gamma_p(\vartheta; \sigma) u_{\sigma}^p d\sigma.$$

Здесь  $C_p(\vartheta)$  и  $\gamma_p(\vartheta; \sigma)$  — указанные выше коэффициенты, которые надлежит определить. Поскольку число неизвестных больше, чем может быть определено из уравнения (1), мы имеем право наложить на них добавочное условие. Потребуем, как это делается при применении метода вариации постоянных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, чтобы первая (в нашем случае векторная) производная имела тот же вид, что и при постоянных коэффициентах. Поскольку

$$\nabla \psi = \sum_p (u^p \nabla C_p + C_p \nabla u^p) + \sum_p \int_0^{\infty} (u_{\sigma}^p \nabla \gamma_p + \gamma_p \nabla u_{\sigma}^p) d\sigma,$$

сказанное выше будет иметь место, если положить

$$(22) \quad \sum_p \left( u^p \nabla C_p + \int_0^{\infty} u_{\sigma}^p \nabla \gamma_p d\sigma \right) = 0.$$

Подставляя (21) в (1), учитывая (22) и то, что парциальные волны  $u^p$  и  $u_{\sigma}^p$  удовлетворяют при  $0 < \vartheta < \pi$  однородному уравнению Гельмгольца, найдем

$$(23) \quad \sum_p \left( \nabla C_p \nabla u^p + \int_0^{\infty} \nabla \gamma_p \nabla u_{\sigma}^p d\sigma \right) = f, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Система (22), (23) позволяет полностью определить коэффициенты  $C_p$  и  $\gamma_p$ . Действительно, умножая (22) на  ${}^{\circ}(\partial u^{-q}/\partial \vartheta) \mathbf{i}_{\vartheta}$ , а (23) на  $ru^{-q}$  и интегрируя по поверхности конуса  $s(\vartheta)$  ( $0 < \vartheta < \pi$ ), найдем (учитывая условия ортонормировки (15), (16))

$$(24) \quad \begin{cases} D(q, -q) \frac{dC_q}{d\vartheta} + D(-q, -q) \frac{dC_{-q}}{d\vartheta} = 0, \\ D(-q, q) \frac{dC_q}{d\vartheta} + D(-q, -q) \frac{dC_{-q}}{d\vartheta} = \int_{s(\vartheta)} f r u^{-q} ds. \end{cases}$$

<sup>6</sup> Здесь  $\mathbf{i}_{\vartheta}$  — единичный орт в направлении  $\vartheta$ .

$$(25) \quad \frac{dC_q}{d\vartheta} = \frac{\int_{s(\vartheta)} fu^{-q} r ds}{D(-q, q) - D(q, -q)}.$$

Выражение для  $dC_{-q}/d\vartheta$  мы не приводим, так как оно получается из (25) заменой  $q$  на  $-q$ .

Используя вторую формулу (17), перепишем (25) так:

$$\frac{dC_q}{d\vartheta} = \frac{\int_{s(\vartheta)} fu^{-q} r ds}{\int_{s(\vartheta)} \left( u^{-q} \frac{\partial u^q}{\partial n} - u^q \frac{\partial u^{-q}}{\partial n} \right) ds}.$$

Как будет показано ниже (см. выражение (28)), знаменатель здесь не зависит от  $\vartheta$ . Поэтому, интегрируя по  $\vartheta$ , найдем<sup>7</sup>

$$(26) \quad C_q(\vartheta) = \frac{\pm \int_{(v^\pm)} fu^{-q} dv}{\int_{s(\vartheta)} \left( u^{-q} \frac{\partial u^q}{\partial n} - u^q \frac{\partial u^{-q}}{\partial n} \right) ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Знаки «+» берутся, когда  $q > 0$ , а знаки «-», когда  $q < 0$ ;  $v^+$  — объем, ограниченный поверхностями  $s(\alpha)$  и  $s(\vartheta)$ ,  $v^-$  — объем, ограниченный  $s(\vartheta)$  и  $s(\beta)$ ; предполагается, что источники  $f$  находятся в области  $\alpha < \vartheta < \beta$ .

Коэффициенты  $\gamma_p(\vartheta; \sigma)$  определяются аналогичным образом. Для этого следует умножить (22) на  $(\partial u_{\sigma'}^{-q}/\partial \vartheta) i_\sigma$ , а (23) на  $ru_{\sigma'}^{-q}$  и проинтегрировать по  $s(\vartheta)$ . Тогда, учитывая условия (14), (15) и первую формулу (17), получим, после соответствующих выкладок,

$$(27) \quad \gamma_q(\vartheta; \sigma) = \frac{\pm \int_{(v^\pm)} fu_{\sigma'}^{-q} dv}{\int_0^\infty \int_{s(\vartheta)} \left( u_{\sigma'}^{-q} \frac{\partial u_{\sigma'}^q}{\partial n} - u_{\sigma'}^q \frac{\partial u_{\sigma'}^{-q}}{\partial n} \right) ds d\sigma'}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Знаки и  $v^\pm$  определяются так же, как и в (26). Приведем еще выражения для расчета знаменателей в формулах (26) и (27). Они равны соответственно

$$(28) \quad \frac{q}{|q|} \frac{2\pi a^2}{2\nu+1} (\xi_\nu)^2 P_\nu^m(0) P_\nu^{m'}(0) \frac{d}{d\nu} \left( \frac{k_0 \xi_\nu'}{\xi_\nu} - \frac{y_\nu^{(1)'}}{y_\nu^{(1)}} \right) \Big|_{\substack{\nu=\nu_q \\ m=m_q}},$$

$$(29) \quad \frac{q}{|q|} 4\pi^2 A_\nu B_\nu P_\nu^m(0) P_\nu^{m'}(0) \Big|_{m=m_q}.$$

При  $m=0$  эти выражения следует умножить на 2. Легко убедиться, что решение (21) удовлетворяет условию Мейкснера (конечности энергии) вблизи точки  $r=0$ . Для первой суммы (21) это очевидно, так как  $u^p = O(r^{\nu_p})$ , где  $\text{Re } \nu_p > 0$ , при  $r \rightarrow 0$ . Что касается волн непрерывного спектра, то  $u_{\sigma'}^p = O(r^{-1/2 \pm i\sigma})$  (см. (8)–(10)). Однако интегралы во втором члене (21) ведут себя, на основании теоремы Римана — Лебега, как  $o(r^{-1/2})$  при  $r \rightarrow 0$ . Таким образом, выражение (21) удовлетворяет всем требованиям поставленной задачи. Это решение пригодно для вычислений при больших  $|ka|$ .

<sup>7</sup>  $dv = r d\vartheta ds$ .

Координату  $r$  следует использовать в качестве выделенной, когда  $|ka|$  порядка единицы (резонансный случай) или меньше. Сформулируем прежде всего общие требования, которым должны удовлетворять парциальные волны (см. раздел 1).

а. Внутри интервала изменения выделенной переменной эти волны должны быть решениями однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющими краевым условиям исходной задачи<sup>8</sup>.

б. На одном конце этого интервала должно выполняться краевое условие исходной задачи (условие излучения при  $r \rightarrow \infty$  в рассматриваемом случае) для волн с  $p > 0$ , а на другом конце интервала (условие конечности энергии в окрестности  $r=0$ ) — для волн с  $p < 0$ . На противоположном конце интервала для каждой волны эти условия нарушаются, и там располагаются ее источники.

Учитывая сказанное, определим парциальные волны для выделенной переменной  $r$  следующими формулами:

$$(30) \quad u = R_n(r) P_n^m(\cos \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $R_n(r)$  удовлетворяет уравнению (5) с  $\nu = n$  и может быть выбрано равным

$$(30') \quad R_n(r) = \begin{cases} \zeta_n(k_0 r) & \text{при } r > a, \\ A_n y_n^{(1)}(r) + B_n y_n^{(2)}(r) & \text{при } r < a \end{cases}$$

или

$$(30'') \quad R_n(r) = \begin{cases} \alpha_n \psi_n(k_0 r) + \beta_n \zeta_n(k_0 r) & \text{при } r > a, \\ y_n^{(1)}(r) & \text{при } r < a. \end{cases}$$

Здесь  $y_n^{(1)}$  и  $y_n^{(2)}$  — решения (5), удовлетворяющие (9), в которых  $\nu = n$ , а постоянные  $A_n$ ,  $B_n$  и  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  находятся из условия непрерывности  $u$  и  $\partial u / \partial r$  при переходе через поверхность  $r = a$  и равны

$$(31') \quad \begin{cases} A_n = \frac{a^2}{2n+1} (k_0 \zeta_n' y_n^{(2)} - \zeta_n y_n^{(2)'}), \\ B_n = \frac{a^2}{2n+1} (\zeta_n y_n^{(1)'} - k_0 \zeta_n' y_n^{(1)}); \end{cases}$$

$$(31'') \quad \begin{cases} \alpha_n = i k_0 a^2 (\zeta_n y_n^{(1)'} - k_0 \zeta_n' y_n^{(1)}), \\ \beta_n = i k_0 a^2 (k_0 \psi_n' y_n^{(1)} - \psi_n y_n^{(1)'}). \end{cases}$$

Обозначения те же, что и в (11'), а  $\psi_n \equiv \psi_n(k_0 a)$ ,  $\psi_n' \equiv \psi_n'(k_0 a)$ . Введенные парциальные волны (30) можно перенумеровать при помощи одного индекса  $p$ , пробегаящего все целочисленные значения, кроме нуля. Сделаем это любым способом при единственном предположении, что для волны с  $p > 0$  в (30) в качестве  $R_{n_p}(r)$  берется выражение (30'), а для волны с  $p < 0$  — выражение (30''). Эти парциальные волны удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$(32) \quad \int_{s(r)} u^p \frac{\partial u^q}{\partial r} ds = 0 \quad \text{при } p \neq \pm q,$$

где  $s(r)$  — поверхность сферы радиусом  $r$ .

Равенство (32) немедленно следует (см. (30)) из ортогональности тригонометрических функций на интервале  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и присоединенных функций Лежандра с весом  $\sin \vartheta$  на интервале  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ . При выделенной переменной  $r$  не приходится привлекать волны непрерывного спектра, так как семейство функций (30) полно.

<sup>8</sup> Если внутри этого интервала подобные условия ставятся.

Будем искать решение (1) в виде

$$(33) \quad \psi = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(r) u^p,$$

где  $u^p$  — введенные парциальные волны (30). Используя метод вариации постоянных и подставляя (33) в (1), найдем, как и выше,

$$(34) \quad \sum_p u^p \nabla C_p = 0; \quad \sum_p \nabla C_p \nabla u^p = f, \quad 0 < r < \infty.$$

Умножая первое из этих уравнений на  $(\partial u^{-q}/\partial r) i_r$ , а второе на  $u^{-q}$  и интегрируя по  $s(r)$ , получим, учитывая (32),

$$\begin{aligned} \frac{dC_q}{dr} \int_{s(r)} u^q \frac{\partial u^{-q}}{\partial r} ds + \frac{dC_{-q}}{dr} \int_{s(r)} u^{-q} \frac{\partial u^{-q}}{\partial r} ds &= 0, \\ \frac{dC_q}{dr} \int_{s(r)} u^{-q} \frac{\partial u^q}{\partial r} ds + \frac{dC_{-q}}{dr} \int_{s(r)} u^{-q} \frac{\partial u^{-q}}{\partial r} ds &= \int_{s(r)} f u^{-q} ds. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно  $dC_q/dr$ , имеем

$$\frac{dC_q}{dr} = \frac{\int_{s(r)} f u^{-q} ds}{\int_{s(r)} \left( u^{-q} \frac{\partial u^q}{\partial r} - u^q \frac{\partial u^{-q}}{\partial r} \right) ds}.$$

Знаменатель здесь не зависит от  $r$ . Поэтому, интегрируя по  $r$ , найдем

$$(35) \quad C_q(r) = \frac{\pm \int_{(v^\pm)} f u^{-q} dv}{\int_{s(r)} \left( u^{-q} \frac{\partial u^q}{\partial r} - u^q \frac{\partial u^{-q}}{\partial r} \right) ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Знаки «+» берутся, когда  $q > 0$ , а знаки «-», когда  $q < 0$ ;  $v^+$  — объем, ограниченный поверхностями  $s(r_1)$  и  $s(r)$ ,  $v^-$  — объем, ограниченный  $s(r)$  и  $s(r_2)$ ;  $r_1 < r < r_2$  — область, где находятся источники  $f$ . Знаменатель в формуле (35), как легко показать, равен

$$\frac{q}{|q|} \frac{i\pi\alpha_n}{k_0} \frac{(n+m)!}{\left(n + \frac{1}{2}\right) (n-m)!}$$

где  $n$  и  $m$  — целые числа, соответствующие (см. (30))  $q$ -й парциальной волне.

Формулы (33) и (35) полностью решают задачу (1), (2) при выборе в качестве выделенной переменной координаты  $r$ .

Остановимся еще на связи между методом вариации постоянных, развитым здесь применительно к уравнению второго порядка (1), и аналогичным методом, примененным в работах [1, 2] для решения системы из двух уравнений первого порядка. Эту связь проще всего установить, заменив (1) системой

$$(36) \quad \operatorname{div} \mathbf{A} + k^2 \psi = f, \quad \mathbf{A} - \nabla \psi = 0.$$

Согласно [1, 2], решение ее ищем в виде<sup>9</sup>

$$(37) \quad \psi = \sum_p C_p u^p, \quad \mathbf{A} = \sum_p C_p \nabla u^p,$$

где  $C_p$  — коэффициенты, являющиеся функциями одной выделенной переменной. Запись решения системы (36) в форме (37), где в обеих формулах стоят одни и те же коэффициенты  $C_p$ , предполагает уже наложение добавочного условия, характерного для метода вариации постоянных. Действительно, подставляя  $\psi$  из (37) во второе уравнение (36), получим

$$\mathbf{A} = \sum_p u^p \nabla C_p + \sum_p C_p \nabla u^p.$$

Сравнивая это выражение со второй формулой (37), видим, что запись (37) уже неявно содержит добавочное условие

$$\sum_p u^p \nabla C_p = 0,$$

которое совместно с первым уравнением (36), после подстановки в него (37), приводит к системе (34). Таким образом, решение уравнения (1) методом вариации постоянных с наложением требования, чтобы первая (векторная) производная имела тот же вид, что и при постоянных коэффициентах, тождественно решению системы (36) в форме (37).

### 5. ПРИМЕР. ОДНОРОДНАЯ ЛИНЗА ТИПА ЛЮНЕБЕРГА

Линза Люнеберга может быть имитирована однородным шаром при соответствующем выборе его параметра  $k_1/k_0$  и фокусного расстояния [3]. В качестве облучателя такой линзы естественно взять два точечных источника, расположив их в точках  $r=b, \vartheta=0$  и  $r=b+\lambda/4, \vartheta=0$ , где  $b>a$  и  $\lambda=2\pi/k_0$ . Если оба источника имеют одинаковые амплитуды колебаний  $J$ , а второй из них упреждает по фазе на  $\pi/2$ , то диаграмма направленности этих источников будет достаточно эффективно облучать линзу.

Поскольку нас интересует случай, когда  $|ka| \gg 1$ , то в качестве выделенной переменной возьмем  $\vartheta$ . Вследствие осевой симметрии задачи нам понадобятся только следующие парциальные волны (см. (4)):

$$(38) \quad u_{\sigma}^{\mp 1} = R_{\nu}(r) P_{\nu}(\pm \cos \vartheta), \quad \nu = i\sigma - 1/2, \quad 0 \leq \sigma < \infty$$

— для непрерывного спектра и

$$(39) \quad u^p = R_{\nu_p}(r) P_{\nu_p}(\pm \cos \vartheta), \quad p = \mp 1, \mp 2, \dots$$

— для дискретного спектра.

Функция  $R_{\nu}(r)$  для волн непрерывного спектра определяется формулой (6) при  $r>a$  и (8) при  $r<a$ . Для дискретного спектра  $R_{\nu_p}(r)$  определяется формулами (13). Так как теперь  $k_1 = \text{const}$ , то частные интегралы (5) равны (см. (9))

$$(40) \quad y_{\nu}^{(1)}(r) = M_{\nu} \psi_{\nu}(k_1 r), \quad y_{\nu}^{(2)}(r) = M_{-\nu-1} \psi_{-\nu-1}(k_1 r),$$

где

$$M_{\nu} = \frac{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi} k_1^{\nu}}.$$

Таким образом, искомое поле запишется так (см. (21)):

$$(41) \quad \psi = \sum_{p=1}^{\infty} C_p u^p + \int_0^{\infty} \gamma_1(\sigma) u_{\sigma}^1 d\sigma.$$

<sup>9</sup> В работах [1, 2] обе неизвестные — векторы, и в решении фигурируют дополнительные (поправочные) члены, наличие которых в рассматриваемом случае не требуется.

Волны с  $p < 0$ , бегущие в направлении убывания  $\vartheta$ , возбуждаться не будут, так как источники расположены на полуоси  $\vartheta = 0$ . В рассматриваемом примере коэффициенты  $C_p$  и  $\gamma_1$  не зависят от  $\vartheta$ ; найдем их по формулам (26) и (27). Учитывая (28), (29), (11) и (40), получим

$$(42) \quad C_p = \frac{(2\nu+1)J\{\zeta_\nu(k_0b) + i\zeta_\nu(k_0b + \pi/2)\}}{4a^2 \sin \nu\pi (\zeta_\nu)^2 \frac{d}{d\nu} \left( \frac{k_0\zeta_\nu'}{\zeta_\nu} - \frac{k_1\psi_\nu'}{\psi_\nu} \right)} \Big|_{\nu=\nu_p},$$

$$(43) \quad \gamma_1(\sigma) = \frac{i\sigma J \cos \nu\pi \{\zeta_\nu(k_0b) + i\zeta_\nu(k_0b + \pi/2)\}}{4\pi k_1^3 a^4 \left( \zeta_\nu \psi_{-\nu-1}' - \frac{k_0}{k_1} \zeta_\nu' \psi_{-\nu-1} \right) \left( \frac{k_0}{k_1} \zeta_\nu' \psi_\nu - \zeta_\nu \psi_\nu' \right)}$$

где

$$\psi_\nu = \psi_\nu(k_1a), \quad \psi_\nu' = \psi_\nu'(k_1a), \quad \zeta_\nu = \zeta_\nu(k_0a), \quad \zeta_\nu' = \zeta_\nu'(k_0a).$$

Найденные коэффициенты и выражения (38), (39) позволяют записать искомое поле (41) для области  $r > a$  в виде

$$(44) \quad \psi = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2\nu+1)J\{\zeta_\nu(k_0b) + \zeta_\nu(k_0b + \pi/2)\} \zeta_\nu(k_0r) P_\nu(-\cos \vartheta)}{4a^2 \sin \nu\pi (\zeta_\nu)^2 \frac{d}{d\nu} \left( \frac{k_0\zeta_\nu'}{\zeta_\nu} - \frac{k_1\psi_\nu'}{\psi_\nu} \right)} \Big|_{\nu=\nu_p} + \\ + \int_0^{\infty} \frac{i\sigma J \cos \nu\pi \{\zeta_\nu(k_0b) + i\zeta_\nu(k_0b + \pi/2)\} \zeta_\nu(k_0r) P_\nu(-\cos \vartheta)}{4\pi k_1^3 a^4 \left( \zeta_\nu \psi_{-\nu-1}' - \frac{k_0}{k_1} \zeta_\nu' \psi_{-\nu-1} \right) \left( \frac{k_0}{k_1} \zeta_\nu' \psi_\nu - \zeta_\nu \psi_\nu' \right)} d\sigma.$$

Аналогичное выражение для области  $r < a$  можно получить, заменив в (44)  $\zeta_\nu(k_0r)$  соответствующими выражениями, взятыми из формул (13), (40) для дискретного спектра и из (8), (40) для непрерывного спектра. Напомним, что в (44)  $\nu = \nu_p$  — корни характеристического уравнения (12). Приведенный пример имеет чисто иллюстративный характер, поэтому мы не приводим анализа формулы (44). Исследование подобных выражений можно найти в работе [4], но при наличии значительных потерь в среде шара.

В частном случае точечного источника внешняя задача для шара рассматривалась Зоммерфельдом [5], который получил решение в виде аналогичного ряда по парциальным волнам дискретного спектра, без использования преобразования Ватсона. Однако в его случае коэффициенты ряда были постоянными и не вводились волны, бегущие в противоположных направлениях.

Отметим также интересную работу [6], в которой рассматривается решение аналогичных задач другим методом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н. Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 12, с. 2615.
2. Фельд Я. Н., Фельд С. Я. Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 12, с. 2481.
3. Vekefi G., Farnell G. W. Kanad. J. Physics, 1956, v. 34, № 8, p. 790.
4. Макаров Г. И., Рыжков А. В. Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977, вып. 15.
5. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
6. Голицев И. И., Краснушкин П. Е. Теоретическая и математическая физика, 1972, т. 10, № 3, с. 370.

Поступила в редакцию  
11.V.1982

УДК 537.874.6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТЯХ  
С АДМИТАНСНЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ*Фельд Я. Н.*

Рассмотрена дифракция электромагнитной волны на поверхности с адмитансным краевым условием, когда адмитанс является линейным оператором (например, интегро-дифференциальным). Найдены коэффициенты Фурье искомой тангенциальной составляющей электрического вектора на указанной поверхности. Эти коэффициенты позволяют определить поле одним из известных методов. Показано, что для единственности решения задачи оператор-адмитанс должен иметь «вещественную» часть неотрицательной. Приведены примеры, когда адмитанс является анизотропным и неоднородным.

Рассмотрим поверхность  $s$ , которая может состоять из одной или нескольких замкнутых поверхностей. Пусть на  $s$  падает первичная монохроматическая волна частотой  $\omega$ , возбуждаемая электрическим током, распределенным с плотностью  $\mathbf{j}^0$  в области  $v_0$ , не пересекающейся с  $s$ . Полное поле задачи  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  удовлетворяет уравнениям Максвелла вне  $s$ , принципу излучения и краевым условиям

$$(1) \quad [\mathbf{n}^+(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-)] = 0 \text{ на } s; \quad [\mathbf{n}^+(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] = Y\mathbf{E}_t \text{ на } s.$$

Здесь «адмитанс»  $Y$  является ограниченным линейным оператором; индексы «+» и «-» соответственно обозначают предельные значения величин при стремлении к  $s$  со стороны, куда направлена нормаль  $\mathbf{n}^+$ , и с противоположной; у непрерывных (при переходе через  $s$ ) величин эти индексы не ставятся; индексом  $t$  (снизу) отмечаются тангенциальные к  $s$  составляющие векторов. Будем полагать, что  $\mathbf{E}_t$  на  $s$  принадлежит гильбертову пространству  $L^2(s)$ , элементами которого являются квадратично суммируемые тангенциальные к  $s$  вектор-функции. Оператор  $Y$  будем считать действующим из  $L^2(s)$  в  $L^2(s)$ . Таким образом, мы исключаем случай, когда часть  $s$  является идеальным проводником.

Прежде чем решать поставленную краевую задачу, определим требования, которым должен удовлетворять оператор  $Y$  для того, чтобы она имела единственное решение. Очевидно, для этого достаточно, чтобы поток вещественной части комплексного вектора Пойнтинга через поверхность, охватывающую как перчатка (с обеих сторон) поверхность  $s$ , был неположительным, т. е. чтобы

$$(2) \quad \operatorname{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}(\overline{\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-})] ds \leq 0,$$

при этом на  $s$  будут отсутствовать источники мощности. В неравенстве (2)  $d\mathbf{s} = \mathbf{n}^+ ds$ , а черта — знак комплексного сопряжения.

Используя второе условие (1), придадим неравенству (2) вид

$$(3) \quad \operatorname{Re} \int_{(s)} \mathbf{E}_t Y \overline{\mathbf{E}_t} ds \geq 0.$$

Это неравенство в метрике  $L^2(s)$  запишем так

$$(4) \quad \operatorname{Re} (\mathbf{E}_t, Y \mathbf{E}_t) \geq 0.$$



Поскольку

$$Y = Y_1 + iY_2, \quad \text{где} \quad Y_1 = \operatorname{Re} Y = \frac{Y + Y^*}{2}, \quad Y_2 = \frac{Y - Y^*}{2i},$$

а  $Y^*$  — эрмитово-сопряженный с  $Y$  оператор, то условие (4) приобретает следующую форму:

$$(5) \quad (\mathbf{E}_t, Y_1 \mathbf{E}_t) \geq 0.$$

При этом учтено, что  $Y_1$  и  $Y_2$  — самосопряженные в метрике  $L^2(s)$  операторы. Оператор  $Y_1$ , удовлетворяющий условию (5) (для любого  $\mathbf{E}_t \in L^2(s)$ ), называется неотрицательным оператором. Таким образом, для единственности решения рассматриваемой краевой задачи необходимо и достаточно выполнить условие

$$(6) \quad Y_1 = \operatorname{Re} Y \geq 0.$$

В дальнейшем будем полагать, что неравенство (6) выполнено.

Зададим на  $s$  семейство вспомогательных электрических поверхностных токов с плотностью  $\{\mathbf{K}_m\}$  ( $m=1, 2, \dots$ ). Поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_m$  (в пустоте), обозначим через  $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$ . Применяя к искомому полю  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и вспомогательному  $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$  лемму Лоренца, найдем

$$(7) \quad \int_{(s)} \{[\mathbf{E}(\mathbf{H}_m^+ - \mathbf{H}_m^-)] - [\mathbf{E}_m(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)]\} ds = - \int_{(v_0)} \mathbf{j}^\circ \mathbf{E}_m dv.$$

Учитывая (1) и известное соотношение

$$\mathbf{K}_m = [\mathbf{n}^+(\mathbf{H}_m^+ - \mathbf{H}_m^-)] \quad \text{на } s,$$

можно преобразовать (7) следующим образом:

$$(8) \quad \int_{(s)} (\mathbf{E} \mathbf{K}_m - \mathbf{E}_m Y \mathbf{E}_t) ds = \int_{(v_0)} \mathbf{j}^\circ \mathbf{E}_m dv.$$

Поскольку

$$\int_{(s)} \mathbf{E}_m Y \mathbf{E}_t ds = \int_{(s)} \mathbf{E}_t Y^* \overline{\mathbf{E}_{m,t}} ds$$

по определению  $Y^*$ , то (8) можно переписать в виде

$$(9) \quad (\mathbf{E}_t, \overline{\mathbf{K}}_m - Y^* \overline{\mathbf{E}_{m,t}}) = \int_{(v_0)} \mathbf{j}^\circ \mathbf{E}_m dv.$$

Введем обозначение

$$(10) \quad \mathbf{F}_m = \overline{\mathbf{K}}_m - Y^* \overline{\mathbf{E}_{m,t}}; \quad a_m = \int_{(v_0)} \mathbf{j}^\circ \mathbf{E}_m dv.$$

Перепишем (9) с использованием (10)

$$(11) \quad (\mathbf{E}_t, \mathbf{F}_m) = a_m, \quad m=1, 2, \dots$$

Будем считать заданное на  $s$  семейство вектор-функций  $\{\mathbf{K}_m\}$  линейно-независимым, принадлежащим пространству <sup>1</sup>  $H^1(s)$ , а их линейные комбинации — всюду плотными в нем. При этом, как легко показать,  $\mathbf{F}_m \in L^2(s)$  и левая часть (11) имеет смысл. Из равенств (11) следует, что  $\{a_m\}$  являются коэффициентами Фурье искомой величины  $\mathbf{E}_t$  по биортогональной к  $\{\mathbf{F}_m\}$  системе функций. Чтобы использовать (11) для определения  $\mathbf{E}_t$  на  $s$ , необходимо показать, что семейство  $\{\mathbf{F}_m\}$  полно в  $L^2(s)$ . Для этого докажем, что из справедливости равенств

$$(\mathbf{A}, \mathbf{F}_m) = 0, \quad m=1, 2, \dots,$$

<sup>1</sup> Здесь и ниже  $H^\alpha(s)$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ) — пространство Соболева — Слободецкого [1].

при любом  $\mathbf{A} \in L^2(s)$  следует, что  $\mathbf{A} \equiv 0$  на  $s$ . Подставляя сюда значение  $\mathbf{F}_m$  из (10), получим

$$(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{K}}_m) - (\mathbf{A}, Y^* \bar{\mathbf{E}}_{m,t}) = 0$$

или

$$(12) \quad (\mathbf{A}, \bar{\mathbf{K}}_m) - (Y\mathbf{A}, \bar{\mathbf{E}}_{m,t}) = 0.$$

Лемма Лоренца позволяет написать

$$(Y\mathbf{A}, \bar{\mathbf{E}}_{m,t}) = (\mathbf{E}_t\{Y\mathbf{A}; s\}, \bar{\mathbf{K}}_m),$$

после чего равенству (12) можно придать вид

$$(13) \quad (\mathbf{A} - \mathbf{E}_t\{Y\mathbf{A}; s\}, \bar{\mathbf{K}}_m) = 0, \quad m=1, 2, \dots$$

Здесь  $\mathbf{E}\{Y\mathbf{A}; s\}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого поверхностным током, распределенным с плотностью  $Y\mathbf{A}$  на  $s$ . Так как  $\mathbf{A} \in L^2(s)$  по определению, то и  $Y\mathbf{A} \in L^2(s)$ . На основании известной теоремы [2, 3], если  $Y\mathbf{A} \in L^2(s)$ , то  $\mathbf{E}_t\{Y\mathbf{A}; s\} \in H^{-1}(s)$ . Так как  $L^2(s) \subset H^{-1}(s)$ , то

$$(14) \quad \mathbf{A} - \mathbf{E}_t\{Y\mathbf{A}; s\} \in H^{-1}(s).$$

Поскольку линейные комбинации  $\mathbf{K}_m$  плотны в  $H^1(s)$ , то из (13) следует, что функционал (14) равен нулю на всех функциях  $\mathbf{K} \in H^1(s)$ , на которых он определен, т. е.

$$(14') \quad \mathbf{A} - \mathbf{E}_t\{Y\mathbf{A}; s\} \equiv 0 \text{ (на } s).$$

Из этого тождества следует также, что  $\mathbf{E}_t\{Y\mathbf{A}; s\} \in L^2(s)$ , поскольку  $\mathbf{A} \in L^2(s)$  по определению.

Воздействуя на (14') оператором  $Y$  слева, найдем

$$(15) \quad \mathbf{B} - Y\mathbf{E}_t\{\mathbf{B}; s\} \equiv 0, \text{ где } \mathbf{B} = Y\mathbf{A}.$$

Отсюда следует на основании теоремы единственности (см. Приложение 1), что  $\mathbf{B}$  равно нулю на  $s$ .

Если оператор  $Y$  имеет обратный<sup>2</sup>  $Y^{-1}$  (что мы всегда будем полагать), то  $\mathbf{A} = Y^{-1}\mathbf{B} = 0$  на  $s$  и, таким образом, полнота  $\{\mathbf{F}_m\}$  в  $L^2(s)$  доказана.

Покажем еще, что семейство  $\{\mathbf{F}_m\}$  линейно независимо, т. е. из равенства

$$(16) \quad \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{F}_n = 0 \text{ на } s,$$

где  $c_n$  — постоянные, следует  $c_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ).

Учитывая обозначение (10), запишем (16) в виде

$$(17) \quad \sum_{n=1}^N c_n (\bar{\mathbf{K}}_n - Y^* \bar{\mathbf{E}}_{n,t}) = 0 \text{ на } s.$$

Обозначение, которое мы вводили выше, позволяет написать

$$\mathbf{E}_{n,t} \equiv \mathbf{E}_t\{\mathbf{K}_n; s\},$$

после чего, учитывая линейность операторов  $\mathbf{E}_t\{\cdot\}$  и  $Y^*$ , перепишем (17) следующим образом:

$$(18) \quad \bar{\mathbf{J}} - Y^* \bar{\mathbf{E}}_t\{\mathbf{J}; s\} = 0 \text{ на } s,$$

где

$$\mathbf{J} \equiv \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n.$$

<sup>2</sup> Достаточно, чтобы оператор  $Y^{-1}$  был левым обратным.

$$\mathbf{J} \equiv \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \mathbf{K}_n = 0 \quad \text{на } s.$$

Ввиду линейной независимости  $\{\mathbf{K}_n\}$  отсюда вытекают равенства  $c_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ) и, следовательно, линейная независимость  $\{\mathbf{F}_n\}$ . Поскольку это семейство также полно, то равенства (11) позволяют определить  $\mathbf{E}_t$  на  $s$  (например, переходом от  $\{\mathbf{F}_m\}$  к ортонормированному в  $L^2(s)$  семейству функций или путем замены (11) системой линейных уравнений для коэффициентов ряда по подходящей системе функций, при помощи которого можно представить  $\mathbf{E}_t$  на  $s$  [2, 3]; можно также использовать метод Алксидзе [4, 3]). Определив  $\mathbf{E}_t$  на  $s$  одним из указанных способов, можно найти  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  во всем пространстве как поле, создаваемое эквивалентным электрическим током, распределенным на  $s$  с поверхностной плотностью  $\mathbf{Y}\mathbf{E}_t$ , через вектор Герца [3]. Более подробно мы на этом не останавливаемся, так как это детально описано в [2–4].

Представляет особый интерес частный случай, когда оператор  $\mathbf{Y}$  задается матрицей

$$(19) \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},$$

элементы которой — скалярные функции, определенные на  $s$ . Операторы  $\mathbf{Y}^*$  в  $Y_1$  при этом имеют вид

$$(20) \quad \mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{22} \end{pmatrix}; \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Y_{11} & \frac{Y_{12} + \bar{Y}_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21} + \bar{Y}_{12}}{2} & \operatorname{Re} Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Условие (6) будет выполнено, если

$$(20') \quad \operatorname{Re} Y_{11} \geq 0; \quad \operatorname{Re} Y_{22} \geq 0; \quad 4 \operatorname{Re} Y_{11} \operatorname{Re} Y_{22} \geq |Y_{12} + \bar{Y}_{21}|^2.$$

Примером, когда поверхность  $s$  характеризуется импедансом типа (19), является поверхность с анизотропной проводимостью, образованная решеткой из двух взаимно перпендикулярных частых систем узких параллельных лент с различными проводимостями.

При этом

$$(21) \quad Y_{12} = Y_{21} = 0, \quad Y_{11} \neq 0, \quad Y_{22} \neq 0.$$

Случай, когда часть поверхности  $s$  является идеально проводящей, может быть рассмотрен аналогичным методом. При этом пространство  $L^2(s)$ , которому принадлежит  $\mathbf{E}_t$  на  $s$ , необходимо заменить пространством  $L_R^2(s)$  [3].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем, что если поле, возбуждаемое поверхностным током  $\mathbf{V}$ , распределенным на  $s$ , удовлетворяет краевому условию (15), то  $\mathbf{V} \equiv 0$  на  $s$ . Достаточно сделать это в предположении, что среда обладает некоторой малой объемной проводимостью  $\sigma$ . Тогда для указанного поля выполняется комплексная теорема Пойнтинга, которую можно записать в виде

$$(П.1) \quad \operatorname{Re} \int_{(s)} \mathbf{E}[\mathbf{n}^+(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] ds = - \int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv,$$

где  $v_\infty$  — все бесконечное пространство.

Так как скачок  $\mathbf{H}_t$  на  $s$  определяет ток  $\mathbf{V}$ , то это равенство можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} \mathbf{E} \bar{\mathbf{V}} ds = - \int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv$$

или, учитывая краевое условие (15),

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} \mathbf{E}_t \overline{Y \mathbf{E}_t} ds = - \int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv.$$

Вследствие неравенства (3) левая часть здесь неотрицательна, а правая неположительна, поэтому отсюда следует, что  $\int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv = 0$ , т. е.  $\mathbf{E} \equiv 0$

всюду.

Из уравнений Максвелла заключаем, что и  $\mathbf{H} \equiv 0$  всюду. Следовательно,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{n}^+ (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] = 0 \text{ на } s,$$

и доказательство закончено.

В случае среды без потерь ( $\sigma = 0$ ) доказательство следует из принципа «предельного поглощения» (исключая случай, когда  $\operatorname{Re} Y = 0$  и  $\omega = \omega_{\text{рез}}$ ).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Аналогично доказывается равенство поверхностного тока  $\mathbf{J}$  нулю на  $s$  при краевом условии (18). Действительно, для поля, возбуждаемого током  $\mathbf{J}$ , распределенным на  $s$ , опять справедливо равенство (П.1) или

$$\operatorname{Re} \int_s \mathbf{E} \overline{\mathbf{J}} ds = - \int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv.$$

Подставляя сюда значение  $\overline{\mathbf{J}}$  из условия (18), найдем

$$(П.2) \quad \operatorname{Re} \int_{(s)} \mathbf{E}_t Y \overline{\mathbf{E}_t} ds = - \int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv.$$

Левую часть можно представить в виде

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} \mathbf{E}_t Y \overline{\mathbf{E}_t} ds = \operatorname{Re} (Y \overline{\mathbf{E}_t}, \overline{\mathbf{E}_t}) = \operatorname{Re} (\overline{\mathbf{E}_t}, Y \overline{\mathbf{E}_t}) = (\overline{\mathbf{E}_t}, Y_1 \overline{\mathbf{E}_t}).$$

Используя эту запись, перепишем равенство (П.2) в форме

$$(П.3) \quad (\overline{\mathbf{E}_t}, Y_1 \overline{\mathbf{E}_t}) = - \int_{(v_\infty)} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv.$$

Так как  $\overline{\mathbf{E}_t} \in L^2(s)$ , то, учитывая (6), убеждаемся, что левая часть (П.3) неотрицательна, а правая неположительна. Поэтому рассуждения, аналогичные приведенным в Приложении 1, позволяют утверждать, что  $\mathbf{J} \equiv 0$  на  $s$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Функциональный анализ (справочная математическая библиотека) / Под ред. Крейна С. Г. М.: Наука, 1972.
2. Фельд Я. Н. Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 1, с. 28.
3. Фельд Я. Н. Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 3, с. 456.
4. Алексидзе М. А. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1968, т. 8, № 5, с. 965.

Поступила в редакцию  
10.IX.1982.

УДК 621.396.67.01

## О МОЩНОСТИ, ИЗВЛЕКАЕМОЙ ПРИЕМНОЙ АНТЕННОЙ ИЗ ПАДАЮЩЕГО НА НЕЕ ПОЛЯ

*Фельд Я. Н.*

Получены различные варианты формул для мощности, поступающей в приемник, учитывающих рассогласование на концах фидерного тракта, при произвольной форме падающей на антенну волны. В частном случае, когда приемник полностью согласован с трактом, одна из них переходит в формулу Бурштейна – Кинбера.

При различных добавочных условиях определена верхняя граница принимаемой мощности и найдены оптимальные распределения поля, при которых эта мощность максимальна.

Рассматривается вопрос о мощности, поступающей в приемник при падении на антенну произвольной (не обязательно плоской) волны. Классические результаты здесь принадлежат М. С. Нейману [1], который для линейной поляризации и локально плоского характера падающей волны дал полное решение рассматриваемой задачи. Случай любой поляризации рассмотрен иным методом в [2]. При произвольной конфигурации падающей волны соответствующую формулу получил Э. Л. Бурштейн [3] и позднее Б. Е. Кинбер [4]. При выводе они пользовались различными допущениями, хотя пришли к одному и тому же окончательному результату.

Вернемся к этой задаче для того, чтобы

- 1) выяснить, при каких условиях справедлива формула Бурштейна – Кинбера для мощности, поступающей в приемник;
- 2) получить формулу, учитывающую влияние рассогласования тракта с антенной и приемником;
- 3) дать другие, более простые, варианты формул;
- 4) оценить верхнюю границу мощности, поступающей в приемник при заданном падающем поле и некоторых добавочных условиях, и найти распределение поля антенны (в режиме передачи), обеспечивающее реализацию указанной границы.

Рассмотрим произвольную приемную антенну, соединенную с приемником одномодовым трактом (остальные моды считаются затухающими). Для определенности антенна изображена на рис. 1 в виде рупора с волноводным трактом. Пусть на антенну падает первичная электромагнитная волна  $E^0, H^0$  произвольной конфигурации, возбуждаемая электрическими и магнитными токами, распределенными с плотностью  $J$  и  $J^\mu$  в объеме  $v_0$ , расположенном вне антенной системы. Определим мощность  $P$ , поступающую при этом в приемник.

Обозначим полное поле, создаваемое токами  $J$  и  $J^\mu$  при наличии антенны, буквами  $E, H$  и введем еще вспомогательное поле  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ , возбуждаемое этой же антенной в режиме передачи, когда вместо приемника включен генератор, возбуждающий в тракте волну  $E^1, H^1$ , бегущую в направлении к рупору. Применяя к полям  $E, H$  и  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  лемму Лоренца в бесконечном пространстве, ограниченном изнутри поверхностью  $s_1$  (совпадающей с поверхностью антенно-фидерной системы) и сечением  $s$  внутри тракта (см. рис. 1), найдем

$$(1) \quad \int_s \{ [E\mathcal{H}] - [\mathcal{E}H] \} ds = \int_{v_0} (J\mathcal{E} - J^\mu\mathcal{H}) dv.$$

При этом мы учли, что поверхность антенны и тракта идеально проводящая. Поскольку тракт одноимодовый, поля в его сечении  $s$  можно записать в виде

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{E}, \mathcal{H} = (E^1, H^1) + R_{-1}(E^{-1}, H^{-1}), \\ E, H = C_{-1}(E^{-1}, H^{-1}) + R_1 C_{-1}(E^1, H^1). \end{cases}$$

Здесь  $E^{-1}, H^{-1}$  — поле распространяющейся в тракте основной моды, движущейся по направлению к приемнику. Амплитуды их нормированы любым фиксированным образом и они связаны соотношением

$$(2') \quad E^{-1} = \bar{E}^1, \quad H^{-1} = -\bar{H}^1,$$

где черта — знак комплексного сопряжения;  $C_{-1}$  — амплитуда возбуждения волны  $E^{-1}, H^{-1}$ , а  $R_1$  — коэффициент отражения ее от приемника в режиме

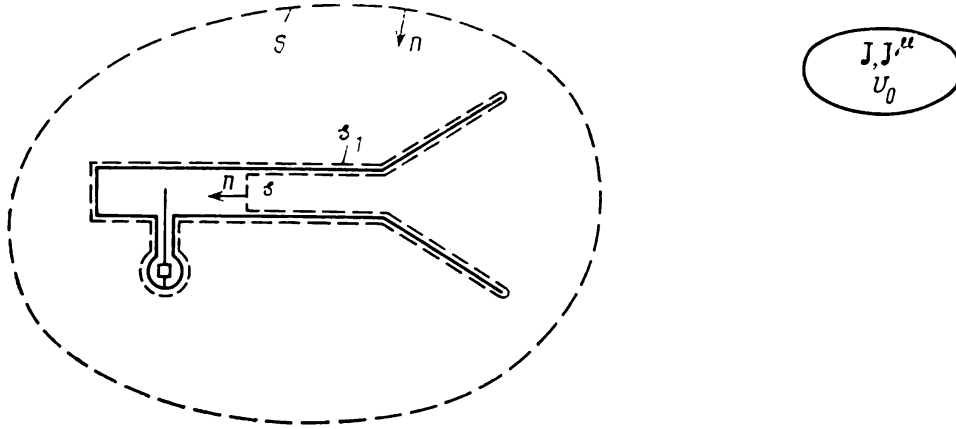


Рис. 1

приема;  $R_{-1}$  — коэффициент отражения волны  $E^1, H^1$  от рупора. Подставляя (2) и (2') в левую часть (1), получим

$$C_{-1}(1 - R_1 R_{-1}) \int_s \{[\bar{E}^1 H^1] + [E^1 \bar{H}^1]\} ds = \int_{v_0} (J\mathcal{E} - J^\mu \mathcal{H}) dv$$

или, разрешая это равенство относительно  $C_{-1}$ ,

$$(3) \quad C_{-1} = \frac{1}{1 - R_1 R_{-1}} \frac{\int_{v_0} (J\mathcal{E} - J^\mu \mathcal{H}) dv}{2 \operatorname{Re} \int_s [E^1 \bar{H}^1] ds}.$$

Определим теперь ваттную мощность, поглощаемую в режиме приема, т. е. поступающую в приемник (потери в тракте пренебрегаем). Она, очевидно, равна

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s [E \bar{H}] ds.$$

Подставляя сюда поле из второй формулы (2), найдем после элементарных преобразований

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{2} |C_{-1}|^2 \operatorname{Re} \int_s [E^1 \bar{H}^1] ds.$$

Используя формулу (3), получим выражение для искомой мощности

$$(4) \quad P = \frac{|R_1|^2 - 1}{8 |1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{\left| \int_{v_0} (J\mathcal{E} - J^\mu \mathcal{H}) dv \right|^2}{\operatorname{Re} \int_s [E^1 \bar{H}^1] ds}.$$

Формуле (4) можно придать несколько иной вид. Для этого окружим антенно-фидерную систему произвольной поверхностью  $S$  (рис. 1) и применим к области, находящейся вне ее, лемму Лоренца для полей  $E^0, H^0$  и  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ . Очевидно, будем иметь

$$(5) \quad \int_{v_0} (\mathbf{J}\mathcal{E} - \mathbf{J}^{\mu}\mathcal{H}) dv = \int_S \{[\mathbf{E}^0\mathcal{H}] - [\mathcal{E}\mathbf{H}^0]\} ds,$$

где  $ds = \mathbf{n}ds$  направлено внутрь поверхности  $S$ .

Лемма Лоренца для полей  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  в области вне  $S$  дает

$$\int_{v_0} (\mathbf{J}\mathcal{E} - \mathbf{J}^{\mu}\mathcal{H}) dv = \int_S \{[\mathbf{E}\mathcal{H}] - [\mathcal{E}\mathbf{H}]\} ds.$$

Если положить  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^r$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^r$ , где  $\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$  — рассеянное антенное поле, то, сравнивая два предыдущих равенства, получим интересное тождество

$$(5') \quad \int_S \{[\mathbf{E}^r\mathcal{H}] - [\mathcal{E}\mathbf{H}^r]\} ds = 0.$$

Автор работы [3], по-видимому, не обратил внимание на существование тождества (5'), и поэтому вынужден был предположить, что рассеянное поле  $\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$  мало.

Подставляя выражение (5) в (4), найдем

$$P = \frac{1 - |R_1|^2}{8|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{\left| \int_S \{[\mathbf{E}^0\mathcal{H}] - [\mathcal{E}\mathbf{H}^0]\} ds \right|^2}{-\operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds}$$

или

$$(6) \quad P = \frac{1 - |R_1|^2}{8|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{\left| \int_S \{\mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{H}^0] + \mathcal{H}[\mathbf{n}\mathbf{E}^0]\} ds \right|^2}{-\operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds}.$$

Из формулы (5) непосредственно следует, что мощность  $P$ , определяемая выражением (6), не зависит от выбора поверхности  $S$ .

В частном случае, когда  $R_1 = 0$ , т. е. приемник полностью согласован с трактом, эта формула переходит в формулу, аналогичную впервые полученной в [3] при предположении, что доля рассеиваемой антенной мощности много меньше принятой. В работе [4] это ограничение снято, но предполагается, что антенна согласована с трактом. Из общей формулы (6) следует, что единственным требованием, при котором справедливы формулы, полученные в [3, 4], является согласование тракта не с антенной, а с приемником.

Формулу (6) можно несколько упростить. Действительно, поле  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  можно представить вне поверхности  $S$  в виде суммы двух полей:

$$(7) \quad \mathbf{E}^0 = \mathbf{e} + \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{H}^0 = \mathbf{h} + \mathbf{h}^1,$$

где  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  — поле, создаваемое теми же источниками, что и  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ , и удовлетворяющее краевому условию  $e_t = 0$  на  $S$ ;  $\mathbf{e}^1, \mathbf{h}^1$  — поле, не имеющее источников вне  $S$  и удовлетворяющее краевому условию  $e_t^1 = \mathbf{E}_t^0$  на  $S$ . Используя (7), найдем

$$\int_S \{\mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{H}^0] + \mathcal{H}[\mathbf{n}\mathbf{E}^0]\} ds = \int_S \{\mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{h}] + \mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{h}^1] + \mathcal{H}[\mathbf{n}\mathbf{e}^1]\} ds.$$

<sup>1</sup> Область  $v_0$  находится вне  $S$ .

Применяя лемму Лоренца к полям  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  и  $\mathbf{e}^i$ ,  $\mathbf{h}^i$  в пространстве вне  $S$ , убеждаемся, что интеграл по  $S$  от суммы двух последних членов обращается в нуль и

$$(8) \quad \int_S \{\mathfrak{E}[\mathbf{nH}^0] + \mathfrak{H}[\mathbf{nE}^0]\} ds = \int_S \mathfrak{E}[\mathbf{nh}] ds.$$

Подставляя (8) в (6), получим следующую упрощенную формулу:

$$(9) \quad P = \frac{1 - |R_1|^2}{8|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{\left| \int_S \mathfrak{E}[\mathbf{nh}] ds \right|^2}{\left| \operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds \right|}.$$

Здесь вместо векторов  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$  стоит всего один вектор  $\mathbf{h}$ . Однако определение его в ряде случаев может оказаться сложнее. Если поверхность  $S$  выбрана гладкой и радиусы кривизны ее велики по сравнению с длиной волны, то в приближении Кирхгофа  $\mathbf{h}_t = 2\mathbf{H}_t^0$  на освещенной части  $S$  и  $\mathbf{h}_t = 0$  в области тени. В этом случае

$$(10) \quad P = \frac{1 - |R_1|^2}{2|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{\left| \int_{S_{\text{oc}}} \mathfrak{E}[\mathbf{nH}^0] ds \right|^2}{\left| \operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds \right|},$$

где  $S_{\text{oc}}$  — освещенная часть  $S$ .

В частности, при  $R_1 = 0$  мощность, поступающая в приемник, равна (см. (9)).

$$(11) \quad P = \frac{1}{8} \frac{\left| \int_S \mathfrak{E}[\mathbf{nh}] ds \right|^2}{\left| \operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds \right|}.$$

Оценим, исходя из формулы (11), максимально возможное значение  $P$  при заданных  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$ ,  $S$  и условиях (14). Используя неравенство Коши — Буняковского, можно написать<sup>2</sup>

$$(12) \quad \left| \int_S \mathfrak{E}[\mathbf{nh}] ds \right|^2 \leq \int_S |\mathbf{nh}|^2 \frac{ds}{\alpha} \int_S |\mathfrak{E}|^2 \alpha ds.$$

Здесь  $\alpha$  — произвольная достаточно гладкая положительная функция, заданная на  $S$ . Целесообразность ее введения будет видна из дальнейшего.

Неравенство (12) позволяет получить

$$(13) \quad P \leq \frac{\int_S |\mathbf{nh}|^2 \alpha^{-1} ds}{8 \left| \operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds \right|} \int_S |\mathfrak{E}|^2 \alpha ds.$$

Соотношение (13) справедливо при любом выборе замкнутой поверхности  $S$ , необходимо только, чтобы антенна находилась внутри  $S$ , а источники поля  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  вне  $S$ . Рассмотрим случай, когда поверхность  $S$  целиком находится в дальней зоне рассматриваемой антенны. Тогда на ней

$$(14) \quad \mathfrak{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\mathbf{i}_R \mathfrak{E}], \quad \mathbf{i}_R \mathfrak{E} = 0,$$

где  $\mathbf{i}_R$  — орт, совпадающий с направлением радиус-вектора точки наблюдения; начало координат выбирается в области расположения антенны. На основании закона сохранения энергии можно написать, учиты-

<sup>2</sup> Это неравенство можно усилить, заменив справа  $\mathfrak{E}$  на  $\mathfrak{E}_t$ .



вая (14) и условие  $R_{-1}=0$ ,

$$(15) \quad -\operatorname{Re} \int_S [\mathfrak{E}\bar{\mathfrak{H}}] ds \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_S |\mathfrak{E}|^2 \cos \varphi ds = \left| \operatorname{Re} \int_S [E^1 \bar{H}^1] ds \right|.$$

Здесь  $\varphi$  — угол между ортами  $i_R$  и  $-\mathbf{n}$ .

Используя (15) и полагая  $\alpha \equiv \cos \varphi$ , придадим неравенству (13) следующий вид:

$$(16) \quad P \leq \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_S |[\mathbf{nh}]|^2 \frac{ds}{\cos \varphi}, \quad 0 < \cos \varphi \leq 1.$$

Очевидно,  $\cos \varphi \equiv 1$ , если  $S$  — сфера с центром в начале координат.

Легко видеть, что равенство в (16) реализуется при

$$(17) \quad \mathfrak{E}_t = \frac{A}{\cos \varphi} [\mathbf{n}\bar{\mathfrak{h}}] \text{ на } S,$$

где  $A$  — константа. В этом можно убедиться, подставляя (17) в (11) с учетом (15). Таким образом, приемная антенна будет извлекать из падающего поля  $E^0, H^0$  наибольшую мощность, если она в режиме передачи создает на  $S$  поле с касательной составляющей электрического вектора, равной выражению (17). Нормальная компонента  $\mathfrak{E}_n$  не входит в (11).

В приближении Кирхгофа формула (17) примет вид

$$(17') \quad \mathfrak{E}_t = \begin{cases} (2A/\cos \varphi)[\mathbf{n}\bar{H}^0] & \text{на освещенной части } S, \\ 0 & \text{на затененной части } S. \end{cases}$$

В этом же приближении значение  $P_{\max}$ , равное правой части (16), сводится к

$$(18) \quad P_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_{S_{\text{ос}}} |[\mathbf{n}H^0]|^2 \frac{ds}{\cos \varphi}.$$

Правая часть (16) не зависит от конструкции антенны и при выбранной поверхности  $S$  целиком определяется заданными источниками первичного падающего поля  $E^0, H^0$ . Таким образом, доказано, что поступающая в приемник мощность ограничена сверху (при условии, что  $S$  находится в дальней зоне антенны) правой частью неравенства (16), которая конечна.

Предположение, что фиксированная поверхность  $S$  находится в дальней зоне антенны, по существу эквивалентно ограничению направленности, а значит, и КНД антенны. Действительно, при росте КНД дальняя зона удаляется и, чтобы поверхность  $S$  не вышла из нее, необходимо ограничить направленность.

Кстати, утверждение, что КНД антенны неограничен, не имеет смысла ни для какой фиксированной точки наблюдения, находящейся на конечном расстоянии от антенны. Действительно, при неограниченном росте КНД точка наблюдения неминуемо окажется в ближней зоне антенны, где понятие КНД не имеет смысла, так же как и понятие диаграммы, через которую он обычно выражается.

Могут представить интерес еще другие варианты формул типа (6) и (11). Все они получаются путем специального выбора поверхности  $S$ . Так, например, рассмотрим теперь в качестве  $S$  поверхность, совпадающую с наружной поверхностью антенны и ее раскрывом  $\Sigma$  (см. рис. 2). Тогда, пренебрегая токами, затекающими на наружную поверхность антенны в режиме передачи, придадим формуле (6) вид

$$(19) \quad P = \frac{\left| \int_{\Sigma} \{ \mathfrak{E}[\mathbf{n}H^0] + \mathfrak{H}[\mathbf{n}E^0] \} ds \right|^2}{8 \left| \operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\mathfrak{E}\bar{\mathfrak{H}}] ds \right|}.$$

При этом мы учли, что  $\mathcal{E}_t=0$  на металле, положили  $R_1=R_{-1}=0$  и использовали закон сохранения энергии типа (15) для преобразования знаменателя формулы (6). Формула (19) сама по себе представляет интерес, так как определяет  $P$  через невозмущенное поле  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  падающей волны и поле  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  в режиме передачи непосредственно в раскрые антенны. Далее будем считать, что касательные составляющие векторов поля в рас-

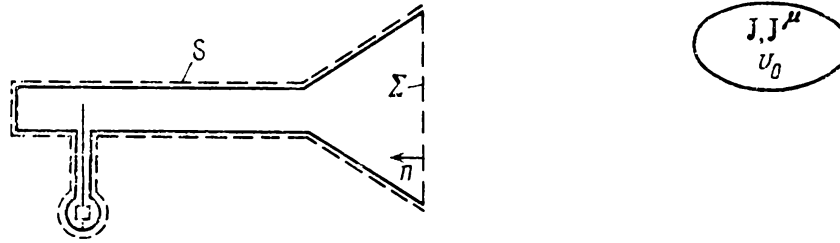


Рис. 2

крые связаны соотношением, аналогичным имеющему место в локально-плоской волне,

$$(20) \quad [\mathbf{n}\mathcal{H}] = Y\mathcal{E}_t, \quad \operatorname{Re} Y > 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

где  $Y$  — адмитанс, являющийся функцией точки на  $\Sigma$ . Тогда формулу (19) можно переписать следующим образом:

$$(21) \quad P = \frac{\left| \int_{\Sigma} \mathcal{E}_t \{[\mathbf{n}\mathbf{H}^0] - Y\mathbf{E}_t^0\} ds \right|^2}{8 \int_{\Sigma} |\mathcal{E}_t|^2 \operatorname{Re} Y ds}.$$

Применив к числителю неравенство Коши — Буняковского, получим оценку сверху

$$(22) \quad P \leq \frac{1}{8} \int_{\Sigma} |[\mathbf{n}\mathbf{H}^0] - Y\mathbf{E}_t^0|^2 \frac{ds}{\operatorname{Re} Y}.$$

Очевидно, равенство здесь имеет место при

$$(23) \quad \mathcal{E}_t = \frac{A}{\operatorname{Re} Y} \{[\mathbf{n}\bar{\mathbf{H}}^0] - \bar{Y}\bar{\mathbf{E}}_t^0\} \quad \text{на } \Sigma,$$

где  $A$  — константа.

Таким образом, в приемник поступает максимальная мощность  $P_{\max}$ , равная правой части (22), если в раскрые  $\Sigma$  создается (в режиме передачи) оптимальное распределение (23).

Формулы (21)–(23) получены при пренебрежении токами, затекающими на наружную поверхность антенны в режиме передачи при полном согласовании тракта ( $R_1=R_{-1}=0$ ) и при выполнении условий (20). Остановимся на последних подробнее. Второе из них равносильно требованию, чтобы ваттный поток мощности в любой точке  $\Sigma$  был направлен наружу в режиме передачи. Что касается первого условия (20), то оно требует только, чтобы силовые линии электрического и магнитного полей были ортогональны<sup>3</sup> в раскрые  $\Sigma$ . Более существенно то, что функция  $Y$  может зависеть от распределения  $\mathcal{E}_t$  на  $\Sigma$ , чего мы не учитываем, полагая функцию  $Y$  заданной.

Наконец, еще один вариант формулы типа (11) можно получить, стягивая  $S$  к поверхности  $s_1+s$  (рис. 1). Поскольку  $\mathcal{E}_t=0$  на  $s_1$  и  $\mathcal{E}_t=(1+R_{-1})\mathbf{E}_t^1$  на  $s$  (последнее следует из (4) в предположении, что нормировка обеспечивает выполнение равенства  $\mathbf{E}^{-1}=\mathbf{E}^1$  на  $s$ ), то форму-

<sup>3</sup> От этого требования легко избавиться.

ла (11) приобретает вид

$$(24) \quad P = \frac{1+R_{-1}}{8} \frac{\left| \int_{\Sigma} \mathbf{E}^1[\mathbf{nh}] ds \right|^2}{-\operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{H}}^1] ds}.$$

Однако теперь  $S=s_1+s$  и определение  $\mathbf{h}$  при краевом условии  $e_t=0$  на  $s_1+s$  значительно сложнее.

Выше при определении максимальной мощности, поступающей в приемник, ставились добавочные условия типа (14) на  $S$  или (20) на  $\Sigma$ . Может возникнуть естественный вопрос: зачем эти условия, если приемная антенна не может принять больше мощности, чем излучает передающая, т. е. принимаемая мощность ограничена и задача о ее максимизации должна иметь решение без добавочных условий. Ответ на этот вопрос очевиден. При постановке задачи фиксировалась не мощность, излучаемая первичными источниками — токами  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}^\mu$ , а сами эти токи (или первичное поле  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$ , что то же самое). Таким образом, пользуясь терминологией теории цепей, имеем задачу с заданным генератором тока, где ток фиксирован, а отдаваемая им мощность может быть любой в зависимости от нагрузки. В нашем случае генератором являются заданные токи  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}^\mu$ , а нагрузкой — приемная антенна. Перестраивая последнюю, т. е. меняя ее направленность, можно отобрать у источников любую мощность. Поэтому введенные выше добавочные условия ограничивают, по существу, направленность приемной антенны и практически устраняют ее влияние на передающую (токи  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}^\mu$ ). При этом мощность, излучаемая последней, оказывается фиксированной и равной

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \int_{S_{\Sigma}} \operatorname{Re}[\mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{H}}^0] ds,$$

где  $S_{\Sigma}$  — поверхность, окружающая токи  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}^\mu$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман М. С. Изв. электропромышленности слабого тока, 1935, № 8.
2. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенно-фидерные устройства. Ч. 2, М.: ВВИА им. Жуковского, 1959.
3. Бурштейн Э. Л. Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, № 2, с. 186.
4. Кинбер Б. Е. Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 4, с. 654.

Поступила в редакцию  
25.II.1983

УДК 621.396.67.01

## О МАКСИМУМЕ МОЩНОСТИ, ПРИНИМАЕМОЙ АНТЕННОЙ В СРЕДЕ С ПОТЕРЯМИ

Фельд Я. Н.

Показано, что при фиксированном первичном падающем поле в среде с потерями максимальная мощность, принимаемая антенной, конечна. При этом нет необходимости ограничивать направленность приемной антенны, как это следует делать для получения конечного максимума при отсутствии потерь в среде. Даны формулы для максимума принимаемой мощности и оптимального распределения поля, которое должна создавать рассматриваемая антенна, в режиме передачи на некоторой окружающей ее поверхности, чтобы в режиме приема она обеспечивала прием максимальной мощности. Полученные результаты проиллюстрированы на примере линейной проволочной антенны.

Задача о максимизации принятой мощности из падающей на приемную антенну первичной волны  $E^0$ ,  $H^0$ , возбуждаемой заданными источниками — токами  $J$  и  $J^*$ , не имеет решения. Для того чтобы такой максимум существовал, необходимо, как это показано в [1], ограничить тем или иным способом направленность приемной антенны. Однако возможен иной (в некотором смысле более общий) подход к рассматриваемой задаче, подсказываемый общей теорией цепей, не требующий ограничения направленности и в то же время обеспечивающий существование конечного максимума принимаемой мощности. Действительно, известно, что генератор тока (ток фиксирован) может отдать любую мощность в зависимости от величины сопротивления нагрузки. В то же время, если генератор тока зашунтирован внутренней фиксированной проводимостью  $Y_r$  (см. рис. 1), такая система может отдать в нагрузку максимальную мощность, равную  $|J|^2/8 \operatorname{Re} Y_r$ , при условии, что проводимость нагрузки  $Y_n$  равна  $\bar{Y}_r$  (черта — знак комплексного сопряжения). Таким образом, в случае генератора, изображенного на рис. 1, максимум существует без каких-либо добавочных условий. Чтобы он был конечен, необходимо и достаточно выполнения неравенства  $\operatorname{Re} Y_r \neq 0$ .

Переходя к нашей задаче о приемной антенне, сопоставим генератор тока первичным источникам поля  $E^0$ ,  $H^0$ , а шунтирующую проводимость — среде, окружающей их; реактивная проводимость последней характеризуется величиной  $i\omega\epsilon'$ , а активная — удельной проводимостью  $\sigma$  среды. По аналогии для существования конечного максимума мощности, поступающей в нагрузку — приемную антенну — достаточно, чтобы проводимость среды  $\sigma \neq 0$ . Необходимо, следовательно, рассматривать среду с потерями, что также более соответствует реальным условиям. Потери в среде далее будем учитывать, вводя комплексное  $\epsilon$  и комплексное волновое число  $k$  ( $\operatorname{Im} k < 0$ ; зависимость от времени  $\exp i\omega t$ ). При полном согласовании фидерного (одномодового) тракта с приемником мощность, поступающая в последний<sup>1</sup>, определяется одной из следующих формул [1]:

<sup>1</sup> А точнее мощность, проходящая через выбранное сечение  $s$  тракта, где высшие типы волн успели затухнуть. При наличии потерь в тракте она несколько отличается от поступающей в приемник.

$$(1) \quad P = \frac{\left| \int_{v_0} (\mathbf{J}\mathcal{E} - \mathbf{J}^\mu \mathcal{H}) dv \right|^2}{-8 \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}' \overline{\mathbf{H}}'] ds}$$

$$(2) \quad P = \frac{\left| \int_s \{ \mathcal{E}[\mathbf{nH}^0] + \mathcal{H}[\mathbf{nE}^0] \} ds \right|^2}{-8 \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}' \overline{\mathbf{H}}'] ds}$$

$$(3) \quad P = \frac{\left| \int_s \mathcal{E}[\mathbf{nh}] ds \right|^2}{-8 \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}' \overline{\mathbf{H}}'] ds}$$

Здесь  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}^\mu$  — плотности первичных источников (электрических и магнитных токов) распределены в объеме  $v_0$ , расположенном вдали от приемной антенны;  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  — поле рассматриваемой антенны, когда она работа-

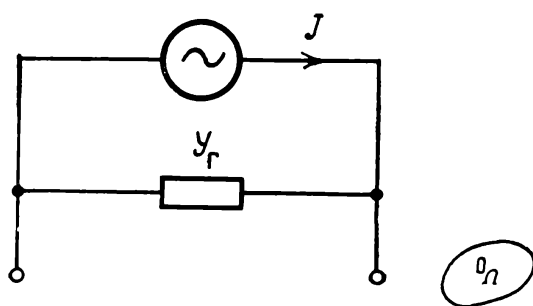


Рис. 1

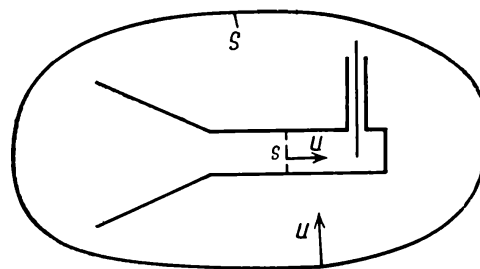


Рис. 2

ет в режиме передачи<sup>2</sup> и в тракте по направлению к антенне бежит основная мода  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали, направленный внутрь произвольной геометрической поверхности  $S$ , охватывающей приемную антенно-фидерную систему, и по направлению к приемнику на сечении  $s$  тракта,  $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$  (рис. 2);  $\mathbf{h}$  — магнитный вектор поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ , создаваемого теми же источниками, что и поле  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$ , но удовлетворяющего условию  $e_t = 0$  на  $S$ .

Очевидно, тангенциальные составляющие  $\mathcal{E}_t$  и  $\mathcal{H}_t$  в общем случае связаны между собой на поверхности  $S$  соотношением

$$(4) \quad [\mathbf{n}\mathcal{H}] = A\mathcal{E}_t \text{ на } S,$$

где  $A$  — некоторый линейный оператор, зависящий только от формы поверхности  $S$  и не зависящий от конкретного распределения  $\mathcal{E}_t$  на  $S$ .

Оператор  $A$  может быть найден в результате решения первой краевой задачи электродинамики — определения поля вне  $S$  по заданным на ней значениям  $\mathcal{E}_t$ . Эта задача всегда имеет решение, так же как и вторая, — определение поля по заданному  $\mathcal{H}_t$  на  $S$ , поэтому оператор  $A$  имеет обратный  $A^{-1}$ .

Поскольку  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  — поле антенны в режиме передачи, то поток вещественной части комплексного вектора Пойнтинга этого поля через поверхность  $S$  наружу должен быть положительным, т. е.

$$\operatorname{Re} \int_s [\mathcal{E}\overline{\mathcal{H}}] ds < 0.$$

<sup>2</sup> Т. е. вместо приемника включен генератор.

Напомним, что элемент  $ds$  направлен внутрь  $S$ . Подставляя сюда (4), получим

$$(5) \quad \operatorname{Re} \int_s [\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{H}}] ds = -\operatorname{Re} \int_s \mathfrak{C}_i \overline{A\mathfrak{C}_i} ds < 0$$

или

$$(6) \quad \operatorname{Re} (\mathfrak{C}_i, A\mathfrak{C}_i) > 0.$$

Здесь  $(x, y)$  — скалярное произведение в  $L^2(S)$ . Любой линейный оператор можно представить в виде

$$(7) \quad A = A_r + iA_i,$$

где  $A_r = \frac{A + A^*}{2}$ ,  $A_i = \frac{A - A^*}{2i}$ ,  $A^*$  — оператор, эрмитово-сопряженный с  $A$ .

Поскольку  $A_r$  и  $A_i$  — самосопряженные операторы, то, подставляя (7) в (6), найдем

$$(6a) \quad (\mathfrak{C}_i, A_r \mathfrak{C}_i) > 0.$$

Таким образом, оператор  $A_r$  должен быть положительным ( $A_r > 0$ ). Используя закон сохранения энергии, можно записать

$$(8) \quad \operatorname{Re} \int_s [E^1 \bar{H}^1] ds = \operatorname{Re} \int_s [\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{H}}] ds.$$

При этом предполагается, что поверхность  $S$  расположена на таком расстоянии от приемной антенны, что потерями на пути от  $s$  к  $S$  можно пренебречь и, кроме того, тракт идеально согласован с антенной. Соотношение (5) позволяет переписать предыдущее равенство так:

$$(8a) \quad \operatorname{Re} \int_s [E^1 \bar{H}^1] ds = -\operatorname{Re} (\mathfrak{C}_i, A\mathfrak{C}_i) = -(\mathfrak{C}_i, A_r \mathfrak{C}_i).$$

Аналогично этому при помощи (4) придадим интегралу, стоящему в числителе формулы (2), следующий вид:

$$\int_s \{ \mathfrak{C}[\mathbf{nH}^0] + \mathfrak{H}[\mathbf{nE}^0] \} ds = (\mathfrak{C}_i, [\mathbf{nH}^0]) - (\mathfrak{C}_i, A^* \bar{\mathbf{E}}_i^0)$$

или

$$(9) \quad \int_s \{ \mathfrak{C}[\mathbf{nH}^0] + \mathfrak{H}[\mathbf{nE}^0] \} ds = (\mathfrak{C}_i, A_r \mathbf{M}),$$

где

$$(10) \quad \mathbf{M} = A_r^{-1} ([\mathbf{nH}^0] - A^* \bar{\mathbf{E}}_i^0),$$

$A_r^{-1}$  — оператор, обратный  $A_r$ .

Подставляя (9) и (8a) в (2), получим

$$(11) \quad P = \frac{|(\mathfrak{C}_i, A_r \mathbf{M})|^2}{8(\mathfrak{C}_i, A_r \mathfrak{C}_i)}.$$

Варьируя  $\mathfrak{C}_i$  на  $S$ , определим максимум  $P$ . Так как  $A_r$  — положительный самосопряженный оператор, то справедливо обобщенное неравенство Коши — Буняковского:

$$|(\mathfrak{C}_i, A_r \mathbf{M})|^2 \leq (\mathfrak{C}_i, A_r \mathfrak{C}_i) (\mathbf{M}, A_r \mathbf{M}).$$

Подставляя его в (11), находим

$$(12) \quad P \leq \frac{1}{8} (\mathbf{M}, A_r \mathbf{M}),$$

а следовательно,

$$(13) \quad P_{\text{макс}} = \frac{1}{8} (\mathbf{M}, A_r \mathbf{M}).$$

Максимум  $P$  реализуется при

$$(14) \quad \mathfrak{E}_i = \alpha \mathbf{M} \equiv \alpha A_r^{-1} ([\mathbf{nH}^0] - A^* \bar{\mathbf{E}}^0) \quad \text{на } S,$$

где  $\alpha$  — константа.

В этом можно убедиться, подставляя (14) в (11). На основании сказанного в начале статьи максимум  $P$ , определяемый формулой (13), конечен, если проводимость  $\sigma$  среды отлична от нуля ( $\sigma > 0$ ).

Подобным образом можно определить максимум принимаемой мощности, исходя из формулы (3). Для этого запишем цепь равенств:

$$\int_S \mathfrak{E}[\mathbf{nh}] ds = (\mathfrak{E}_i, [\mathbf{nh}]) \equiv (\mathfrak{E}_i, A_r A_r^{-1} [\mathbf{nh}]).$$

Подставляя это выражение и формулу (8) в (3), запишем последнюю в виде

$$(15) \quad P = \frac{|(\mathfrak{E}_i, A_r \mathbf{N})|^2}{8(\mathfrak{E}_i, A_r \mathfrak{E}_i)}$$

где

$$(16) \quad \mathbf{N} \equiv A_r^{-1} [\mathbf{nh}].$$

Прием, использованный выше, позволяет получить формулы типа (13)–(14) с заменой  $\mathbf{M}$  на  $\mathbf{N}$ , т. е.

$$(17) \quad P_{\text{макс}} = \frac{1}{8} (\mathbf{N}, A_r \mathbf{N}),$$

оптимальное распределение  $\mathfrak{E}_i$  на  $S$ , при котором этот максимум реализуется, равно

$$(18) \quad \mathfrak{E}_i = \alpha \mathbf{N} \equiv \alpha A_r^{-1} [\mathbf{nh}] \quad \text{на } S.$$

В приближении Кирхгофа можно положить

$$\mathbf{h}_i = \begin{cases} 2\mathbf{H}_i^0 & \text{на } S_{\text{ос}} \text{ (освещенной части } S), \\ 0 & \text{на } S_{\text{зат}} \text{ (затененной части } S) \end{cases}$$

и

$$(17a) \quad P_{\text{макс}} = \frac{1}{2} (A_r^{-1} [\mathbf{nH}^0], [\mathbf{nH}^0])$$

при

$$(18a) \quad \mathfrak{E}_i = 2\alpha A_r^{-1} [\mathbf{nH}^0] \quad \text{на } S.$$

В формулах (17a)–(18a) следует полагать  $H_i^0 = 0$  на  $S_{\text{зат}}$ .

Расчет по формулам (13), (14) или (17), (18) упирается в нахождение оператора  $A_r^{-1}$ . Для определения последнего нужно найти сначала  $A$ , т. е. решить первую внешнюю краевую задачу электродинамики (определить  $[\mathbf{n}\mathfrak{E}]$  на  $S$  по заданному  $\mathfrak{E}_i$  на  $S$ ). Проще всего это сделать для сферической поверхности  $S$ .

Рассмотрим пример. Для максимального упрощения задачи и придания решению наибольшей наглядности возьмем в качестве приемной антенны прямолинейный провод длиной  $2l$ . Тогда в режиме передачи поле  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  будет иметь только три компоненты  $\mathfrak{E}_\theta$ ,  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{E}_\phi$ . Здесь  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $r$  — сферическая система координат, ось  $z$  которой совпадает с осью провода, а начало координат — с центром провода (рис. 3). Такое поле можно выразить через один «электрический» потенциал Дебая  $U$  по известным формулам [2]. Вне сферы  $S$  радиусом  $r_0$  с центром в начале координат отношение  $U/r$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \zeta_n(kr),$$

где

$$\zeta_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr),$$

 $a_n$  — постоянные коэффициенты.

Выпишем компоненты поля

$$(19) \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \vartheta}, \quad \mathfrak{H}_\varphi = -\frac{i\omega \varepsilon}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \quad \mathfrak{E}_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) U$$

или

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_\vartheta = -\frac{k}{r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n'(\cos \vartheta) \zeta_n'(kr), \\ \mathfrak{H}_\varphi = \frac{i\omega \varepsilon}{r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n'(\cos \vartheta) \zeta_n(kr). \end{array} \right.$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $k$  — комплексные величины.

Соотношение (4) теперь заменим следующим:

$$(21) \quad \mathfrak{H}_\varphi = A \mathfrak{E}_\vartheta \text{ на } S,$$

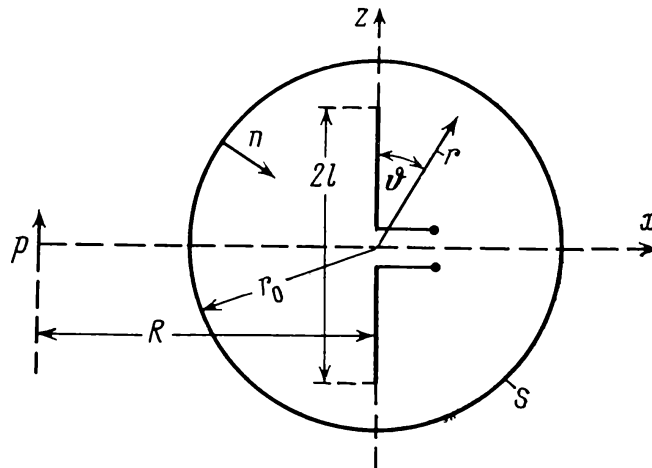
т. е. оператор  $A$  определен на скалярных функциях от  $\vartheta$ . Поскольку в настоящем примере оператор  $A$  определен соотношением (21) вместо (4),

Рис. 3

выведем заново формулы для максимальной принимаемой мощности и оптимального распределения. Будем исходить из выражения (3). Очевидно, что

$$\int_S \mathfrak{E}[\mathbf{nh}] ds = \int_S \mathfrak{E}_\vartheta h_\varphi ds = 2\pi r_0^2 \int_0^\pi \mathfrak{E}_\vartheta h_\varphi^{cp} \sin \vartheta d\vartheta,$$

где

$$(22) \quad h_\varphi^{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_\varphi d\varphi.$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}' \overline{\mathbf{H}'}] ds &= -\operatorname{Re} \int_s \mathfrak{G}_\vartheta \overline{\mathfrak{G}_\vartheta} ds = \\ &= -2\pi r_0^2 \operatorname{Re} \int_0^\pi \mathfrak{G}_\vartheta \overline{A \mathfrak{G}_\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Введем новое скалярное произведение

$$(23) \quad (x, y) = \int_0^\pi x(\vartheta) \overline{y(\vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Тогда предыдущие два равенства запишутся так:

$$\begin{aligned} \int_s \mathfrak{G}[\mathbf{nh}] ds &= 2\pi r_0^2 (\mathfrak{G}_\vartheta, \overline{h_\vartheta^{cp}}), \\ \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}' \overline{\mathbf{H}'}] ds &= -2\pi r_0^2 \operatorname{Re} (\mathfrak{G}_\vartheta, A \mathfrak{G}_\vartheta) = -2\pi r_0^2 (\mathfrak{G}_\vartheta, A_r \mathfrak{G}_\vartheta). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3), найдем

$$P = \frac{|(\mathfrak{G}_\vartheta, \overline{h_\vartheta^{cp}})|^2}{8(\mathfrak{G}_\vartheta, A_r \mathfrak{G}_\vartheta)} = \frac{|(\mathfrak{G}_\vartheta, A_r A_r^{-1} \overline{h_\vartheta^{cp}})|^2}{8(\mathfrak{G}_\vartheta, A_r \mathfrak{G}_\vartheta)}$$

Эта формула аналогична (15) и из нее так же, как из (15), следует (см. (17)–(18))

$$(24) \quad P_{\max} = \frac{1}{8} (A_r^{-1} \overline{h_\vartheta^{cp}}, \overline{h_\vartheta^{cp}})$$

при

$$(25) \quad \mathfrak{G}_\vartheta = \alpha A_r^{-1} \overline{h_\vartheta^{cp}} \quad \text{на } S.$$

Подчеркнем, что здесь оператор  $A_r$  определен по формуле (7), где оператор  $A^*$  сопряжен с  $A$  относительно нового скалярного произведения (23).

Возвратимся к рассмотрению оператора  $A$ . Из соотношений (21) и (20) сразу следует, что собственные функции  $\varphi_n$  и собственные значения  $\lambda_n$  оператора  $A$ , удовлетворяющие уравнению

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n,$$

определяются формулами

$$(26) \quad \varphi_n = P_n^{-1}(\cos \vartheta), \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{\varepsilon} \xi_n(kr_0)}{i\sqrt{\mu} \xi_n'(kr_0)}.$$

Собственные функции  $\varphi_n$  ортогональны, т. е. выполняется условие

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Поскольку собственные функции оператора  $A$  образуют ортогональный базис, а величина  $|\lambda_n|$  с ростом  $n$  убывает как  $n^{-1}$ , нетрудно показать, что оператор  $A^*$  имеет те же собственные функции  $P_n^{-1}(\cos \vartheta)$  и собственные значения  $\bar{\lambda}_n$ . Учитывая это, заключаем, что собственные функции и собственные значения оператора  $A_r$  будут соответственно  $P_n^{-1}(\cos \vartheta)$  и  $\operatorname{Re} \lambda_n$ .

$$A_r \varphi_n = \frac{1}{2} (A \varphi_n + A^* \varphi_n) = \frac{1}{2} (\lambda_n \varphi_n + \bar{\lambda}_n \varphi_n) = \text{Re}(\lambda_n) \varphi_n,$$

где

$$\varphi_n = P_n^{-1}(\cos \vartheta).$$

Для нахождения  $P_{\text{макс}}$  и  $\mathfrak{G}_\vartheta$  по формулам (24)–(25) определим прежде всего функцию

$$(27) \quad W \equiv A_r^{-1} \overline{h_\varphi^{\text{ср}}}.$$

Уравнение, которому удовлетворяет  $W$ , имеет вид

$$(28) \quad A_r W = \overline{h_\varphi^{\text{ср}}}.$$

Ищем решение (28) в виде ряда по собственным функциям оператора  $A_r$ :

$$(29) \quad W = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n^{-1}(\cos \vartheta),$$

где постоянные  $c_n$  подлежат определению.

Подставляя (29) в (28), найдем

$$(30) \quad \sum_n c_n \text{Re} \lambda_n P_n^{-1}(\cos \vartheta) = \overline{h_\varphi^{\text{ср}}},$$

т. е. для нахождения  $c_n$  необходимо разложить  $\overline{h_\varphi^{\text{ср}}}$  по функциям Лежандра.

Зададим первичное поле в виде волны, возбуждаемой электрическим диполем с моментом  $p$ , ориентированным параллельно оси  $z$  и находящимся в точке  $\vartheta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $r = R$ , где  $R > r_0$  (рис. 3).

Величина  $h_\varphi^{\text{ср}}$  на  $S$ , которая нас интересует, является средним значением (см. (22)) компоненты  $h_\varphi$  полного поля, возбуждаемого указанным диполем в предположении, что сфера  $S$  металлизирована.

Для нахождения  $h_\varphi^{\text{ср}}$  воспользуемся методом, предложенным в [3, с. 1834–1835]. При этом ограничимся электрическими парциальными волнами, независимыми от  $\varphi$ , поскольку среднее значение  $h_\varphi$  для остальных волн равно нулю. Несложные выкладки по формулам, приведенным в [3], позволяют записать

$$h_\varphi^{\text{ср}} = \frac{i\omega p}{4\pi r_0 R} \sum_{n=1}^{\infty} ' \frac{2n+1}{n^2+n} \frac{\zeta_n'(kR)}{\zeta_n'(kr_0)} P_n^{-1}(0) P_n^{-1}(\cos \vartheta).$$

Здесь и ниже штрих у суммы означает, что суммирование идет по нечетным  $n$ , так как  $P_n^{-1}(0) = 0$  при четных  $n$ . Если устремить  $R$  и  $p$  к бесконечности так, чтобы

$$\frac{i\omega p}{4\pi} \frac{\zeta_n'(kR)}{R} \rightarrow \exp \left[ i(n+1) \frac{\pi}{2} \right],$$

то первичная волна превратится в плоскую с единичной амплитудой магнитного вектора и

$$(31) \quad h_\varphi^{\text{ср}} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} ' \frac{2n+1}{n^2+n} \frac{P_n^{-1}(0)}{\zeta_n'(kr_0)} \exp \left[ i(n+1) \frac{\pi}{2} \right] P_n^{-1}(\cos \vartheta).$$

Подставляя это выражение в правую часть (30) и приравнявая почленно правые и левые части, найдем

$$(32) \quad c_n = \frac{2n+1}{r_0(n^2+n)} \frac{P_n^{-1}(0)}{\zeta_n'(kr_0)} \frac{\exp \left[ -i(n+1) \frac{\pi}{2} \right]}{\text{Re} \lambda_n}$$

Таким образом, величина  $W$  (см. (27)) определяется рядом (29) с коэффициентами (32). Этот ряд равномерно сходится на интервале  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ .

Не сложный, но громоздкий расчет показывает, что при наличии потерь ( $\text{Im } \epsilon \neq 0$  и  $\text{Im } k \neq 0$ ) коэффициенты  $|c_n|$  убывают с ростом  $n$  как  $\frac{1}{n} \left( \frac{e|kr_0|}{2n} \right)^n$ . Следовательно, ряд (29) сходится очень быстро к непрерывной функции<sup>3</sup>.

Формула (24) для оптимального распределения  $\mathcal{E}$  на  $S$  (в режиме передачи), обеспечивающая реализацию максимума принимаемой мощности (в режиме приема), с учетом (27) и (29) позволяет написать

$$(33) \quad \mathcal{E}_\vartheta = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n^1(\cos \vartheta) \quad \text{на } S,$$

где  $\alpha$  — постоянная, которая определяется мощностью генератора в режиме передачи и может быть взята любой.

Аналогично формула (25) с учетом (31) и (32) дает

$$(34) \quad P_{\text{макс}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2n+1} |c_n|^2 \text{Re } \lambda_n.$$

Коэффициенты  $c_n$  определяются выражением (32), и вследствие их быстрого убывания ряды (33)–(34) очень хорошо сходятся;  $\lambda_n$  определены второй формулой (26).

Зная  $\mathcal{E}_i$  на  $S$  (формула (33)), можно определить распределение тока  $I$  вдоль линейной антенны, обеспечивающее в режиме передачи это оптимальное поле на  $S$ . Эту задачу можно свести к интегральному уравнению первого рода, но мы используем другой метод, развитый в [4]. Согласно этому методу, введем на геометрической поверхности  $S$  семейство вспомогательных поверхностных электрических токов

$$(35) \quad \mathbf{K}_n = P_n^1(\cos \vartheta) \mathbf{i}_\vartheta, \quad n=1, 3, 5, \dots$$

Создаваемые ими поля в свободном пространстве обозначим соответственно  $\mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{H}^n$ , которые определяются потенциалами Дебая следующего вида:

$$U_n = P_n(\cos \vartheta) \begin{cases} \frac{r_0}{\omega \epsilon} \psi_n'(kr_0) \zeta_n(kr) & \text{при } r > r_0, \\ \frac{r_0}{\omega \epsilon} \zeta_n'(kr_0) \psi_n(kr) & \text{при } r < r_0, \end{cases}$$

где

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x).$$

Поле  $\mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{H}^n$  найдем по формулам (19). Выпишем интересующую нас компоненту

$$(36) \quad E_r^n = \frac{r_0}{\omega \epsilon} \frac{n^2+n}{r^2} \psi_n(kr) \zeta_n'(kr_0) P_n(\cos \vartheta), \quad r < r_0.$$

Применяя к полям  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{H}^n$  лемму Лоренца, получим

$$\int_s \mathbf{K}_n \mathcal{E} ds = \int_{-l}^l I \mathbf{E}^n dz, \quad n=1, 3, 5, \dots,$$

<sup>3</sup> Если  $\sigma=0$ , то  $|c_n|$  растет как  $(2n/ekr_0)^n$  и ряды (29), (33)–(34) расходятся.

где интегрирование справа идет вдоль линейной антенны. Подставляя сюда (33), (35)–(36), запишем это равенство в виде

$$\int_0^l I(z) \frac{\psi_n(kz)}{z^2} dz + \int_0^l I(-z) \frac{\psi_n(kz)}{z^2} dz = \frac{4\pi r_0 \omega \epsilon c_n}{(2n+1) \zeta_n'(kr_0)}.$$

При этом положено  $\alpha=1$ .

Составляющая  $\mathcal{E}_\vartheta$  — четная функция относительно  $\cos \vartheta$ , так как  $P_{2n+1}^1(x) = P_{2n+1}^1(-x)$  (см. (33)), поэтому искомый ток  $I(z)$  должен быть четной функцией  $z$ . Учитывая это, запишем

$$(37) \quad \int_0^l I(z) \frac{\psi_n(kz)}{z^2} dz = \frac{2\pi r_0 \omega \epsilon c_n}{(2n+1) \zeta_n'(kr_0)}.$$

Левая часть здесь является коэффициентом типа фурье-тока  $I(z)$  по полной системе функций, биортогональной к  $\psi_n(kz)$  с весом  $z^{-2}$ . Поэтому для нахождения  $I(z)$  может быть использован один из методов, описанных в [4], куда мы и отсылаем читателя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н. Радиотехника и электроника, 1983, т. 28, № 12, с. 2313.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957.
3. Фельд Я. Н., Фельд С. Я. Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 9, с. 1829.
4. Фельд Я. Н. Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 6, с. 1154.

Поступила в редакцию  
13.XII.1983.

УДК 621.396.67.01

## ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ АНТЕННЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СРЕДЕ С ПОТЕРЯМИ

Фельд Я. Н.

Показано, что коэффициент направленного действия антенны, находящейся в среде с потерями, ограничен и его максимальное значение конечно.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], для существования конечного максимума КНД антенны необходимо вводить добавочное ограничивающее условие. Различные варианты таких условий приведены, например, в [2]<sup>1</sup>. Аналогичная картина имеет место при работе антенны в режиме приема, когда конечный максимум принимаемой мощности (при фиксированном падающем на антенну поле) имеет место только при введении некоторого ограничивающего добавочного условия [3]. Однако в работе [4] показано, что при наличии потерь в среде, окружающей антенну, максимум принимаемой мощности конечен и нет необходимости вводить добавочное ограничивающее условие. Учитывая тесную связь между работой антенны в режимах передачи и приема, а также формулу М. С. Неймана, из которой следует, что принимаемая мощность пропорциональна КНД антенны, можно, очевидно, предположить, что при наличии потерь в среде, окружающей антенну, максимум ее КНД будет конечен и при отсутствии ограничивающего условия. Ниже мы постараемся показать это, используя метод, в общих чертах намеченный в [2, (18)–(21)]. Этот метод, как будет видно, нуждается в некотором уточнении и обобщении на случай потерь.

### 1. КНД АНТЕННЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТЕРЬ

КНД в точке наблюдения  $q_0$  (с сферическими координатами  $r_0, \theta_0, \varphi_0$ ) будем определять формулой

$$(1) \quad D = \frac{|E_p(q_0)|^2}{|E_0(q_0)|^2}.$$

Здесь  $E_p$  — интересующая нас компонента электрического вектора рассматриваемой антенны, а  $E_0$  — электрический вектор поля гипотетической ненаправленной антенны; при этом предполагается, что мощности излучения обеих антенн одинаковы:  $W_\Sigma = W_{0\Sigma}$ . Если точка  $q_0$  находится в дальней зоне рассматриваемой антенны, то это определение совпадает с обычным. Поскольку дальняя зона ненаправленной антенны начинается вблизи нее, можно полагать, что

$$(2) \quad W_\Sigma = W_{0\Sigma} = 2\pi r_0^2 e^{2k''r_0} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} |E_0(q_0)|^2,$$

где  $k'' = -\operatorname{Im} k$ ,  $k'' > 0$  (зависимость от времени взята в виде  $\exp(i\omega t)$ ).

<sup>1</sup> Пользуемся случаем отметить, что в формулах для КНД в [2] пропущена двойка в знаменателе.

Отсюда следует

$$|E_0|^2 = \frac{W_z}{2\pi r_0^2 e^{2k''r_0} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}.$$

Таким образом (см. (1)),

$$(3) \quad D = \frac{\alpha}{2} \frac{|E_p(q_0)|^2}{W_z}, \quad \alpha = 4\pi r_0^2 e^{2k''r_0} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

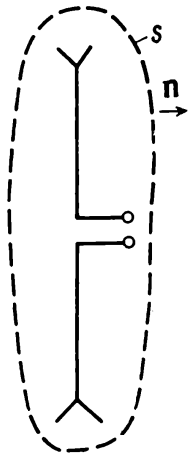
Если ввести диаграмму направленности по формуле

$$F(\theta_0, \varphi_0) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 e^{ikr_0} \mathbf{E}(q_0),$$

то КНД (для дальней зоны) можно записать в виде

$$(3a) \quad D = 2\pi \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{|F_p(\theta_0, \varphi_0)|^2}{W_z}$$

Пусть  $s$  — геометрическая замкнутая поверхность (рисунок), обхватывающая рассматриваемую антенну и находящаяся вблизи нее на расстоянии, где экспоненциальным множителем затухания можно пренебречь  $e^{-2k''r} \simeq 1$ . Тогда очевидно, что



$$(4) \quad W_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}\bar{\mathbf{H}}] ds.$$

В этой формуле черта — знак комплексного сопряжения,  $ds = \mathbf{n} ds$ , где  $\mathbf{n}$  — наружная нормаль к  $s$ . Рассмотрим подробнее формулу (4). Зная касательную составляющую  $\mathbf{E}_t$  на  $s$  и решая первую граничную задачу электродинамики [5], можно определить касательную составляющую  $\mathbf{H}_t$  на  $s$ . Из сказанного и принципа суперпозиции следует, что  $\mathbf{H}_t$  и  $\mathbf{E}_t$  связаны соотношением

$$(5) \quad [\mathbf{H}\mathbf{n}] = A\mathbf{E}_t \text{ на } s,$$

где  $A$  — линейный оператор, определяемый из решения указанной граничной задачи. Подчеркнем, что оператор  $A$  зависит от формы поверхности  $s$  и не зависит от конкретного распределения  $\mathbf{E}_t$  на  $s$ . Установим прежде всего некоторые свойства оператора  $A$ .

Оператор  $A$  имеет обратный  $A^{-1}$ . Это следует из теоремы единственности для второй граничной задачи электродинамики [5]. Так как рассматриваемая антенна передающая — источники поля находятся внутри  $s$  — то поток ваттной мощности через  $s$  должен быть положительным, т. е.

$$(6) \quad 2W_z = \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}\bar{\mathbf{H}}] ds > 0.$$

Поскольку, учитывая формулу (5),

$$[\mathbf{E}\bar{\mathbf{H}}] ds = \mathbf{E}_t [\bar{\mathbf{H}}\mathbf{n}] ds = \mathbf{E}_t \overline{A\mathbf{E}_t} ds,$$

неравенство (6) перепишем так:

$$(7) \quad 2W_z = \operatorname{Re} \int_s \mathbf{E}_t \overline{A\mathbf{E}_t} ds = \operatorname{Re} (\mathbf{E}_t, A\mathbf{E}_t) > 0.$$

Здесь  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — скалярное произведение в пространстве  $L^2(s)$ .

Оператор  $A$  можно представить в виде

$$(8) \quad A = A_r + iA_i = \frac{A + A^*}{2} + i \frac{A - A^*}{2i},$$

где  $A^*$  — сопряженный с  $A$  (в пространстве  $L^2(s)$ ) оператор,  $A_r$  и  $A_i$  — са-

$$(9) \quad 2W_{\Sigma} = (\mathbf{E}_t, A_r \mathbf{E}_t) > 0.$$

Таким образом, оператор  $A_r = \text{Re } A$  должен быть положительным.

В работе [2] условие положительности оператора  $A_r$  вводилось как некоторое волевое требование, которое можно и не ставить. В данной же работе показано, что оно является следствием физического существа задачи и всегда выполняется для любой излучающей антенны.

Числитель в (3) определим, используя известную формулу [2, 5]

$$(10) \quad E_p(q_0) = \frac{1}{i\omega} \int \{[\mathbf{E}\mathbf{h}] - [\mathbf{e}\mathbf{H}]\} ds.$$

Здесь  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  — поле вспомогательного диполя, расположенного в точке наблюдения  $q_0$  с единичным моментом  $\mathbf{p}$ ; при расчете этого поля параметры среды, находящейся внутри  $s$ , можно брать любыми, например, равными параметрам внешней по отношению к  $s$  среды или любыми другими.

Используя соотношение (5) и запись при помощи введенного выше скалярного произведения, формулу (10) можно представить в следующем виде:

$$i\omega E_p(q_0) = (\mathbf{E}_t, [\bar{\mathbf{h}}\mathbf{n}]) - (A\mathbf{E}_t, \bar{\mathbf{e}}_t)$$

или

$$i\omega E_p(q_0) = (\mathbf{E}_t, [\bar{\mathbf{h}}\mathbf{n}]) - A^* \bar{\mathbf{e}}_t.$$

Вводя обозначение

$$(11) \quad \mathbf{M} = A_r^{-1} \{[\bar{\mathbf{h}}\mathbf{n}] - A^* \bar{\mathbf{e}}_t\},$$

запишем окончательно

$$(12) \quad i\omega E_p(q_0) = (\mathbf{E}_t, A_r \mathbf{M}).$$

В формуле (11)  $A_r^{-1}$  — оператор, обратный  $A_r$ . Используя выражения (9) и (12), придадим формуле (3) следующий вид:

$$(13) \quad D = \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{|(\mathbf{E}_t, A_r \mathbf{M})|^2}{(\mathbf{E}_t, A_r \mathbf{E}_t)}.$$

Так как  $A_r$  — положительный самосопряженный оператор, то имеет место обобщенное неравенство Коши — Буняковского

$$|(\mathbf{E}_t, A_r \mathbf{M})|^2 \leq (\mathbf{E}_t, A_r \mathbf{E}_t) (\mathbf{M}, A_r \mathbf{M}).$$

Учитывая его, получим из формулы (13) следующее неравенство:

$$D \leq \frac{\alpha}{\omega^2} (\mathbf{M}, A_r \mathbf{M}),$$

т. е.

$$(14) \quad D_{\text{макс}} = \frac{\alpha}{\omega^2} (\mathbf{M}, A_r \mathbf{M}).$$

Этот максимум реализуется при

$$(15) \quad \mathbf{E}_t = \beta \mathbf{M} = \beta A_r^{-1} \{[\bar{\mathbf{h}}\mathbf{n}] - A^* \bar{\mathbf{e}}_t\} \text{ на } s,$$

где  $\beta$  — константа. В этом легко убедиться, подставив (15) в (13).

Если при расчете поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  вспомогательного диполя среда, находящаяся внутри  $s$ , предполагается идеально проводящей, то формулы (11), (15) упрощаются. Действительно, при этом  $\bar{\mathbf{e}}_t = 0$  на  $s$  и указанные формулы принимают вид

$$(11a) \quad \mathbf{M} = A_r^{-1} [\bar{\mathbf{h}}\mathbf{n}],$$

$$(15a) \quad \mathbf{E}_t = \beta A_r^{-1} [\bar{\mathbf{h}} \mathbf{n}] \text{ на } s.$$

Максимальный КНД  $D_{\text{макс}}$  при этом по-прежнему выражается формулой (14). Эти формулы формально проще, но расчет поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  усложняется при краевом условии  $\mathbf{e}_t = 0$  на  $s$ . Однако если использовать приближение Кирхгофа, то  $\mathbf{h}_t$  на  $s$  элементарно выражается через магнитный вектор вспомогательного диполя, рассчитанный для однородной среды (с параметрами внешней к  $s$  среды).

Любопытно отметить, что оптимальные распределения (15) и (15a), обеспечивающие реализацию максимального КНД антенны (14), аналогичны распределениям, обеспечивающим максимум принимаемой мощности в приемной антенне (см. [4, (14), (18)]). Также аналогичны формулы (14) для  $D_{\text{макс}}$  и (13) для  $P_{\text{макс}}$  из работы [4].

Эта аналогия на основании соображений, приведенных в [4] и подтвержденных соответствующим примером, позволяет утверждать, что при наличии потерь в окружающей антенну среде  $D_{\text{макс}}$  ограничен.

Указанная выше аналогия позволяет сразу написать выражения для оптимального распределения поля  $\mathbf{E}_t$  и  $D_{\text{макс}}$  в случае, когда антенна представляет собой прямолинейный провод. Для этого достаточно воспользоваться соответствующими формулами из работы [4], что мы оставляем сделать читателю. Здесь же рассмотрим следующий пример.

## 2. ПРИМЕР; ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Возьмем в качестве антенны бесконечную вдоль оси  $z$  цилиндрическую систему, имеющую любую форму в сечении  $z = \text{const}$ . При этом как поле, так и геометрия задачи не зависят от координаты  $z$ . Электрический вектор поля будем считать поляризованным параллельно оси  $z$ . В качестве  $s$  теперь удобно взять цилиндрическую поверхность радиусом  $a$ , охватывающую антенну. Будем теперь пользоваться цилиндрической системой координат  $R, \varphi, z$  с центром в области антенны. Контур, образующийся при сечении поверхности  $s$  плоскостью  $z=0$ , обозначим буквой  $L$ ; его уравнение —  $R=a, z=0$ . По-прежнему определяем КНД формулой (1), но  $W_z$  и  $W_{0z}$  теперь означают мощности излучения соответствующих антенн, отнесенные к единице длины, измеряемой вдоль оси  $z$ . Так, например, вместо формулы (4) имеем

$$(16) \quad W_z = \frac{1}{2} \text{Re} \int_L [\mathbf{E} \bar{\mathbf{H}}] \mathbf{n} dl,$$

где  $\mathbf{n}$  — наружная нормаль к  $s$ , а  $dl$  — элемент длины контура  $L$ .

Для КНД справедлива также формула типа (3):

$$(17) \quad D = \frac{\alpha}{2} \frac{|E_z(q_0)|^2}{W_z} \left( \alpha = 2\pi R_0 e^{2kR_0} \text{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right).$$

Здесь  $q_0$  — точка наблюдения с координатами  $R_0, \varphi_0 (z_0=0)$ . На контуре (круге)  $L$  касательные к  $s$  составляющие  $E_z$  и  $H_\varphi$  связаны теперь соотношением

$$(18) \quad -H_\varphi = A E_z,$$

где  $A$  — линейный оператор, определенный на скалярных функциях от  $\varphi$ . Используя (18), перепишем формулу (16) в виде

$$W_z = \frac{a}{2} \text{Re} \int_L E \bar{A} E d\varphi, \quad E = E_z, \quad dl = a d\varphi,$$

или, вводя новое скалярное произведение

$$(19) \quad (x, y) = \int_L x \bar{y} d\varphi,$$



в виде

$$(20) \quad W_{\Sigma} = \frac{a}{2} \operatorname{Re}(E, AE) = \frac{a}{2}(E, A_r E).$$

Здесь оператор  $A_r$  определен по формуле (8), где оператор  $A^*$  сопряжен с  $A$  относительно нового скалярного произведения (19).

Займемся теперь числителем формулы (17).

Очевидно, что поле  $E$  удовлетворяет вне антенны однородному двумерному уравнению Гельмгольца. Поэтому, используя формулу Грина, можно записать

$$(21) \quad E(q_0) = a \int_L E \frac{\partial G}{\partial R} d\varphi,$$

где  $G = G(q, q_0)$  — функция Грина, обращающаяся на  $L$  в нуль;  $q(R, \varphi)$  — точка интегрирования. Далее можно записать, используя обозначение (19):

$$(22) \quad |E(q_0)|^2 = a^2 \left| \left( E, \frac{\partial \bar{G}}{\partial R} \right) \right|^2.$$

Формулы (20), (22) и (17) позволяют получить следующее выражение:

$$(23) \quad D = \alpha a \frac{\left| \left( E, \frac{\partial \bar{G}}{\partial R} \right) \right|^2}{(E, A_r E)}.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Коши — Буняковского, получим, как и выше,

$$(24) \quad D_{\max} = \alpha a \left( A_r^{-1} \frac{\partial \bar{G}}{\partial R}, \frac{\partial \bar{G}}{\partial R} \right).$$

Этот максимум реализуется при

$$(25) \quad E_{\text{опт}} = \beta A_r^{-1} \frac{\partial \bar{G}}{\partial R} \quad \text{на } L \quad (\text{на } s),$$

$\beta$  — константа.

Поле  $E, H$ , излучаемое антенной, вне  $L$  при  $R \geq a$  определяется формулами

$$(26) \quad \begin{cases} E = E_z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(kR) \cos n\varphi, \\ H_{\varphi} = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n^{(2)'}(kR) \cos n\varphi. \end{cases}$$

При этом для простоты записи предполагаем, что поле четно относительно  $\varphi$ ; в противном случае нужно было бы приписать еще члены с  $\sin n\varphi$ .

Из формул (26) и (18) следует, что собственные функции  $\varphi_n$  и собственные значения  $\lambda_n$  оператора  $A$ , удовлетворяющие уравнению

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n,$$

определяются выражениями

$$(27) \quad \varphi_n = \cos n\varphi, \quad \lambda_n = \frac{ik}{\omega\mu} \frac{H_n^{(2)'}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}.$$

Так как функции  $\cos n\varphi$  образуют ортогональный базис<sup>2</sup>, то оператор  $A^*$

<sup>2</sup> В классе четных функций.

имеет те же собственные функции  $\cos n\varphi$  и собственные значения  $\lambda_n$ . Учитывая сказанное, можно написать

$$A_r \varphi_n = (\operatorname{Re} \lambda_n) \varphi_n,$$

т. е.  $\varphi_n$  и  $\operatorname{Re} \lambda_n$  являются собственными функциями и собственными значениями оператора  $A_r$ .

Для определения  $D_{\max}$  и  $E_{\text{опт}}$  по формулам (24) и (25) необходимо определить функцию

$$(28) \quad w = A_r^{-1} \overline{\frac{\partial G}{\partial R}}.$$

Она удовлетворяет уравнению

$$(29) \quad A_r w = \overline{\frac{\partial G}{\partial R}} \Big|_{R=a}.$$

Для дальнейшего продвижения необходимо прежде всего определить функцию Грина  $G$ . Эта функция вследствие (21) должна иметь в точке  $q_0$  особенность типа  $-\frac{1}{2\pi} \ln \rho$ , где  $\rho$  — расстояние между  $q$  и  $q_0$ . Так как

вне  $q_0$  она удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, то задача ее определения (в терминах теории поля) сводится к нахождению полного поля при дифракции первичной волны  $\psi_0 = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k\rho)$  на контуре  $L$

с нулевыми краевыми условиями. Если точка  $q_0$  с координатами  $R_0$ ,  $\varphi_0 = 0^*$  находится в дальней зоне контура  $L$ , то первичная цилиндрическая волна в окрестности  $L$  будет локально плоской и ее можно записать там в виде

$$\psi_0 \simeq \gamma e^{ikR \cos \varphi}$$

или

$$(30) \quad \psi_0 = \gamma \left\{ J_0(kR) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kR) \cos n\varphi \right\},$$

где

$$(30a) \quad \gamma = -i \sqrt{\frac{1}{8\pi k R_0}} e^{-i(kR_0 - \pi/4)}.$$

Будем искать вторичное поле при  $R \geq a$  в виде ряда

$$(31) \quad \psi = \alpha_0 H_0^{(2)}(kR) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(kR) \cos(n\varphi - \sigma_n),$$

где  $\alpha_n$  и  $\sigma_n$  — искомые постоянные.

Учитывая, что  $\psi + \psi_0 = 0$  на  $L$ , получим  $\sigma_n = 0$ ,

$$\alpha_0 = -\gamma \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}, \quad \alpha_n = -2\gamma i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \quad \text{при } n > 0.$$

Так как  $G = \psi + \psi_0$ , то, учитывая (30) и (31), на  $L$  имеем формулу

$$(32) \quad \frac{\partial G}{\partial R} \Big|_{R=a} = \frac{4\gamma}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} ' \frac{i^{n+1}}{H_n^{(2)}(ka)} \cos n\varphi.$$

Штрих у суммы указывает на то, что при  $n=0$  коэффициент 4 следует заменить на 2. Ищем решение уравнения (29) в виде ряда по собственным

\* Предположение, что  $\varphi_0 = 0$  не уменьшает общности, так как ось, от которой отсчитывается  $\varphi$ , может быть любой.

$$(33) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\varphi.$$

Подставляя это выражение в (29), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{Re} \lambda_n \cos n\varphi = \left. \frac{\partial G}{\partial R} \right|_{R=a}.$$

Отсюда, учитывая формулу (32) и приравнявая почленно соответствующие ряды, получим

$$(34) \quad C_0 = -\frac{2i\bar{\gamma}}{\pi a \operatorname{Re} \lambda_0} \frac{1}{H_0^{(1)}(\bar{k}a)}, \quad C_n = \frac{4\bar{\gamma}(-i)^{n+1}}{\pi a \operatorname{Re} \lambda_n} \frac{1}{H_n^{(1)}(\bar{k}a)} \quad \text{при } n > 0.$$

Используя формулы (25), (28) и (33), можно написать

$$(35) \quad E_{\text{опт}} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\varphi \quad \text{на } L,$$

а формулы (24), (28), (33) и (32) дают

$$(36) \quad D_{\text{макс}} = 4\alpha\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} C_n}{H_n^{(2)}(ka)}$$

или при использовании (34), (17) и (30а)

$$(37) \quad D_{\text{макс}} = \frac{4}{\pi |ka|} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|H_n^{(2)}(ka)|^2 \operatorname{Re} \lambda_n}.$$

Штрихи у сумм указывают на то, что при  $n=0$  коэффициент 4 должен быть заменен на 2 в формуле (36) и на 1 в формуле (37).

Напомним, что  $\beta$  — несущественная постоянная, зависящая от амплитуды и фазы напряжения генератора, подключенного к антенне.

Несложный расчет показывает, что величины  $|C_n|$  убывают с ростом  $n$  при наличии потерь ( $\operatorname{Im} k < 0$ ) как  $\left(\frac{e|ka|}{2n}\right)^n n^{1/2}$ . Следовательно, ряды

(35) и (37) быстро сходятся, причем первый из них к непрерывной функции. Таким образом, КНД  $D_{\text{макс}}$  (определяемый рядом (37)) конечен при наличии потерь в среде. Не трудно показать, что при отсутствии последних ряды (35) и (37) расходятся и  $D_{\text{макс}} = \infty$ .

Выражаю глубокую признательность М. С. Аграновичу за помощь при рассмотрении примера.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Минкович Б. М., Яковлев В. П. Теория синтеза антенн. М.: Сов. радио, 1969.
2. Фельд Я. Н. РЭ, 1982, т. 27, № 11, с. 2094.
3. Фельд Я. Н. РЭ, 1983, т. 28, № 12, с. 2313.
4. Фельд Я. Н. РЭ, 1984, т. 29, № 9, с. 1668.
5. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. I. М.: ВВИА им. Жуковского, 1955.

Поступила в редакцию  
14.VIII.1984

# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXXI

Июль 1986

Вып. 7

МОСКВА

УДК 537.874.4.001.24

## РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ И ИМПЕДАНСНЫХ ТЕЛАХ

*Фельд Я. Н.*

Предложен метод для расчета рассеяния волны на одном или нескольких идеально проводящих телах, а также телах с импедансными неоднородными и анизотропными краевыми условиями. Введены вспомогательные источники на некоторых поверхностях, расположенных внутри этих тел, в частности, эти поверхности могут быть стянуты в точки. При помощи леммы Лоренца определены коэффициенты Фурье для плотности реального или эквивалентного тока на поверхности рассматриваемых тел, а затем найдены сами токи и возбуждаемые ими рассеянные поля. Приведен пример расчета.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача рассеяния на одном или нескольких идеально проводящих телах сводится к первой внешней краевой задаче электродинамики — нахождению рассеянного поля по известному значению тангенциальной компоненты электрического вектора на поверхности тел. Последняя задача рассматривалась в работе [1] при помощи метода, предложенного в [2, 3]. Аналогичным методом может быть рассмотрено рассеяние электромагнитной волны телами с импедансными или в общем случае «операторными» краевыми условиями. Для этого метода характерно введение вспомогательных токов непосредственно на поверхности рассматриваемых тел<sup>1</sup>. Это естественно для тел типа незамкнутых тонких металлических или импедансных поверхностей, но совершенно не обязательно для замкнутых поверхностей, т. е. для тел, внутренний объем которых существенно отличен от нуля. Более того, введение вспомогательных токов на (геометрических) поверхностях, расположенных внутри тела или вообще в области, где искомое поле известно (как, например, в [4]), имеет определенные преимущества. Действительно, при этом форма поверхности, на которой распределяются вспомогательные токи, и сами токи могут быть выбраны так, чтобы их поле выражалось в замкнутом виде и не требовало вычисления сложных двумерных интегралов, вне зависимости от формы рассеивающего тела.

<sup>1</sup> Исключением является работа [4], где вспомогательные токи вводились на поверхности достаточно удаленной сферы.

Рассмотрим систему из  $N$  идеально проводящих тел, на которые падает первичная волна  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ , возбуждаемая заданными источниками: электрическими и магнитными токами  $\mathbf{j}_0, \mathbf{j}_0^\mu$ . Эти токи будем считать распределенными в объеме  $V_0$ , находящемся вне указанных тел (рис. 1).

Поверхности рассеивающих тел обозначим  $s_1, s_2, \dots, s_N$ . Суммарная поверхность этих тел  $s = s_1 + s_2 + \dots + s_N$ . Падающая волна индуцирует на  $s$  поверхностные электрические токи с плотностью  $\mathbf{K}$ . Рассеянные телами

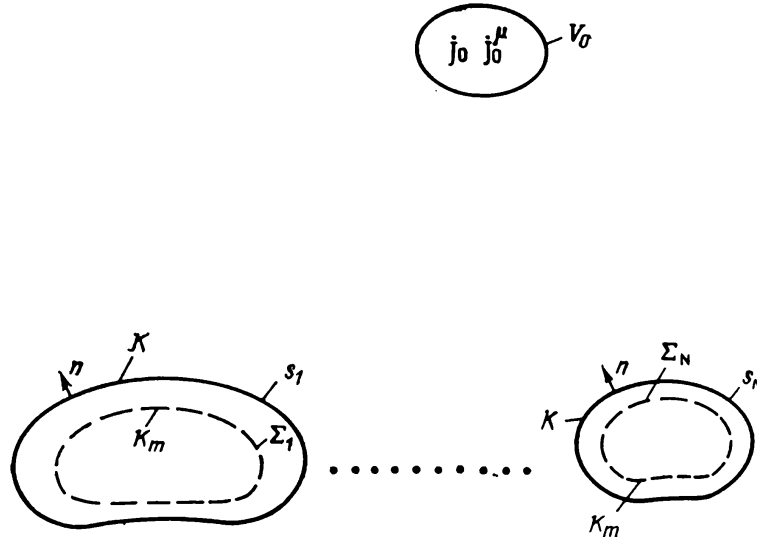


Рис. 1

поле  $\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$ , возбуждаемое токами  $\mathbf{K}$ , совместно с  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  определяет полное поле

$$(1) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^r + \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^r + \mathbf{H}^0.$$

Полное поле удовлетворяет краевому условию

$$(2) \quad [\mathbf{E}\mathbf{n}] = 0 \text{ на } s,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор наружной нормали к  $s$ .

Пусть  $\Sigma_i$  — некоторая геометрическая поверхность, находящаяся целиком внутри  $s_i$  (рис. 1), а  $\Sigma = \sum_{i=1}^N \Sigma_i$  — суммарная поверхность. Желательно,

чтобы внутри  $\Sigma$  лежали все особенности поля, аналитически продолженного внутрь  $s$  [5], так как это может привести к повышению устойчивости вычислительных алгоритмов (см. (16) — (17)).

Введем на  $\Sigma$  семейство  $\{\mathbf{K}_m\}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) вспомогательных электрических поверхностных токов. Поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_m$ , обозначим  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$ . При расчете этого поля все пространство, включая области, находящиеся внутри  $s$ , будем предполагать заполненными однородной средой с параметрами, равными параметрам внешней к  $s$  среды.

Применим к полям  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$  в пространстве, лежащем снаружи  $s$ , лемму Лоренца:

$$(3) \quad \int_{(s)} \{[\mathbf{E}^m \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \mathbf{H}^m]\} ds = \int_{(v_0)} (\mathbf{j}_0 \mathbf{E}^m - \mathbf{j}_0^\mu \mathbf{H}^m) dv$$

или, учитывая (2) и равенства

$$\mathbf{K} = [\mathbf{n} \mathbf{H}] \text{ на } s, \quad ds = \mathbf{n} ds,$$

запишем (3) в виде

$$(4) \quad \int_{(s)} \mathbf{K} \mathbf{E}^m ds = \int_{(v_0)} (\mathbf{j}_0^\mu \mathbf{H}^m - \mathbf{j}_0 \mathbf{E}^m) dv, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Интеграл, стоящий справа, может быть также вычислен по следующим формулам, вытекающим из леммы Лоренца, примененной к полям  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  и  $\mathbf{E}^m$ ,  $\mathbf{H}^m$  в соответствующих областях:

$$(5) \quad \int_{(v_0)} (\mathbf{j}_0^\mu \mathbf{H}^m - \mathbf{j}_0 \mathbf{E}^m) dv = \int_{(s)} \{[\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^m] - [\mathbf{E}^m \mathbf{H}^0]\} ds = - \int_{(\Sigma)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}^0 ds.$$

Введем обозначения

$$(6) \quad (\mathbf{K}, \mathbf{E}_t^m) \equiv \int_{(s)} \mathbf{K} \overline{\mathbf{E}}^m ds;$$

$$\Phi_m \equiv \overline{\mathbf{E}_t^m} \text{ на } s.$$

Здесь  $\mathbf{E}_t^m$  — тангенциальная векторная составляющая  $\mathbf{E}^m$  на  $s$ , а черта сверху — знак комплексного сопряжения. Учитывая (6), можно переписать (4) в следующем виде:

$$(7) \quad (\mathbf{K}, \Phi_m) = a_m, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(8) \quad a_m = \int_{(v_0)} (\mathbf{j}_0^\mu \mathbf{H}^m - \mathbf{j}_0 \mathbf{E}^m) dv.$$

Очевидно, что искомый ток  $\mathbf{K}$  на поверхности  $s$  принадлежит пространству  $L^2(s)$ , если многосвязная поверхность  $s$  не имеет ребер с углами у вершины, равными нулю.

Будем считать, что семейство вспомогательных токов  $\{\mathbf{K}_m\}$  линейно независимо, принадлежит пространству  $L^2(\Sigma)$  и полно в нем. При этих условиях семейство соответствующих им вектор-функций  $\{\Phi_m\}$  на  $s$  принадлежит  $L^2(s)$  и полно в нем.

Принадлежность  $\mathbf{E}_t^m$ , а значит, и  $\Phi_m$  пространству  $L^2(s)$  очевидна, так как ее источники — ток  $\mathbf{K}_m$  — распределены на непересекающейся с  $s$  поверхности  $\Sigma$ . Остается доказать полноту  $\{\Phi_m\}$  в  $L^2(s)$ . Для этого достаточно показать, что если для любого вектора  $\mathbf{A} \in L^2(s)$  (вектор  $\mathbf{A}$  задан на поверхности  $s$  и касателен к ней) выполняются равенства

$$(9) \quad (\mathbf{A}, \Phi_m) = 0 \text{ при } m=0, 1, 2, \dots,$$

то  $\mathbf{A} \equiv 0$  на  $s$ .

Учитывая (6), равенства (9) можно переписать так:

$$(10) \quad \int_{(s)} \mathbf{A} \mathbf{E}^m ds = \int_{(\Sigma)} \mathbf{K}_m \mathbf{E} \{ \mathbf{A}; s \} ds = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

При этом мы использовали лемму Лоренца и ввели обозначение  $\mathbf{E} \{ \mathbf{A}; s \}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого поверхностным электрическим током  $\mathbf{A}$ , распределенным на  $s$  (при расчете этого поля все пространство предполагается заполненным однородной средой с параметрами внешней к  $s$  среды).

Поскольку  $\mathbf{E}_t \{ \mathbf{A}; s \} \in L^2(\Sigma)$ , а семейство  $\{\mathbf{K}_m\}$  полно в  $L^2(\Sigma)$ , то из (10) сразу заключаем, что

$$(11) \quad \mathbf{E}_t \{ \mathbf{A}; s \} \equiv 0 \text{ на } \Sigma.$$

Из этого равенства следует

$$(12) \quad \mathbf{A} \equiv 0 \text{ на } s,$$

за исключением случая, когда в среде (внешней к  $s$ ) отсутствуют потери и частота  $\omega$  совпадает с резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$  хотя бы одного из  $N$  резонаторов, ограниченного снаружи поверхностью  $\Sigma_i$  с краевым условием  $\mathbf{E}_t = 0$  на  $\Sigma_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Действительно, при условии (11) и  $\omega \neq \omega_{\text{рез}}$  поле  $\mathbf{E} \{ \mathbf{A}; s \}$ ,  $\mathbf{H} \{ \mathbf{A}; s \}$  тождественно равно нулю внутри  $\Sigma$  и, следовательно, равно нулю также всюду внутри  $s$ . Если  $N > 1$ , то мы имеем дело с  $N$  от-

дельными резонаторами (см. рис. 1). При этом предполагается, что (в отсутствие потерь)  $\omega$  не совпадает с  $\omega_{\text{рез}}$  ни одного из них.

Поскольку  $E_t\{A; s\}$  непрерывно при переходе через  $s$ , то это поле равно нулю также и снаружи  $s$ . Таким образом, скачок  $H_t\{A; s\}$  при переходе через  $s$  равен нулю, а поскольку он также равен  $A$ , то и  $A \equiv 0$  на  $s$ . Следовательно, полнота  $\{\Phi_m\}$  в  $L^2(s)$  доказана (исключая случаи, когда  $\omega = \omega_{\text{рез}}$ ).

Можно также доказать, что семейство  $\{\Phi_m\}$  линейно независимо на  $s$ , т. е. из равенства

$$(13) \quad \sum_{m=0}^M C_m \Phi_m = 0 \quad \text{на } s,$$

где  $M$  — любое целое число, а  $C_m$  — постоянные, следует

$$(14) \quad C_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Учитывая обозначение (6) и линейную зависимость поля от возбуждающего его тока, перепишем (13) (переходя к комплексно-сопряженному равенству) так

$$(15) \quad \sum_{m=0}^M \bar{C}_m E_t^m \equiv \sum_{m=0}^M \bar{C}_m E_t\{K_m; \Sigma\} = E_t\left\{\sum_{m=0}^M \bar{C}_m K_m; \Sigma\right\} = 0 \quad \text{на } s.$$

Здесь использованы обозначения, аналогичные введенным в (10).

Поле  $E\left\{\sum_m \bar{C}_m K_m; \Sigma\right\}$ , возбуждаемое током  $\sum_m \bar{C}_m K_m$ , распределенным на  $\Sigma$ , вследствие равенства (15) равно нулю всюду вне поверхности  $\Sigma$ . Так как касательная составляющая электрического вектора непрерывна при переходе через поверхность  $\Sigma$ , поскольку на ней распределен только электрический ток, то (если  $\omega \neq \omega_{\text{рез}}$ ) поле равно нулю также внутри  $\Sigma$  и, следовательно,

$$\sum_m C_m K_m = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

поскольку на  $\Sigma$  непрерывен также магнитный вектор. Вследствие линейной независимости семейства  $\{K_m\}$  на  $\Sigma$  из предыдущего равенства следует, что  $C_m = 0$  при  $m = 0, 1, 2, \dots, M$  и, следовательно, линейная независимость  $\{\Phi_m\}$  на  $s$  доказана.

Таким образом, если поверхность  $\Sigma$  выбрана так, что  $\omega \neq \omega_{\text{рез}}$  (для соответствующих резонаторов см. выше), то семейство вектор-функций  $\{\Phi_m\}$  линейно независимо на  $s$  и полно в пространстве  $L^2(s)$ .

Учитывая это, равенства (7) могут быть использованы для нахождения плотности тока  $K$  на  $s$  одним из двух способов, изложенных в [3]. При этом можно получить для  $K$  ряд, сходящийся по норме  $L^2(s)$ , с окончательно определенными коэффициентами или систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов ряда, определяющего  $K$ . Зная  $K$  на  $s$ , найдем рассеянное поле  $E^r, H^r$  по известным формулам. Ряды для этого поля сходятся равномерно [3] всюду вне  $s$ . В соответствии со сказанным можно записать (см. [3])

$$(16) \quad K = \sum_{m=0}^{\infty} C_m U_m,$$

где (первый способ)

$$(16a) \quad C_m = \sum_{n=0}^m a_n \overline{a_n^{(m)}}; \quad U_m = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} \Phi_n,$$

а коэффициенты  $a_n^{(m)}$  находятся из условий  $(U_n, U_m) = \delta_{nm}$ , или (второй способ), когда в качестве  $\{U_m\}$  в выражении (16) используется подходящая полная (но не обязательно ортогональная) система функций. Тогда, подставляя (16) в (7), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения  $C_m$ :

$$(17) \quad \sum_{m=0}^{\infty} C_m (U_m, \Phi_n) = a_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Вместо электрических токов  $\{K_m\}$  на поверхности  $\Sigma$  можно было бы задать семейство магнитных поверхностных токов  $\{K_m^\mu\}$ . Равенства (4), а следовательно, и (7) при этом сохраняются, но под  $E^m, H^m$  понимается поле, созданное магнитным током  $K_m^\mu$ . Если семейство  $\{K_m^\mu\}$  линейно независимо и полно в  $L^2(\Sigma)$ , то функции  $\{\Phi_m\}$  также линейно независимы и полны в  $L^2(s)$ , за исключением случая, когда отсутствуют потери во внешней среде и  $\omega = \omega_{рез}$  — резонатора, ограниченного снаружи поверхностью  $\Sigma$  с краевым условием  $H_t = 0$  на  $\Sigma$ .

Дальнейшее решение задачи проводится аналогично случаю электрических токов  $\{K_m\}$ . Так как резонансные частоты при краевых условиях  $E_t = 0$  на  $\Sigma$  и  $H_t = 0$  на  $\Sigma$  различны, то при любом заданном значении  $\omega$  можно всегда построить линейно независимое и полное семейство  $\{\Phi_m\}$  при произвольно выбранной вспомогательной поверхности  $\Sigma$ , не говоря уже о том, что выбор последней также в наших руках.

Представляет интерес частный случай, когда поверхность  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) стянута в точку, находящуюся внутри  $s_i$ , т. е.  $\Sigma$  вырождается в  $N$  точек. При этом вместо поверхностных электрических или магнитных токов в этих точках должны быть заданы семейства мультиполей. Ограничимся для простоты случаем  $N=1, \Sigma = \Sigma_1, s = s_1$ . Введем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$  с центром в точке  $\Sigma$ . В качестве вспомогательных источников, расположенных в этой точке, будем рассматривать мультиполи, создающие поля, определяемые потенциалами Дебая [6]:

$$(18) \quad V = \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} H_{\nu+1/2}^{(2)}(kr) P_\nu^n(\cos \theta) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi. \end{cases}$$

Здесь  $\nu$  и  $n$  пробегает неотрицательные целочисленные значения.

При помощи одного потенциала (при фиксированных  $\nu$  и  $n$ ) можно построить как электрическую, так и магнитную волну по известным формулам [6]. Если перенумеровать все эти волны при помощи одного индекса  $m$  (например, так, чтобы нечетным  $m$  соответствовали волны электрического типа, а четным  $m$  — магнитного), то опять получим набор волн  $E^m, H^m$ . Можно показать, что  $\Phi_m \equiv \overline{E_t^m}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) линейно независимы и полны в  $L^2(s)$ . Проще всего это сделать следующим образом. Провести внутри  $s$  сферу  $\Sigma^0$  с центром в точке  $\Sigma$  такого радиуса, при котором резонатор, ограниченный сферой  $\Sigma^0$  (с краевым условием  $E_t = 0$  на  $\Sigma^0$ ), имеет резонансные частоты  $\omega_{рез}$ , отличные от частоты  $\omega$  рассматриваемой задачи. При этом легко найти на  $\Sigma^0$  поверхностный электрический ток  $K_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), создающий снаружи сферы  $\Sigma^0$  поле, совпадающее с  $E^m, H^m$ , определяемым соответствующим потенциалом (18), а внутри  $\Sigma^0$  — некоторое поле, регулярное там, включая центр сферы  $\Sigma^0$ . Для этого следует определить поле внутри  $\Sigma^0$  при помощи потенциала

$$V = A_m \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} J_{\nu+1/2}(kr) P_\nu^n(\cos \theta) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

и найти постоянную  $A_m$  из условия непрерывности касательной составляющей электрического вектора при переходе через поверхность  $\Sigma^0$ . Тогда скачок касательной составляющей магнитного вектора при переходе через  $\Sigma^0$  определит искомый ток  $K_m$  на  $\Sigma^0$ . Полученное таким образом семейство  $\{K_m\}$ , как легко убедиться, линейно независимо и полно в  $L^2(\Sigma^0)$  и даль-



нейшее доказательство линейной независимости и полноты  $\{\Phi_m\}$  проводится тождественно данному выше.

Поскольку сфера  $\Sigma^0$  имеет вспомогательное значение и семейство  $\{\Phi_m\}$  на  $s$ , определяемое мультиполями, находящимися в точке  $\Sigma$ , не зависит от выбора радиуса сферы  $\Sigma^0$ , то это семейство полно в  $L^2(s)$  вне зависимости от выбора частоты  $\omega$  рассматриваемой задачи. Все приведенные выше соображения остаются верны и для случая, когда  $N > 1$  и рассматривается задача о рассеянии волны  $N$  телами.

Стягивание поверхности  $\Sigma$  в точку (или  $N$  точек) в случае нерэлеевских поверхностей  $s$  может вызвать трудности при ортонормировке  $\{\Phi_m\}$  или решении системы (17) и потребовать специальной регуляризации или специального выбора семейства  $\{U_m\}$  в (16). Рэлеевской называется поверхность, внутри которой можно построить сферу так, чтобы все особенности рассеянного поля (аналитически продолженного внутрь  $s$ ) находились внутри нее.

Диаграмма рассеяния по полю равна

$$(19) \quad \mathbf{F}(\theta, \varphi) = \int_{(s)} \mathbf{K}_\perp e^{ik\rho \cos \vartheta} ds.$$

Здесь  $\rho$  — расстояние между началом координат и точкой интегрирования,  $\vartheta$  — угол между направлениями на точку интегрирования и точку наблюдения  $\mathbf{r}$ , проведенными из начала координат, а  $\mathbf{K}_\perp$  — поперечная относительно  $\mathbf{r}$  составляющая поверхностной плотности тока. Связь между  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{E}^r$  в дальней зоне следующая:

$$(20) \quad \mathbf{E}^r = \frac{\omega \mu}{4\pi i} \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{F}(\theta, \varphi).$$

## 2. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим бесконечно длинный, идеально проводящий цилиндр с осью  $z$ , контур  $L$  поперечного сечения которого определяется уравнением

$$(21) \quad R = \rho(\varphi).$$

Здесь  $R, \varphi, z$  — цилиндрическая система координат.

Пусть на этот цилиндр падает перпендикулярно его оси в направлении, определяемом углом  $\varphi=0$ , плоская волна  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ , у которой

$$(22) \quad E^0 = E_z^0 = e^{-ikR \cos \varphi}.$$

То, что волна падает в направлении  $\varphi=0$ , не уменьшает общности задачи, так как ось  $x$ , от которой отсчитывается  $\varphi$ , может быть ориентирована любым образом в плоскости  $z = \text{const}$ .

В качестве вспомогательных полей  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$  выберем поля, источники которых расположены вдоль оси  $z$  и не зависят от координаты  $z$ . Не конкретизируя этих источников, запишем сразу создаваемые ими поля при помощи формул

$$(23) \quad E^m = E_z^m = \begin{cases} H_{m/2}^{(2)}(kR) \cos\left(\frac{m}{2}\varphi\right), & m=0, 2, 4, \dots, \\ H_{(m+1)/2}^{(2)}(kR) \sin\left(\frac{m+1}{2}\varphi\right), & m=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Равенства (7) теперь можно записать так:

$$(24) \quad (K, \Phi_m) \equiv \int_L K \Phi_m dL = a_m, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(25) \quad \Phi_m = \overline{E^m}, \quad a_m = \int_{(L)} \{[\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^m] - [\mathbf{E}^m \mathbf{H}^0]\} \mathbf{n} dL.$$

Интегрирование проводится по контуру  $L$  рассматриваемого цилиндра, лежащего в сечении  $z=0$ ,  $\mathbf{n}$  — наружная нормаль к поверхности цилиндра, а  $K=K_z$  — искомая плотность тока, индуцированного на поверхности цилиндра падающей волной.

Выражение для  $a_m$  (см. (25)) может быть упрощено. Для этого применим лемму Лоренца к полям  $\mathbf{E}^m$ ,  $\mathbf{H}^m$  и  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  в области, ограниченной контурами<sup>2</sup>  $L$  и  $L_0$ , где  $L_0$  — окружность малого радиуса  $R_0$ , охватывающая (источники) начало координат. Тогда получим (см. (25))

$$a_m = \int_{(L_0)} \{[\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^m] - [\mathbf{E}^m \mathbf{H}^0]\} \mathbf{n} dL.$$

Учитывая (22) и (23), найдем в результате интегрирования

$$(26) \quad a_m = \begin{cases} \frac{1}{30\pi k} (-i)^{m/2}, & m=0, 2, 4, \dots, \\ 0, & m=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Поскольку контур  $L$  определяется уравнением (21), то элемент длины в (24) равен

$$(27) \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} + \rho^2 d\varphi.$$

Искомый ток  $K$  на  $L$  выражается формулой (16), где  $C_m$  и  $U_m$  находятся из (16а) (метод ортогонализации) или из системы линейных уравнений (17), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$(28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_{mn} = a_m, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$(29) \quad b_{mn} = \int_0^{2\pi} E^m U_n \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} + \rho^2 d\varphi.$$

В этих равенствах учтены определение (24) и формулы (25) и (27). В качестве  $\{U_n\}$  в (29) и (16) можно использовать семейство  $\{\Phi_n\}$ ; в этом случае отрезок из первых  $N$  членов ряда (16), где  $C_n$  находятся из соответствующих укороченных уравнений (28), дает наилучшую (по норме  $L^2$ ) аппроксимацию тока  $K$ .

Если размеры поперечного сечения цилиндра велики по сравнению с волной, то выражение для тока  $K$  следует представлять в виде

$$(30) \quad K = K^0 + K^A,$$

где  $K^0$  — нулевое приближение, найденное, например, методом Кирхгофа, геометрической оптики и т. п. Тогда, подставляя (30) в (24), получим

$$(31) \quad \int_{(L)} K^A \Phi_m dL = a_m - \int_{(L)} K^0 \Phi_m dL, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $\Phi_m$  и  $a_m$  по-прежнему определяются выражениями (25), (26) и  $K^A$  находится из (31) одним из двух описанных выше методов. В приближении Кирхгофа плотность тока, наведенного на поверхности цилиндра (21) падающей волной (22), равна

$$(32) \quad K^0 = K_z^0 = \begin{cases} 2H_y^0 \frac{\rho \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\sqrt{(\rho \rho')^2 + \rho^2}} & \text{в области света,} \\ 0 & \text{в области тени,} \end{cases}$$

<sup>2</sup> В действительности следует рассматривать пространство между цилиндрами, сечения которых ограничены контурами  $L$  и  $L_0$ . Однако так как поля не зависят от  $z$ , то интегралы сводятся к контурным интегралам по  $L$  и  $L_0$ .

где

$$(33) \quad H_y^0 = -\sqrt{\epsilon/\mu} e^{-ik\rho \cos \varphi}.$$

При учете (19) диаграмма рассеяния для двумерного случая имеет вид

$$(34) \quad F(\varphi) = \int_{(L)} K e^{ikh\rho \cos \varphi} dL$$

и связана с полем следующим выражением:

$$(35) \quad E_r = E_z r = -\frac{\omega\mu}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{-i(kR_0 - \pi/4)} F(\varphi).$$

Здесь  $R_0$  — расстояние от начала координат до точки наблюдения, лежащей в плоскости  $z=0$ .

Рассмотрим пример, когда контур  $L$  определяется равенством

$$R = \rho(\varphi) \equiv A - B \sin^2 \varphi.$$

На рис. 2, *a, б* ( $A=2,3$ ;  $B=0,75$ ) и рис. 3, *a, б* ( $A=5$ ;  $B=2$ ) при  $\lambda=\pi$  изображены распределения модуля плотности тока  $K=K_z$  на контуре  $L$  и модуля диаграммы направленности (34) рассеянного поля при падении на цилиндр первичной волны (22). На рис. 2 сплошная кривая —  $N=12$ ; крестики —  $N=9$ ; кружочки —  $N=7$ . На рис. 3, *a* сплошная кривая —  $N=14, 16, 18, 20$ ; крестики —  $N=12$ ; кружочки —  $N=10$ ; на рис. 3, *б* сплошная кривая —  $N=12, 14, 16, 18, 20$ ; кружочки —  $N=10$ . Здесь  $N$  — число членов ряда (16), учтенных при построении соответствующих кривых.

Ток  $K$  вычислен обоими методами (ортогонализацией и сведением к системе линейных уравнений (28)), результаты которых совпали с графической точностью.

Из рисунков видно, что сходимость, как и следовало ожидать, для диаграммы рассеяния лучше, чем для тока  $K$ .

Все расчеты на ЭВМ проводила Ф. А. Богданова, за что автор выражает ей свою признательность.

### 3. ТЕЛА С ИМПЕДАНСНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Пусть на суммарной поверхности  $s$  некоторой группы тел вместо краевого условия (2) выполняется для полного поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  условие

$$(36) \quad \mathbf{E}_t = \hat{Z} [\mathbf{nH}] \text{ на } s,$$

где для общности полагаем, что импеданс  $\hat{Z}$  является линейным ограниченным оператором, действующим из  $L^2(s)$  в  $L^2(s)$ . Особый интерес представляет частный случай, когда оператор — матрица

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix},$$

элементами которой  $z_{ik}$  достаточно гладкие функции на  $s$ , удовлетворяющие условиям

$$(37) \quad \operatorname{Re} z_{11} \geq 0, \quad 4 \operatorname{Re} z_{11} \operatorname{Re} z_{22} \geq |z_{12} + \bar{z}_{21}|^2,$$

при которых задача рассеяния падающей волны  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  на  $s$  имеет единственное решение.

В общем случае для единственности решения задачи рассеяния оператор  $\hat{Z}$  должен удовлетворять необходимому и достаточному условию

$$(38) \quad \hat{Z}_1 \equiv \operatorname{Re} \hat{Z} \geq 0,$$

где  $\operatorname{Re} \hat{Z} = (\hat{Z} + \hat{Z}^*)/2$ , а  $\hat{Z}^*$  — эрмитово-сопряженный с  $\hat{Z}$  в метрике  $L^2(s)$  оператор, т. е. оператор  $\operatorname{Re} \hat{Z}$  должен быть неотрицательным. Доказательство (38) аналогично приведенному в [7]. Подчеркнем, что условие (37) только достаточное и может быть заменено условием (38). Вводя, как и выше, поле  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$ , возбуждаемое током  $\mathbf{K}_m$ , распределенным на  $\Sigma$ ,

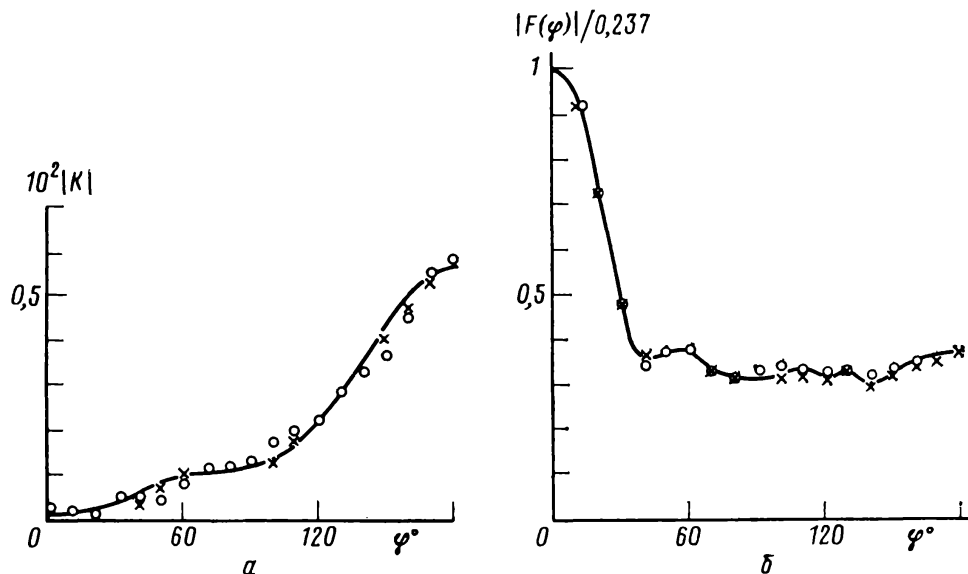


Рис. 2

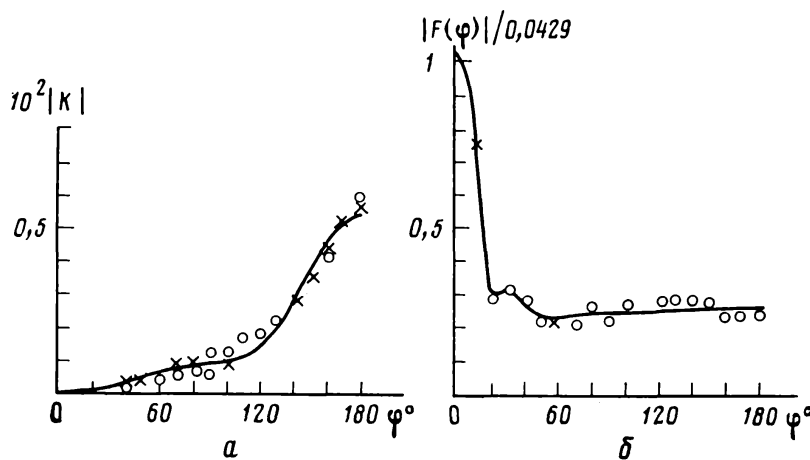


Рис. 3

и применяя к полям  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^m$ ,  $\mathbf{H}^m$  в пространстве, лежащем снаружи  $s$ , лемму Лоренца, получим опять равенство (3). Учитывая условие (3б) и обозначение (8), запишем (3) так:

$$\int_{(s)} \{ \mathbf{E}^m[\mathbf{nH}] + [\mathbf{H}^m\mathbf{n}] \hat{Z}[\mathbf{nH}] \} ds = a_m$$

или, используя формальную запись

$$(39) \quad \mathbf{K} = [\mathbf{nH}] \text{ на } s,$$

$$\int_{(s)} \{ \mathbf{E}_t^m \mathbf{K} + [\mathbf{H}^m\mathbf{n}] \hat{Z}\mathbf{K} \} ds = a_m.$$

Это равенство можно переписать с использованием обозначения (6) (скалярное произведение в  $L^2(s)$ ) в виде

$$(40) \quad (\mathbf{K}, \overline{\mathbf{E}_t^m}) + (\hat{Z}\mathbf{K}, [\overline{\mathbf{H}^m}, \mathbf{n}]) = a_m.$$

Так как по определению  $\hat{Z}^*$

$$(\hat{Z}\mathbf{K}, \mathbf{A}) = (\mathbf{K}, \hat{Z}^*\mathbf{A}),$$

где  $\mathbf{K}, \mathbf{A} \in L^2(s)$ , то вместо (40) имеем

$$(41) \quad (\mathbf{K}, \overline{\mathbf{E}_t^m} + \hat{Z}^*[\overline{\mathbf{H}^m}, \mathbf{n}]) = a_m.$$

Обозначение

$$(42) \quad \mathbf{F}_m = \overline{\mathbf{E}_t^m} + \hat{Z}^*[\overline{\mathbf{H}^m}, \mathbf{n}] \text{ на } s$$

позволяет придать равенству (41) окончательный вид:

$$(43) \quad (\mathbf{K}, \mathbf{F}_m) = a_m, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Семейство вектор-функций  $\{\mathbf{F}_m\}$  линейно независимо и полно в  $L^2(s)$ , если вспомогательные поля  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$  выбраны так, как это сделано в предыдущем разделе.

Для доказательства полноты, как и выше, покажем, что из равенств

$$(\mathbf{A}, \mathbf{F}_m) = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

где  $\mathbf{A} \in L^2(s)$ , следует, что  $\mathbf{A} = 0$  на  $s$ .

Подставляя сюда  $\mathbf{F}_m$  из (42), получим

$$(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{E}_t^m}) + (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{z}}^* [\overline{\mathbf{H}^m \mathbf{n}}]) = 0$$

или

$$(44) \quad (\mathbf{A}, \overline{\mathbf{E}_t^m}) + (\hat{\mathbf{z}} \mathbf{A}, [\overline{\mathbf{H}^m \mathbf{n}}]) = 0.$$

Из леммы Лоренца следуют два равенства:

$$(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{E}_t^m}) = \int_{(s)} \mathbf{E}\{\mathbf{A}; s\} \mathbf{K}_m ds$$

и

$$(\hat{\mathbf{z}} \mathbf{A}, [\overline{\mathbf{H}^m \mathbf{n}}]) = - \int_{(s)} \mathbf{E}^\mu\{[\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathbf{A}]; s\} \mathbf{K}_m ds.$$

Здесь  $\mathbf{E}^\mu\{\mathbf{B}; s\}$  — электрический вектор, возбуждаемый магнитным током  $\mathbf{B}$ , распределенным на  $s$ . Учитывая эти равенства, запишем (44) так:

$$\int_{(s)} (\mathbf{E}\{\mathbf{A}; s\} + \mathbf{E}^\mu\{[\hat{\mathbf{z}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}]; s\}) \mathbf{K}_m ds = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Так как семейство  $\{\mathbf{K}_m\}$  полно в  $L^2(\Sigma)$  по определению, то из написанных равенств следует

$$(45) \quad \mathbf{E}_t\{\mathbf{A}; s\} + \mathbf{E}_t^\mu\{[\hat{\mathbf{z}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}]; s\} = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Сумма, стоящая слева<sup>3</sup>, представляет собой касательную составляющую вектора электрического поля, возбуждаемого электрическим поверхностным током  $\mathbf{A}$  и магнитным поверхностным током  $[\hat{\mathbf{z}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}]$ , распределенными на  $s$ . Поэтому на основании теоремы единственности<sup>4</sup> и краевого условия (45) поле этих токов тождественно равно нулю внутри  $\Sigma$ . Поскольку в области, расположенной внутри  $s$ , токов нет, то в ней поле также отсутствует и, следовательно, предельные значения его компонент  $\mathbf{E}_t^-$  и  $\mathbf{H}_t^-$  на  $s$  при стремлении изнутри равны нулю. Так как электрические  $\mathbf{A}$  и магнитные  $[\hat{\mathbf{z}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}]$  токи, возбуждающие рассматриваемое поле, распределены на  $s$ , то внешние предельные значения его компонент на  $s$  равны

$$(46) \quad \mathbf{E}_t^+ = \hat{\mathbf{z}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H}_t^+ = [\mathbf{A} \mathbf{n}].$$

Эти компоненты должны быть согласованы, поскольку задавая одну из них и решая соответствующую внешнюю краевую задачу электродинамики, найдем другую.

Покажем, что заданные формулами (46) компоненты поля, вообще говоря, противоречивы и могут иметь место только при  $\mathbf{A} = 0$  на  $s$ . Очевидно, что

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}^+ \overline{\mathbf{H}^+}] ds \geq 0,$$

ибо поток ваттной мощности, создаваемый рассматриваемыми токами, направлен наружу. Подставляя сюда значения компонент поля из (46),

<sup>3</sup> Функция  $\mathbf{E}_t\{\mathbf{A}; s\}$  в (45), очевидно, принадлежит  $L^2(\Sigma)$ .

<sup>4</sup> Теорема единственности, а значит, и полнота, нарушаются в случаях, оговоренных выше при доказательстве полноты  $\{\Phi_m\}$ .

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} \bar{A} \hat{Z} A ds \equiv \operatorname{Re} (A, \hat{Z} A) \leq 0$$

или [7]

$$(47) \quad (A, \hat{Z}_1 A) \leq 0,$$

где  $\hat{Z}_1 = \operatorname{Re} \hat{Z}$  (см. (38)).

Поскольку  $\operatorname{Re} \hat{Z}$  — неотрицательный оператор по определению, то в соотношении (47) реализуется только знак равенства, т. е.

$$(A, \hat{Z}_1 A) = 0.$$

Отсюда следует также (см. выше), что поток ваттной мощности в открытое внешнее пространство равен нулю и, следовательно, рассматриваемое поле тождественно равно нулю и вне  $s$ .

Поскольку ток  $A$  равен скачку  $H$ , при переходе через  $s$ , из сказанного ясно, что  $A \equiv 0$  на  $s$  и полнота  $\{F_m\}$  в  $L^2(s)$  доказана. Аналогично доказательству линейной независимости  $\{\Phi_m\}$ , данному выше, может быть проведено соответствующее доказательство и для  $\{F_m\}$ .

Вследствие полноты и линейной независимости  $\{F_m\}$  равенства (43) могут быть использованы для нахождения  $K$  подобно тому, как это было сделано выше (см. (16), (17)) при помощи равенств (7).

Диаграмму рассеяния проще всего определить при помощи теоремы эквивалентности [8], используя эквивалентные токи на  $s$  (см. (39) и (36)):

$$(48) \quad K = [nH]; \quad K^\mu = -[nE] = -[n \cdot \hat{Z}K].$$

Эти токи известны, так как  $K$  определяется равенствами (43). Диаграмма рассеяния имеет вид

$$(49) \quad F(\theta, \varphi) = [i_r [F_s i_r]] + \sqrt{\varepsilon/\mu} [F_\mu i_r].$$

Здесь

$$F_s = \int_{(s)} K e^{i k \rho \cos \vartheta} ds; \quad F_\mu = \int_{(s)} K^\mu e^{i k \rho \cos \vartheta} ds,$$

$i_r$  — единичный орт, направленный из начала координат в точку наблюдения, обозначения  $\rho$  и  $\vartheta$  те же, что и в формуле (19); связь с рассеянным полем определяется выражением (20).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н. РЭ, 1979, т. 24, № 3, с. 456.
2. Фельд Я. Н. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 1, с. 79.
3. Фельд Я. Н. РЭ, 1975, т. 20, № 1, с. 28.
4. Фельд Я. Н. РЭ, 1981, т. 26, № 6, с. 1154.
5. Кюркчан А. Г. РЭ, 1984, т. 29, № 11, с. 2129.
6. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957.
7. Фельд Я. Н. РЭ, 1983, т. 28, № 4, с. 642.
8. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. 1. М.: ВВИА им. Жуковского, 1955.

Поступила в редакцию  
19.XI.1985

Я.Н. ФЕЛЬД

## ПРИНЦИП ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ЭКРАНОВ

*(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 10 I 1986)*

Принципом дополнителности мы будем называть соотношения, устанавливающие связь между электромагнитными полями двух задач. В первой из них фигурирует один плоский электрически проводящий экран, а в другой задаче к нему добавляется еще магнитопроводящий экран, дополняющий его до полной плоскости. Этот принцип принадлежит к тому же типу соотношений, что и принцип двойственности [1, 2]. Отличие заключается в том, что последний определяет связь между полями двух задач, в каждой из которых рассматривается только один электрически проводящий экран (оба экрана образуют полную плоскость).

Рассмотрим две задачи.

I. Пусть в пространстве, заполненном однородной средой, находится бесконечно тонкий экран  $s_1$  произвольной формы, обладающий идеальной электрической проводимостью и расположенный в плоскости  $z = 0$  (рис. 1). В общем случае этот экран может быть многосвязным. Будем считать, что в нижнем полупространстве  $z < 0$  находятся источники — электрические токи, распределенные с плотностью  $\mathbf{J}$  любым заданным образом. Поле, создаваемое этими токами в присутствии экрана  $s_1$ , обозначим  $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$ .

II. Одновременно рассмотрим задачу, в которой экран  $s_1$  дополнен до полной плоскости  $z = 0$  экраном  $s_2$ , обладающим идеальной магнитной проводимостью (рис. 2). Среда при этом предполагается прежней.

Заменим теперь источники вдвое меньшими, распределенными с плотностью  $0,5 \mathbf{J}$ . Поле их в присутствии двух экранов  $s_1$  и  $s_2$  обозначим  $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$ .

Между полями этих двух задач существует следующая связь:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{e} \\ \mathbf{H}^{(1)} &= \mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{h} \end{aligned} \quad \text{при } z \leq 0.$$

Здесь  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  — поле, создаваемое токами  $0,5 \mathbf{J}$  и  $0,5 \mathbf{J}^*$  в свободном (от экранов) пространстве; ток  $\mathbf{J}^*$  является зеркальным отражением тока  $\mathbf{J}$  в плоскости  $z = 0$  с изменением знака, т.е. в зеркальных точках  $q(x, y, z)$  и  $q^*(x, y, -z)$  эти токи связаны соотношениями

$$(2) \quad J_{x,y}^*(q^*) = -J_{x,y}(q), \quad J_z^*(q^*) = J_z(q).$$

Равенства (1) представляют математическую формулировку принципа дополнителности в теории плоских экранов.

Перейдем к доказательству (1). Пусть поле  $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$  решает задачу II, т.е. удовлетворяет неоднородным уравнениям Максвелла с заданными источниками — токами  $0,5 \mathbf{J}$ , краевыми условиями\*

$$(3) \quad E_t^{(2)} = 0 \quad \text{на } s_1 \quad \text{и} \quad H_t^{(2)} = 0 \quad \text{на } s_2$$

и принципу излучения на бесконечности.

Тогда, для того чтобы векторы  $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$ , найденные по формулам (1),\* Индексом  $t$  снизу обозначается тангенциальная составляющая соответствующего вектора.

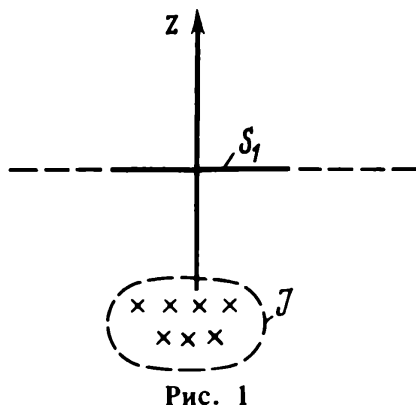


Рис. 1

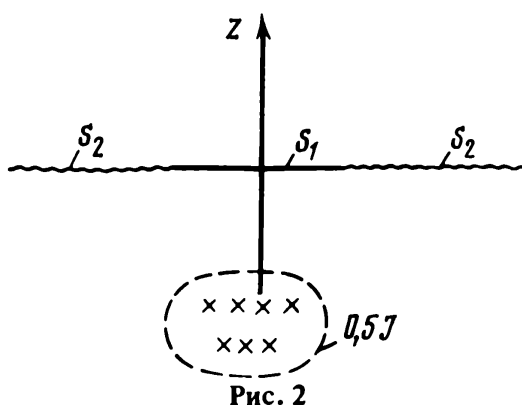


Рис. 2

определяли поле задачи I в нижнем полупространстве, необходимо и достаточно показать, что они удовлетворяют при  $z \leq 0$ :

- а) неоднородным уравнениям Максвелла с током  $\mathbf{J}$ ;
- б) краевым условиям

$$(4) \quad E_t^{(1)} = 0 \text{ на } s_1 \text{ и } H_t^{(1)} = H_t^0 \text{ на } s_2,$$

где  $\mathbf{H}^0$  магнитный вектор первичного поля, возбуждаемого током  $\mathbf{J}$  в свободном пространстве;

- в) принципу излучения на бесконечности.

Следует помнить, что второе условие (4) является следствием известного [2] факта, что токи, индуцированные на экране  $s_1$ , не возбуждают на поверхности  $s_2$  (лежащей в той же плоскости  $z = 0$ ) касательной составляющей магнитного вектора. Подчеркнем, что этим фактом обусловлено выполнение как принципа дополнительности, так и принципа двойственности [2].

Переходя к доказательству пунктов а), б) в), отметим, что справедливость первого и последнего из них сразу следует из вида формул (1). Действительно, в правой части (1) фигурирует сумма двух полей  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$  и  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ .

Поскольку каждое из них удовлетворяет неоднородным уравнениям Максвелла с плотностью тока  $0,5 \mathbf{J}$  (при  $z < 0$ ) и принципу излучения, то их сумма удовлетворяет неоднородным уравнениям Максвелла с плотностью тока  $\mathbf{J}$ , а также принципу излучения. Остается доказать пункт б). Нетрудно понять, что

$$(5) \quad e_t = 0 \text{ и } h_t = H_t^0 \text{ при } z = 0.$$

Это следует из того, что  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  — поле, возбуждаемое в свободном пространстве токами  $0,5 \mathbf{J}$  и  $0,5 \mathbf{J}^*$ , являющимися зеркальным отражением (с переменной знака) друг друга в плоскости  $z = 0$  (см. (2)), а  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  — поле тока  $\mathbf{J}$  в свободном пространстве.

Соотношения (1) позволяют написать

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} + e_t \text{ на } s_1; \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)} + h_t \text{ на } s_2.$$

Подставляя в правые части этих формул значения величин, взятые из (3) и (5), получим краевые условия (4). Доказательство закончено.

Установим еще связь между полем  $\mathbf{E}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$  в верхнем полупространстве  $z > 0$  и полем  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$  при  $z < 0$ . Из соображений, связанных с симметрией вторичного поля относительно плоскости  $z = 0$ , следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)}(q) &= \mathbf{E}^0(q) + \{\mathbf{E}_*^{(1)}(q^*) - \mathbf{E}_*^0(q^*)\}, \\ \mathbf{H}^{(1)}(q) &= \mathbf{H}^0(q) - \{\mathbf{H}_*^{(1)}(q^*) - \mathbf{H}_*^0(q^*)\}. \end{aligned}$$



Здесь  $q$  — точка с координатами  $x, y, z > 0$ , а  $q^*$  — с координатами  $x, y, -z$ . Звездочка внизу у вектора  $E_*^{(1)}(q^*)$  указывает на то, что он является зеркальным отображением вектора  $E^{(1)}(q^*)$  в плоскости  $z = 0$  (аналогично и для остальных векторов).

Теперь, учитывая (1), получим искомую связь

$$(6) \quad \begin{aligned} E^{(1)}(q) &= E^0(q) + E_*^{(2)}(q^*) + e_*(q^*) - E_*^0(q^*), \\ H^{(1)}(q) &= H^0(q) - H_*^{(2)}(q^*) - h_*(q^*) + H_*^0(q^*). \end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что в соотношениях (6) точка  $q$  находится в верхнем полупространстве ( $z > 0$ ), а ее зеркальное изображение  $q^*$  в нижнем.

В частном случае, когда ток  $J$  унесен в бесконечность ( $-\infty$ ), первичные поля задач I и II сводятся к плоским волнам.

В заключение отметим, что из принципа дополнительности (1) следует далеко не очевидный вывод — поле  $E^{(2)}, H^{(2)}$  смешанной краевой задачи II на контуре, где стыкуются идеальные электрический  $s_1$  и магнитный  $s_2$  экраны, имеет те же особенности, что и поле  $E^{(1)}, H^{(1)}$  задачи I на контуре (ребре) одного электрического экрана  $s_1$ . Этот вывод, очевидно, распространяется и на случай криволинейных экранов, если в точках контура, где стыкуются электрический и магнитный экраны, можно провести касательную плоскость. И, наконец, если в задачах I и II поменять местами электрический и магнитный экраны, то связь между соответствующими полями легко получить, применив к соотношениям (1) и (6) принцип перестановочной инвариантности [3].

Поступило  
22 I 1986

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пистолькорс А.А. — ЖТФ, 1946, т. 16, № 1, с. 3–10.
2. Фельд Я.Н. — ДАН, 1948, т. 60, № 7, с. 1165–1167.
3. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. М. 1955, ч. 1. 208 с.

## РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXXII

Июнь 1987

Вып. 6

МОСКВА

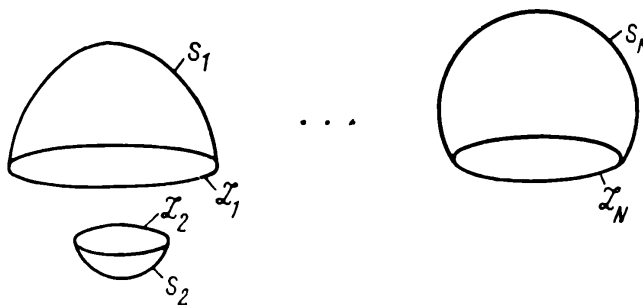
УДК 621.396.67.01

СИНТЕЗ ТОКА НА НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ  
ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ*Фельд Я. Н.*

Решена задача о нахождении распределения плотности тока на незамкнутой поверхности, удовлетворяющего условиям Майкснера на ее контуре, по заданной диаграмме направленности. Ток найден в виде ряда, сходящегося по норме пространства  $L^2(s)$ . Рассмотрены условия реализуемости диаграммы и указаны методы определения тока по заданной нереализуемой диаграмме.

Задача о нахождении распределения тока на некоторой, в общем случае незамкнутой поверхности  $s$  по заданной диаграмме направленности представляет интерес для антенной техники, например для теории зеркальных антенн. Аналогичная задача уже рассматривалась в работе [1] для замкнутых поверхностей.

Отличие в постановке задачи в данной работе заключается еще и в том, что искомое распределение тока должно удовлетворять условиям Майкснера на контуре  $\mathcal{L}$ , на который опирается поверхность  $s$ , т. е. он не принадлежит пространству  $L^2(s)$ . Для того чтобы учесть также случай много-



зеркальных антенн, поверхность  $s$  предполагаем многосвязной, т. е. состоя-

щей из нескольких разомкнутых поверхностей  $s = \sum_{n=1}^N s_n$ , а контур  $\mathcal{L}$  —

из нескольких замкнутых контуров  $\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_n$  (рисунок).

1. Переходя непосредственно к рассматриваемой задаче, обозначим буквами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  поле, создаваемое искомым поверхностным током с плотностью  $\mathbf{K}$ , распределенным на  $s$  и реализующим заданную диаграмму  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$  ( $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат с центром вблизи  $s$ ). Так как ток  $\mathbf{K}$  излучает конечную ваттную мощность, то  $\mathbf{F}(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , где  $\Omega$  — единичная сфера.

Зададим на сфере  $S_0$  радиусом  $r_0$ , содержащей внутри себя поверхность  $s$ , семейство поверхностных токов  $\{\mathbf{K}_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Пусть  $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$  — поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_n$ , в свободном пространстве. Применяя к полям  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$  лемму Лоренца, найдем

$$(1) \quad \int_{(s)} \mathbf{K} \mathbf{E}^n ds = \int_{(S_0)} \mathbf{K}_n \mathbf{E} ds.$$

Поле  $\mathbf{E}$  при  $r \rightarrow \infty$  имеет вид

$$(2) \quad \mathbf{E} = \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{F}(\theta, \varphi) + O(r^{-2}),$$

где  $k$  — волновое число.

Аналогично запишем и вспомогательные токи на  $S_0$ :

$$(3) \quad \mathbf{K}_n = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \mathbf{j}_n(\theta, \varphi), \quad n=1, 2, \dots$$

Семейство  $\{\mathbf{j}_n\}$  будем считать линейно независимым, принадлежащим пространству  $L^2(\Omega)$  и полным в нем. В нашем случае  $L^2(\Omega)$  состоит из векторных функций, заданных на  $\Omega$ , касательных к ней и интегрируемых с квадратом.

Подставляя (3) в (1) и переходя к пределу, когда радиус  $r_0$  сферы  $S_0$  стремится к бесконечности, учитывая (2), найдем

$$(4) \quad \int_{(s)} \overline{\mathbf{K} \mathbf{e}^n} ds = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Здесь

$$(4a) \quad \mathbf{e}^n = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{E}_t^n} \text{ на } s, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

черта — знак комплексного сопряжения.

Ток  $\mathbf{K}$  на  $s$  будем искать в пространстве  $L_R^2(s)$  со скалярным произведением

$$(5) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{(s)} \overline{\mathbf{A} R \mathbf{B}} ds.$$

Здесь  $R$  — линейный оператор, выбираемый так, чтобы  $L_R^2(s)$  было гильбертовым пространством, а его элементы — векторы, касательные к  $s$ , удовлетворяли бы условиям Майкснера для тока при приближении к  $\mathcal{L}$ . В качестве  $R$  удобно использовать матрицу с положительными элементами:

$$(6) \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Если на  $s$  одна из ортогональных координатных линий  $x_1 = \text{const}$  совпадает

с  $\mathcal{L}$ , то элемент  $R_{11}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  должен вести себя как  $O(\rho^{-1})$ ,  $R_{22}$  — как  $O(\rho^{1/2})$  ( $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ ).

Используя обозначение (5), перепишем равенство (4) в виде

$$(7) \quad (\mathbf{K}, R^{-1}\mathbf{e}^n) = a_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

где  $R^{-1}$  — матрица, обратная  $R$ ,

$$(8) \quad a_n \equiv \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega$$

— известные числа, являющиеся коэффициентами типа Фурье искомого тока  $\mathbf{K}$ . Как легко видеть,  $R^{-1}\mathbf{e}^n \in L_R^2(s)$  и удовлетворяет условиям Майкснера для тока при приближении к  $\mathcal{L}$ .

2. Докажем, что семейство  $\{R^{-1}\mathbf{e}^n\}$  полно в  $L_R^2(s)$  и линейно независимо.

Начнем с полноты. Для этого нужно показать, что из условий

$$(9) \quad (\mathbf{A}, R^{-1}\mathbf{e}^n) = 0, \quad n=1, 2, \dots,$$

где  $\mathbf{A} \in L_R^2(s)$ , следует  $\mathbf{A} = 0$  на  $s$ .

Перепишем (9), учитывая (5), в виде

$$(9a) \quad \int_{(s)} \mathbf{A} \bar{\mathbf{e}}^n ds = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Из леммы Лоренца следует равенство

$$(10) \quad \int_{(s)} \mathbf{A} \mathbf{E}^n ds = \int_{(s_0)} \mathbf{K}_n \mathbf{E}\{\mathbf{A}; s\} ds.$$

Здесь  $\mathbf{E}\{\mathbf{A}; s\}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого электрическим током  $\mathbf{A}$ , распределенным на  $s$ .

Переходя в (10) к пределу, когда  $r_0 \rightarrow \infty$ , и учитывая (4a) и (3), найдем

$$\int_{(s)} \mathbf{A} \bar{\mathbf{e}}^n ds = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^e(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

При этом использована формула типа (2):

$$\mathbf{E}\{\mathbf{A}; s\} = \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{F}^e(\theta, \varphi) + O(r^{-2}).$$

Теперь равенство (9a) можно переписать в виде

$$\int_{(\Omega)} \mathbf{F}^e(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Вследствие полноты  $\{\mathbf{j}_n\}$  в  $L^2(\Omega)$  и того, что  $\mathbf{F}^e(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , следует

$$\mathbf{F}^e(\theta, \varphi) = 0 \text{ на } \Omega.$$

Отсюда на основании теоремы Реллиха [2] само поле и возбуждающий его ток  $\mathbf{A}$  всюду равны нулю. Таким образом, полнота доказана.

Докажем теперь, что семейство  $\{R^{-1}E_t^n\}$  линейно независимо при любом значении  $r_0$ , т. е. из условия

$$(11) \quad \sum_{n=1}^N \alpha_n R^{-1} E_t^n = 0 \text{ на } s$$

следуют равенства  $\alpha_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ).

Воздействуя на (11) оператором  $R$  слева и учитывая принцип суперпозиции, найдем

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n E_t^n \equiv \sum_{n=1}^N \alpha_n E_t \{K_n; S_0\} = E_t \left\{ \sum_{n=1}^N \alpha_n K_n; S_0 \right\} = 0 \text{ на } s.$$

Отсюда видно, что

$$(11a) \quad K^0 \equiv \sum_{n=1}^N \alpha_n K_n = 0 \text{ на } S_0.$$

Действительно, если  $K^0$  — поверхностный ток, распределенный на  $S_0$  и  $E\{K^0; S_0\} = 0$  на  $s$ , то из леммы Лоренца следует

$$\int_{(S_0)} E\{J; s\} K^0 ds = \int_{(s)} E\{K^0; S_0\} J ds = 0,$$

где  $J$  — произвольный поверхностный ток, распределенный на  $s$ . Равенство

$$\int_{(S_0)} E\{J; s\} K^0 ds = 0,$$

очевидно, выполняется при любом токе  $J$  только при условии, когда  $K^0 = 0$  на  $S_0$ , таким образом, справедливость (11a) доказана.

Поскольку семейство  $\{K_n\}$  линейно независимо вместе с  $\{j_n\}$  (см. (3)), то из (11a) вытекает  $\alpha_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ).

Из доказанной линейной независимости  $\{R^{-1}E_t^n\}$  на  $s$  при любом значении  $r_0$  следует (при учете (4a)) линейная независимость  $\{R^{-1}e^n\}$  на  $s$ .

3. Так как семейство  $\{R^{-1}e^n\}$  линейно независимо и полно в  $L_R^2(s)$ , то система равенств (7) пригодна для нахождения плотности тока  $K$  на  $s$ .

Действительно, при этом можно ортонормировать  $\{R^{-1}e^n\}$  процессом Шмидта, перейдя к функциям

$$(12) \quad A_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n^m R^{-1} e^n, \quad m=1, 2, \dots,$$

где коэффициенты  $\alpha_n^m$  находятся по известным формулам [3] из условий  $(A_m, A_n) = \delta_{mn}$ ; после чего из (7) находим

$$(13) \quad K = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m \text{ на } s.$$

$$(13a) \quad c_m \equiv (\mathbf{K}, \mathbf{A}_m) = \sum_{n=1}^m \overline{\alpha_n^m} a_n.$$

Поскольку семейство  $\{R^{-1}e^n\}$  полно в  $L_R^2(s)$ , то полно также множество  $\{\mathbf{A}_m\}$  (см. (12)) и ряд (13) сходится по норме  $L_R^2(s)$  к некоторой функции из  $L_R^2(s)$ , удовлетворяющей условиям Майкснера на  $\mathcal{L}$ , так как последним удовлетворяют величины  $R^{-1}e^n$ .

Для вычислений может оказаться проще искать решение в виде ряда

$$(14) \quad \mathbf{K} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m R^{-1}e^m \text{ на } s.$$

Подставляя (14) в (7), найдем для определения  $C_m$  следующую систему линейных уравнений:

$$(15) \quad \sum_{m=1}^{\infty} C_m (R^{-1}e^m, R^{-1}e^n) = a_n, \quad n=1, 2, \dots$$

Первые  $N$  членов ряда (14) дадут наилучшую аппроксимацию  $\mathbf{K}$  по норме  $L_R^2(s)$ . При этом предполагаем, что первые  $N$  коэффициентов находятся из соответствующей укороченной системы (15) [3].

4. Докажем теперь, что существует только одно распределение тока на  $s$ , принадлежащее пространству  $L_R^2(s)$  и реализующее заданную диаграмму  $\mathbf{F}$ .

Рассуждая от обратного, предположим, что существуют два таких распределения  $\mathbf{K}^{(1)}$  и  $\mathbf{K}^{(2)}$ . Тогда для каждого из них справедлива система (7). Вычитая из одной другую, найдем

$$(\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}, R^{-1}e^n) = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Так как семейство  $\{R^{-1}e^n\}$  полно в  $L_R^2(s)$ , то из этих равенств следует  $\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(2)}$  на  $s$ , и наше утверждение доказано.

Укажем теперь класс, которому должна принадлежать диаграмма  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$ , чтобы реализующий ее ток  $\mathbf{K} \in L_R^2(s)$ . Очевидно, что эта диаграмма  $\mathbf{F} \in L^2(\Omega)$ ; это условие необходимое, но не достаточное. Действительно, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2, \quad \text{где } c_m \text{ — коэффициенты Фурье, определяемые формулой (13a),}$$

должен сходиться вследствие равенства Парсеваля. Поэтому, учитывая (13a) и (8), можно записать

$$(16) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^m \overline{\alpha_n^m} \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2 < \infty.$$

При выполнении этого условия из теоремы Рисса — Фишера [3] следует, что существует функция  $\mathbf{K} \in L_R^2(s)$  с коэффициентами Фурье  $\{c_m\}$ , определяемыми формулой (13a).

5. Класс  $\{\mathbf{F}^p\}$  реализуемых диаграмм может отличаться от класса  $\{\mathbf{F}\}$  функций, удовлетворяющих условию (16) (оба класса естественно должны

принадлежать  $L^2(\Omega)$ ), на множество функций, являющихся нулями пространства  $L^2(\Omega)$ . 738

Добавление таких функций к диаграмме  $F$  не меняет условия (16) и значения коэффициентов  $\{c_m\}$ . Доказательство сказанного элементарно. Так, пусть  $F(\theta, \varphi)$  — диаграмма, для которой выполняется условие (16). Тогда на основании сказанного выше распределение тока  $K$  на  $s$  можно определить при помощи равенств (4). Если  $F^p(\theta, \varphi)$  — диаграмма, в действительности реализуемая этим током, то, повторяя выкладки, аналогичные использованным для получения (4), найдем

$$(17) \quad \int_{(s)} K e^n ds = \int_{(\Omega)} F^p(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n=1, 2, \dots$$

Вычитая из (17) равенство (4), получим

$$\int_{(\Omega)} \{F^p(\theta, \varphi) - F(\theta, \varphi)\} j_n(\theta, \varphi) d\Omega = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Так как  $F^p - F \in L^2(\Omega)$ , а семейство  $\{j_n\}$  полно в  $L^2(\Omega)$ , то из последних равенств следует, что

$$F^p - F = \Theta \text{ на } \Omega,$$

где  $\Theta$  — нуль в пространстве  $L^2(\Omega)$ , т. е. подмножество функций, норма которых равна нулю. Таким образом, доказано, что диаграммы, реализуемые током из  $L^2_R(s)$ , отличаются от вектор-функций, принадлежащих пространству  $L^2(\Omega)$  и удовлетворяющих условию (16), только<sup>1</sup> нулями  $\Theta$ .

Учитывая сказанное выше, в качестве «реализуемой» диаграммы можно использовать любую вектор-функцию из  $L^2(\Omega)$ , удовлетворяющую условию (16).

Действительно, поскольку такие диаграммы отличаются от физически реализуемых только подмножеством функций, являющихся нулями пространства  $L^2(\Omega)$ , то безразлично, какие из них подставлять в выражения, определяющие искомый ток на  $s$ . Результаты будут тождественны.

6. Рассмотрим теперь вопрос о синтезировании поверхностных токов на поверхности  $s$  по заданной нереализуемой диаграмме  $F^m(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , но не удовлетворяющей условию (16).

Прежде всего, применяя формально метод, развитый выше, определим искомую плотность тока  $K$  на  $s$  при помощи  $N$  равенств типа (7):

$$(18) \quad (K, R^{-1}e^n) = \int_{(\Omega)} F^m(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Далее можно использовать следующие два приема.

А. Представить ток  $K$  в виде агрегата из первых  $N$  членов ряда (13):

$$(19) \quad K = \sum_{m=1}^N c_m A_m \text{ на } s,$$

<sup>1</sup> Последнее замечание необходимо иметь в виду также при рассмотрении условий реализуемости в работе [1].

$$(20) \quad c_m^H = (\mathbf{K}, \mathbf{A}_m) = \sum_{n=1}^m \overline{\alpha_n^m} \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^H(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Если теперь обозначить через  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$  диаграмму, в действительности реализуемую найденным током (19), то для нее будут выполняться соотношения типа (7):

$$(21) \quad (\mathbf{K}, R^{-1}\mathbf{e}^n) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n=1, 2, \dots$$

Вычитая из (21) равенство (18), найдем

$$(22) \quad \int_{(\Omega)} \{\mathbf{F} - \mathbf{F}^H\} \mathbf{j}_n d\Omega = 0, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Из этих  $N$  равенств следует, что реализуемая током  $\mathbf{K}$  диаграмма  $\mathbf{F}$  наилучшим, в некотором смысле, образом аппроксимирует заданную нереализуемую диаграмму  $\mathbf{F}^H$ . Уточним это утверждение на следующем примере.

Пусть  $G_N(\Omega)$  — некоторое подпространство пространства  $L^2(\Omega)$ , образованное линейной комбинацией элементов  $\mathbf{j}_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ). Тогда, если  $\mathbf{F}^H \in G_N(\Omega)$ , на основании известной теоремы [3] из (22) следует, что  $\mathbf{F}^H$  — элемент  $G_N(\Omega)$ , наименее удаленный от  $\mathbf{F}$  (по норме  $L^2(\Omega)$ ).

Б. Представим теперь ток в виде следующего агрегата из  $N$  членов:

$$(23) \quad \mathbf{K} = \sum_{m=1}^N \alpha_m R^{-1}\mathbf{e}^m,$$

где  $\alpha_m$  — постоянные коэффициенты, удовлетворяющие вследствие (18) линейной системе уравнений

$$\sum_{m=1}^N \alpha_m (R^{-1}\mathbf{e}^m, R^{-1}\mathbf{e}^n) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^H \mathbf{j}_n d\Omega, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Из равенств (18) и (21), второе из которых опять выполняется для тока (23) и реализуемой им диаграммы  $\mathbf{F}$ , следуют равенства (22) и последующие утверждения.

Выбор семейства  $\{\mathbf{j}_n\}$  на сфере  $\Omega$  может быть сделан аналогично тому, как это осуществлено в работе [1], которой в значительной мере следовали и в данной статье.

Может представить интерес случай, когда требуется найти распределение тока на поверхности, у контура которой не ставятся условия типа Майкснера. При этом следует полагать  $R_{11}=R_{22}=1$ , т. е. опустить всюду матрицы  $R$  и  $R^{-1}$ , в остальном сохранив все формулы без изменений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 6. С. 1154.
2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Гостехтеориздат, 1947.

Поступила в редакцию  
5.V.1986



# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 1956 г.

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

Том XXXIII

Февраль 1988

Вып. 2

МОСКВА

УДК 621.396.67.01

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН АНТЕННАМИ (ОБЗОР)

*Бененсон Л. С., Фельд Я. Н.*

Дан обзор известных приближенных методов расчета рассеяния электромагнитных волн антеннами, в том числе расчета интегральных и дифференциальных поверхностей рассеяния, приведены простые формулы для оценки этих величин. Изложены также отдельные результаты, принадлежащие авторам данной работы.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема рассеяния электромагнитных волн антеннами возникла сравнительно недавно — в 40-х годах, когда практическая необходимость таких работ стала очевидной. Еще в [1] было показано, что резонансный вибратор в режиме приема одновременно переизлучает мощность, равную при согласованной нагрузке принятой. Охарактеризовав ее радиусом площадки, через которую первичное поле переносит такую же мощность, автор работы [1] предвосхитил понятие интегрального поперечника рассеяния для резонансного вибратора. Вследствие трудности строгого решения этой задачи из-за сложности конфигурации антенны сначала искали такие методы расчета, при которых для оценки параметров рассеяния можно было бы использовать методы и результаты обычной теории антенн. В этой связи большое принципиальное и практическое значение имела работа [2], в которой было показано, что поле рассеяния любой приемной антенны может быть представлено в виде суперпозиции поля рассеяния на короткозамкнутой антенне и поля этой же антенны в режиме передачи при возбуждении ее ЭДС, равной взятому с обратным знаком падению напряжения на клеммах антенны, нагруженной приемником. Близкие идеи развивались и в [3]. В [4] предложено было рассматривать вместо короткозамкнутой антенны идеально согласованную с приемником, а в режиме передачи — возбуждение антенны волной, отраженной от реального приемника. Этот прием рассматривался и в [5]. В [6–8] поле рассеяния представлялось через характеристики антенны в режиме передачи, для чего антенна рассматривалась как многополюсник (в [8] — как четырехполюсник), связы-

вающий свободное пространство с фидерной системой и характеризуемый своей матрицей рассеяния. Однако в общем случае так представима лишь часть поля, рассеянного антенной. При помощи метода Кирхгофа в [9–13] для упрощенных моделей апертурных антенн были найдены предельные — поглощаемая и рассеянная антенной — мощности, рассчитаны диаграммы рассеяния простейших апертурных антенн — волноводных и рупорных. В [14] методом, развитым в [4], рассмотрена в общем виде возможность управления рассеянием путем подключения к рассеивателю (антенне) регулируемой комплексной нагрузки. В ряде работ исследовались рассеяние тонкими проволочными [15–17], объемными цилиндрическими [18] и сферическим [19] излучателями, кольцевыми рамками [20], антенными решетками [7, 20, 21]. В [22, 23] при помощи теоремы Пойнтинга и обобщенной на случай приемной антенны «оптической теоремы» получено общее соотношение, связывающее поглощенную и рассеянную антенной мощности при заданной комплексной диаграмме рассеяния, а в [24, 25] предложена методика синтеза антенн с заданными рассеивающими свойствами. В монографиях [26, 27] и справочниках [28, 29] содержатся расчетные формулы, расчетные и экспериментальные графики, которые в той или иной степени можно использовать для оценки рассеяния антеннами.

Ниже дан краткий обзор принципиальных вопросов, возникающих при рассмотрении задач рассеяния антеннами.

## 1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Рассеивающие свойства тел принято описывать эффективными поперечниками рассеяния (ЭПР) — интегральным ( $\sigma_{\Sigma}$ ) и дифференциальным ( $\sigma_{\Delta}$ ), а также матрицей рассеяния ( $M$ ).

Поперечники рассеяния характеризуют полные мощности, рассеиваемые телом во всем телесном угле  $4\pi$ sr  $P_{\Sigma}(\theta, \varphi)$ , и на единицу телесного угла в направлении  $\theta', \varphi'$   $P_{\Delta}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$  при облучении тела плоской волной, падающей в направлении  $\theta, \varphi$ . Эти поперечники определяются формулами

$$(1) \quad \sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi) = \frac{P_{\Sigma}(\theta, \varphi)}{|\operatorname{Re} \mathbf{S}(\theta, \varphi)|}, \quad \sigma_{\Delta}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = \frac{4\pi P_{\Delta}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')}{|\operatorname{Re} \mathbf{S}(\theta, \varphi)|},$$

где  $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга падающей волны (для плоской волны  $|\operatorname{Re} \mathbf{S}| = |\mathbf{S}|$ ). Величины  $\sigma_{\Sigma}$  и  $\sigma_{\Delta}$ , имеющие размерность площади, равны нормальным к вектору  $\mathbf{S}$  площадкам, через которые падающей волной переносятся мощности, равные  $P_{\Sigma}$  и  $P_{\Delta}$  соответственно. В случае двумерной задачи  $\sigma_{\Sigma}$  и  $\sigma_{\Delta}$  — погонные величины, имеющие размерность длины. Величина  $\sigma_{\Sigma}$  является функцией направления  $\theta, \varphi$  прихода падающей волны, а величина  $\sigma_{\Delta}$  кроме того зависит и от направления  $\theta', \varphi'$  наблюдения, т. е. является «двухпозиционной».

Наибольший практический интерес представляет «однопозиционная» функция  $\sigma_{\text{дор}} = \sigma_{\Delta}(\theta, \varphi)$  в направлении, обратном направлению облучения — поперечник обратного рассеяния. Угловые зависимости  $\sigma_{\Delta}$  и  $\sigma_{\text{дор}}$  называют индикатрисами или диаграммами рассеяния.

Поскольку  $P_{\Sigma} = \oint_{\Omega} P_{\Delta}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') d\Omega'$ , очевидно,

$$(2) \quad \sigma_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Omega} \sigma_{\Delta}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') d\Omega' \equiv \bar{\sigma}_{\Delta},$$

где  $\Omega$  — единичная сфера. Из формул (1) также следует, что

$$(3) \quad \sigma_d/\sigma_z = 4\pi P_r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') [P_z(\theta, \varphi)]^{-1} \equiv D^r(\theta, \varphi; \theta', \varphi'); \quad \sigma_d = \sigma_z D^r,$$

где величину  $D^r$  по аналогии с коэффициентом направленного действия (КНД) антенны можно назвать КНД рассеяния. Очевидно, также, что

$$(4) \quad \sigma_z(\theta, \varphi) = \sigma_n(\theta, \varphi) P_z(\theta, \varphi) [P_n(\theta, \varphi)]^{-1},$$

где  $P_n$  — мощность, принятая приемной антенной,  $\sigma_n \equiv P_n |\text{Re } \mathbf{S}|^{-1}$  — ее эффективная поглощающая поверхность,  $\theta, \varphi$  — направление падающей волны.

Для описания рассеяния по отдельным компонентам поляризации первичного (падающего) и рассеянного полей вводят матрицу рассеяния  $M$  (матрицу второго ранга), элементами которой являются частичные дифференциальные поперечники рассеяния  $\sigma_{ik}$  ( $i, k=1, 2$ ), соответствующие  $k$ -й компоненте электрического вектора рассеянного поля при облучении  $i$ -й компонентой падающей волны [28]. Величины  $\sigma_{ik}$  — также двухпозиционные функции, т. е. зависят как от  $\theta, \varphi$ , так и от  $\theta', \varphi'$ . Для обратного рассеяния справедливы соотношения симметрии

$$(5) \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

и инвариантности, заключающейся в независимости «следа» матрицы  $M$ , равного  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\sigma_{12}$ , от выбора поляризационного базиса, в котором представляются падающее и рассеянное поля [28, § 2.3]. В общем случае  $\sigma_{12} \neq 0$ . Таким образом, в рассеянном поле имеется кроссполяризованная компонента, однако всегда можно ввести такой поляризационный базис (свой для каждого направления  $\theta, \varphi$ ), что матрица рассеяния будет диагональной и  $\sigma_{12} = 0$ . Например, при нормальном падении плоской волны на металлическую плоскость такой базис образуют две любые взаимно ортогональные линейные поляризации. Это значит, что при отражении таких волн кроссполяризации не возникает. В то же время в базисе круговых поляризаций  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{12} \neq 0$ , поскольку при отражении от металлической плоскости нормально падающей волны круговой поляризации направление вращения изменяется на обратное. Если же в задаче рассеяния от линейного вибратора выбрать базисные линейные поляризации, параллельные и перпендикулярные его оси, то получим  $\sigma_{11} \neq 0$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ .

## 2. ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ ХОРОШО ПРОВОДЯЩИХ И ПОГЛОЩАЮЩИХ ТЕЛ, А ТАКЖЕ АПЕРТУРНЫХ АНТЕНН

Для расчета рассеяния в инженерной практике пользуются чаще всего так называемым приближением Кирхгофа, основанным на ряде допущений.

1. Так, в случае идеально проводящего тела с поверхностью  $s$  ( $=s_{\text{осв}} + s_{\text{тен}}$ ), радиусы кривизны которой велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , полагают

$$(6) \quad \mathbf{E}_\tau = 0 \text{ на } s; \quad \mathbf{H}_\tau = 2\mathbf{H}_\tau^0 \text{ на } s_{\text{осв}}, \quad \mathbf{H}_\tau = 0 \text{ на } s_{\text{тен}}.$$

Здесь  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^r$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^r$  — полное поле,  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  — падающее первичное, а  $\mathbf{E}^r$ ,  $\mathbf{H}^r$  — рассеянное поля;  $s_{\text{осв}}$  и  $s_{\text{тен}}$  — соответственно освещенная и теневая (затененная) части поверхности  $s$ , разделенные «теневым контуром»  $L$  — замкнутой линией на  $s$ ; индексом  $\tau$  обозначена тангенциальная составляющая вектора на  $s$ .

Из равенств (6) следует, что на поверхности  $s$  наводится поверхностный электрический ток с плотностью

$$(7) \quad \mathbf{K} = 2[\mathbf{nH}^0] \text{ на } s_{\text{осв}}, \quad \mathbf{K} = 0 \text{ на } s_{\text{тен}},$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя к  $s$  нормаль.

Рассеянное телом поле определяется по этому току при помощи известных формул, например через вектор Герца. Формулы (6), (7), как известно, точно выполняются только при падении волны на идеально проводящую плоскость. Полная рассеянная мощность

$$(8) \quad P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}^r \mathbf{H}^{r*}] ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s [(\mathbf{E} - \mathbf{E}^0)(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0)^*] ds.$$

Здесь  $ds = \mathbf{n} ds$ , а \* — знак комплексного сопряжения. Поскольку

$$(9) \quad \operatorname{Re} \int_s [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds = 0,$$

учитывая равенства (6), запишем (8) в виде

$$(10) \quad P_r = -\operatorname{Re} \int_{s_{\text{осв}}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds = \operatorname{Re} \int_{s_{\perp}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds = 2|\mathbf{S}^0| s_{\perp},$$

где  $s_{\perp}$  — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную вектору Пойнтинга  $\mathbf{S}^0$  первичной волны («теневого поперечник»); предполагается, что первичная волна в пределах тела квазиплоская (при этом  $|\operatorname{Re} \mathbf{S}^0| = |\mathbf{S}^0|$ ). Согласно определению (1), из (10) следует, что интегральный поперечник рассеяния идеально проводящего тела

$$(11) \quad \sigma_z = 2s_{\perp}.$$

2. Если первичная волна падает на хорошо поглощающее и слабо отражающее («черное») тело, то на его поверхности  $s$  обычно полагают

$$(12) \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t^0 \text{ и } \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_t^0 \text{ на } s_{\text{осв}}; \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{H}_t = 0 \text{ на } s_{\text{тен}}.$$

При этом рассеянная мощность (8)

$$(13) \quad P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_{\text{тен}}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_{\text{осв}}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds = |\mathbf{S}^0| s_{\perp}.$$

Отсюда следует, что поперечник рассеяния черного тела

$$(14) \quad \sigma_z = s_{\perp},$$

т. е. вдвое меньше, чем у такого же идеально проводящего тела. Формулы (11) и (14) позволяют предположить, что в случае любого непрозрачного тела (при указанных выше ограничениях на его форму и размеры) при любых импедансных граничных условиях на его поверхности в приближении Кирхгофа будут справедливы неравенства

$$(14a) \quad s_{\perp} \leq \sigma_z \leq 2s_{\perp};$$

при этом предполагается, что импеданс — достаточно медленно меняющаяся функция на  $s$ , когда импедансные условия вообще имеют смысл. В работе [30] доказана справедливость (14a) для двумерного случая.

Диаграмма рассеяния черного тела при использовании на его поверхности условий (12) может быть найдена при помощи эквивалентных элек-

$$(15) \quad \mathbf{K} = [\mathbf{nH}^0] \text{ и } \mathbf{K}^\mu = -[\mathbf{nE}^0] \text{ на } s_{\text{осв}}.$$

3. В практически важном случае, когда на идеально проводящей части  $s_1$  поверхности  $s$  рассеивающего тела используются условия (6), а на остальной части  $s_2$  условия черного тела (12), рассеянную мощность (8) можно записать следующим образом:

$$2P_r = -\operatorname{Re} \int_{s_1 \text{ осв}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds + \operatorname{Re} \int_{s_1 \text{ тен}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds + \operatorname{Re} \int_{s_2 \text{ тен}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds.$$

Учитывая равенство (9), перепишем это выражение так:

$$P_r = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_1 \text{ осв}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s \text{ осв}} [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{0*}] ds = |S^0| (s_{1\perp} + s_{\perp}).$$

Отсюда следует, что интегральный поперечник рассеяния тела со смешанными краевыми условиями

$$(16) \quad \sigma_z = s_{1\perp} + s_{\perp} \equiv 2s_{\perp} - s_{2\perp},$$

где  $s_{1\perp}$ ,  $s_{2\perp}$ ,  $s_{\perp}$  — площади проекций поверхностей  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s$  на плоскость, перпендикулярную направлению падения первичной волны. В частных случаях, когда  $s_2=0$  и  $s=s_1$ , формула (16) переходит в (11), а когда  $s_1=0$  и  $s=s_2$ , в (14).

Из формулы (16) следует, что и в рассматриваемом случае справедливы неравенства (14а).

4. Краевые условия (6) и (12) обычно называют условиями Кирхгофа. Они не только приближенные, но и внутренне противоречивые. Так, например, из одновременного обращения в нуль компонент  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  на конечной части поверхности  $s$  следует, что поле всюду тождественно равно нулю. Очевидно также, что поля токов (7) или (15) совместно с полем  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  не обеспечивают точного выполнения исходных краевых условий (6) или (12). Несмотря на сказанное, этими условиями все-таки можно пользоваться для приближенного нахождения рассеянных полей. Действительно, у достаточно больших тел величины  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  малы в области тени, и, поскольку для нахождения  $\mathbf{E}^r$ ,  $\mathbf{H}^r$  пользуются квадратурными формулами типа Кирхгофа, куда  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  входят линейно, интегралами от них по  $s_{\text{тен}}$  можно пренебречь. Краевые же условия для так называемого «абсолютно черного» тела, как известно, точно сформулировать в рамках классической электродинамики нельзя, поэтому условия (12) являются одним из вариантов приближенного описания такого тела. Внутренне не противоречивой является методика, предложенная Макдональдом [27] для расчета рассеяния на черном теле. Она сводится к тому, что полное поле определяется как полусумма двух полей, одно из которых находится на поверхности  $s$  при краевом условии  $\mathbf{E}_\tau=0$ , а второе — при  $\mathbf{H}_\tau=0$ . Первичное поле  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  при этом полагается заданным одинаково. Однако такой подход связан в общем случае со значительными математическими трудностями и не позволяет получить простых формул для  $\sigma_z$ , подобных приведенным выше.

Численный расчет  $\sigma_z$  для ряда выпуклых тел показывает, что соотношения (11) и (14) выполняются асимптотически: при размерах тела, стремящихся к бесконечности. При конечных поперечниках имеют место

отклонения от этих формул, зависящие от формы и размеров тела и поляризации первичного поля. Так, отношение величин  $\sigma_z$ , вычисленных в приближении Кирхгофа и в результате решения интегрального уравнения соответствующей граничной задачи для металлических ленты и кругового цилиндра, равно единице при достаточно больших (в долях  $\lambda$ ) ширине ленты  $2a$  и диаметре цилиндра  $2a$ , с уменьшением  $a$  для ленты растет (при  $2a=1,0\lambda$  до 1,11), а для цилиндра — падает, причем довольно резко (если при  $2a=3,18\lambda$  это отношение равно 0,93, то при  $2a=0,64\lambda$  оно составляет 0,76). Последний эффект еще более заметен в случае эллиптического цилиндра, большая ось сечения которого параллельна направлению распространения первичной волны<sup>1</sup>. Можно предположить, что это обусловлено протяженностью теневой части тела в этом направлении. Аналогичные результаты, полученные для черных тел в [27], связываются с возбуждением (в случае выпуклых тел) «ползущих» волн и отсутствием резких изломов поверхности, присущих ленте и диску, что приводит к росту поглощения и соответственно уменьшению рассеяния согласно (16).

5. Переходя к рассмотрению рассеяния антеннами падающего на них поля, следует прежде всего отметить, что любая антенна, вне зависимости от степени согласования ее с нагрузкой, рассеивает в окружающее пространство часть падающей на нее энергии. Легко показать, что если в антенную систему поступает некоторая мощность, то это может иметь место только при наличии рассеяния. Иными словами, если антенна не рассеивает, то она ничего не принимает. Действительно, пусть на антенну падает первичная волна  $E^0, H^0$ . Окружим антенну некоторой геометрической поверхностью  $s_0$ . Тогда мощность, принимаемая антенной, будет равна потоку полного поля внутрь  $s_0$ :

$$P_{\text{п}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_0} [E H^*] ds = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_0} [(E^0 + E^r)(H^0 + H^r)^*] ds.$$

Если рассеяние отсутствует, то  $E^r = H^r = 0$  и

$$(17) \quad P_{\text{п}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_0} [E^0 H^{0*}] ds = 0,$$

так как внутри  $s_0$  у поля  $E^0, H^0$  отсутствуют источники и стоки (потери в среде пренебрегаем). Таким образом, предыдущее утверждение доказано. Поэтому имеет смысл лишь несколько уменьшать суммарную рассеиваемую мощность. Напомним, что, как следует из неравенств (14а), уменьшение возможно не более чем в 2 раза. В связи с этим гораздо большее значение имеет форма диаграммы рассеяния. Изменяя ее тем или иным способом, можно получать нули диаграммы в нужных направлениях и даже резко уменьшать рассеяние в целых секторах.

Приведенные в разд. 2 формулы (16) могут быть использованы путем некоторой модификации для оценки интегрального поперечника рассеяния апертурных антенн. Так, любую апертурную антенну, например типа зеркала или рупора, можно рассматривать как некоторое тело, поверхность которого  $s$  состоит из идеально проводящей поверхности  $s_1$  (металлической части антенны) и апертуры  $s_2$ . Если последняя хорошо согласована с приемником, то апертуру можно рассматривать как абсолютно черную поверхность и считать на ней выполненными условия (12). Однако обычно

<sup>1</sup> Эти данные любезно предоставлены В. В. Шкваринным.

имеет место несогласованность апертуры, а также приемника с антенной, что приводит к рассеянию ею первичной волны, которое можно охарактеризовать коэффициентом

$$(18) \quad q = \frac{\sigma_{\pi}}{s_{2\perp}}.$$

Здесь  $\sigma_{\pi}$  — эффективная поглощающая поверхность приемной антенны, равная [31]

$$(19) \quad \sigma_{\pi} = \frac{P_{\pi}}{|S^0|} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \xi |\mathbf{p}_{\mathbf{E}^0} \mathbf{p}_a|^2,$$

где  $G$  — коэффициент усиления антенны,  $\xi = 4R_a R_{\pi} / |Z_a + Z_{\pi}|^2$  характеризует согласование антенны, сопротивление которой  $Z_a = R_a + iX_a$ , с приемником, сопротивление которого  $Z_{\pi} = R_{\pi} + iX_{\pi}$ , а  $\mathbf{p}_{\mathbf{E}^0} = \mathbf{E}^0 / |\mathbf{E}^0|$ ,  $\mathbf{p}_a = \mathbf{F}_{\perp} / |\mathbf{F}_{\perp}|$  — единичные комплексные векторы, характеризующие поляризацию первичной волны и поля антенны соответственно. Заменяя в формулах (16)  $s_{2\perp}$  на  $\sigma_{\pi}$  и вводя коэффициент  $q$ , получаем соотношения:

$$(20) \quad \sigma_{\Sigma} = 2s_{\perp} - \sigma_{\pi} = 2s_{\perp} - qs_{2\perp},$$

учитывающие указанные выше рассогласования. При короткозамкнутой антенне  $q=0$  и  $\sigma_{\Sigma} = 2s_{\perp}$ . Если раскрыв поглощает всю падающую на него мощность (черная поверхность), то  $\sigma_{\pi} = s_{2\perp}$ ,  $q=1$  и

$$(21) \quad \sigma_{\Sigma} = 2s_{\perp} - s_{2\perp} = s_{\perp} + s_{1\perp} = 2s_{1\perp} + s_{2\perp}.$$

В частном случае, когда падающая волна освещает только апертуру антенны, очевидно, что  $s_{1\perp} = 0$  и  $s_{2\perp} = s_{\perp}$ , и из (20) получаем

$$(22) \quad \sigma_{\Sigma} = 2s_{\perp} - qs_{\perp} = s_{\perp} + (1-q)s_{\perp}.$$

В этой формуле выделены два поперечника рассеяния: теневой  $s_{\perp}$  и «обратный»  $(1-q)s_{\perp}$ . Теневое рассеяние (в направлении распространения первичной волны) соответствует  $\sigma_{\Sigma}$  при  $q=1$ ; можно сказать, что это рассеяние свойственно черному телу. «Обратное» рассеяние (в полусферу навстречу первичной волне) зависит от  $q$ , т. е. от распределения поля в апертуре и от согласования антенны с приемником (см. (18) — (19)). Возвращаясь к общей формуле (20), можно сделать следующие выводы:

$$(22a) \quad s_{\perp} \leq \sigma_{\Sigma} \leq 2s_{\perp}; \quad \sigma_{\pi} = 2s_{\perp} - \sigma_{\Sigma} \leq \sigma_{\Sigma},$$

иными словами, рассеянная мощность превосходит принятую либо равна ей. Последнее является отличительной особенностью апертурных антенн. При этом, понятно, исключаются случаи сверхнаправленности, когда  $q$  может быть больше единицы.

6. Из полученных выше формул следует, что рассеяние может отсутствовать в случае  $s_{\perp} = 0$ . Такой случай имеет место, например, при падении плоской волны вдоль бесконечно тонкой металлической пластины или металлического провода так, что вектор  $\mathbf{E}$  поля перпендикулярен пластине или проводу. В этом случае бесконечно малы один или два размера тела и  $s_{\perp} = 0$ . Отсутствие рассеяния возможно и при падении на тело неплоской волны. Так, не рассеивает металлическое тело, на внешней поверхности которого внешними источниками возбуждены токи, аналогичные токам, наводимым свободными колебаниями резонатора на его внутренней поверхности, совпадающей с указанной внешней поверхностью тела. Дейст-

вительно, такие токи не излучают наружу. Однако реализовать эти токи можно лишь при специальном сложном распределении внешних источников, которое практически не наблюдается. Точно так же, если в каждой точке пространства изменить на обратные направления одного из векторов поля антенны в режиме передачи, то изменятся на обратные направления векторов Пойнтинга этого поля, которое поэтому в режиме приема будет полностью поглощаться антенной без какого-либо рассеяния, в том числе и теневого. Однако этот случай также соответствует практически нереализуемому «экзотическому» пространственному распределению источников «обращенного» поля, резко отличающегося от реального случая — падения плоской или близкой к ней волны с одного направления.

### 3. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЙЯНИЯ ЛЮБОЙ АНТЕННЫ

Оценить интегральные характеристики антенн в общем случае можно, используя так называемую «оптическую теорему», получаемую непосредственно из теоремы Пойнтинга. Известная ранее для случая пассивных рассеивателей [32], эта теорема в [22, 23] была обобщена и на случай поглощающих рассеивателей и антенн. Ввиду важности этой теоремы приведем ее вывод в несколько более общем виде, нежели в [22, 23]. Если  $s$  — произвольная замкнутая поверхность, окружающая антенну и проведенная так, что источники первичного поля находятся вне  $s$ , то применяя к полному полю  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в объеме, ограниченном снаружи поверхностью  $s$ , теорему Пойнтинга, получаем соотношение (см. [22])

$$(23) \quad P_{\text{п}} + P_{\text{r}} + P_{\text{в}} = 0,$$

где  $P_{\text{в}}$  — взаимная мощность первичного и рассеянного полей, равная

$$(24) \quad P_{\text{в}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s \{[\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{\text{r}*}] + [\mathbf{E}^{\text{r}} \mathbf{H}^{0*}]\} ds.$$

Для плоской первичной волны, распространяющейся в направлении  $\mathbf{n}$ :

$$(25) \quad \mathbf{H}^0 = Z_0^{-1} [\mathbf{n} \mathbf{E}^0], \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}.$$

Если  $s$  — сферическая поверхность достаточно большого радиуса  $R \geq R_0$  ( $R_0$  — граница дальней зоны для рассеянного поля), то

$$(26) \quad \mathbf{H}^{\text{r}} = Z_0^{-1} [\mathbf{i}_R \mathbf{E}^{\text{r}}].$$

Используя (25) и (26), а также  $ds = \mathbf{i}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , получаем

$$(27) \quad P_{\text{в}} = \frac{R^2}{2Z_0} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{[\mathbf{E}^0 [\mathbf{i}_R \mathbf{E}^{\text{r}*}]] \mathbf{i}_R + [\mathbf{E}^{\text{r}} [\mathbf{n} \mathbf{E}^{0*}]] \mathbf{i}_R\} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Преобразуем интегральное выражение в (27), используя имеющее место в дальней зоне соотношение  $(\mathbf{E}^{\text{r}} \mathbf{i}_R) = 0$ ; при этом найдем

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^0 [\mathbf{i}_R \mathbf{E}^{\text{r}*}]] \mathbf{i}_R &= (\mathbf{E}^0 \mathbf{E}^{\text{r}*}), \\ [\mathbf{E}^{\text{r}} [\mathbf{n} \mathbf{E}^{0*}]] \mathbf{i}_R &= (\mathbf{n} \mathbf{i}_R) (\mathbf{E}^{\text{r}} \mathbf{E}^{0*}) - (\mathbf{E}^{0*} \mathbf{i}_R) (\mathbf{E}^{\text{r}} \mathbf{n}). \end{aligned}$$



$$(28) \quad E^0 = e e^{-ik(ni_R)R},$$

$$(28a) \quad E^r = A(n, i_R) e^{-ikR} R^{-1}, \quad R > R_0,$$

где  $e$  — единичный комплексный вектор ( $|e|=1$ ), характеризующий поляризацию первичной волны,  $A(n, i_R)$  — двухпозиционная векторная диаграмма рассеяния. При этом

$$(29) \quad P_B = R(2Z_0)^{-1} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ (eA^*) e^{ikR[1-(ni_R)]} + (e^*A)(ni_R) e^{-ikR[1-(ni_R)]} - (e^*i_R)(An) e^{-ikR[1-(ni_R)]} \} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Для вычисления этого интеграла используем метод стационарной фазы. Принимая, что первичная волна распространяется в направлении  $\theta = \varphi = \pi/2$  сферической системы координат, найдем, что стационарными являются точки  $\theta = \varphi = \pi/2$  и  $\theta = \pi/2, \varphi = 3\pi/2$ , соответствующие направлению распространения первичной волны и обратному<sup>2</sup>. Однако для второй точки значение интеграла оказывается чисто мнимым и, следовательно, не дает вклада в  $P_B$ . Для первой же точки найдем (см. [33], формула (2.6))

$$P_B = 2\pi (kZ_0)^{-1} \operatorname{Im} (e^*A) |_{i_R=n}$$

(величины  $e$  и  $A$  берутся для  $i_R=n$ , т. е.  $\theta = \varphi = \pi/2$ ). Учитывая, что вектор Пойнтинга первичной волны (28a) равен  $|S^0| = (2Z_0)^{-1}$ , а также определения  $\sigma_\Sigma$  и  $\sigma_\Pi$ , получаем, используя (23), оптическую теорему для трехмерного рассеивателя:

$$(30) \quad \sigma_\Sigma + \sigma_\Pi = -2\lambda \operatorname{Im} (e^*A) |_{i_R=n},$$

обобщенную, по сравнению с [23] на случай произвольной поляризации. Для дальнейшего анализа (30) целесообразно преобразовать. Представим комплексную диаграмму рассеяния  $A(n, i_R)$  в виде

$$(31) \quad A(n, i_R) = |A(n)| \sqrt{\Psi(n, i_R)} p(n, i_R),$$

где

$$(32) \quad \Psi(n, i_R) = |A(n, i_R)|^2 |A(n, n)|^{-2}$$

— нормированная на единицу в направлении распространения первичной волны двухпозиционная диаграмма рассеяния по мощности,  $|A(n)| = |A(n, n)|$  — амплитуда поля, рассеянного в направлении  $n$ ,  $p(n, i_R)$ ,  $|p|=1$  — единичный комплексный вектор, характеризующий поляризацию поля рассеяния, а также его фазовую диаграмму. При этом

$$(33) \quad \operatorname{Im} (e^*A) |_{i_R=n} = -\alpha |A(n)|, \quad \alpha = -\operatorname{Im} (e^*p(n)), \quad p(n) = p(n, n).$$

Как легко видеть, из уравнения (30) следует, что  $\alpha \geq 0$ . Из очевидных соотношений

$$(34) \quad \sigma_\Sigma = \int_\Omega |A(n, i_R)|^2 d\Omega = |A(n)|^2 \int_\Omega \Psi(n, i_R) d\Omega$$

<sup>2</sup> Возможность существования других стационарных точек при резко меняющейся фазовой диаграмме рассеянного поля не рассматривается, так как это было бы эквивалентно «сверхнаправленному» рассеянию.

и

$$(35) \quad D^r(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv D^r(\mathbf{n}) = 4\pi \left[ \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{n}, \mathbf{i}_R) d\Omega \right]^{-1},$$

где  $D^r(\mathbf{n})$  — КНД диаграммы рассеяния в направлении  $\mathbf{n}$ , следует:

$$(36) \quad \sigma_{\Sigma} = 4\pi |A(\mathbf{n})|^2 [D^r(\mathbf{n})]^{-1}, \quad |A(\mathbf{n})| = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\sigma_{\Sigma} D^r(\mathbf{n})}.$$

При этом оптическая теорема принимает вид

$$(37) \quad \sigma_{\Sigma} + \sigma_{\Pi} = \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\sigma_{\Sigma} D^r(\mathbf{n})}$$

или согласно (3)

$$(38) \quad \sigma_{\Sigma} + \sigma_{\Pi} = \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\sigma_{\Sigma}(\mathbf{n})}.$$

Из формулы (37) видно, что суммарный интегральный поперечник (рассеяние плюс поглощение) определяется характеристиками поля рассеяния в теновом направлении и, наоборот, при  $\sigma_{\Sigma} + \sigma_{\Pi} \neq 0$  теновое рассеяние неизбежно. Уравнение (37) квадратное относительно  $\sqrt{\sigma_{\Sigma}}$ . Это значит, что при данных  $\sigma_{\Pi}$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $D^r(\mathbf{n})$  возможны два значения  $\sigma_{\Sigma}$ :  $\sigma_{\Sigma 1}$  и  $\sigma_{\Sigma 2}$ . Вводя обозначение  $\sigma = \lambda^2 (4\pi)^{-1} \alpha^2 D^r(\mathbf{n})$ , запишем (37) в виде

$$(39) \quad \sigma_{\Sigma} + \sigma_{\Pi} = 2\sqrt{\sigma\sigma_{\Sigma}} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma} - 2\sqrt{\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma}} + \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma} = 0,$$

откуда

$$(40) \quad \frac{\sigma_{\Sigma 1,2}}{\sigma} = \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma}} \right]^2.$$

Используя теорему Виета, получаем важные соотношения:

$$(41a) \quad \sigma_{\Sigma 1} \sigma_{\Sigma 2} = \sigma_{\Pi}^2, \quad \sqrt{\sigma_{\Sigma 1}} + \sqrt{\sigma_{\Sigma 2}} = 2\sqrt{\sigma},$$

$$(41b) \quad (\sigma_{\Sigma 1} + \sigma_{\Sigma 2}) + 2\sigma_{\Pi} = 4\sigma.$$

Очевидно, подкоренное выражение в (40) должно быть неотрицательным, поэтому возможные значения  $\sigma_{\Pi}/\sigma$  могут лежать лишь в интервале  $0 \leq \sigma_{\Pi}/\sigma \leq 1$ . При крайних значениях  $\sigma_{\Pi}/\sigma$

$$(42a) \quad \sigma_{\Sigma 1} = 0, \quad \sigma_{\Sigma 2}/\sigma = 4, \quad \text{если} \quad \sigma_{\Pi}/\sigma = 0,$$

$$(42b) \quad \sigma_{\Sigma 1}/\sigma = \sigma_{\Sigma 2}/\sigma = 1, \quad \text{если} \quad \sigma_{\Pi}/\sigma = 1.$$

Если же  $\sigma_{\Pi}/\sigma \ll 1$ , то из (40) следует, что  $\sigma_{\Sigma 1}/\sigma \simeq (\sigma_{\Pi}/2\sigma)^2$  или

$$(42в) \quad \sigma_{\Sigma 1}/\sigma_{\Pi} \sim \sigma_{\Pi}/4\sigma \ll 1,$$

т. е. с уменьшением  $\sigma_{\Pi}$  величина  $\sigma_{\Sigma 1}$  убывает быстрее, чем  $\sigma_{\Pi}$ . Укажем, что величина  $\sigma_{\Sigma 2}$ , найденная из (42a), в 4 раза превышает величину  $\sigma_{\Sigma 2}$ , найденную из (42b), только в том случае, если  $\sigma$  (а следовательно, и  $D^r(\mathbf{n})$ ) одинакова в обоих случаях, иными словами, не зависит от вели-

<sup>3</sup> Однако антенне с конкретной нагрузкой соответствует лишь одно значение  $\sigma_{\Sigma}$  (см. ниже, а также [22]).

чины  $\sigma_n$ ; это имеет место, например, для резонансного вибратора и диполя (см. ниже). Для больших апертурных антенн, когда диаграммы теневого и обратного рассеяний практически не пересекаются, уровень теневого рассеяния практически не зависит от  $\sigma_n$ . Однако максимальные рассеиваемые мощности при нулевой и максимальной  $\sigma_n$  отличаются в 2 раза (см. (10) и (11)), точно так же будут отличаться  $D^r(n)$  и  $\sigma$ , а значит, и  $\sigma_{\Sigma 2}$  (см. (42)).

У апертурных антенн в приближении Кирхгофа оптическая теорема (39) переходит в уравнение (20), поскольку оба равенства (39) и (20) являются следствием одной и той же теоремы Пойнтинга. Следовательно, правые части этих равенств в приближении Кирхгофа должны совпадать:

$$(43) \quad \sqrt{\sigma\sigma_{\Sigma}} = s_{\perp}.$$

Убедиться в справедливости этого равенства можно, например, на двух частных случаях (42а и 42б). Действительно, для (42а) с учетом (11)  $\sqrt{\sigma\sigma_{\Sigma}} = \frac{1}{2} \sigma_{\Sigma} = s_{\perp}$ , а для (42б) с учетом (14) и (22а) —  $\sqrt{\sigma\sigma_{\Sigma}} = \sigma = \sigma_n = s_{\perp}$ .

Таким образом, в случае апертурных антенн уравнение оптической теоремы переходит в линейное относительно  $\sigma_{\Sigma}$  и будет иметь только один корень

$$(44) \quad \sigma_{\Sigma} = 2s_{\perp} - \sigma_n.$$

В то же время в [22] показано, что в случае протяженных (в направлении распространения падающей волны) объемных антенн с импедансным покрытием внешней поверхности (вне апертуры) уравнение оптической теоремы по-прежнему имеет два корня; появление второго корня можно объяснить компенсирующим рассеянием протяженной тыльной части антенны, не учитываемым в приближении Кирхгофа. Рассмотрим более детально смысл коэффициента  $\alpha$ . Для этого запишем поляризационные векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{p}$  в наиболее простом базисе (см. [31, гл. 20]):

$$(45) \quad \begin{aligned} \mathbf{e} &= \cos \nu \mathbf{i}_{\theta} + e^{i\xi} \sin \nu \mathbf{i}_{\varphi}, \quad \cos \nu \geq 0, \quad \sin \nu \geq 0, \\ \mathbf{p} &= (\cos \eta \mathbf{i}_{\theta} + e^{i\xi} \sin \eta \mathbf{i}_{\varphi}) e^{i\psi_{\theta}}, \end{aligned}$$

где

$$(46) \quad \cos \eta = \frac{A_{\theta}}{\sqrt{A_{\theta}^2 + A_{\varphi}^2}} \geq 0, \quad \sin \eta = \frac{A_{\varphi}}{\sqrt{A_{\theta}^2 + A_{\varphi}^2}} \geq 0, \quad \xi = \psi_{\varphi} - \psi_{\theta},$$

$A_{\theta} \geq 0$ ,  $A_{\varphi} \geq 0$  — амплитудные,  $\psi_{\theta}$ ,  $\psi_{\varphi}$  — фазовые диаграммы рассеяния для соответствующих компонент поля, являющиеся двухпозиционными вещественными функциями и определяющие для каждого направления наблюдения  $\theta'$ ,  $\varphi'$  поляризацию рассеянного поля. В общем случае величина  $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}(n))$  с учетом (45) записывается в виде

$$(47) \quad (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}(n)) = [\cos \nu \cos \eta + \sin \nu \sin \eta e^{i(\xi - \zeta)}] e^{i\psi_{\theta} (n)}.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{p}$  может быть определен лишь в результате решения соответствующей дифракционной задачи, ограничимся рассмотрением наиболее простого случая  $\xi = \zeta$ . При этом  $\alpha = -\sin \psi_{\theta}(n) \cos(\nu - \eta)$ ,  $\sin \psi_{\theta}(n) \leq \leq 0$ . Если  $\mathbf{e} = \mathbf{i}_{\theta}$ , то  $\cos \nu = 1$  и  $\alpha = -\sin \psi_{\theta}(n) \cos \eta$ ; при  $\mathbf{p} = e^{i\psi_{\theta}(n)} \mathbf{i}_{\theta}$  аналогично  $\alpha = -\sin \psi_{\theta}(n) \cos \nu$ . При совпадении поляризаций первичного и теневого

<sup>4</sup> В общем случае равенство  $\sigma_n/\sigma = 1$  может выполняться и не при максимальной величине  $\sigma_n$ , поскольку величина  $\sigma$  может зависеть от  $\sigma_n$  (см. [23]).

полей (как, например, при рассеянии на черном теле [27])  $\alpha = -\sin \psi_0(\mathbf{n})$ . Во всех этих случаях  $\sin \psi_0(\mathbf{n}) = 0$  соответствует  $\sigma_z + \sigma_n = 0$ , т. е.  $\sigma_z = \sigma_n = 0$ . Максимум  $\sigma_z + \sigma_n$  достигается при  $\sin \psi_0(\mathbf{n}) = -1$ :  $\psi_0 = -\pi/2$  и  $\theta$ -е компоненты первичного и рассеянного полей в направлении  $\mathbf{n}$  находятся в квадратуре. Нетрудно, однако, убедиться, что при этом будут в квадратуре и полные поля.

В случае двумерной задачи рассеяния при падении плоской волны (25), (28) в направлении  $\theta = \varphi = \pi/2$  на бесконечный цилиндр произвольного сечения, параллельный оси  $z$ , оптическая теорема принимает следующий вид (см. (14) в 22):

$$(48) \quad \sigma_z + \sigma_n = -2 \sqrt{\lambda} \operatorname{Re} \{ e^{-i\pi/4} (\mathbf{e}^* \mathbf{A}(\mathbf{n})) \}.$$

Преобразуя формулу (48) с учетом того, что в двумерном случае

$$(49) \quad D^r = 2\pi \left[ \int_0^{2\pi} \Psi d\varphi \right]^{-1},$$

и обозначая

$$(50) \quad \alpha = -\operatorname{Re} \{ e^{i-\pi/4} (\mathbf{e}^* \mathbf{p}(\mathbf{n})) \} \leq 0,$$

получаем

$$(51) \quad \sigma_z + \sigma_n = +2\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} D^r(\mathbf{n})} \sqrt{\sigma_z}.$$

Вводя параметр  $\sigma = \lambda(2\pi)^{-1} \alpha^2 D^r(\mathbf{n})$ , приводим (51) к виду

$$(52) \quad \sigma_z/\sigma - 2\sqrt{\sigma_z/\sigma + \sigma_n/\sigma} = 0,$$

такому же, как и в трехмерном случае (см. (39)). Поэтому все приведенные выше формулы и принципиальные выводы остаются справедливыми. Правда, величины  $\sigma_{z,2}$  и  $\sigma_n$  при подстановке в соответствующие формулы выражений для параметра  $\sigma$  в трехмерном и двумерном случаях будут различными; но эти различия обуславливаются тем, что в двумерном случае указанные величины являются погонными (имея размерность  $L$ , а не  $L^2$ ). Отметим также, что в двумерном случае при  $|(\mathbf{e}^* \mathbf{p}(\mathbf{n}))| = 1$  получим  $\alpha = -\cos(\Psi_0(\mathbf{n}) - \pi/4)$ ; значению  $\alpha = 1$  соответствует  $\Psi_0(\mathbf{n}) = -3\pi/4$ .

#### 4. ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИАГРАММ РАССЕЙНИЯ АНТЕНН

Сформулированный впервые в [2] и развитый далее в [31, 34], а также в [3—5, 14] общий метод расчета полей рассеяния и анализа структуры диаграммы рассеяния базируется на представлении полей рассеяния в виде суперпозиции двух полей:

$$(53) \quad \mathbf{E}^r = \mathbf{E}_1^r + \mathbf{E}_2^r, \quad \mathbf{H}^r = \mathbf{H}_1^r + \mathbf{H}_2^r,$$

где  $\mathbf{E}_1^r, \mathbf{H}_1^r$  — поле, рассеянное нагруженной антенной, облучаемой первичной волной  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ ,  $\mathbf{E}_2^r, \mathbf{H}_2^r$  — поле излучения этой же антенны при соответствующих условиях возбуждения в режиме передачи в отсутствие первичного поля. Указанное разбиение может проводиться различными способами в зависимости от типа и конструкции антенны и удобств расчета.

Рассмотрим варианты задания полей  $\mathbf{E}_{1,2}^r, \mathbf{H}_{1,2}^r$ . Вариант 1. В первоначальной формулировке [2] поле  $\mathbf{E}_1^r, \mathbf{H}_1^r$  соответствовало короткозамкну-

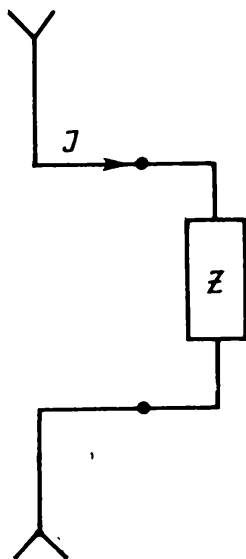


Рис. 1

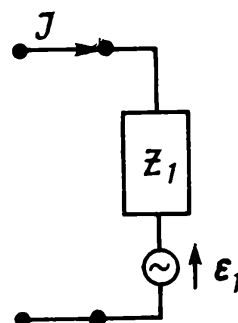


Рис. 2

той антенне, а  $E_2^r$ ,  $H_2^r$  — этой же антенне, возбужденной эквивалентным генератором с нулевым внутренним сопротивлением и ЭДС  $\mathcal{E}$ , равной взятому с обратным знаком падению напряжения  $U_n$  на входе приемника, подключаемого к антенне в режиме приема. Справедливость этого представления следует из того, что при указанной замене приемника генератором распределение тока в антенне не меняется, а поле рассеяния складывается из полей, возбуждаемых двумя источниками: генератором и источниками первичной волны. При этом напряжение  $U_n = IZ$  ( $I$  — ток на клеммах антенны, нагруженной приемником в режиме приема,  $Z$  — внутреннее сопротивление приемника) находится по известным формулам теории приемных антенн, поле излучения при возбуждении антенны ЭДС  $\mathcal{E} = -U_n$  — из теории передающих антенн. Поле рассеяния короткозамкнутой антенны следует рассчитывать, используя точные или приближенные методы теории дифракции.

Вариант 2. Описанный выше прием можно обобщить, заменив сопротивление  $Z$  реального приемника произвольно заданным комплексным сопротивлением  $Z_1$  ( $\text{Re } Z_1 \geq 0$ ) и положив ЭДС эквивалентного генератора равной  $\mathcal{E}_1 = I(Z_1 - Z)$  (внутреннее сопротивление генератора при этом по-прежнему считается равным нулю). Возможность такой замены основана на равнозначности двух эквивалентных схем приемной антенны: с сопротивлением приемника  $Z$  (рис. 1) и с сопротивлением некоторой нагрузки  $Z_1$  и ЭДС  $\mathcal{E}_1$  (рис. 2), связанных условием

$$(54) \quad \mathcal{E}_1 - IZ_1 = -IZ,$$

при котором обеспечивается прежнее падение напряжения ( $IZ$ ) на клеммах (при том же токе  $I$ ); комбинация  $\mathcal{E}_1$  и  $Z_1$  может также рассматриваться как генератор с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и внутренним сопротивлением  $Z_1$ . Поле  $E_1^r$ ,  $H_1^r$  в формуле (53) при этом равно полю, рассеянному антенной, когда в качестве приемника включено сопротивление  $Z_1$  и на антенну падает первичная волна  $E^0$ ,  $H^0$ , а  $E_2^r$ ,  $H_2^r$  — поле, излученное рассматриваемой антенной, когда к ее клеммам подключен генератор с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и внутренним сопротивлением  $Z_1$  (рис. 2), первичное поле при этом отсутствует. Частный случай  $Z_1 = 0$ , очевидно, совпадает с рассмотренным выше вариантом 1. Случай, когда  $Z_1 = Z_a^*$  ( $Z_a$  — входное сопротивление антенны в режиме передачи), рассмотренный в [4, 14], соответствует отождествлению поля  $E_1^r$ ,  $H_1^r$  с полем рассеяния антенны, согласованной с прием-

ником, а поля  $E_2^r$ ,  $H_2^r$  с полем излучения при возбуждении антенны волной, отраженной от входа приемника с сопротивлением  $Z$ .

Для антенн СВЧ с волноводным фидерным трактом удобнее представлять поле в тракте в виде суперпозиции волн, бегущих в противоположных направлениях. Рассмотрим для определенности одномодовый волноводный тракт, например, с рупорной антенной. Пусть при падении на антенну снаружи первичной волны  $E^0$ ,  $H^0$  в тракте в сторону приемника ( $z > 0$ ) бежит волна  $E^+$ ,  $H^+$ , а в обратном направлении ( $z < 0$ ) — отраженная от его входа волна  $E^-$ ,  $H^-$ . Примем, что волна в волноводе магнитного типа:  $E_z = 0$ . Тогда в сечении  $z = 0$ , условно называемом «клеммным», положим, что

$$(55) \quad E^- = \Gamma E^+,$$

$\Gamma$  — комплексный коэффициент отражения от приемника, отнесенный к клеммному сечению. Очевидно, поле, рассеянное антенной, не изменится, если заданный приемник с коэффициентом отражения  $\Gamma$  заменить на любое иное устройство при условии, что оно будет обеспечивать в случае 2 при той же падающей снаружи волне  $E^0$ ,  $H^0$  выполнение соотношения (55) в клеммном сечении, например на устройство с коэффициентом отражения  $\Gamma_1$  в клеммном сечении и генератором, возбуждающим в волноводе волну  $E_1^-$ , бегущую в направлении  $z < 0$ . Условием эквивалентности будет равенство

$$(56) \quad E_1^- + \Gamma_1 E^+ = E^-,$$

при выполнении которого волна  $E^+$ , падающая на это устройство, вызывает появление волны  $E^-$ . Здесь поле рассеяния исходной системы также представимо суммой полей (53), где  $E_1^r$ ,  $H_1^r$  означает поле, рассеянное приемной антенной, когда на нее падает волна  $E^0$ ,  $H^0$  и коэффициент отражения от приемника равен  $\Gamma_1$ , а  $E_2^r$ ,  $H_2^r$  — поле, излучаемое антенной в режиме передачи при возбуждении ее волной  $E_1^-$ , порожденной генератором, включенным вместо приемника (и в отсутствие первичной волны  $E^0$ ,  $H^0$ ). Наибольший практический интерес представляют случаи, когда  $\Gamma_1 = 0$  (вариант 3) или  $e^{-2i\gamma l}$  (вариант 4), соответствующие идеальному согласованию тракта с приемником либо короткозамкнутому приемнику. Здесь  $l$  — расстояние вдоль оси тракта от клеммного сечения до входа приемника,  $\gamma$  — постоянная распространения волны в тракте. При практических расчетах удобнее короткое замыкание осуществлять в клеммном сечении, т. е. полагать  $l = 0$ ,  $\Gamma_1 = -1$  (короткое замыкание для вектора  $E$ ) или  $\Gamma_1 = 1$  (короткое замыкание для вектора  $H_{\perp}$  — поперечной относительно орта  $i_z$  части вектора  $H$ ). При этом в клеммном сечении

$$(57) \quad E_1^- = \begin{cases} E^- + E^+ \\ E^- - E^+ \end{cases}, \quad H_{1\perp}^- = \begin{cases} H_{\perp}^- - H_{\perp}^+, & \Gamma_1 = -1 \\ H_{\perp}^- + H_{\perp}^+, & \Gamma_1 = 1 \end{cases}.$$

В этом случае полное рассеянное поле состоит из поля, рассеиваемого приемной антенной, соответствующим образом короткозамкнутой в клеммном сечении, и поля этой же антенны в режиме передачи, возбуждаемой волной  $E_1^-$ ,  $H_{1\perp}^-$ , распространяющейся в ее тракте в направлении  $z < 0$ . Задача возбуждения антенны волной  $E_1^-$ ,  $H_{1\perp}^-$  может быть сведена к задаче возбуждения эквивалентными токами: в случае  $\Gamma_1 = -1$  магнитными с плотностью

$$(59) \quad K^u = [i_z E_1^-],$$

$$(60) \quad \mathbf{K} = -[\mathbf{i}_z \mathbf{H}_1^-],$$

«размазанными» на левой стороне перегородки, замыкающей тракт в клеммном сечении, идеально электропроводящей в случае  $\Gamma_1=-1$  или идеально магнитопроводящей в случае  $\Gamma_1=1$ . Действительно, в первом случае поле  $\mathbf{E}$  слева от перегородки при  $z=0$  будет равно

$$\mathbf{E} = [\mathbf{K}^* \mathbf{i}_z] = [[\mathbf{i}_z \mathbf{E}_1^-] \mathbf{i}_z] = \mathbf{E}_1^-,$$

во втором случае аналогично —  $\mathbf{H}_\perp = \mathbf{H}_{1\perp}^{(-)}$ .

В принципиальном плане изложенные варианты расчета эквивалентны, выбор того или иного определяется с учетом конкретной задачи, а также из соображений упрощения расчета. Так, варианты 1 и 4 наиболее удобны в применении к вибраторным антеннам, но могут быть использованы и для апертурных антенн. Удобство этих методов обусловлено большей простотой расчета рассеяния. Вариант 4 использовался для излучателя в виде короткозамкнутого отрезка плоского волновода с открытым концом [13]. Уточнить влияние рассогласования антенны с приемником удобнее, применяя варианты 2 и 3; достоинством их является также сравнительная простота экспериментальной проверки.

## 5. АНАЛИЗ КОМПОНЕНТ ДВУХПОЗИЦИОННЫХ ДИАГРАММ РАССЕЙНИЯ АНТЕНН

Анализ дифференциальных характеристик двухпозиционных диаграмм рассеяния антенн целесообразно проводить, рассматривая порознь отдельные причины рассеяния. Применительно к апертурным антеннам это соответствует «теневому» рассеянию, обусловленному главным образом затенением, вносимым антенной; «обратному» рассеянию (т. е. рассеянию в «обратную» полусферу, а не точно в обратном направлении) раскрывом антенны вследствие несовпадения распределений на раскрыве полей волн, падающих снаружи (в режиме приема) и изнутри (в режиме передачи); отражения от приемника; рассогласования поляризации первичного поля и поля антенны; рассеяния на острых кромках антенны и на внешних элементах ее конструкции. В той или иной степени эти причины рассеяния имеют место в любых антеннах. Рассеяние элементами конструкции в общем виде анализировать затруднительно. В ряде случаев оно проявляется главным образом при облучении антенны сбоку (например, у рупоров). Здесь же рассмотрим рассеяние, имеющее место при облучении антенны в зоне главного лепестка диаграммы направленности.

Объяснение теневого рассеяния как компенсирующего первичную волну за антенной [9], как видно из предыдущего раздела, недостаточно. Источниками этого рассеяния, очевидно, являются электрические токи, наводимые на внешней стороне металлической поверхности антенны, а также эквивалентные электрические и магнитные токи в ее раскрыве. Если, например, перпендикулярно направлению распространения  $\mathbf{i}_z$  первичной волны поместить металлическую пластину, то на ее поверхности наводятся электрические токи

$$(61) \quad \mathbf{K} \approx -2[\mathbf{i}_z \mathbf{H}^0],$$

приводящие к появлению переизлучения, одинакового в обе стороны  $z > 0$  и  $z < 0$ , т. е. как по направлению распределения первичной волны, так и в обратном направлении. Излучение этих токов при этом создает идентич-

ные — «прямой» («теневого») и «обратный» лепестки диаграммы рассеяния. Если же эта пластина абсолютно черная, то в силу граничных условий (7) и теоремы эквивалентности (8) на ее поверхности можно ввести эквивалентные токи:

$$(62) \quad \mathbf{K}_0 = -[\mathbf{i}_z \mathbf{H}^0], \quad \mathbf{K}_0^\mu = [\mathbf{i}_z \mathbf{E}^0].$$

Учитывая ориентацию векторов полей, излучаемых этими токами в направлениях  $z < 0$  и  $z > 0$ , находим, что  $|\mathbf{E}(\mathbf{K}_0^\mu)| = |\mathbf{E}(\mathbf{K}_0)| = 1/2 |\mathbf{E}(\mathbf{K})|$ , где  $\mathbf{K}$  определяется формулой (61); при этом  $\mathbf{E}(\mathbf{K}_0^\mu)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{K}_0)$  в направлении  $z > 0$  арифметически складываются, их результирующая будет равна  $\mathbf{E}(\mathbf{K})$ , и, следовательно, теневой лепесток будет точно таким же, как и в случае металлической пластины; в то же время в направлении  $z < 0$  эти поля противофазны и взаимно компенсируются, т. е. в этом направлении рассеяние будет отсутствовать.

Реальная антенна помимо раскрыва, который может быть в известной степени аналогичен черной пластине, будет иметь дополнительные металлоконструкции, например боковые стенки у рупорных антенн, на которых падающей волной будут наводиться токи, образующие как бы антенну бегущей волны. Так как эти токи направлены противоположно токам, возбуждаемым в режиме передачи на внутренней поверхности стенок, то и направление рассеяния будет обратным по отношению к излучению в режиме передачи, внося, таким образом, вклад в теневое рассеяние. Токи, отвечающие за «теневое» рассеяние, очевидно, могут создавать некоторый уровень рассеяния и в полупространстве  $z < 0$ . Аналогичные рассуждения могут быть проведены и применительно к другим антеннам.

Вблизи острых кромок металлических поверхностей антенны помимо токов (61), (62), учитываемых в приближении Кирхгофа, компонентами  $\mathbf{E}^0$ , параллельными кромке, наводятся так называемые неравномерные токи [35]. Вызываемое ими поле рассеяния имеет вид расходящихся цилиндрических волн.

Дополнительное «обратное» рассеяние, согласно (22), соответствует части интегрального ЭПР, равного  $(1-q)s_\perp$ . В конструкциях реальных антенн нельзя обеспечить  $q=1$ . Так, в зеркальных и линзовых антеннах  $q$  может снижаться до 0,3, в волноводных и рупорных антеннах сможет составлять от 0,5 до 0,8. В антенных решетках даже при параллельном возбуждении также  $q < 1$ , в частности, из-за дискретного возбуждения раскрыва отдельными элементами решетки либо из-за того, что у самих элементов  $q < 1$ . Таким образом, обратное рассеяние будет иметь место у любой антенны. К тому же указанные значения  $q$  реализуются лишь для направления главного максимума ее диаграммы направленности, для других направлений величина  $q$  будет еще ниже (в сравнении с равномерным синфазным раскрывом).

В отдельных случаях, как, например, для рупорных антенн, можно без особого труда определить и форму диаграммы части обратного рассеяния [10, 12], обусловленного несовпадением в раскрыве антенны распределений — первичного поля (в режиме приема) и поля в антенне вблизи раскрыва (совпадающего чаще всего с распределением, возбуждаемым в режиме передачи основной волной одномодового фидера). При этом распределение первичного поля в раскрыве разлагается по системе собственных парциальных волн рупора. Основная из этих волн используется в фидерном тракте (волноводе), ей соответствует поглощаемая мощность  $\sigma_\pi = qs_\perp$  (если приемник согласован с трактом), на долю остальных волн приходится мощность, примерно равная (поскольку есть и другие источники



обратного рассеяния)  $(1-q)s_{\perp}$ ; каждая из них отражается внутри рупора и переизлучается, как и при возбуждении рупора соответствующей гармоникой; их диаграммы (как и относительные амплитуды) нетрудно рассчитать; очевидно, они будут многолепестковыми. При изменении ракурса облучения рупора амплитуды этих гармоник и, следовательно, рассеиваемая ими мощность изменяются (но парциальные диаграммы, естественно, неизменны). Такое рассеяние принято называть модовым.

В случае зеркальных антенн с рупорными облучателями аналогичные рассуждения могут быть также применены для оценки рассеяния от облучателя. Помимо того необходимо рассматривать и рассеяние от поверхности зеркала за счет наведенных на нем токов. Часть излучаемого этими токами поля собирается в фокальном пятне и в отсутствие облучателя рассеивается в виде расходящегося, довольно широкого пучка; другая часть рассеивается непосредственно; при этом из-за кривизны поверхности зеркала в переизлученном поле будет и кроссполяризованная компонента [36].

Если антенна облучается в секторе главного лепестка ее диаграммы направленности, а приемный тракт полностью рассогласован с антенной, то мощность, проходящая в тракт, будет полностью отражаться. Часть интегрального ЭПР, обусловленная этим рассеянием, будет равна  $\sigma_{\Sigma}^1 = qs_{\perp}$ , а соответствующий ему дифференциальный ЭПР  $\sigma_{\Sigma}^1$  в секторе диаграммы направленности на передачу, согласно формуле (3), будет равен:

$$(63) \quad \sigma_{\Sigma}^1(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = q(\theta, \varphi)s_{\perp}D(\theta', \varphi') = s_{\varphi\theta}(\theta, \varphi)D(\theta', \varphi'),$$

где  $q(\theta, \varphi)$  соответствует облучению в направлении  $\theta, \varphi$ ,  $D(\theta', \varphi')$  — КНД антенны в режиме передачи в направлении наблюдения  $\theta', \varphi'$ ,  $s_{\varphi\theta} = qs_{\perp}$ . При частичном рассогласовании антенны с нагрузкой в формулу (63) следует ввести эквивалентный коэффициент отражения основной гармоники по мощности  $|\Gamma|^2 \leq 1$

$$(64) \quad \sigma_{\Sigma}^1(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = s_{\varphi\theta}(\theta, \varphi)D(\theta', \varphi')|\Gamma|^2.$$

Величина  $\sigma_{\Sigma}^1$  легко определима по параметрам антенны в режимах приема и передачи и, хотя она и не равна истинному дифференциальному ЭПР (см. (3))

$$(65) \quad \sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = \sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi)D^r(\theta, \varphi; \theta', \varphi'),$$

ее часто используют для приближенных расчетных оценок  $\sigma_{\Sigma}$ . Это допустимо лишь при  $|\Gamma|^2$ , близком к единице, и в узком секторе углов вблизи максимума диаграммы направленности на передачу. При  $|\Gamma|^2 \ll 1$  такая оценка вообще будет неверна.

На практике часто ограничиваются исследованием однопозиционного дифференциального ЭПР (поперечником обратного рассеяния)  $\sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi)$ , когда направление наблюдения противоположно направлению облучения. При этом формулы (65) и (64) принимают вид

$$(66) \quad \sigma_{\Sigma}^1(\theta, \varphi) = s_{\varphi\theta}(\theta, \varphi)D(\theta, \varphi)|\Gamma|^2,$$

$$(67) \quad \sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi) = \sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi)D^r(\theta, \varphi).$$

Графики  $\sigma_{\Sigma}^1(\theta, \varphi)$  и  $\sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi)$  существенно отличаются в особенности при  $|\Gamma|^2 \ll 1$ . Действительно, кривая  $\sigma_{\Sigma}^1(\theta, \varphi)$  независимо от величины  $|\Gamma|^2$  имеет куполообразную форму с максимумом при  $\theta = \theta_{\max}$ ,  $\varphi = \varphi_{\max}$ , повторяя зависимость от этих углов  $s_{\varphi\theta}D$  (величина  $|\Gamma|^2$  от  $\theta, \varphi$  не зависит), а кривая  $\sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi)$  при  $|\Gamma|^2 \ll 1$  наоборот, в этом направлении будет иметь

минимум (равный примерно  $\sigma_d^1(\theta_{\max}\varphi_{\max})$ ); при отклонении от этого на-757  
 правления  $\sigma(\theta, \varphi)$  довольно резко возрастает в соответствии с увеличением  
 модового рассеяния. Это еще раз подчеркивает ограниченность примени-  
 мости формул (63), (64), (66). Заметим, что поскольку  $s_{\theta\varphi} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D$ , фор-  
 мула (66) может быть переписана в эквивалентной форме

$$(68) \quad \sigma_d^1(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} |\Gamma|^2 [D(\theta, \varphi)]^2,$$

откуда видно, что главный лепесток  $\sigma_d^1(\theta, \varphi)$  [и  $\sigma_d(\theta, \varphi)$  при  $|\Gamma|^2 \approx 1$ ]  
 антенны соответствует квадрату ее диаграммы направленности в режиме  
 передачи. Эти выводы подтверждаются данными измерений [10]. У корот-  
 козамкнутого пирамидального рупора  $\sigma_d(\theta_{\max}\varphi_{\max})$  существенно меньше  
 $\sigma_d(\theta_{\max}\varphi_{\max})$ , равновеликой раскрыту рупора металлической пластины.  
 Это объясняется тем, что пластина возбуждается синфазно, тогда как ком-  
 поненты обратного рассеяния рупора расфазированы. Если же рупор со-  
 гласован с нагрузкой (по основной гармонике), то  $\sigma_d(\theta_{\max}, \varphi_{\max})$  снижает-  
 ся еще на 10...20 дБ. Подбирая амплитуду и фазу коэффициента отра-  
 жения в фидерном тракте, можно компенсировать имеющееся в этом на-  
 правлении теневое и модовое рассеяние и снизить  $\sigma_d$  еще на 10...20 дБ.

## 6. ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ ПРОСТЕЙШИМИ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

Тонкий прямолинейный вибратор практически характеризуется только  
 одним измерением — длиной. В результате эффект затенения отсутствует  
 и поле рассеяния нельзя разделить на теневое и «обратное». Кроме того,  
 в металлическом вибраторе наводится только линейный электрический ток  
 и поэтому ни при какой нагрузке вибратор нельзя рассматривать как чер-  
 ное тело. Особое положение занимают полуволновый (резонансный) виб-  
 ратор и диполь, у которых почти совпадают, независимо от величины на-  
 грузки, диаграммы направленности излучения и рассеяния<sup>5</sup>, а следова-  
 тельно, и диаграммы рассеяния, соответствующие полям  $E_{1r}$  и  $E_{2r}$  (см.  
 (53)), что приводит к возможности почти полной взаимной компенсации  
 этих полей (за счет подбора нагрузки), причем во всем пространстве одно-  
 временно. (В рассматривавшихся выше апертурных антеннах с почти  
 непересекающимися диаграммами обратного и теневого рассеяния такая  
 компенсация возможна только в некоторых направлениях.) Поэтому ре-  
 зонансные вибраторы относят к минимально рассеивающим антеннам  
 (у расстроенных вибраторов подобные свойства выражены лишь частично,  
 так как распределения токов в режимах передачи и приема более или  
 менее различаются). Следует отметить еще одну особенность тонкого виб-  
 ратора — зависимость ЭПР от частоты, обусловленную резко выраженными  
 резонансными свойствами, так как при отходе от резонанса резко меняется  
 амплитуда тока, возбуждаемого в вибраторе падающей волной. Эта зави-  
 симость (см. [15]) имеет волнообразный характер, с максимумами в резо-  
 нансных (при длине вибратора  $l = (2n+1)\lambda/2$ ) и минимумами — в антире-

<sup>5</sup> Совпадение диаграмм излучения и рассеяния возможно лишь при идентичных  
 распределениях токов в этих режимах. Чаще всего это совпадение не имеет места.  
 Поэтому характеристики рассеяния в общем случае нельзя определить по харак-  
 теристикам излучения. На это, по-видимому, впервые указано в [37]. Даже у резо-  
 нансного вибратора нет полного совпадения этих полей, возбуждаемых при коротком  
 замыкании и нагрузке, сопротивление которой намного превышает сопротивление  
 излучения вибратора.

зонансных ( $l=2n\lambda/2$ ) точках, причем с ростом  $l$  перепады величины  $\sigma_z$  (1)58 уменьшаются. Величина  $\sigma_z(\lambda/2)$  для согласованного вибратора близка к  $\sigma_z^c = \sigma_n \approx 3\lambda^2/8\pi$ , для короткозамкнутого вибратора ( $\sigma_n=0$ )  $\sigma_z^k=4\sigma_z^c$ . Последнее находится в согласии с выводами общей теории (см. (42)). Это следует и из элементарных соображений. Действительно, для приемного вибратора полная наведенная внешним полем ЭДС (см. [2])

$$(69) \quad \mathcal{E} = I_n (Z_a + Z_n),$$

где  $Z_a$  — входное сопротивление вибратора в режиме передачи,  $I_n$  — ток на клеммах вибратора в режиме приема при нагрузке  $Z_n = R_n + iX_n$ . Величина  $\mathcal{E}$  слабо зависит от  $Z_n$  и в основном определяется размерами вибратора<sup>6</sup>. Поэтому из формулы (69) можно найти соотношение между токами на клеммах при различных нагрузках, в частности при  $Z_n=0$  и  $Z_n=Z_a^*$ :

$$2I_c R_a = I_0 R_a,$$

откуда  $I_0 = 2I_c$ ; тогда, поскольку переизлучаемая мощность пропорциональна квадрату тока, то

$$(70) \quad \sigma_z^k = 4\sigma_z^c.$$

Очевидно, при  $|Z_n| \leq R_a$ ,  $\sigma_z^c \leq \sigma_z \leq 4\sigma_z^c$ , что соответствует  $\sigma_{z2}$  в (41). Однако в силу  $D_k^r = D_c^r$  для вибратора должна реализовываться и  $\sigma_{z1}$ , для которого при  $\sigma_n \rightarrow 0$  выполняется неравенство  $\sigma_z \ll \sigma_n$ . Как показано в [38], при  $R_n > R_a$  и  $X_n = 0$

$$(71) \quad \frac{\sigma_z}{\sigma_n} \simeq \frac{4}{5} \frac{R_a}{R_n}.$$

Так как в соответствии с эквивалентной схемой приемного вибратора [2, 31]:

$$(72) \quad \sigma_n / \sigma_n^c = 4R_a R_n [(R_a + R_n)^2 + (X_a + X_n)^2]^{-1},$$

то при  $X_a + X_n = 0$  и  $R_a / R_n \ll 1$  из (72) следует

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_n^c} = \frac{4R_a / R_n}{[1 + R_a / R_n]^2} \simeq 4 \frac{R_a}{R_n}.$$

Учитывая (71), получаем

$$(73) \quad \sigma_z / \sigma_n \simeq \frac{1}{5} \sigma_n / \sigma_n^c,$$

что отличается от формулы (42в) лишь численным коэффициентом (здесь  $\sigma_n^c = \sigma$ ). Из (72) следует (см. также рис. 20.4 в [31]), что при  $X_a + X_n = 0$  величина  $\sigma_n / \sigma_n^c$  будет одинакова при сопротивлениях нагрузки, равных  $R_n$  и  $R_a^2 / R_n$ . Если при этом  $R_n < R_a$ , то первому значению соответствует  $\sigma_{z2}$ , а второму —  $\sigma_{z1}$ . Из формулы (72) также следует, что и при  $X_a + X_n \neq 0$  вибраторная антенна может иметь одинаковые  $\sigma_z$  при различных нагрузках. В работах [15 и 38] рассмотрен и случай узкой линейной щели в плоском металлическом экране. Для заэкранного, т. е., по сути дела, «теневого» поля показано, что  $\sigma_z^T$  точно совпадает с  $1/2\sigma_z$  ленточного металлического вибратора, дополняющего экран до сплошного.

<sup>6</sup> Это имеет место пока изменение  $Z_n$  не приводит к заметному влиянию на распределение тока.

Представляет интерес оценка рассеяния спиральными антеннами. При759 ведем здесь лишь элементарные соображения, исходя из простейшей модели в виде одиночного кольцевого витка, нагруженного по обоим концам на согласованные с ним нагрузки. При этом токи, возбуждаемые в витке в режиме передачи, а также в режиме приема при падении волны чисто круговой поляризации, будут иметь вид волн, бегущих в одну или другую сторону. Если поляризация падающей волны совпадает (с учетом определения понятия направления вращения) с поляризацией волны, излучаемой витком в режиме передачи, то ток в приемном режиме распространяется в сторону приемника и в нем поглощается, а при обратном вращении — поглощается в другой оконечной нагрузке. Рассмотрим случай согласованной (совпадающей) поляризации. Тогда наведенный в проводе ток будет направлен в сторону приемника, т. е. противоположен току, текущему в режиме передачи. Следовательно, и направления вращения полей переизлученного этим витком в режиме приема и излучаемого в режиме передачи будут противоположны. Рассуждая таким же образом, можно определить характер переизлученных полей и при не полностью согласованных нагрузках. Следует отметить, что у такого, согласованного по обоим концам, витка (кольца) диаграмма направленности на передачу и диаграмма рассеяния совпадают по форме (так же, как и у линейных вибраторов), хотя и имеют противоположные направления вращения поляризации. Если же первичное поле линейно поляризовано, то оно возбуждает в витке два равных и противоположно направленных тока, один из которых поглощается приемником, а другой — в оконечной нагрузке (следовательно, полезный сигнал уменьшится на 3 дБ); при этом переизлучаемое поле, очевидно, будет линейно поляризовано. Анализ рассеяния реальных спиральных антенн, естественно, сложнее, в частности из-за необходимости учитывать влияние корпуса.

## 7. О ВОЗМОЖНОСТИ СИНТЕЗА АНТЕНН С ЗАДАНЫМИ РАССЕЙВАЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

Решение задачи синтеза антенн с заданными рассеивающими свойствами представляло бы большой практический интерес, однако в полном виде эта задача пока не решена. В литературе до сих пор рассматривались лишь ограниченные задачи синтеза. Так, в [39] исследовались компенсационные методы, использующие дополнительно вводимые активные источники. По-видимому, этот метод все же не может иметь большого практического значения, поскольку компенсация рассеяния, по сути дела, возможна лишь при неизменных первичном поле и расположении относительно него рассеивателя.

Другой метод был развит в [24, 25], где изучалась возможность реализации заданной диаграммы рассеяния (при фиксированном направлении падения первичной волны) за счет нахождения формы рассеивателя и распределения на его поверхности реактивного импеданса. При этом использовался оригинальный прием: по заданному полному полю находилась замкнутая поверхность, касательная к  $\text{Re } \mathbf{S}$ ; если затем в поле поместить тело, имеющее такую же поверхность, а на ней реализовать распределение соответствующего реактивного импеданса, то рассеяние будет совпадать с заданным, так как линии  $\text{Re } \mathbf{S}$ ,  $\text{Im } \mathbf{S}$  не искажутся. Этот прием был применен в [22, 23] и к приемной антенне; при этом торцевая часть тела выбиралась перпендикулярной линиям  $\text{Re } \mathbf{S}$ , имитируя тем самым абсолютно черный раскрыв. Тильная часть тела по-прежнему представляет

поверхность с соответствующим реактивным импедансом. При этом стави<sup>760</sup>лась задача существенного снижения величины  $\sigma_z$  при сохранении «теневого» лепестка. С целью преодоления трудностей реализации переменного импеданса в [22] найдена форма тыльной поверхности (сигарообразная, длиной, значительно превосходящей поперечник) с небольшой величиной импеданса и его производной (правда, на конце тела должен быть всплеск импеданса). Отметим также, что сигарообразная форма рассеивателя ограничивает сектор углов падения первичной волны, в которой эта мера будет эффективна.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение рассеивающих свойств антенн приобретает в последнее время все большее значение в связи с тем, что они оказывают существенное влияние на ЭПР объекта, на котором установлена антенна. В то время как изучению рассеивающих свойств металлических и «черных» тел посвящены многочисленные работы не только методического характера, но и содержащие обширные расчетные и экспериментальные данные, рассеяние, вызываемое антеннами, исследовано пока недостаточно. Отсутствуют и сколько-нибудь полные расчетные данные для многочисленных типов антенн. Поэтому экспериментальное и теоретическое исследования диаграмм рассеяния и величины ЭПР различных антенных систем и влияния на них окружающих предметов представляет весьма актуальную проблему современной техники<sup>7</sup>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Rüdenberg R.* // Ann. Physik. 1908. В. 25. № 1. S. 446.
2. *Фельд Я. Н.* // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48. № 7. С. 503.
3. *Stevenson A. F.* // Quart. Appl. Math. 1948. V. 5. № 1. P. 369.
4. *Green R. H.* The General Theory of Antenna Scattering. Ohio: Ohio State University, 1963.
5. *Harrington R. B.* // IRE Trans. 1963. V. AP-11. № 5. P. 595.
6. *Kahn W., Kurss H.* // IEEE Trans. 1965. V. AP-13. № 5. P. 671.
7. *Сазонов Д. М., Школьников А. М.* // РЭ. 1974. Т. 19. № 4. С. 679.
8. *Марков Г. Т., Сазонов Д. М.* Антенны. М.: Энергия, 1975. С. 191–197.
9. *Кунбер Б. Е.* // Радиотехника. 1956. Т. 11. № 12. С. 53.
10. *Midgley D.* // Proc. IEE 1961. V. 108. P. B. P. 645.
11. *Уфимцев П. Я.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 6. С. 912.
12. *Прокофьев Н. П.* // Вопросы судостроения. Сер. Радиолокация. 1975. Вып. 4. С. 60.
13. *Марцафей В. В., Цалимов Г. Ф.* // РЭ. 1985. Т. 30. № 3. С. 470.
14. *Скиндлер Дж., Блексмит П.* // ТИИЭР. 1965. Т. 53. № 8. С. 1137.
15. *Леонтович М. А., Левин М. Л.* // ЖТФ. 1944. Т. 14. № 9. С. 32.
16. *Прокофьев Н. П.* // Вопросы судостроения. Сер. Радиолокация. 1975. Вып. 4. С. 32.
17. *Пономарев Л. И., Долгий А. В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 8. С. 48.
18. *Chen K. M., Liera V. V.* // IRE Trans. 1964. V. AP-12. № 5. P. 576.
19. *Лиена В. В., Сениор Т. Б.* // ТИИЭР. 1965. Т. 53. № 8. С. 1149.
20. *Багдасарян А., Анжелакос Д.* // ТИИЭР. 1965. Т. 53. № 8. С. 944.
21. *Larson C.* // IEEE Trans. 1983. V. AP-31. № 2. P. 261.
22. *Ерохин Г. А.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 1. С. 70.
23. *Ерохин Г. А.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 7. С. 1447.
24. *Ерохин Г. А., Кочержевский В. Г.* // РЭ. 1979. Т. 24. С. 272.
25. *Ерохин Г. А., Кочержевский В. Г.* // РЭ. 1974. Т. 19. № 1. С. 30.
26. *Кинг Р., У-Тай-Цзунь.* Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

<sup>7</sup> Пользуемся случаем отметить, что в [40] на рис. 2, б ошибочно напечатано  $|F(\varphi)|/0,237$  вместо  $|F(\varphi)|/0,0237$ .

27. *Захарьев Л. Н., Леманский А. А.* Рассеяние волн «черными» телами. М.: Сов. радио, 1972.
28. *Кобак В. О.* Радиолокационные отражатели. М.: Сов. радио, 1975.
29. *Radar Cross Section Handbook/Ed. by Ruck G. T. N. Y.— L.: Plenum Press, 1970. Chap. 8.*
30. *Евельсон Р. Л.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 1. С. 1.
31. *Фельд Я. Н., Бененсон Л. С.* Антенно-фидерные устройства. Ч. 2. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1959.
32. *Хенл Х., Мауэ М., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
33. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Физматгиз, 1977.
34. *Фельд Я. Н., Бененсон Л. С.* Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. 1. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1955.
35. *Уфимцев П. Я.* Методы краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962.
36. *Алексеевко В. В.* // Рассеяние электромагнитных волн. Таганрог, Изд-во ТРТИ, 1985. № 5. С. 81.
37. *Вольперт А. Р.* // Радиотехника. 1955. Т. 10. № 11. С. 12.
38. *Попиченко В. А.* // Тез. докл. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. С. 38.
39. *Бойко А. И., Иванов В. П.* // РЭ. 1979. Т. 24. № 1. С. 9.
40. *Фельд Я. Н.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 7. С. 1265.

Поступила в редакцию  
14.XI.1986

## СИНТЕЗ ТОКОВ ОБЛУЧАТЕЛЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ТОКА НА ЗЕРКАЛЕ

Фельд Я.Н.

Изложен метод определения эквивалентных электрических и магнитных поверхностных токов в апертуре облучателя зеркальной антенны по заданному распределению электрического тока на зеркале, который в свою очередь может быть найден по известной диаграмме направленности. Показано, что найденные ряды для искомых токов сходятся во всяком случае по норме пространства  $L^2_R$ , т.е. в среднем с некоторым весом.

Метод применим и для случая, когда вместо "апертурного облучателя" имеет место проволочный облучатель с одним (физически существующим) электрическим током.

В работе [1] рассмотрена задача нахождения распределения плотности тока  $\vec{K}$  на поверхности  $s$  зеркала, реализующего заданную диаграмму направленности. В данной статье решается задача нахождения токов облучателя, обеспечивающих реализацию заданного тока  $\vec{K}$  на зеркале.

Пусть апертура облучателя представляет собой некоторую поверхность  $\Sigma$ , на которой распределены искомые (эквивалентные [2, с. 171]) поверхностные электрический и магнитный токи, плотности  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^\mu$  соответственно, связанные

соотношением

$$(1) \quad \vec{J}^\mu = Z\vec{J} \quad \text{на } \Sigma,$$

где  $Z$  — заданный линейный оператор.

В частном случае, когда касательные к  $\Sigma$  составляющие векторов поля связаны между собой, как в плоской волне,

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix},$$

где при соответствующем выборе координат на  $\Sigma$

$$z_{11} = z_{22} = 0, \quad z_{12} = -\rho, \quad z_{21} = \rho,$$

$\rho$  — волновое сопротивление.

В более общем случае все  $z_{ik}$  могут быть отличны от нуля и являться функциями координат на  $\Sigma$ .

Если облучатель представляет собой вибратор или решетку вибраторов с электрическими токами, то  $Z \equiv 0$ . Замкнем поверхность  $s$  зеркала некоторой геометрической поверхностью  $s_1$  так, чтобы облучатель  $\Sigma$  находился внутри  $s + s_1$  (рисунок). Зададим на  $s + s_1$  семейство  $\{\vec{K}_m\}$  вспомогательных поверхностных электрических токов, касательных к  $s + s_1$ . Подробнее о них сказано ниже.

Обозначим  $\vec{E}^m, \vec{H}^m$  поле, возбуждаемое током  $\vec{K}_m$  в свободном пространстве, а через  $\vec{E}, \vec{H}$  — поле токов  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^\mu$ , распределенных на  $\Sigma$ , при наличии зеркала  $s$ . Применив к этим полям лемму Лоренца, найдем

$$(2) \quad \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^m ds + \int_{(\Sigma)} (\vec{J} \vec{E}^m - \vec{J}^\mu \vec{H}^m) ds - \int_{(s+s_1)} \vec{K}_m \vec{E} ds = 0.$$

$$(2a) \quad \int_{(\Sigma)} (\vec{H}^m Z \vec{J} - \vec{J} \vec{E}^m) ds + \int_{(s_1)} \vec{K}_m \vec{E} ds = \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^m ds$$

или

$$(3) \quad \int_{(\Sigma)} \overline{\vec{J}(Z^* \vec{H}_t^m - \vec{E}^m)} ds + \int_{(s_1)} \vec{K}_m \vec{E} ds = \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^m ds.$$

Здесь  $Z^*$  – оператор, сопряженный с  $Z$  в пространстве  $L^2(\Sigma)$ , черта – знак комплексного сопряжения.

Введем обозначения

$$(4) \quad \vec{F} = \begin{cases} \vec{J} & \text{на } \Sigma, \\ \vec{E}_t & \text{на } s_1, \end{cases} \quad \vec{F}_m = \begin{cases} \overline{Z^* \vec{H}_t^m - \vec{E}_t^m} & \text{на } \Sigma, \\ \vec{K}_m & \text{на } s_1, \end{cases}$$

$$(5) \quad b_m \equiv \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^m ds; \quad \Sigma_0 = \Sigma + s_1.$$

Используя их, перепишем (3) в виде

$$(6) \quad \int_{(\Sigma_0)} \vec{F} \vec{F}_m ds = b_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\vec{F}$  – искомый вектор, а  $\vec{F}_m$  и  $b_m$  – известные величины. Вектор  $\vec{F}$  следует искать в пространстве  $L_R^2(\Sigma_0)$  со скалярным произведением

$$(7) \quad (\vec{A}, \vec{B}) = \int_{(\Sigma_0)} \vec{A} R \vec{B} ds,$$

где  $R$  – линейный оператор-матрица вида

$$(8) \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix},$$

элементы которой выбираются так, чтобы пространство  $L_R^2(\Sigma_0)$  было гильбертовым, а его элементы – векторы, касательные к  $\Sigma_0$ , удовлетворяли условиям Майкснера при приближении к контурам  $\mathcal{L}_{s_1}$  и  $\mathcal{L}_\Sigma$ , на которые опирается поверхность  $\Sigma_0$  (рисунок). Для этого необходимо, чтобы величины  $R_{11} > 0$ ,  $R_{22} > 0$ , и если одна из ортогональных координатных линий  $x_1 = \text{const}$  на  $s_1$  совпадает с  $\mathcal{L}_{s_1}$ , то они должны вести себя при приближении к  $\mathcal{L}_{s_1}$  со стороны  $s_1$  следующим образом:

$$(9) \quad R_{11} = O(\rho^{1/2}), \quad R_{22} = O(\rho^{-1/2}),$$

где  $\rho$  – расстояние до  $\mathcal{L}_{s_1}$ .

Поведение  $R_{11}$  и  $R_{22}$  при приближении к  $\mathcal{L}_\Sigma$  со стороны  $\Sigma$  должно зависеть от конструкции облучателя, апертурой которого является поверхность  $\Sigma$ . Конструкция облучателя здесь не конкретизируется. В частности, можно полагать  $R_{11} = R_{22} = 1$  на  $\Sigma$ . Используя обозначение (7), запишем равенства (6) в следующем виде:

$$(10) \quad (\vec{F}, R^{-1} \vec{F}_m) = b_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь  $R^{-1}$  – матрица, обратная  $R$ .

Пусть токи  $\{\vec{K}_m\}$ , заданные на  $s + s_1$ , линейно независимы, принадлежат пространству  $C^1(s + s_1)$ , а их линейные комбинации всюду плотны в нем. Тогда семейство  $\{R^{-1} \vec{F}_m\}$  линейно независимо, принадлежит пространству  $L_R^2(\Sigma_0)$  и



полно в нем. Начнем с доказательства полноты. Так, из условий

$$(11) \quad (\vec{A}, R^{-1}\vec{F}_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где  $\vec{A} \in L_R^2(\Sigma_0)$ , при учете (7) и (4) следует

$$\int_{(s_1)} \vec{A} \vec{K}_m ds + \int_{(\Sigma)} \vec{A} \{ Z^* \vec{H}_t^m - \vec{E}^m \} ds = 0$$

или

$$(12) \quad \int_{(s_1)} \vec{A} \vec{K}_m ds - \int_{(\Sigma)} \vec{A} \vec{E}^m ds + \int_{(\Sigma)} \vec{H}^m Z \vec{A} ds = 0.$$

Лемма Лоренца позволяет записать следующие равенства:

$$\int_{(\Sigma)} \vec{A} \vec{E}^m ds = \int_{(s+s_1)} \vec{K}_m \vec{E} \{ \vec{A}; \Sigma \} ds,$$

$$\int_{(\Sigma)} \vec{H}^m Z \vec{A} ds = - \int_{(s+s_1)} \vec{K}_m \vec{E}^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \} ds.$$

Здесь  $\vec{E} \{ \vec{A}; \Sigma \}$  и  $\vec{E}^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \}$  – электрические векторы полей, возбуждаемых электрическим  $\vec{A}$  и магнитным  $Z \vec{A}$  токами соответственно, распределенными на  $\Sigma$ .

Учитывая эти равенства, перепишем (12) следующим образом:

$$\int_{(s_1)} \vec{A} \vec{K}_m ds - \int_{(s+s_1)} (\vec{E} \{ \vec{A}; \Sigma \} + \vec{E}^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \}) \vec{K}_m ds = 0$$

или

$$(13) \quad \int_{(s+s_1)} (\vec{E} \{ \vec{A}; \Sigma \} + \vec{E}^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \} - \hat{\vec{A}}) \vec{K}_m ds = 0$$

при  $m = 1, 2, \dots$ ;  $\hat{\vec{A}} = \vec{A}$  на  $s_1$  и  $\hat{\vec{A}} = 0$  на  $s$ .

Так как  $\vec{A} \in L_R^2(s_1 + \Sigma)$ , то  $\hat{\vec{A}} \in L_R^2(s_1 + s)$ , причем в последнем соотношении можно полагать  $R_{11} = R_{22} = 1$  на  $s$ . Используя результаты, полученные в работе [3, с. 32–33], учитывая (9), можно записать<sup>1</sup>

$$\hat{\vec{A}} \in L_R^2(s_1 + s) \subset H^{-1/4}(s_1 + s) \subset H^{-1}(s_1 + s)$$

и, следовательно,

$$(14) \quad (\vec{E}_t \{ \vec{A}; \Sigma \} + \vec{E}_t^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \} - \hat{\vec{A}}) \in H^{-1}(s_1 + s),$$

поскольку здесь первые два члена имеют любое число производных на  $s + s_1$ .

Линейные комбинации  $\vec{K}_m$  плотны в  $C^1(s + s_1)$  по определению, поэтому они плотны также в  $H^1(s + s_1)$  по норме  $H^1(s + s_1)$ .

Таким образом, из равенств (13) следует, что функционал (14) равен нулю на всех функциях из  $H^1(s + s_1)$ , на которых он определен, т.е.

$$\vec{E}_t \{ \vec{A}; \Sigma \} + \vec{E}_t^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \} - \hat{\vec{A}} = 0 \quad \text{на } s + s_1.$$

Это равенство можно также записать в виде

$$(15) \quad \begin{cases} \vec{E}_t \{ \vec{A}; \Sigma \} + \vec{E}_t^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \} = 0 & \text{на } s, \\ \vec{E}_t \{ \vec{A}; \Sigma \} + \vec{E}_t^\mu \{ Z \vec{A}; \Sigma \} = \vec{A} & \text{на } s_1. \end{cases}$$

Пусть  $\vec{B}$  – произвольный поверхностный электрический ток, распределен-

<sup>1</sup> В этой формуле  $H^\alpha(s + s_1)$ , где  $-\infty < \alpha < \infty$ , – пространства Соболева – Слободецкого [3].

ный на  $s$ . Из леммы Лоренца следует

$$\begin{aligned} \int_{(s)} (\vec{E}\{\vec{A}; \Sigma\} + \vec{E}^\mu\{Z\vec{A}; \Sigma\}) \vec{B} ds &= \int_{(\Sigma)} (\vec{E}\{\vec{B}; s\} \vec{A} - \vec{H}\{\vec{B}; s\} Z\vec{A}) ds = \\ &= \int_{(\Sigma)} (\vec{E}\{\vec{B}; s\} - Z^* \vec{H}\{\vec{B}; s\}) \vec{A} ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая первое равенство (15), найдем

$$(16) \quad \int_{(\Sigma)} (\vec{E}\{\vec{B}; s\} - Z^* \vec{H}\{\vec{B}; s\}) \vec{A} ds = 0$$

для любого тока  $\vec{B}$ , распределенного на  $s$ . Очевидно, что это возможно только при  $\vec{A} = 0$  на  $\Sigma$ . Отсюда и из второго равенства (15) следует  $\vec{A} = 0$  на  $s_1$ , т.е.  $\vec{A} = 0$  на  $\Sigma_0$ , и полнота  $\{R^{-1}\vec{F}_m\}$  в  $L^2_R(\Sigma_0)$  доказана.

Докажем еще, что семейство  $\{R^{-1}\vec{F}_m\}$  линейно независимо, т.е. из равенства

$$\sum_{n=1}^N a_n R^{-1}\vec{F}_n = 0 \quad \text{на } \Sigma_0,$$

где  $a_n$  — постоянные, следует  $a_n = 0$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Воздействуя на это равенство оператором  $R$  слева, получим

$$\sum_{n=1}^N a_n \vec{F}_n = 0 \quad \text{на } \Sigma_0.$$

Подставляя вместо  $\vec{F}_n$  его значение из второго равенства (4), найдем

$$\sum_{n=1}^N a_n \{Z^* \vec{H}_t^n - \vec{E}_t^n\} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad \sum_{n=1}^N a_n \vec{K}_n = 0 \quad \text{на } s_1.$$

Вводя обозначения (использованные выше)

$$\vec{E}^n = \vec{E}\{\vec{K}_n; s + s_1\}, \quad \vec{H}^n = \vec{H}\{\vec{K}_n; s + s_1\}; \quad \vec{I} = \sum_{n=1}^N a_n \vec{K}_n$$

и учитывая, что  $Z^*, \vec{E}\{\cdot\}, \vec{H}\{\cdot\}$  — линейные операторы, перепишем предыдущие равенства в следующем виде:

$$Z^* \vec{H}_t\{\vec{I}; s + s_1\} - \vec{E}_t\{\vec{I}; s + s_1\} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad \vec{I} = 0 \quad \text{на } s_1.$$

Здесь  $\vec{E}\{\vec{I}; s + s_1\}, \vec{H}\{\vec{I}; s + s_1\}$  — поле, создаваемое электрическим током, распределенным на  $s + s_1$  с плотностью  $\vec{I}$ .

Первое из последних равенств, учитывая второе из них, можно записать так:

$$\vec{E}_t\{\vec{I}; s\} = Z^* \vec{H}_t\{\vec{I}; s\} \quad \text{на } \Sigma.$$

Умножая его на произвольное распределение электрического тока  $\vec{B}^\epsilon$ , заданное на  $\Sigma$ , и интегрируя по  $\Sigma$ , получим

$$\int_{(\Sigma)} \vec{B}^\epsilon \vec{E}\{\vec{I}; s\} ds = \int_{(\Sigma)} \vec{B}^\epsilon Z^* \vec{H}_t\{\vec{I}; s\} ds.$$

Применяя лемму Лоренца к левой части этого равенства и учитывая, что справа фигурирует сопряженный оператор  $Z^*$ , перепишем его следующим образом:

$$\int_{(s)} \vec{I} \vec{E}\{\vec{B}^\epsilon; \Sigma\} ds = \int_{(\Sigma)} \vec{H}_t\{\vec{I}; s\} Z \vec{B}^\epsilon ds.$$

Применяя теперь к правой части лемму Лоренца, придадим этому равенству вид

$$\int_{(s)} \vec{I} \vec{E}\{\vec{B}^\epsilon; \Sigma\} ds = - \int_{(s)} \vec{I} \vec{E}\{Z \vec{B}^\epsilon; \Sigma\} ds$$

$$\int_{(s)} \vec{I}(\vec{E}\{\vec{B}^\epsilon; \Sigma\} + \vec{E}\{Z\vec{B}^\epsilon; \Sigma\}) ds = 0.$$

Здесь в круглых скобках стоит суммарная напряженность электрического поля, создаваемая электрическим  $\vec{B}^\epsilon$  и магнитным  $Z\vec{B}^\epsilon$  токами, распределенными на  $\Sigma$ . Так как последнее равенство должно выполняться при любом  $\vec{B}^\epsilon$ , то из него следует  $\vec{I} = 0$  на  $s$ . Таким образом, доказано, что

$$\vec{I} \equiv \sum_{n=1}^N \bar{a}_n \vec{K}_n = 0 \text{ на } s + s_1.$$

Поскольку токи  $\{\vec{K}_n\}$  линейно независимы на  $s + s_1$ , то из последнего равенства следует

$$a_n = 0 \text{ при } 1 \leq n \leq N,$$

и линейная независимость  $\{R^{-1}\vec{F}_m\}$  на  $\Sigma_0$  доказана.

Вследствие полноты и линейной независимости семейства  $\{R^{-1}\vec{F}_m\}$  система равенств (10) может быть использована для нахождения вектора  $\vec{F}$ , а следовательно, и тока  $\vec{J}$  на  $\Sigma$  (см. (4)). Действительно, ортонормируя семейство  $\{R^{-1}\vec{F}_m\}$  процессом Шмита, перейдем к вектор-функциям

$$(17) \quad \vec{\Phi}_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n^m R^{-1}\vec{F}_n, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где коэффициенты  $\alpha_n^m$  определяются по известным формулам [4] из условий  $(\vec{\Phi}_m, \vec{\Phi}_n) = \delta_{mn}$ ; после чего из (10) находим

$$(18) \quad \vec{F} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \vec{\Phi}_m \text{ на } \Sigma_0,$$

$$\text{где } c_m = \sum_{n=1}^m \bar{\alpha}_n^m b_n.$$

Этот ряд во всяком случае сходится по норме  $L_R^2(\Sigma_0)$  к некоторой функции из  $L_R^2(\Sigma_0)$ .

Можно также свести задачу определения  $\vec{F}$  к системе линейных алгебраических уравнений [3, 5], на чем мы не останавливаемся.

Функции  $\vec{\Phi}_m$ , как это следует из (17), удовлетворяют тем же условиям Майкснера на контурах  $\mathcal{L}_\Sigma$  и  $\mathcal{L}_{s_1}$ , как и  $R^{-1}\vec{F}_m$ . Поэтому решение (18) также удовлетворяет условиям Майкснера для тока  $\vec{J}$  на  $\mathcal{L}_\Sigma$  и поля  $\vec{E}_t$  на  $\mathcal{L}_{s_1}$ . После нахождения тока  $\vec{J}$  на  $\Sigma$  по формуле (18) с учетом определения (4) магнитный ток  $\vec{J}^\mu$  находим по формуле (1).

Теперь остается убедиться в том, что найденное решение (18) обеспечивает выполнение краевого условия  $\vec{E}_t = 0$  (для полного поля) на поверхности зеркала  $s$ . Если это условие не выполняется, то справедливо равенство (2) вместо (2а), которому удовлетворяют найденные ток  $\vec{J}$  на  $\Sigma$  и касательная составляющая напряженности поля  $\vec{E}_t$  на  $s_1$ . Отсюда следует

$$(19) \quad \int_{(s)} \vec{E} \vec{K}_m ds = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поскольку линейные комбинации токов  $\{\vec{K}_m\}$  плотны в  $C^1(s)$  по определению, а величина  $\vec{E}_t$  во всяком случае включена в  $H^{-1}(s)$ , то из равенств (19),

так же как из равенств (13), следует  $\vec{E}_t = 0$  на  $s$ , т.е. краевое условие на зеркале выполнено и поставленная задача решена (см. формулы (18) и (4)). 767

Если определение поля  $\vec{E}^m$ ,  $\vec{H}^m$ , возбуждаемого вспомогательным током  $\vec{K}_m$ , распределенным на замкнутой поверхности  $s + s_1$ , не проще, чем нахождение поля, создаваемого током, распределенным на незамкнутой поверхности  $s$ , то следует всюду полагать  $\vec{K}_m = 0$  на  $s_1$ . Тогда запись всех формул существенно упрощается и можно вообще не вводить  $s_1$ , полагая всюду  $s_1 = 0$ ,  $\vec{F} = \vec{J}$ ,  $\Sigma_0 = \Sigma$ .

Отметим, что в работе [1] при расчете распределения тока на поверхности  $s$ , реализующего заданную диаграмму, не учитывали наличие апертуры облучателя  $\Sigma$ . Последняя может непосредственно влиять на форму диаграммы направленности, особенно на величину задних лепестков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я.Н. // РЭ. 1987. Т. 32. № 6. С. 1137.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. 1. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1955. С. 171.
3. Фельд Я.Н. // РЭ. 1975. Т. 20. № 1. С. 28.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. С. 33.
5. Фельд Я.Н. // РЭ. 1979. Т. 24. № 3. С. 456.

Поступила в редакцию  
8. XI. 1987

УДК 537.36

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я.Н. ФЕЛЬД

**О КРИТЕРИИ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ ТОКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 20 I 1988)

По-видимому, наиболее общий критерий, пригодный как для замкнутых, так и незамкнутых поверхностей  $s$ , приведен в работе [1]. Он имеет следующий вид:

$$(1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^m \alpha_n^m \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2 < \infty.$$

Здесь  $F(\theta, \varphi)$  – рассматриваемая векторная диаграмма направленности, зависящая от углов  $\theta, \varphi$  сферической системы координат  $r, \theta, \varphi$ ;  $\{j_n(\theta, \varphi)\}$  – семейство линейно независимых вектор-функций, заданных на сфере  $\Omega$  единичного радиуса и касательных к ней, принадлежащих пространству  $L^2(\Omega)$ , и полное в нем: интегрирование идет по сфере  $\Omega$ , где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Коэффициенты  $\alpha_n^m$  определяются по известным формулам [2] при ортонормировке семейства  $\{R^{-1}\Phi_n^0\}$  процессом Шмидта, т.е. из условий

$$(2) \quad (A_m, A_n)_R = \delta_{mn}, \quad A_m \equiv \sum_{k=1}^m \alpha_k^m R^{-1} \Phi_k^0.$$

Здесь

$$(3) \quad (A_m, A_n)_R \equiv \int_{(s)} A_m \overline{R A_n} ds$$

есть скалярное произведение, определяющее гильбертово пространство  $L_R^2(s)$ . Семейство  $\{\Phi_n^0\}$  зависит от того, какими токами, распределенными на  $s$ , предполагается реализовать заданную диаграмму  $F$ . Если на части  $s_1$  поверхности  $s$  синтезируется поверхностный электрический ток плотности  $K$ , а на остальной части  $s_2$  ( $s_1 + s_2 = s$ ) – магнитный  $K^\mu$ , то следует положить

$$(4) \quad \Phi_n^0 = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \begin{cases} \overline{E_r \{K_n; S_0\}} & \text{на } s_1, \\ -\overline{H_r \{K_n; S_0\}} & \text{на } s_2. \end{cases}$$

Здесь  $E \{K_n; S_0\}$ ,  $H \{K_n; S_0\}$  – поле, создаваемое в свободном пространстве электрическим поверхностным током плотности

$$(5) \quad K_n = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} j_n(\theta, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots,$$

распределенным на сфере  $S_0$  ( $r = r_0$ ). Черта – знак комплексного сопряжения.

Квадратная матрица  $R$  второго ранга, фигурирующая в формуле (3), определяет гильбертово пространство\*  $L_R^2(s)$ , которому должны принадлежать токи  $K$  и

\* Здесь взято несколько более общее пространство для токов (по сравнению с [1], где  $R \equiv 1$ ) в соответствии с [3].

$K^\mu$ , реализующие диаграмму  $F(\theta, \varphi)$ . Матрица  $R^{-1}$  — обратная по отношению к  $R$ ,  $RR^{-1} = 1$ . Частный случай матрицы  $R$ , когда  $s = s_1$  — незамкнутая поверхность и ток  $K$  на ней удовлетворяет условию Майкснера на контуре, на который опирается  $s$ , приведен в [3].

Очевидно, класс реализуемых диаграмм  $\{F^p\}$  может отличаться от класса функций  $\{F\}$ , удовлетворяющих условию (1), на множество функций, являющихся нулями пространства  $L^2(\Omega)$  (подробнее об этом см. в [3]).

Критерий (1) существенно упрощается, если семейство  $\{j_n\}$  выбрано так, что множество  $\{R^{-1}\Phi_n^0\}$  ортогонально на  $s$ , т.е.

$$(6a) \quad (R^{-1}\Phi_m^0, R^{-1}\Phi_n^0)_R = 0, \text{ когда } m \neq n.$$

При этом  $\alpha_n^m = 0$ , если  $n < m$  и

$$(6b) \quad |\alpha_n^m|^2 = (R^{-1}\Phi_m^0, R^{-1}\Phi_m^0)_R^{-1} \equiv \|R^{-1}\Phi_m^0\|_R^{-2}.$$

Условие (1) принимает вид

$$(7) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left| \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_m(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2}{\|R^{-1}\Phi_m^0\|_R^2} < \infty.$$

Введем обозначение

$$(8) \quad C_m \equiv \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_m(\theta, \varphi) d\Omega$$

и перепишем (7) в следующем виде:

$$(9) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|C_m|^2}{\|R^{-1}\Phi_m^0\|_R^2} < \infty.$$

Очевидно, если семейство  $\{j_m\}$  в пространстве  $L^2(\Omega)$  ортонормировано, то  $C_m$  является коэффициентом Фурье диаграммы  $F$  по функциям  $j_m$ .

Рассмотрим отдельные примеры на применение критерия (9) реализуемости диаграммы  $F$  электрическим током  $K \in L^2(s)$ .

**Пример 1.** Пусть  $s$  — поверхность бесконечного вдоль оси  $z$  кругового цилиндра радиуса  $a$ , на которой распределен ток  $K = K_z$ , зависящий от одной цилиндрической координаты  $\varphi$ . Диаграмма направленности, создаваемая таким током, также зависит от одной координаты  $\varphi$  и  $F \in L^2(0 - 2\pi)$ , а  $d\Omega = d\varphi$ . Определим класс диаграмм, реализуемых током  $K \in L^2_R(s) \equiv L^2(\mathcal{L})$ , т.е. в рассматриваемом случае  $R \equiv 1$ , а  $s$  заменяется на контур  $\mathcal{L}$  цилиндра, лежащий в плоскости  $z = 0$ .

Введем семейство функций

$$(10) \quad j_n(\varphi) = j_{n,z}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В этом примере  $s = s_1, s_2 = 0$  и определение (4) сводится к следующему:

$$(11) \quad \Phi_n^0 = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \overline{E\{K_n; S_0\}} \text{ на } \mathcal{L}.$$

Здесь  $S_0$  — поверхность цилиндра  $r = r_0$ , а

$$(12) \quad K_n = \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{r_0}} j_n(\varphi).$$

$$(13) \quad \Phi_n^0 = - \frac{\omega\mu}{2\sqrt{k}} e^{-i(n \cdot \pi/2 + \pi/4)} J_n(ka) e^{-in\varphi}.$$

Таким образом, семейство  $\{\Phi_n^0(\varphi)\}$  ортогонально в  $L^2(0 - 2\pi)$  и можно использовать критерий (9).

Подставляя (13) в (9), найдем, учитывая (8) и (3),

$$(14) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi \right|^2}{|J_m(ka)|^2} < \infty.$$

Подчеркнем, что  $ka$  не должно быть корнем ни одной из функций  $J_m$ , ибо контур  $\mathcal{L}$  при этом оказывается резонансным и нарушается [1] теорема о полноте семейства  $\{\Phi_n^0\}$  в пространстве  $L^2(\mathcal{L})$ .

Так как справедлива асимптотическая формула

$$(15) \quad J_m(ka) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left( \frac{eka}{2m} \right)^m \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

то ряд (14) сходится при

$$(16) \quad |C_m| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi \right| = O \left( \frac{1}{|m|^{1+\epsilon}} \left( \frac{eka}{2|m|} \right)^{|m|} \right),$$

где  $\epsilon > 0$ , и диаграмма  $F$ , имеющая такие коэффициенты Фурье, реализуема током  $K \in L^2(\mathcal{L})$ , распределенным на цилиндре радиуса  $a$ . Критерий типа (16), приведенный в [4], отличается отсутствием множителя  $1/|m|^{1+\epsilon}$  в правой части (16) и заменой  $eka/2$  на величину  $b (< ak)$ . Таким образом, критерий работы [4] более жесткий, нежели (16), и поэтому не может быть необходимым, как утверждается в [4]. Он, по существу, требует, чтобы на контуре радиуса  $a$  не было особых точек поля, в то время как при критерии (16) на этом контуре такие точки могут быть [5].

**Пример 2.** Рассмотрим трехмерную векторную задачу, когда  $s$  — сфера радиуса  $a$ . Введем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$  с началом координат в центре сферы  $s$ . Требуется определить класс диаграмм, реализуемых поверхностным электрическим током  $K \in L^2(s)$ , распределенным на  $s$ . Ограничимся для простоты записи диаграммами, являющимися асимптотиками при  $r \rightarrow \infty$  полей, состоящих из волн электрического типа, определяемых потенциалами Дебая вида

$$V = B_n^m P_n^m(\cos \theta) \psi_n(kr) \cos m\varphi, \\ \psi_n(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{n+1/2}(x),$$

где  $r < r_0$  — радиус сферы  $S_0$  (см. выше),  $B_n^m$  — постоянные. В соответствии с [1] выберем в качестве вектор-функций  $\mathbf{j}_n^m$  следующие:

$$(17) \quad \mathbf{j}_n^m = \mathbf{i}_\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\beta_n^m} - \mathbf{i}_\varphi \frac{m P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{\sin m\varphi}{\beta_n^m}.$$

Здесь  $\beta_n^m$  — постоянные коэффициенты:

$$(17a) \quad \beta_n^m = \sqrt{\frac{\pi n(n+1)}{n+1/2} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}, \quad \beta_n^0 = \sqrt{\frac{2\pi n(n+1)}{n+1/2}}.$$

При таком выборе этих коэффициентов семейство  $\{j_n^m\}$  является ортонормированным на сфере  $\Omega$ .

Ток  $K_n^m$  связан с  $j_n^m$  соотношением (5), и выражение (11) сводится к

$$(18) \quad \Phi_n^m = \frac{i^n \rho}{a \beta_n^m} \psi_n'(ka) \left\{ -i_\varphi \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cos m\varphi + \right. \\ \left. + i_\varphi \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \right\}, \quad \rho = \sqrt{\mu/\epsilon}.$$

Ортогональность семейства  $\{\Phi_n^m\}$  в пространстве  $L^2(s)$ , т.е. справедливость равенств\* типа (6а) при  $R = 1$ , доказывается элементарно. Поэтому для реализуемости диаграммы направленности  $F(\theta, \varphi)$  при помощи тока  $K \in L^2(s)$ , распределенного на сфере  $s$  радиуса  $a$ , можно использовать критерий (7), положив в нем  $R \equiv 1$ . Несложный расчет позволяет написать

$$(19) \quad \|\Phi_n^m\| = \frac{\rho}{a} \psi_n'(ka).$$

Таким образом,  $\|\Phi_n^m\|$  не зависит от  $m$ . Подставляя это выражение в неравенство (9), которое в рассматриваемом случае запишется в виде

$$(20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{m=0}^n |C_n^m|^2}{\|\Phi_n^m\|^2} < \infty,$$

найдем критерий реализуемости соответствующих диаграмм. Здесь  $C_n^m$  — коэффициент Фурье:

$$(21) \quad C_n^m = \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_n^m(\theta, \varphi) d\Omega,$$

где  $j_n^m$  определяется формулой (17).

Очевидно, ряд в левой части (20) сходится, если коэффициенты  $C_n^m$  будут вести себя следующим образом:

$$\sum_{m=0}^n |C_n^m|^2 = O(\|\Phi_n^m\|^2/n^{1+\epsilon}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

или, учитывая (15) и (19),

$$(22) \quad \sum_{m=0}^n |C_n^m|^2 = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}} \left[\frac{eka}{2n+1}\right]^{2n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где  $\epsilon$  — любое положительное число.

Критерию (22) можно придать более компактную форму, если записать диаграмму в виде ряда (см. (21))

$$(23) \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \text{ где } F_n \equiv \sum_{m=0}^n C_n^m j_n^m(\theta, \varphi).$$

Так как семейство  $\{j_n^m\}$  ортонормировано на  $\Omega$ , то, применяя равенство Парсеваля [2] к ряду для  $F_n$ , найдем

$$\|F_n\|_{\Omega}^2 = \int_{(\Omega)} |F_n|^2 d\Omega = \sum_{m=0}^n |C_n^m|^2,$$

\* В отличие от (5) и (6а) в (17) и (18) использована двухиндексная нумерация функций  $j$  и  $\Phi$ .



$$(24) \quad \|F_n\|_{\Omega} = O\left(\frac{1}{n^{1/2+\epsilon}} \left[\frac{eka}{2n+1}\right]^n\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Аналогично можно записать критерий реализуемости для диаграмм, являющихся асимптотиками электрических и магнитных волн. Критерий (1), полученный впервые в [1], определяет класс диаграмм направленности, реализуемый токами, электрическими или магнитными (или первыми и вторыми вместе), распределенными на любых криволинейных, замкнутых или незамкнутых поверхностях, принадлежащих пространствам  $L^2_{\mathcal{R}}(s)$ , частным случаем которых является  $L^2(s)$ . Критерий, данный в работе [4], является, как показано на приведенных выше примерах, частным случаем критерия (1), когда задача двумерная, кривая замкнутая, выполняется условие (6а) и синтезируемые токи принадлежат пространству  $L^2(s)$ .

Поступило  
28 I 1988

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я.Н. – Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 6, с. 1154–1160.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
3. Фельд Я.Н. – Радиотехника и электроника, 1987, т. 32, № 6, с. 1137–1143.
4. Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Пангонис Л.И., Сивов А.Н. – ДАН, 1981, т. 260, № 6, с. 1357–1361.
5. Кюркчан А.Г. – ДАН, 1984, т. 275, № 1, с. 48–51.

**РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**

Журнал основан в 1956 г.

Выходит 12 раз в год

**Том XXXIV****Август 1989****Вып. 8****МОСКВА***Электродинамика, излучение и распространение радиоволн*

УДК 537.874.6.01

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
НА "НЕРЕЛЕЕВСКИХ" ТЕЛАХ С НУЛЕВЫМИ И ИМПЕДАНСНЫМИ  
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ****Фельд Я.Н.**

Изложен метод решения задач дифракции на нерелеевских телах, образованных из нескольких тел рэлеевского типа. Рассеянное поле сконструировано из суммы полей, создаваемых семействами мультиполей, каждое из которых располагается в соответствующей точке одного из составных тел. Рассмотрены примеры из двух касающихся вдоль образующей цилиндров и двух касающихся в одной точке шаров. Для первого из этих примеров приведены кривые для распределения плотности токов и диаграмм рассеяния. Проведено сравнение с соответствующими кривыми, построенными в приближении Кирхгофа.

В работе [1] предложен и развит метод решения задач рассеяния электромагнитных волн на системе из нескольких тел с различными краевыми условиями на их поверхностях. Характерным для этого метода является введение внутри каждого тела замкнутой (геометрической) поверхности, на которой задается некоторое полное семейство вспомогательных токов. В частности, эти поверхности могут быть стянуты в точки, и тогда вспомогательные токи заменяются мультиполями, расположенными в этих точках. В последнем случае все вычисления существенно упрощаются, так как поля, создаваемые мультиполями, известны и записываются в замкнутом виде<sup>1</sup>.

Однако, как уже отмечено в [1], если рассматриваемые тела и их поверхности не являются рэлеевскими<sup>2</sup>, то возникают вычислительные трудности: "разбалты-

<sup>1</sup> Впрочем, так же просто определяются поля, если в качестве этих внутренних поверхностей выбрать сферы (круги для двумерных задач) и задать на них соответствующие вспомогательные токи (см., например, [2, с. 675]).

<sup>2</sup> Тело называется рэлеевским, если внутри него можно построить сферу, в которой находятся все особенности рассеянного поля, аналитически продолженного внутрь.

вание” решения. Поэтому в данной работе предлагается модификация метода [1], 774 позволяющая использовать семейство вспомогательных мультиполей и для нерэлеевских тел. К этой модификации проще всего прийти, рассмотрев систему из  $N$  рэлеевских тел<sup>3</sup>, в каждом из которых, как показано в [1], можно выбрать соответствующую точку и поместить в ней полное семейство мультиполей. Поскольку процесс определения рассеянного поля сходится [1] при любом взаимном расположении этих тел, то, приближая их друг к другу до касания или даже до взаимного частичного пересечения, получим одно или несколько тел нерэлеевского типа. Таким образом, приходим к следующему способу расположения семейств вспомогательных мультиполей в случае тел нерэлеевского типа. В каждом из них размещается несколько точек таким образом, чтобы геометрические сферы с центрами в этих точках, целиком расположенные внутри тела<sup>4</sup>, содержали все особенности рассеянного поля; число точек и соответствующих сфер следует выбирать минимально возможным.

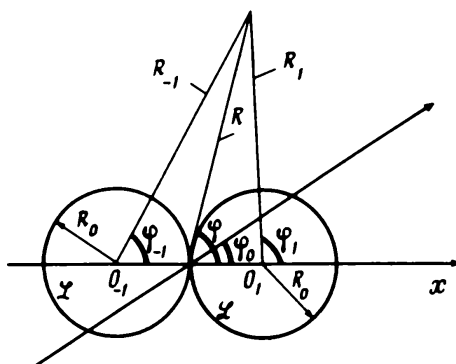


Рис. 1

Подбирая в соответствии с [1] амплитуды мультиполей, расположенных в выбранных таким образом точках, приходим к устойчивому вычислительному процессу и в случае рассеяния на телах нерэлеевского типа.

Подчеркнем, что все сказанное выше справедливо как для идеально проводящих тел, так и для тел с импедансными граничными условиями [1].

Проиллюстрируем сказанное на следующих примерах.

*Пример 1. Двухмерная задача.* Рассмотрим двухмерную задачу, к которой приходим, исследуя рассеяние плоской волны на бесконечно длинном идеально проводящем цилиндре с осью  $z$  и контуром поперечного сечения  $\mathcal{L}$  (рис. 1), определяемым уравнением

$$(1) \quad R = 2R_0 |\cos \varphi|.$$

Здесь  $R, \varphi, z$  – цилиндрическая система координат, а  $R_0$  – постоянная величина.

Как легко видеть, это тело с сечением типа восьмерки явно нерэлеевское.

Пусть на этот цилиндр падает плоская волна  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  перпендикулярно оси  $z$ , в направлении  $\varphi = \varphi_0$  и ее электрический вектор определяется выражением

$$(2) \quad E_0 = E_{0z} = e^{-ikR \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Рассеянное поле  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  также не зависит от  $z$  и его электрический вектор параллелен оси  $z$ . Полное поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}^r$ . Таким образом, задача сводится к двухмерной с краевым условием  $\vec{E} = 0$  на  $\mathcal{L}$ . Введем на плоскости  $z = 0$  две полярные

<sup>3</sup> Необходимо иметь в виду, что распределение особенностей внутри тела не зависит от наличия вблизи других тел. Поэтому если тело рэлеевское при заданной первичной волне, то оно останется таким же при помещении рядом другого тела [3].

<sup>4</sup> Эти сферы могут, в частности, пересекаться.

системы координат:  $R_1, \varphi_1$  и  $R_{-1}, \varphi_{-1}$  с началом в точках  $R = R_0, \varphi = 0$  и  $R = R_0, \varphi = \pi$  соответственно (рис. 1). Поместим в этих точках семейства мультиполей, возбуждающих следующие поля:

$$(3) \quad E^{(n)} = E_z^{(n)} = \begin{cases} H_{|n/2|}^{(2)}(kR_1) \exp\left(i \frac{n}{2} \varphi_1\right), & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ H_{|(n-1)/2|}^{(2)}(kR_{-1}) \exp\left(\frac{n-1}{2} \varphi_{-1}\right), & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases}$$

В соответствии с [1, формулы (24), (25)] можно записать

$$(4) \quad \int_{\mathcal{L}} KE^{(n)} dl = \int_{\mathcal{L}} \{[\vec{E}_0 \vec{H}^{(n)}] - [\vec{E}^{(n)} \vec{H}_0]\} \vec{n} dl.$$

Интегрирование проводится по контуру  $\mathcal{L}$  рассматриваемого цилиндра (1), находящегося в сечении  $z = 0$ ,  $dl$  – элемент длины дуги контура  $\mathcal{L}$ ,  $\vec{n}$  – наружная нормаль к поверхности цилиндра (т.е. к  $\mathcal{L}$ ), а  $K = K_z$  – искомая плотность тока, индуцированного на поверхности цилиндра падающей волной  $E_0, H_0$ . Интегрирование по  $\mathcal{L}$  в правой части равенства (4) можно заменить интегрированием по окружностям  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{-1}$  малого радиуса  $R_\epsilon$ , охватывающим (источники–мультиполи) начала обеих систем координат. Доказательство последнего элементарно: достаточно применить лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^{(n)}, \vec{H}^{(n)}$  и  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  в области, ограниченной контурами  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{-1}$ .

Таким образом, равенство (4) можно записать в виде

$$(5) \quad \int_{\mathcal{L}} KE^{(n)} dl = \int_{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{-1})} \{[\vec{E}_0 \vec{H}^{(n)}] - [\vec{E}^{(n)} \vec{H}_0]\} \vec{n} dl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Введем сокращающее запись обозначение

$$(6) \quad a_n = \int_{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{-1})} \{[\vec{E}_0 \vec{H}^{(n)}] - [\vec{E}^{(n)} \vec{H}_0]\} \vec{n} dl,$$

при этом равенства (5) принимают вид

$$(7) \quad \int_{\mathcal{L}} KE^{(n)} dl = a_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Коэффициенты  $a_n$  легко вычислить. Для этого необходимо из уравнений Максвелла определить  $H_{0\varphi_{\pm 1}}, H_{\varphi_{\pm 1}}^{(n)}$ , учитывая формулы (2) и (3):

$$(8) \quad H_{0\varphi_1} = -\frac{1}{\rho} \cos(\varphi_1 - \varphi_0) E_0; \quad H_{0\varphi_{-1}} = -\frac{1}{\rho} \cos(\varphi_{-1} - \varphi_0) E_0,$$

$$(9) \quad \begin{aligned} H_{\varphi_1}^{(n)} &= \frac{1}{i\rho} H_{|n/2|}^{(2)'}(kR_1) \exp\left(i \frac{n}{2} \varphi_1\right), \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ H_{\varphi_{-1}}^{(n)} &= \frac{1}{i\rho} H_{|(n-1)/2|}^{(2)'}(kR_{-1}) \exp\left(i \frac{n-1}{2} \varphi_{-1}\right), \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$  – волновое сопротивление.

Подставляя (2), (3) и (8), (9) в правую часть равенства (6) и переходя к пределу, когда  $R_\epsilon \rightarrow 0$ , найдем

$$(10) \quad a_n = \begin{cases} \frac{4(-i)^{|n/2|}}{\rho k} \exp\left(-ikR_0 \cos \varphi_0 + i \frac{n}{2} \varphi_0\right), & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ \frac{4(-i)^{|(n-1)/2|}}{\rho k} \exp\left(+ikR_0 \cos \varphi_0 + i \frac{n-1}{2} \varphi_0\right), & n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Поскольку, как показано в [1], семейство  $\{\overline{E^{(n)}}\}$  (черта – знак комплексного сопряжения) линейно независимо и полно в пространстве  $L^2(\mathcal{L})$ , равенства (7) можно использовать для определения тока  $K$  на  $\mathcal{L}$  одним из изложенных в [1, 4] методов. Определив ток  $K$ , найдем рассеянное поле по формуле [1]:

$$(11) \quad E^r = -\frac{\omega\mu}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_a}} \exp[-i(kR_a - \pi/4)] F(\varphi_a),$$

где

$$(12) \quad F(\varphi_a) = \int_{(\mathcal{L})} K \exp[i2kR_0 |\cos\varphi| \cos(\varphi - \varphi_a)] dl$$

– диаграмма рассеяния. Здесь  $R_a$ ,  $\varphi_a$  – координаты точки наблюдения, а  $R$ ,  $\varphi$  – точки интегрирования.

Если радиусы кривизны рассматриваемого цилиндра, т.е. величина  $R_0$  в формуле (1), велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , то равенства (7) следует заменить, представив ток  $K$  в виде суммы [1]:

$$(13) \quad K = K^0 + K^\Delta,$$

где  $K^0$  – ток, найденный каким-либо приближенным методом.

При использовании метода Кирхгофа

$$(14) \quad K^0 = \begin{cases} 2H_0 \frac{R'_\varphi \sin(\varphi - \varphi_0) + R \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{(R'_\varphi)^2 + R^2}} & \text{в области света,} \\ 0 & \text{в области тени.} \end{cases}$$

Здесь  $H_0 = -\frac{1}{\rho} E_0$ , а  $R$  определяется формулой (1).

Подставляя (14) в равенства (7), найдем

$$(15) \quad \int_{(\mathcal{L})} K^\Delta E^{(n)} dl = a_n - \int_{(\mathcal{L})} K^0 E^{(n)} dl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Нахождение  $K^\Delta$  из равенств (15) при  $R_0 \gg \lambda$  приводит к более быстро сходящемуся процессу, чем определение  $K$  при помощи (7).

В случае, когда  $\varphi_0 = 0$ , ток  $K$  и диаграмма  $F$  должны быть четными функциями  $\varphi$ , при этом формулы несколько упрощаются. Так, вместо (3) и (10) можно записать

$$(3a) \quad E^{(n)} = \begin{cases} H_{n/2}^{(2)}(kR_1) \cos\left(\frac{n}{2} \varphi_1\right), & n = 0, 2, 4, \dots, \\ H_{(n-1)/2}^{(2)}(kR_{-1}) \cos\left(\frac{n-1}{2} \varphi_{-1}\right), & n = 1, 3, 5, \dots, \end{cases}$$

$$(10a) \quad a_n = \frac{1}{\rho k R_0} \begin{cases} (-i)^{n/2} e^{-ikR_0}, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ (-i)^{(n-1)/2} e^{ikR_0}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Учитывая (1), равенствам (7) и (15) можно придать следующий вид:

$$(7a) \quad \int_0^\pi K E^{(n)} d\varphi = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(15a) \quad \int_0^\pi K^\Delta E^{(n)} d\varphi = a_n - \int_0^\pi K^0 E^{(n)} d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

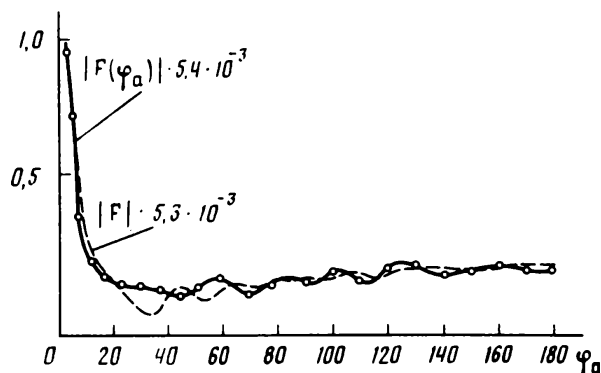
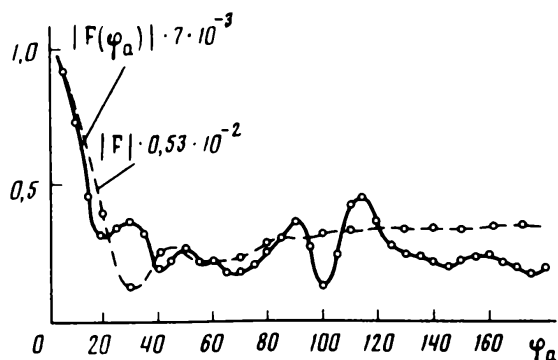
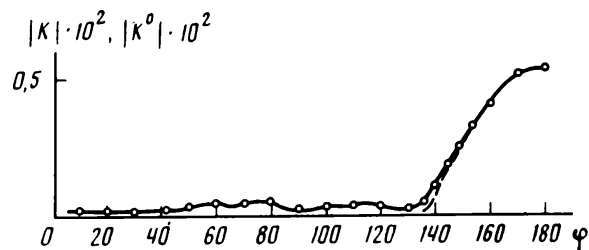
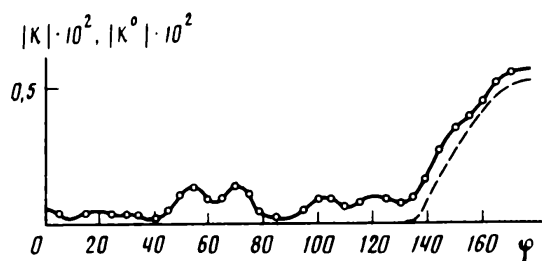


Рис. 2

Рис. 3

так как из (1) следует, что

$$dl = 2R_0 d\varphi,$$

а величины  $R_1, R_{-1}, \varphi_1, \varphi_{-1}$ , входящие в  $E^{(n)}$ , выражаются через  $\varphi$  на контуре  $\mathcal{L}$  из элементарных геометрических соотношений (см. рис. 1).

На рис. 2 и 3 изображены распределения модуля тока  $|K|$ , найденные в результате решений системы уравнений (15а) методом ортогонализации [1] с последующим использованием формул (14) и (13), для двух значений  $kR_0 = 2\pi$  и  $4\pi$  соответственно. При этом штриховыми кривыми показан ток  $|K^0|$  (кирхгофское приближение), а сплошными — точное значение тока  $|K|$ .

На рис. 2 и 3 представлены также модули диаграмм рассеяния  $|F(\varphi_a)|$ , рассчитанные по формуле (12) для  $kR_0 = 2\pi$  и  $4\pi$ . Штриховыми кривыми изображены диаграммы, создаваемые токами  $K^0$ , а сплошными — токами  $K$ . При расчетах предполагали, что  $\varphi_0 = 0$  и учитывали 15 уравнений в системе (15а). Учет 15 уравнений привел к стабилизации решения. По-видимому, для  $kR_0 = 2\pi$  стабилизация происходит при меньшем числе уравнений.

Как и следовало ожидать, с ростом  $kR_0$  точное решение приближается к кирхгофовскому. Расчеты проводили на вычислительной машине ЕС-1045.

**Пример 2. Трехмерная задача.** Рассмотрим фигуру из двух соприкасающихся шаров радиусом  $r_0$ . В сферической системе координат  $r, \vartheta, \varphi$  ее поверхность  $s$  определяется уравнением (рис. 4)

$$(16) \quad r = 2r_0 \sin \vartheta |\cos \varphi|.$$

Центры этих шаров расположены в точках  $r = r_0, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0$  и  $r = r_0, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi$ , которые будем обозначать буквами  $O_1$  и  $O_{-1}$  соответственно.

Это тело явно нерэлеевское. Пусть на него в направлении<sup>5</sup>  $\vartheta = \pi/2, \varphi = \varphi_0$  падает плоская волна  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  с электрическим вектором, параллельным оси  $z$  (рис. 4):

$$(17) \quad E_0 = E_{0z} = \exp[-ikr \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)].$$

<sup>5</sup> Выбор  $\vartheta = \pi/2$  не уменьшает общности, так как ось  $z$ , от которой отсчитывается угол  $\vartheta$ , всегда можно провести так, чтобы любое направление составляло с ней угол, равный  $\pi/2$ .

На поверхности  $s$  тела будем полагать выполненным краевое условие  $\vec{E}_t = 0$  778 для полного поля.

Введем две системы сферических координат:  $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$  и  $r_{-1}, \vartheta_{-1}, \varphi_{-1}$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_{-1}$  и осями, параллельными оси  $z$  основной системы координат  $r, \vartheta, \varphi$ . В этих центрах поместим семейства мультиполей, создающих поля, определяемые потенциалами Дебая типа

$$(18) \quad V_{\pm 1} = \sqrt{\frac{\pi k r_{\pm 1}}{2}} H_{\nu+1/2}^{(2)}(k r_{\pm 1}) P_{\nu}^{|n|}(\cos \vartheta_{\pm 1}) e^{in\varphi_{\pm 1}},$$

где  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

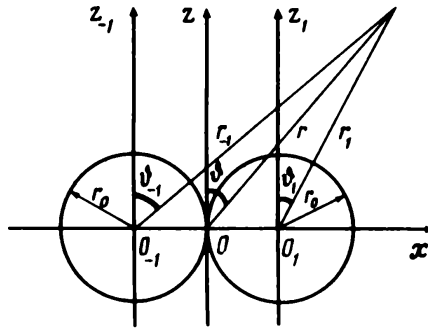


Рис. 4

Электрические векторы, определяемые этими потенциалами, имеют вид

$$(19) \quad \begin{cases} E_{r_{\pm 1}} = \frac{\partial^2}{\partial r_{\pm 1}^2} V_{\pm 1} + k^2 V_{\pm 1}; & E_{\vartheta_{\pm 1}} = \frac{1}{r_{\pm 1}} \frac{\partial^2 V_{\pm 1}}{\partial r_{\pm 1} \partial \vartheta_{\pm 1}}, \\ E_{\varphi_{\pm 1}} = \frac{1}{r_{\pm 1} \sin \vartheta_{\pm 1}} \frac{\partial^2 V_{\pm 1}}{\partial r_{\pm 1} \partial \varphi_{\pm 1}} \end{cases}$$

для волн электрического типа и

$$(20) \quad \begin{aligned} E_{r_{\pm 1}} &= 0; & E_{\vartheta_{\pm 1}} &= \frac{-ik}{r_{\pm 1} \sin \vartheta_{\pm 1}} \frac{\partial V_{\pm 1}}{\partial \varphi_{\pm 1}}; \\ E_{\varphi_{\pm 1}} &= \frac{ik}{r_{\pm 1}} \frac{\partial V_{\pm 1}}{\partial \vartheta_{\pm 1}} \end{aligned}$$

для волн магнитного типа.

Если перенумеровать каким-либо способом все эти вспомогательные волны при помощи одного индекса  $m$ , то опять будут выполняться равенства типа (7):

$$(21) \quad \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^{(m)} ds = a_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\vec{K}$  – искомый поверхностный ток на  $s$ ,  $\vec{E}^{(m)}$  – электрический вектор поля, возбуждаемого  $m$ -м мультиполем, расположенным в точке  $O_1$  или  $O_{-1}$ ,

$$(22) \quad a_m = \int_{(s)} \{[\vec{E}_0 \vec{H}^{(m)}] - [\vec{E}^{(m)} \vec{H}_0]\} \vec{d}s.$$

Вычисляя  $a_m$  одним из способов, указанных в [1, формула (5)], найдем

$$(23) \quad a_m = \frac{(\nu + |n|)}{30} i^{\nu+1} P_{\nu-1}^{|n|}(0) \exp[in(\varphi_0 + \pi) \mp ikr_0 \cos \varphi_0]$$

$$(24) \quad a_m = -\frac{in}{30} i^{\nu+1} P_\nu^{|n|}(0) \exp[in(\varphi_0 + \pi) \mp ikr_0 \cos \varphi_0]$$

для волн магнитного типа. При этом  $m = (\nu, n)$ . Верхний знак соответствует мультиполям, находящимся в точке  $O_1$ , а нижний — находящимся в точке  $O_{-1}$ .

Поскольку в равенствах (21) величины  $\vec{E}^{(m)}$  и  $a_m$  известны, эти равенства могут быть использованы для нахождения поверхностного тока  $K$  на  $s$ . Для этого достаточно воспользоваться методом ортогонализации или свести (21) к системе линейных алгебраических уравнений [1]. Система уравнений (21) может быть также заменена системой типа (15), если ввести кирхгофовское приближение  $\vec{K}^0$  для тока и представить точное значение  $\vec{K}$  при помощи формулы (13).

Автор выражает признательность Ф.А. Богдановой за проведенные расчеты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я.Н. // РЭ. 1986. Т. 31. № 7. С. 1265.
2. Фельд Я.Н., Ансрян А.К. // РЭ. 1978. Т. 23. № 4. С. 673.
3. Кюркчан А.Г. // РЭ. 1989. Т. 34. № 2. С. 245.
4. Фельд Я.Н. // РЭ. 1975. Т. 20. № 1. С. 28.

Поступила в редакцию  
22. XI. 1988



# Антенно-волноводная техника и распространение радиоволн

УДК 621.396.677

## Прямые методы в теории антенн

Я. Н. Фельд

Дан обзор прямых методов, используемых в теории антенно-фидерных устройств; приведены некоторые новые результаты, принадлежащие автору.

В антенной технике широко применяются методы наведенных электродвижущих (ЭДС) и магнитодвижущих (МДС) сил, которые используются для расчета распределений тока на вибраторах и напряжений на щелях и отверстиях, прорезанных в стенках волноводов и резонаторов, а также в любых других металлических поверхностях. В общем виде эти методы являются развитием известного метода Галеркина применительно к вибраторам и щелям.

**Метод наведенных электродвижущих сил.** Рассмотрим систему из  $N$  идеально

проводящих тонких вибраторов, общая поверхность которых  $S = \sum_{i=1}^N s_i$ , где  $s_i$  — поверхность  $i$ -го вибратора. Чтобы охватить случаи приемных и передающих антенн, полагаем, что эта система возбуждается источниками, расположенными вне ее и возбуждающими первичное поле  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ , а также сторонней ЭДС  $\mathbf{E}^{ct}$ , приложенной непосредственно к поверхности вибраторов. В случае передающей антенны  $\mathbf{E}^0 = \mathbf{H}^0 = 0$  и  $\mathbf{E}^{ct} \neq 0$  на  $S$ ; в случае приемной  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \neq 0$  и  $\mathbf{E}^{ct} = 0$  на  $S$ . Вторичное поле (обозначим его через  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ), возбуждаемое индуцированными на  $S$  поверхностными токами плотности  $\mathbf{K}$ , должно удовлетворять краевому условию

$$\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t^0 + \mathbf{E}^{ct} = 0 \text{ на } S \quad (1)$$

и принципу излучения на бесконечности.

Поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{K})$  является известным линейным оператором плотности тока  $\mathbf{K}$ . Строго говоря, при наличии  $\mathbf{E}^{ct}$  на  $S$  поле  $\mathbf{E}$  создается также магнитным током, равным  $[\mathbf{nE}^{ct}]$ . Однако так как этот ток кольцевой, охватывающий линейный вибратор, то его влиянием можно пренебречь. Учитывая (1), получаем известное уравнение для  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{K}) = -\mathbf{E}_t^0 - \mathbf{E}^{ct} \text{ на } S. \quad (2)$$

Запишем решение этого уравнения в виде суммы

$$\mathbf{K} = \sum_{n=1}^M J_n \mathbf{K}_n, \quad (3)$$

где  $J_n$  — комплексные искомые числа;  $\{\mathbf{K}_n\}$  — заданные на  $S$ , касательные к ней, линейно независимые вектор-функции.

Последняя система должна быть достаточно полной для хорошей аппроксимации  $\mathbf{K}$ . Используя метод Галеркина для нахождения  $J_n$ , умножим (2) скалярно на  $\mathbf{K}_m$  и проинтегрируем по  $S$ , предварительно подставив в (2) значение  $\mathbf{K}$  из (3).

После этого получим  $\int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E} \left\{ \sum_{n=1}^M J_n \mathbf{K}_n \right\} ds = - \int_{(S)} \mathbf{K}_m (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{ct}) ds$  или, учитывая

линейность оператора  $E\{\cdot\}$ ,

$$\sum_{n=1}^M J_n \int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}\{\mathbf{K}_n\} ds = - \int_{(S)} \mathbf{K}_m (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{ct}) ds. \quad (4)$$

Обозначив

$$Z_{mn} = - \int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}\{\mathbf{K}_n\} ds, V_m = \int_{(S)} \mathbf{K}_m (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{ct}) ds, \quad (5)$$

запишем (4) в виде

$$\sum_{n=1}^M J_n Z_{mn} = V_m, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (6)$$

Поскольку  $Z_{mn}$  и  $V_m$  — известные\* числа, так как  $\mathbf{K}_n$  заданы, то решение (2) свелось к системе линейных алгебраических уравнений (6).

В ряде случаев можно доказать, что при  $M \rightarrow \infty$  изложенная методика приводит к точному решению (2). Числа  $Z_{mn}$  удовлетворяют соотношению взаимности

$$Z_{mn} = Z_{nm}. \quad (7)$$

Действительно, если к двум полям, порождаемым распределениями тока  $\mathbf{K}_n$  и  $\mathbf{K}_m$  на  $S$ , применить лемму Лоренца, то получим

$$\int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}\{\mathbf{K}_n\} ds = \int_{(S)} \mathbf{K}_n \mathbf{E}\{\mathbf{K}_m\} ds. \quad (8)$$

Из (8), учитывая (5), следует (7). Что касается  $V_m$ , то для передающих антенн, когда  $\mathbf{E}^0 = 0$ ,

$$V_m = \int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}^{ct} ds, \quad (9)$$

где  $\mathbf{E}^{ct} = U_n \delta(x_n) \mathbf{i}_{x_n}$  ( $U_n$  — напряжение на клеммах  $n$ -го вибратора,  $x_n$  — координата, отсчитываемая вдоль оси  $n$ -го вибратора, у которого клеммы расположены в точке  $x_n = 0$ ,  $\mathbf{i}_{x_n}$  — орт, направленный вдоль  $x_n$ ).

Для приемных антенн

$$V_m = \int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}^0 ds + \int_{(S)} \mathbf{K}_m \mathbf{E}^{ct} ds, \quad (10)$$

где  $\mathbf{E}^{ct} = -U_n \delta(x_n) \mathbf{i}_{x_n}$  на  $n$ -м вибраторе ( $U_n$  равно падению напряжения на нагрузке  $n$ -го вибратора).

Следует отметить, что все полученные выше методом Галеркина результаты могут быть найдены методом Ритца, примененным к решению вариационной задачи, эквивалентной основному уравнению (2). Задача эта сводится к на-

хождению  $\mathbf{K}$  на  $S$ , при котором функционал  $L\{\mathbf{K}\} = \int_{(S)} \mathbf{K}(\mathbf{E}\{\mathbf{K}\} + 2\mathbf{E}^0 + 2\mathbf{E}^{ct}) ds$

стационарен. Таким образом, существует еще один метод обоснования полученных результатов.

Метод наведенных ЭДС в его обобщенной форме, изложенной выше, приводит к необходимости решать систему уравнения (6) в общем случае с большим числом неизвестных.

Можно, однако, путем специальной ортогонализации векторных функций  $\mathbf{K}_n$ , по которым разлагается решение (3), получить выражение для плотности тока  $\mathbf{K}$  с окончательно определенными коэффициентами. Действительно, пусть вектор-функции  $\{\mathbf{K}_n\}$  предварительно ортонормированы так, что удовлетворяют соотношениям [1]

\* Величины  $V_m$  в случаях приемных антенн неизвестны.

$$\int_{(S)} K_m E\{K_n\} ds = \sigma_{mn}. \quad (11)$$

Тогда уравнения (4) принимают вид

$$J_m = -V_m, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (12)$$

Таким образом коэффициенты  $\{J_m\}$  окончательно определены. По существу вычислительные трудности решения линейной системы (6) переносятся при этом на получение ортонормированной системы  $\{K_n\}$ . Эта ортонормировка производится с помощью рекуррентного процесса типа Шмидта. Можно также найти выражение для  $K_n$  ( $1 \leq n \leq M$ ), удовлетворяющих условию (11), с помощью определителей [1].

Определим еще комплексную мощность, излучаемую током  $K$ , распределенным на  $S$ . Для нее справедливо выражение

$$W_\Sigma = -\frac{1}{2} \int_{(S)} EK^* ds, \quad (13)$$

где \* — знак комплексного сопряжения.

Краевое условие (2) позволяет переписать (13) в виде

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \int_{(S)} (E^0 + E^{ct}) K^* ds.$$

Если выбрать  $K_n$  в (3) вещественными (что всегда можно сделать, заменив один комплексный вектор двумя вещественными), то, учитывая (3), (5) и (6), имеем

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M V_m J_m^* = \frac{1}{2} \sum_{n,m} Z_{mn} J_n J_m^*. \quad (14)$$

Для получения (14) можно было бы не ограничиваться вещественными  $K_n$ . Для этого следовало бы умножить (2) (в методе Галеркина) не на  $K_m$ , а на  $K_m^*$ . Однако при этом не выполнялась бы теорема взаимности (7) и для ее выполнения пришлось бы опять наложить условие вещественности на  $K_n$ .

**Тонкие вибраторы, близкие к резонансным.** В ряде случаев, когда заранее известен характер распределения тока вдоль вибраторов, можно аппроксимировать его вдоль каждого вибратора одночленной формулой с неизвестной амплитудой. Это имеет место, например, когда вибраторы резонансные, т. е. практически полуволновые. При этом, как известно, распределение тока не зависит от возбуждения и имеет вид половины синусоиды на каждом вибраторе.

Весьма удобен следующий метод введения функций  $K_n$  на  $S$ . Пусть  $M = N$ , т. е. число функций  $K_n$  равно числу вибраторов, и  $K_n \neq 0$  только на  $s_n$ , а на  $s_m$  ( $m \neq n$ )  $K_n = 0$ . Таким образом  $K_n$  характеризует распределение плотности тока на  $n$ -м вибраторе:

$$K = J_n K_n \text{ на } s_n; \quad K_n = 0 \text{ на } s_m, \quad m \neq n. \quad (15)$$

Считая, что  $K$  обладает осевой симметрией и направлен вдоль оси соответствующего вибратора, перейдем от плотности тока  $K$  к полному току  $I$ , текущему вдоль вибратора. Для этого прежде всего положим

$$K_n = [1/(2\pi r_n)] \psi_n(x_n) t_n \text{ на } s_n, \quad (16)$$

где  $x_n$  — координата, отсчитываемая вдоль оси  $n$ -го вибратора;  $r_n$  — его радиус,  $t_n$  — орт, параллельный оси  $n$ -го вибратора;  $\psi_n(x_n)$  — безразмерная вещественная функция, которая обращается в единицу в некотором сечении  $n$ -го вибратора (назовем его клеммным) и равна нулю на концах вибратора.

Учитывая (15) и (16), получаем  $I = J_n \psi_n(x_n)$  на  $s_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

Используя эти обозначения, перепишем (6) и (5) в виде

$$\sum_{n=1}^N J_n Z_{mn} = V_m, \quad 1 \leq m \leq N, \quad (17)$$

где  $J_n$  — комплексная амплитуда тока в клеммном сечении  $n$ -го вибратора;

$$V_m = \int_{(m)} \psi_m(x_m) (E_{t_m}^0 + E^{ct}) dx_m \quad (18)$$

— ЭДС приложенная к  $m$ -му вибратору, пересчитанная к его клеммному сечению;

$$Z_{mn} = - \int_{(m)} \psi_m(x_m) E_{tm} \{K_n\} dx_m \quad (19)$$

— взаимное сопротивление, а точнее, сопротивление, наведенное током плотностью  $K_n$   $n$ -го вибратора на  $m$ -й вибратор, пересчитанное к клеммному сечению последнего.

В (18), (19) интегрирование идет вдоль оси  $m$ -го вибратора.

Для передающих антенн  $E^0 = H^0 = 0$ , а  $E^{ct}$  на поверхности вибраторов задано; для приемных —  $E^0 \neq 0$  и задано. Что касается  $E^{ct}$ , то, как следует из (10), учитывая (16), для приемных антенн можно написать

$$V_m = V_m^0 - U_m = V_m^0 - J_m Z_m, \quad (20)$$

где  $V_m^0 = \int_{(m)} \psi_m(x_m) E_{tm}^0 dx_m$ ;  $z_m$  — сопротивление, подключенное к клеммам  $m$ -го

вибратора.

Подставляя (20) в (17), находим

$$J_m z_m + \sum_{n=1}^N J_n Z_{mn} = V_m^0, \quad 1 \leq m \leq N, \quad (21)$$

откуда определяются значения  $J_n$  для приемных вибраторов.

Выражение (19) применяется также для нахождения полного входного сопротивления антенных решеток с учетом схемы включения вибраторов, определения мощности излучения и т. п. Таким образом, мы пришли к уравнениям и понятиям, которые используются в методе наведенных ЭДС, в его классической трактовке, разработанной А. А. Пистолькорсом [2], В. В. Татариновым [3, 4]. Последним даны также подробные таблицы  $Z_{mn}$  для полуволновых параллельных вибраторов [5]. Из сказанного следует, что классический метод наведенных ЭДС является весьма частным случаем метода Галеркина (или Ритца), когда распределение тока вдоль каждого вибратора аппроксимируется одной подходящей функцией, умноженной на постоянный коэффициент, подлежащий определению.

**Метод наведенных МДС.** Метод, изложенный выше для нахождения распределения токов в вибраторах, можно применять также для определения касательной составляющей электрического вектора  $E_t$  на геометрической поверхности отверстий или напряжений вдоль узких щелей. В этом случае он называется методом наведенных магнитодвижущих сил (МДС) [6]. Рассмотрим для определенности волновод любого сечения с  $N$  отверстиями (или щелями). Обозначим

суммарную геометрическую поверхность отверстий через  $S = \sum_{n=1}^N s_n$ . Пусть

источники-токи, возбуждающие рассматриваемый волновод, находятся как внутри него (область  $v_i$ ), так и снаружи (область  $v_e$ ), их поле, не возмущенное отверстиями, но в присутствии сплошного волновода обозначим через  $E^{0i}$ ,  $H^{0i}$  в области  $v_i$  и  $E^{0e}$ ,  $H^{0e}$  в области  $v_e$ . Тогда, если  $e \equiv E_t$  на  $S$ , то полное поле  $H$ , при наличии щелей, равно

$$H = H^{0i} + H^i \{e\} \text{ в области } v_i; \quad H = H^{0e} + H^e \{e\} \text{ в области } v_e, \quad (22)$$

где  $H^i \{ \cdot \}$  и  $H^e \{ \cdot \}$  — линейные операторы, действующие на вектор  $e$ . Они находятся в результате решения внутренней и внешней краевых задач электродинамики, которые сводятся к нахождению поля внутри  $v_i$  и  $v_e$  по заданным на ограничивающих их поверхностях касательным составляющим электрического вектора  $E_t$  [7]. В нашем случае  $E_t = 0$  на поверхности металла волновода и  $E_t = e$  на отверстиях  $S$ . Очевидно, решения этих задач при одном и том же векторе  $e$  обеспечивают непрерывность  $E_t$  при переходе через отверстия  $S$ .

Остается удовлетворить условию непрерывности  $H_t$  при переходе через  $S$ . Учитывая (22), его можно записать в виде

$$H_t^i \{e\} - H_t^e \{e\} = H_t^{0i} - H_t^{0e} \text{ на } S. \quad (23)$$

Таким образом, получено искоемое уравнение, определяющее  $e \equiv E_t$  на отверстиях. Запишем его решение в виде

$$e = \sum_{n=1}^M V_n e_n \text{ на } S, \quad (24)$$

где  $V_n$  — искомые постоянные,  $\mathbf{e}_n$  — заданные вектор-функции, касательные к  $S$ .

Подставив (24) в (23) и умножив последнее сначала векторно на  $\mathbf{e}_m$ , а затем скалярно на  $d\mathbf{s}$ , проинтегрируем по  $S$  ( $d\mathbf{s}$  — направлено внутрь  $v_e$ ). После элементарных преобразований с учетом линейности операторов получим

$$\sum_{n=1}^M V_n Y_{mn} = F_m^i + F_m^e, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (25)$$

$$\text{где } Y_{mn} = Y_{mn}^e + Y_{mn}^i, \quad Y_{mn}^e = \int_{(S)} [\mathbf{e}_m \mathbf{H}^e \{\mathbf{e}_n\}] d\mathbf{s}, \quad Y_{mn}^i = - \int_{(S)} [\mathbf{e}_m \mathbf{H}^i \{\mathbf{e}_n\}] d\mathbf{s}, \quad F_m^i = \int_{(S)} [\mathbf{e}_m \mathbf{H}^{0i}] d\mathbf{s}, \\ F_m^e = - \int_{(S)} [\mathbf{e}_m \mathbf{H}^{0e}] d\mathbf{s}.$$

Как легко показать, используя лемму Лоренца, справедливы следующие теоремы взаимности:  $Y_{mn} = Y_{nm}$ ,  $Y_{mn}^e = Y_{nm}^e$ ,  $Y_{mn}^i = Y_{nm}^i$ .

Если система передающая и источники находятся только внутри волновода, то при  $\mathbf{e}_n$  ( $n=1, 2, \dots, M$ ) вещественных комплексная мощность излучения

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{n,m}^{1-M} V_n V_m^* Y_{nm}^e.$$

Система уравнений (25), так же как и в методе наведенных ЭДС, может быть упрощена, если семейство вектор-функций  $\{\mathbf{e}_n\}$  подвергнуть предварительной специальной ортонормировке. Действительно, если провести ее так, чтобы

$\{\mathbf{e}_n\}$  удовлетворяли условию  $\int_{(S)} [\mathbf{e}_m (\mathbf{H}^e \{\mathbf{e}_n\} - \mathbf{H}^i \{\mathbf{e}_n\})] d\mathbf{s} = \delta_{mn}$ , то (25) сведется к

$V_m = F_m^i + F_m^e$  и коэффициенты выражения (24) для  $\mathbf{e}$  окончательно будут определены.

**Узкие щели, близкие к резонансу.** Для узких щелей [8, 9], вдоль которых закон распределения напряжения заранее известен и требуется определить только «масштаб» кривых, а точнее, амплитуды напряжений в клеммных сечениях, следует положить  $\mathbf{e} = V_n \mathbf{e}_n$  на  $s_n$ ;  $\mathbf{e}_n = 0$  на  $s_m$  ( $m \neq n$ ), где

$$\mathbf{e}_n = f_n(y_n) \psi_n(x_n) \mathbf{t}_{y_n}, \quad f_n(y_n) = \frac{1}{\pi \sqrt{y_n(d_n - y_n)}}, \quad \psi_n(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{l_n} x_n\right), \quad (26)$$

$y_n$  — поперечная координата;  $f_n(y_n)$  характеризует поперечное электростатическое распределение в  $n$ -й щели шириной  $d_n$ ;  $\mathbf{t}_{y_n}$  — поперечный единичный орт;  $x_n$  — координата, отсчитываемая вдоль длины  $n$ -й щели от одного из ее концов;  $l_n$  — длина  $n$ -й щели;  $V_n$  — искомая постоянная, равная напряжению в клеммном сечении  $n$ -й щели, где  $\psi_n = 1$ .

Напряжение в произвольном сечении  $x_n$  соответствующей щели  $u_n = V_n \psi_n(x_n)$ .

Так как число функций  $\mathbf{e}_n$  равно числу щелей, то (25) принимает вид

$$\sum_{n=1}^N V_n Y_{mn} = F_m^i + F_m^e, \quad 1 \leq m \leq N,$$

где, учитывая (26),

$$Y_{mn}^e = \int_{(m)} \psi_m(x_m) H_{x_m}^e \{\mathbf{e}_n\} dx_m, \quad Y_{mn}^i = - \int_{(m)} \psi_m(x_m) H_{x_m}^i \{\mathbf{e}_n\} dx_m, \quad (27)$$

$$F_m^e = - \int_{(m)} \psi_m(x_m) H_{x_m}^{0e} dx_m, \quad F_m^i = \int_{(m)} \psi_m(x_m) H_{x_m}^{0i} dx_m.$$

В (27) интегрирование идет вдоль  $m$ -й щели. Легко видеть, что величины

$Y_{mn}^{e,i}$  имеют размерность проводимостей, а  $F_m^{e,i}$  — МДС и называются соответственно внешними и внутренними. Функции  $\psi_m$  не обязательно должны иметь вид (26), соответствующий резонансным щелям. В общем случае, когда закон распределения напряжений вдоль щелей неизвестен, следует применять общий метод наведенных МДС [6]. Расчет величин (27) зависит от типа волновода и взаимного расположения щелей [10—13].

**Вариационные методы.** В теории антенно-волноводных систем широко применяются вариационные методы [14—16]. При этом используются два подхода. Первый заключается в сведении рассматриваемой задачи к вариационной, т. е. к построению функционала, стационарное значение которого достигается на функции, являющейся решением исходной задачи. Последняя находится одним из прямых методов, чаще всего методом Ритца. Обычно замена исходной задачи вариационной с последующим решением последней с помощью какого-либо прямого метода не дает существенных преимуществ по сравнению с применением прямых методов, например метода Галеркина, непосредственно к исходному уровню. Поскольку при этом не используются до конца возможности, связанные с наличием стационарного функционала, сходимость процессов получается относительно медленной. В теории антенных и фидерных систем обычно интересуются различными параметрами, например такими, как мощность и сопротивление излучения, коэффициент отражения, диаграмма направленности\* и т. п. Все эти параметры являются функционалами тока в антенне или поля в ее раскрыве. Приближенное вычисление тока (или поля) и последующее нахождение по этому току указанных параметров приводит к малой точности или требует учета большого числа членов ряда в выражении для тока.

Гораздо лучший результат дает второй подход. Строится функционал от тока (или поля), удовлетворяющий двум требованиям: 1) он должен достигать стационарного значения на функции, являющейся решением исходного уравнения задачи; 2) стационарное значение должно совпадать с искомым параметром.

Подставляя в такой функционал приближенное значение тока (или поля), можно найти соответствующий параметр со значительно большей точностью. Так, подставляя значение тока в первом приближении, находим параметр с точностью до второго приближения.

Если требуется определять различные параметры антенно-фидерной системы, то необходимо уметь строить различные стационарные функционалы тока, соответствующие (учитывая требования 2) этим параметрам.

Значение плотности тока (или поля) в некоторой фиксированной точке  $x_0$  также можно рассматривать как параметр, являющийся линейным функционалом тока  $K(x)$  на поверхности металла  $s$  или поля  $E(x)$  в раскрыве антенны.

Действительно, плотность тока в точке  $x_0$  можно представить в виде

$$K(x_0) = \int_{(s)} K(x) \delta(x - x_0) ds.$$

Таким образом, указанная вариационная методика позволяет определять плотность тока или поля в любой точке  $x_0$  с большей точностью при подстановке в стационарный функционал их менее точного значения [15].

Рассмотрим параметры, являющиеся линейными функционалами тока или поля и имеющие в общем случае вид

$$\beta = (J, F), \quad (28)$$

где  $(J, F)$  — билинейное скалярное произведение, которое может быть гильбертовым, т. е. удовлетворять условию  $(J, F) = (F, J)^*$  и, в частности, иметь вид

$$(J, F) = \int_{(s)} JF^* ds, \quad (29)$$

или быть псевдоскалярным, удовлетворять условию  $(J, F) = (F, J)$  и иметь, например, вид

$$(J, F) = \int_{(s)} JF ds, \quad (30)$$

\* Диаграмма направленности не зависит от основных переменных, функциями которых является ток на металле или поле в раскрыве, и потому может рассматриваться как параметр.

где  $J$  — плотность тока или поля,  $F$  — некоторая функция, определяющая линейный функционал (параметр).

Запишем исходное уравнение, определяющее  $J$ , в форме

$$GJ = f, \quad (31)$$

где  $G$  — линейный оператор, в общем случае несимметричный;  $f$  — заданная вектор-функция.

Можно построить функционалы, сводящие решение (31) к вариационной задаче, стационарное значение которых совпадает с параметром (28) при любой заданной функции  $F$ . Для этого рассмотрим два уравнения: исходное (31) и вспомогательное [17]

$$G^*I = F, \quad (32)$$

где  $G^*$  — оператор, сопряженный с  $G$ ;  $I$  — новая неизвестная функция.

Тогда

$$\mathcal{L} = (J, F) + (f, I) - (GJ, I) \quad (33)$$

и

$$\mathcal{L} = (J, F) + (f, I) / (GJ, I) \quad (34)$$

— функционалы, стационарные при  $J$  и  $I$ , совпадающие с решениями (31) и (32) соответственно\*. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять вариации этих функционалов и показать, что они равны нулю при  $J$  и  $I$ , являющихся решениями уравнений (31) и (32).

Стационарные значения функционалов (33) и (34)  $\mathcal{L}_{ст} = (J, F)$ , в чем мы убеждаемся, подставив в них  $f$  вместо  $GJ$ .

Все сказанное справедливо независимо от того, пользуемся ли мы определением (29) или (30) для билинейного произведения.

Таким образом, (33) и (34) удовлетворяют требованиям 1) и 2) и дают стационарные выражения для любого параметра, являющегося линейным функционалом тока или поля. Предпочтительнее пользоваться функционалом (34), так как при этом не приходится заботиться о более или менее правильных амплитудах приближенных значений  $J$  и  $I$ , подставляемых в функционал для нахождения искомого параметра.

Найдем стационарное выражение для диаграммы направленности цилиндрического зеркала [17]. Для этого рассмотрим двумерную задачу о возбуждении цилиндрического зеркала произвольного сечения линейным током, первичное поле которого  $E^0 = H_0^{(2)}(kR)\psi(\varphi)$  поляризовано параллельно образующим зеркала, где  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля;  $R, \varphi$  — полярные координаты;  $\psi(\varphi)$  — диаграмма направленности первичного источника. Двусторонняя плотность тока  $K$ , возбуждаемого на зеркале, удовлетворяет уравнению

$$GK = f \text{ на } l, \quad (35)$$

где  $G = \frac{\omega\mu}{4} \int_{(l)} dl H_0^{(2)}(kr)$ ;  $f = E^0$ ; интегрирование идет по контуру  $l$  сечения зер-

кала;  $r$  — расстояние между точками интегрирования и наблюдения, лежащими на  $l$ .

Используя билинейное произведение типа (30), где вместо  $s$  интегрирование идет по контуру зеркала  $l$ , легко убедиться, что оператор  $G$  при этом симметричен ( $G^* = G$ ).

Поэтому (32) принимает вид

$$GI = F. \quad (36)$$

Как известно, диаграмма направленности зеркала, создаваемая током  $K$ , имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \int_{(l)} K e^{ikR} dl, \quad (37)$$

где  $R$  — радиус-вектор точки интегрирования,  $k$  — волновой вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения (оба они лежат в плоскости сечения зеркала).

Учитывая (37), полагаем  $F = e^{ikR}$ .

\* В [17] эти функционалы записаны в несколько ином виде для определения (29).

Диаграмму направленности  $\Phi(\varphi)$  следует вычислять, пользуясь функционалом (34), который принимает вид

$$\mathcal{L} = (K, F)(f, I) / (GK, I). \quad (38)$$

Действительно, заменяя  $GK$  на  $f$  (см. (35)), получаем значение функционала (38), совпадающее с искомой диаграммой направленности (37). Последнюю надо вычислять по (38), подставляя в качестве  $K$  и  $I$  приближенные решения уравнений (35) и (36). При этом мы получим значительно большую точность, чем при подстановке приближенного значения  $K$  непосредственно в (37). В приближении Кирхгофа  $K$  и  $I$  равны удвоенному значению касательных (к зеркалу) составляющих магнитных векторов первичных волн  $E^0$  и  $F$  соответственно, т. е.

$$K \simeq \frac{2}{\rho} E^0 \sin(\mathbf{R}, \widehat{\tau}), \quad I \simeq \frac{2}{\rho} F \sin(-\mathbf{k}, \widehat{\tau}), \quad \text{где } \rho = \sqrt{\mu/\epsilon}, \quad \widehat{\tau} \text{ — вектор, касательный к}$$

$l$  в точке наблюдения. Эти значения  $K$  и  $I$  следует подставлять в (38).

## Литература

1. Фельд Я. Н. — Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, № 12.
2. Пистолькорс А. А. — Т и Тбп, 1928, № 48, № 50; 1929, № 52.
3. Татаринов В. В. — Вестник электротехники, 1931, № 1.
4. Татаринов В. В. — ТР и СТ, 1932, № 2; 1933, № 2.
5. Татаринов В. В. Коротковолновые направленные антенны. — М.: Связьтехиздат, 1936.
6. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенно-фидерные устройства. Ч. 2. — М.: ВВИА им. Жуковского, 1959.
7. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. 1. — М.: ВВИА им. Жуковского, 1955.
8. Фельд Я. Н. — ЖТФ, 1948, № 18.
9. Фельд Я. Н. — Радиотехника, 1946, т. 2, № 6.
10. Бененсон Л. С. — ЖТФ, 1952, № 4.
11. Фельд Я. Н. — Радиотехника, 1947, т. 3, № 5.
12. Левин М. Л. — ЖТФ, 1948, № 4; 1951, № 4.
13. Левин М. Л. — ИАН СССР. Сер. Физическая, 1948, № 3.
14. Левин М. Л. Современная теория волноводов. — М.: ИЛ, 1954.
15. Вайнштейн А. А. — ЖТФ, 1961, № 1.
16. Borgnis F., Papas S. Randwertprobleme der Mikrowellenphysik. — Springer — Verlag, 1955.
17. Фельд Я. Н. — Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 1.

Поступила 4 мая 1989 г.



## РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Журнал основан  
в январе 1956 г.

Выходит 12 раз  
в год

Том 35

Май 1990

Вып.5

МОСКВА

"НАУКА"

*Электродинамика, излучение и распространение радиоволн*

УДК 537.874.6.01

© 1990 г.

Я.Н. Фельд

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ДИФРАКЦИЯ ВОЛН У ПОВЕРХНОСТЕЙ  
С ПЕРЕМЕННЫМ АДМИТАНСОМ**

Рассмотрена задача дифракции электромагнитных волн на криволинейных поверхностях с кусочно-непрерывными адмитансными (импедансными) краевыми условиями, в частности на незамкнутых металлических поверхностях. Показано, что коэффициенты типа Фурье по некоторой полной системе функций и соответствующий ряд для функции, равной тангенциальной составляющей  $\vec{E}_t$  электрического вектора на части поверхности, где адмитанс конечен, и электрическому поверхностному току на остальной части, где он бесконечен, могут быть найдены в результате решения внутренней и внешней краевых задач. При этом каждый член указанного ряда удовлетворяет условиям Майкснера, а найденные значения  $\vec{E}_t$  на рассматриваемой поверхности позволяют определить рассеянное поле во всем пространстве. Метод проиллюстрирован на примере дифракции плоской волны на круговом цилиндре с периодически меняющимся вдоль оси ступенчатым адмитансом.

В статьях [1, 2] разработан метод возбуждения волноводов, резонаторов, экзозвибраторов, сводящийся к решению семейства краевых задач электродинамики. В данной работе проведена модификация этого метода, позволяющая находить электромагнитное поле заданных токов  $\vec{j}^{\text{ст}}$  в присутствии поверхности  $s_0$ , на которой выполняются краевые условия

$$(1) \quad \begin{cases} [\vec{n}^+(\vec{E}^+ - \vec{E}^-)] = 0 \text{ на } s_0; [\vec{n}^+(\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] \times Y\vec{E}_t \text{ на } \Sigma; \\ \vec{E}_t = 0 \text{ на } s. \end{cases}$$

Здесь  $\Sigma + s = s_0$  — поверхность, разделяющая пространство на две области: внешнюю  $v^+$  и внутреннюю  $v^-$ ; индексами "+" и "-" обозначены предельные значения полного поля  $E, H$  задачи при стремлении к  $s_0$  со стороны  $v^+$  и  $v^-$  соответственно;

$\vec{n}^+$  – нормаль к  $s_0$ , направленная в сторону  $v^+$ ;  $Y$  – адмитанс (кусочно-непрерывная функция на  $\Sigma$ ),  $\text{Re } Y \geq 0$  и, следовательно, задача имеет единственное решение, на  $s$  очевидно, что  $Y = \infty$ .

Введем на  $s_0$  семейство функций  $\{\vec{F}_n\}$ , касательных к  $s_0$ , и рассмотрим внешнюю и внутреннюю краевые задачи определения поля  $\vec{E}_n^e, \vec{H}_n^e$  в области  $v^+$  и поля  $\vec{E}_n^i, \vec{H}_n^i$  в области  $v^-$  по заданным на  $s_0$  тангенциальным составляющим векторов

$$(2) \quad \vec{E}_{nt}^e = \vec{F}_n \text{ на } s_0; \quad \vec{E}_{nt}^i = \vec{F}_n \text{ на } s_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Общие методы решения подобных задач даны в [2, 3].

Применим к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}_n^e, \vec{H}_n^e$  в области  $v^+$  и к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}_n^i, \vec{H}_n^i$  в области  $v^-$  лемму Лоренца. При этом получим

$$\int_{(s_0)} \{[\vec{E}\vec{H}_n^e] - [\vec{E}_n^e\vec{H}^+]\} \vec{ds} = - \int_{(v_0)} \vec{j}^{\text{ст}} \vec{E}_n^e dv,$$

$$\int_{(s_0)} \{[\vec{E}\vec{H}_n^i] - [\vec{E}_n^i\vec{H}^-]\} \vec{ds} = 0.$$

Здесь  $\vec{ds} = \vec{n}^+ ds$ , а объем  $v_0$ , где распределены  $\vec{j}^{\text{ст}}$ , предполагаем находящимся в области  $v^+$ .

Вычитая из первого равенства второе и учитывая условия (1) и (2), найдем

$$(3) \quad \int_{(\Sigma)} (\vec{K}_n - Y\vec{F}_n) \vec{E} ds - \int_{(s)} \vec{F}_n \vec{K} ds = \int_{(v_0)} \vec{j}^{\text{ст}} \vec{E}_n^e dv.$$

Здесь  $\vec{K}_n = [\vec{n}^+ (\vec{H}_n^e - \vec{H}_n^i)]$  – поверхностный ток, возбуждающий поля  $\vec{E}_n^e, \vec{H}_n^e$  и  $\vec{E}_n^i, \vec{H}_n^i$ , а  $\vec{K} = [\vec{n}^+ (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)]$  – поверхностный ток, индуцированный полем  $\vec{E}, \vec{H}$  на  $s$ . Вводя обозначения  $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,

$$(4) \quad \vec{I} = \begin{cases} \rho_0^{-1} \vec{E}_t & \text{на } \Sigma, \\ \vec{K} & \text{на } s, \end{cases} \quad \vec{\Phi}_n = \begin{cases} \rho_0 (\vec{K}_n - Y\vec{F}_n) & \text{на } \Sigma, \\ -\vec{F}_n & \text{на } s, \end{cases}$$

придадим равенству (3) следующий вид:

$$(5) \quad \int_{(s_0)} \vec{I} \vec{\Phi}_n ds = \int_{(v_0)} \vec{j}^{\text{ст}} \vec{E}_n^e dv, \quad n = 1, 2, \dots$$

В этих равенствах  $\vec{I}$  – искомый вектор, а остальные величины известны. Отметим, что если поверхность  $\Sigma$  (или ее часть) чисто геометрическая, то на ней следует полагать  $Y = 0$ .

Введем прежде всего гильбертово пространство  $L_R^2(s_0)$ , которому должен принадлежать вектор  $\vec{I}$ . Скалярное произведение в нем определим формулой

$$(6) \quad (\vec{A}, \vec{B}) = \int_{(s_0)} \widehat{ARB} ds,$$

где  $\vec{A}, \vec{B}$  – элементы  $L_R^2(s_0)$ , т.е. векторы, заданные на  $s_0$  и касательные к ней; черта – знак комплексного сопряжения;  $\hat{R}$  – матрица,

$$(7) \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{11} > 0, \quad R_{22} > 0,$$

элементы которой выбираем в зависимости от поведения  $\vec{I}$  на линиях поверхности  $s_0$ , где адмитанс  $Y$  разрывен. В частном случае, когда функция  $Y$  непрерывна на  $\Sigma$  и разрывна только на контуре  $\mathcal{L}$ , разделяющем  $\Sigma$  и  $s$ , элементы  $R$  в ортогональной системе координат  $x_1, x_2$  следует выбирать так, чтобы при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  они вели себя как  $R_{11} = O(\rho^{-1/2})$ ,  $R_{22} = O(\rho^{1/2})$ , а со

стороны  $\Sigma$  — как  $R_{11} = O(1)$ ,  $R_{22} = O(\rho^{-1/2})$ ,  $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ , при этом **790** одна из координатных линий  $x_1 = \text{const}$  совпадает с  $\mathcal{L}$  [3]. При таком выборе  $\hat{R}$  любой элемент  $L_R^2(s_0)$  будет удовлетворять условиям типа Майкснера для  $K$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  и для  $\vec{E}_t$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $\Sigma$ . Обозначение (6) позволяет записать (5) в виде

$$(8) \quad (\vec{I}, \hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n) = b_n; \quad b_n \equiv \int_{(v_0)} \vec{j}^{\text{ct}} \vec{E}_n^e dv, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\hat{R}^{-1}$  — матрица, обратная  $\hat{R}$  ( $\hat{R}^{-1} \hat{R} = 1$ ). Семейство  $\{\hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n\}$  линейно независимо и полно в  $L_R^2(s_0)$ , если множество  $\{\vec{F}_n\}$  задано на  $s_0$  так, что соответствующие ему токи  $\{K_n\}$  линейно независимы и их линейные комбинации всюду плотны в пространстве Соболева  $H^2(s_0)$  по норме  $H^2(s_0)$ . Это почти<sup>1</sup> всегда имеет место, если семейство  $\{\vec{F}_n\}$  выбрано линейно независимым и всюду плотным в  $H^1(s_0)$ . Доказательство аналогично приведенному в [3].

Полнота и линейная независимость  $\{\hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n\}$  позволяют использовать (8) для нахождения  $\vec{I}$ . Для этого пронормируем семейство  $\{\hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n\}$  на единицу и введем обозначения

$$(9) \quad \vec{A}_n = \frac{\hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n}{\|\hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n\|}, \quad a_n = \frac{b_n}{\|\hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n\|}.$$

Тогда от равенства (8) можно перейти к следующим:

$$(10) \quad (\vec{I}, \vec{A}_n) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предварительная нормировка (9) делает более устойчивыми процесс ортогонализации, используемый для решения (10), а также методы, применяемые для решения системы линейных алгебраических уравнений, к которым также можно свести (10) [3].

Найдя  $\vec{I}$ , определим вторичное рассеянное поле как поле, возбуждаемое поверхностным током с плотностью (см. (1))

$$(11) \quad \vec{K}_{\text{эк}} = \begin{cases} Y \vec{E}_t & \text{на } \Sigma, \\ \vec{K} & \text{на } s, \end{cases}$$

распределенным в свободном пространстве.

Метод, развитый в данной работе, отличается от предложенного в [3, 4] тем, что здесь задаем тангенциальные составляющие электрических векторов  $\{\vec{F}_n\}$  вспомогательных полей на  $s_0$  и, решая затем внешнюю и внутреннюю краевые задачи, находим  $\{\vec{\Phi}_n\}$ . В работах [3, 4] заданы вспомогательные токи  $\{\vec{K}_n\}$  на  $s_0$  и по этим токам в результате интегрирования по  $s_0$  найдены вектор Герца, а затем вспомогательные поля и семейство  $\{\Phi_n\}$ . Выбор метода зависит от рассматриваемой задачи.

В ряде случаев равенства (3) — (5) удобно преобразовать к иному виду.

Так, если ввести рассеянное поле  $\vec{E}^r$  и первичное поле  $\vec{E}^0$ , то полное поле

$$(12) \quad \vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^r \quad \text{во всем пространстве.}$$

Используя очевидное равенство

$$\int_{(v_0)} \vec{j}^{\text{ct}} \vec{E}_n^e dv = \int_{(s_0)} \vec{E}^0 \vec{K}_n dv,$$

<sup>1</sup>Исключение составляют случаи "резонансных" частот  $\omega$ .

а также соотношение (12), несложно преобразовать (3) к виду

$$(3a) \quad \int_{(\Sigma)} \vec{E}^r (\vec{K}_n - Y \vec{F}_n) ds - \int_{(s)} \vec{K} \vec{F}_n ds = \int_{(\Sigma)} Y \vec{E}^0 \vec{F}_n ds + \int_{(s)} \vec{E}^0 \vec{K}_n ds.$$

Вводя обозначения

$$(4a) \quad \vec{I}^r = \begin{cases} \rho_0^{-1} \vec{E}_t^r & \text{на } \Sigma, \\ \vec{K} & \text{на } s, \end{cases} \quad d_n = \int_{(\Sigma)} Y \vec{E}^0 \vec{F}_n ds + \int_{(s)} \vec{E}^0 \vec{K}_n ds,$$

запишем (3a) следующим образом:

$$(5a) \quad \int_{(s_0)} \vec{I}^r \vec{\Phi}_n ds = d_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

или, используя (6),

$$(13) \quad (\vec{I}^r, \hat{R}^{-1} \vec{\Phi}_n) = d_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В последнем случае  $\hat{R}$  следует выбирать так, чтобы  $R_{11} = O(\rho^{-1/2})$ ,  $R_{22} = O(\rho^{1/2})$  при приближении к  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$ ,  $R_{11} = O(1)$ ,  $R_{22} = O(1)$  – со стороны  $\Sigma$  [3]. Примером, когда запись (5a) предпочтительнее, является задача о падении плоской волны на бесконечную вдоль оси  $z$  периодическую плоскую или цилиндрическую структуру. В этом случае вследствие теоремы Флоке искомое поле  $\vec{E}^r$ ,  $\vec{H}^r$ , ток  $\vec{K}$  и первичное поле  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$  зависят от координаты оси структуры  $z$  следующим образом:

$$(14) \quad \psi(z) e^{-ikz \cos \alpha}$$

Здесь  $\psi(z)$  – периодическая функция с периодом структуры  $D$ ,  $\alpha$  – угол между направлением падения волны и осью  $z$ .

Если задать семейство функций  $\{\vec{F}_n\}$  так, чтобы каждая из них зависела от  $z$  как

$$(15) \quad F(z) e^{ikz \cos \alpha},$$

где  $F(z)$  – периодическая функция с периодом  $D$ , то вспомогательные поля  $\vec{E}_n^e$ ,  $\vec{H}_n^e$  и  $\vec{E}_n^i$ ,  $\vec{H}_n^i$ , а также токи  $\vec{K}_n$  будут иметь аналогичную зависимость от  $z$ .

Применим лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^r$ ,  $\vec{H}^r$  и  $\vec{E}_n^e$ ,  $\vec{H}_n^e$  в области, расположенной с внешней<sup>2</sup> стороны структуры и ограниченной поверхностью одного периода структуры и двумя плоскостями  $z = 0$  и  $z = D$ , а также к полям  $\vec{E}^r$ ,  $\vec{H}^r$  и  $\vec{E}_n^i$ ,  $\vec{H}_n^i$  в области, расположенной с внутренней<sup>3</sup> стороны структуры и ограниченной теми же поверхностями. Повторяя выкладки, аналогичные приведенным выше, придем к соотношениям (3a), (5a), (13), в которых под  $s_0$  подразумевается поверхность одного периода структуры, под  $\Sigma$  – часть этого периода, где  $Y < \infty$ , а под  $s$  – часть, где  $Y = \infty$ , так как интегралы по плоскостям  $z = 0$  и  $z = D$  взаимно сокращаются.

*Пример. Круговой цилиндр с периодически меняющимся ступенчатым адмитансом.* Рассмотрим круговой цилиндр радиусом  $R_0$ , вдоль поверхности которого в пределах периода  $D$  адмитанс  $Y$  меняется по следующему закону:

$$(16) \quad Y = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 < z < l \text{ (s)}, \\ i \frac{k}{\rho_0} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) d & \text{при } l < z < D(\Sigma). \end{cases}$$

Здесь  $d$  – толщина, а  $\epsilon$  – проницаемость диэлектрического слоя, из которого со-

<sup>2</sup> В верхнем полупространстве в случае плоской структуры.

<sup>3</sup> В нижнем полупространстве в случае плоской структуры.

стоит часть цилиндра, имитируемого поверхностью с указанным адмитансом;  $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Для справедливости нижнего равенства (16) необходимо выполнение неравенства  $\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}d \ll 1$ . Пусть на этот цилиндр падает первичная плоская волна  $\vec{E}^0 \vec{H}^0$ , у которой

$$(17) \quad E^0 = E_y^0 = e^{-ik\vec{r}}; \quad \vec{k}\vec{r} = kz \cos \alpha + kR \sin \alpha \cos \varphi,$$

где угол  $\varphi$  (цилиндрической системы координат  $R, \varphi, z$ ) отсчитывается от оси  $x$ , а вектор  $\vec{k}$  лежит в плоскости  $x - z$  под углом  $\alpha$  к оси цилиндра  $z$ . Касательные к поверхности цилиндра составляющие  $\vec{E}^0$  равны (см. (17))

$$(17a) \quad E_z^0 = 0, \quad E_\varphi^0 = \cos \varphi e^{-ik\vec{r}}.$$

Учитывая вид этих составляющих и осевую симметрию геометрии задачи, введем на поверхности цилиндра  $R = R_0$  семейство функций

$$(18) \quad \vec{F}_n^m = \begin{cases} (h_{(n+1)/2} \vec{i}_\varphi m \cos m\varphi - iR_0 \gamma_{(n+1)/2}^2 \vec{i}_z \times \\ \times \sin m\varphi) e^{ih_{(n+1)/2} z}, & n = \pm 1, \pm 3, \dots, \\ \gamma_{n/2} \vec{i}_\varphi \cos m\varphi e^{ih_{n/2} z}, & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \end{cases}$$

где

$$h_n = k \cos \alpha + 2\pi n/D; \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}, \quad \text{Re } \gamma_n \geq 0, \\ \text{Im } \gamma_n \leq 0; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Определив при помощи условий (2) магнитные векторы вспомогательных полей, найдем соответствующие им токи на  $s_0 (= s + \Sigma)$ :

$$(19) \quad \vec{K}_n^m = \begin{cases} \alpha_{(n+1)/2}^m \sin m\varphi e^{ih_{(n+1)/2} z} \vec{i}_z, & n = \pm 1, \pm 3, \dots, \\ \left( \vec{i}_\varphi \cos m\varphi + \vec{i}_z \frac{imh_{n/2}}{R_0 \gamma_{n/2}^2} \sin m\varphi \right) \beta_{n/2}^m e^{ih_{n/2} z}, & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \end{cases}$$

где

$$(19a) \quad \alpha_n^m = \frac{2i\omega\epsilon_0}{\pi J_m(\gamma_n R_0) H_m^{(2)}(\gamma_n R_0)}, \\ \beta_n^m = - \frac{2\gamma_n}{\pi R_0 \omega \mu_0 J'_m(\gamma_n R_0) H_m^{(2)'}(\gamma_n R_0)}.$$

В формулах (18), (19) верхней строке соответствуют поля и токи электрического типа, а нижней — магнитного (см. (2)),  $\vec{i}_z, \vec{i}_\varphi$  — соответствующие единичные орты.

Используя обозначения (4), (4a) и формулы (18), (19), можно записать

$$(20a) \quad \vec{\Phi}_n^m = \begin{cases} (-\vec{i}_\varphi h_{(n+1)/2} m \cos m\varphi + iR_0 \gamma_{(n+1)/2}^2 \vec{i}_z \sin m\varphi) e^{ih_{(n+1)/2} z}, \\ \text{на } s \quad (0 < z < l), \\ \{(\alpha_{(n+1)/2}^m - iYR_0 \gamma_{(n+1)/2}^2) \vec{i}_z \sin m\varphi - \\ - Ym h_{(n+1)/2} \vec{i}_\varphi \cos m\varphi\} \rho_0 e^{ih_{(n+1)/2} z}, \\ \text{на } \Sigma \quad (l < z < D); \\ n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

$$(206) \quad \vec{\Phi}_n^m = \begin{cases} -\vec{i}_\varphi \gamma_{n/2} \cos m\varphi e^{ih_{n/2}z} & \text{на } s \quad (0 < z < l), \\ \left\{ (\beta_{n/2}^m - Y\gamma_{n/2}) \vec{i}_\varphi \cos m\varphi + \frac{imh_{n/2}\beta_{n/2}^m}{R_0\gamma_{n/2}^2} \vec{i}_z \sin m\varphi \right\} \rho_0 e^{ih_{n/2}z} & \\ \text{на } \Sigma \quad (l < z < D), \end{cases}$$

$$n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots,$$

$$(21a) \quad d_n^m = mR_0DYh_{(n+1)/2} 2J'_m(kR_0 \sin \alpha) \frac{1 - e^{i\pi(n+1)l/D}}{(n+1)i^m}$$

при  $n = +1, \pm 3, \pm 5, \dots,$

$$d_{-1}^m = \frac{h_0 2Ym\pi R_0}{i^{m-1}} (D-l)J'_m(kR_0 \sin \alpha),$$

$$(216) \quad d_n^m = 2R_0DJ'_m(kR_0 \sin \alpha) \frac{(\gamma_{n/2}Y - \beta_{n/2}^m)(1 - e^{i\pi nl/D})}{ni^m}$$

при  $n = \pm 2, \pm 4, \dots,$

$$d_0^m = \frac{2\pi R_0 J'_m(kR_0 \sin \alpha)}{i^{m-1}} (\gamma_0 Y [D-l] + \beta_0^m l).$$

Учитывая четность (т.е. зависимость от  $\varphi$ ) компонент  $\vec{E}_t^r$  и  $\vec{K}$ , запишем

$$(22) \quad \vec{I}^r = \sum_{q=0}^{\infty} \{ I_\varphi^q(z) \cos(q\varphi) \vec{i}_\varphi + I_z^q(z) \sin(q\varphi) \vec{i}_z \}.$$

Здесь  $I_\varphi^q, I_z^q$  — неизвестные величины, зависящие от  $z$ .

Подставляя (22) в (5a) и учитывая выражение для  $\vec{\Phi}_n^m$  (см. (20)), найдем

$$(23) \quad \int_0^D \vec{I}^m(z) \vec{T}_n^m(z) dz = \frac{d_n^m}{\epsilon_m \pi R_0}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 1, 2, \dots, \\ 2 & \text{при } m = 0, \end{cases}$$

где

$$\vec{I}^m(z) = I_\varphi^m(z) \vec{i}_\varphi + I_z^m(z) \vec{i}_z, \quad 0 < z < D,$$

$$\vec{T}_n^m(z) = T_{n\varphi}^m \vec{i}_\varphi + T_{nz}^m \vec{i}_z, \quad 0 < z < D,$$

$$(24a) \quad T_{n\varphi}^m(z) = \begin{cases} -mY\rho_0 h_{(n+1)/2} e^{ih_{(n+1)/2}z}, & l < z < D, \\ -mh_{(n+1)/2} e^{ih_{(n+1)/2}z}, & 0 < z < l, \end{cases} \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots,$$

$$(246) \quad T_{nz}^m(z) = \begin{cases} \rho_0(\alpha_{(n+1)/2}^m - iR_0Y\gamma_{(n+1)/2}^2) e^{ih_{(n+1)/2}z}, & l < z < D, \\ iR_0\gamma_{(n+1)/2}^2 e^{ih_{(n+1)/2}z}, & 0 < z < l, \end{cases} \quad n = \pm 1$$

$$(25a) \quad T_{n\varphi}^m(z) = \begin{cases} \rho_0(\beta_{n/2}^m - Y\gamma_{n/2}) e^{ih_{n/2}z}, & l < z < D, \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ -e^{ih_{n/2}z} \gamma_{n/2}, & 0 < z < l, \end{cases}$$

$$(256) \quad T_{nz}^m(z) = \begin{cases} \frac{im\rho_0 h_{n/2} \beta_{n/2}^m}{R_0\gamma_{n/2}^2} e^{ih_{n/2}z}, & l < z < D, \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0, & 0 < z < l, \end{cases}$$

В рассматриваемом примере произведение (6), очевидно, следует записать **794** в виде

$$(26) \quad (\vec{A}, \vec{B}) = \int_0^D \vec{A} \hat{R} \vec{B} dz,$$

где элементы матрицы  $\hat{R}$  определяются формулами

$$(26a) \quad R_{11}^{-1} = R_{22} = \sqrt{\frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)} \quad \text{при } 0 < z < l;$$

$$R_{11} = R_{22} = 1 \quad \text{при } l < z < D.$$

При этом  $x_1 = z$ , а  $x_2 = \varphi$ .

Равенства (23) в этом случае можно записать следующим образом:

$$(27) \quad (\vec{I}^m, \hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m) = \frac{d_n^m}{\epsilon_m \pi R_0}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пронормируем полученную систему. Для этого найдем норму  $\hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m$ :

$$\|\hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m\| = \left( \int_0^D \hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m \vec{T}_n^m dz \right)^{1/2} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\pi l \left\{ m^2 h_{(n+1)/2}^2 + \frac{R_0^2}{8} |\gamma_{(n+1)/2}|^4 \right\} + \rho_0^2 (D-l) \left\{ m^2 |h_{(n+1)/2} Y|^2 + \right.} \\ \left. + |\alpha_{(n+1)/2}^m - i Y R_0 \gamma_{(n+1)/2}^2|^2 \right\}, & n = \pm 1, \pm 3, \dots, \\ \sqrt{\pi l |\gamma_{n/2}|^2 + \rho_0^2 (D-l) \left\{ \left| \beta_{n/2}^m - Y \gamma_{n/2} \right|^2 + \frac{m^2 h_{n/2}^2 |\beta_{n/2}^m|^2}{R_0^2 |\gamma_{n/2}|^4} \right\}}, & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

Поделив (27) на эту норму, получим

$$(28) \quad (\vec{I}^m, \vec{A}_n^m) = a_n^m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$(28a) \quad \vec{A}_n^m = \frac{\hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m}{\|\hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m\|}, \quad a_n^m = \frac{d_n^m}{\epsilon_m \pi R_0 \|\hat{R}^{-1} \vec{T}_n^m\|}.$$

При дальнейшем рассмотрении удобнее перейти в (28) от нумерации по индексу  $n$  к нумерации по индексу  $\nu$ , пробегающему только неотрицательные целые значения и связанному с  $n$  соотношением

$$(29) \quad n = (-1)^\nu \frac{\nu + 1 - \delta_{1g}}{2},$$

где  $g = (-1)^\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Полагая, что в формулах (21)–(32) число  $n$  связано с  $\nu$  соотношением (29), перейдем от семейства  $\{\vec{A}_n^m\}$  к

$$(30) \quad \vec{U}_p^m = \sum_{\nu=0}^P b_\nu^{mp} \vec{A}_n^m, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Постоянные  $b_\nu^{mp}$  определяем из условий

$$(30a) \quad (\vec{U}_p^m, \vec{U}_\mu^m) = \delta_{p\mu}.$$

Будем искать  $\vec{I}^m$  в виде ряда:

$$(31) \quad \vec{I}^m = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^m \vec{U}_p^m.$$

Подставляя его в (28) и учитывая соотношения (30) и (30а), найдем

$$(32) \quad C_p^m = \sum_{\nu=0}^p a_n^m \overline{b_\nu^{mp}}.$$

Зная  $\vec{I}^m(z)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), найдем  $\vec{I}^r$  по формуле (22).

Определим рассеянное поле во внешнем пространстве  $R > R_0$ . Учитывая (4а) и (22), запишем векторы Герца в следующем виде:

$$(33) \quad \begin{cases} \Pi = \Pi_z = \sum_{q,n} B_{qn} e^{-ih_n z} H_q^{(2)}(\gamma_n R) \sin q\varphi, \\ \Pi^\mu = \Pi_z^\mu = \sum_{q,n} D_{qn} e^{-ih_n z} H_q^{(2)}(\gamma_n R) \cos q\varphi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$(34) \quad \begin{cases} E_\varphi^r = \sum_{q,n} \left\{ -\frac{ih_n q}{R} B_{qn} H_q^{(2)}(\gamma_n R) + \right. \\ \left. + i\omega\mu_0\gamma_n D_{qn} H_q^{(2)'}(\gamma_n R) \right\} e^{-ih_n z} \cos q\varphi, \\ E_z^r = \sum_{q,n} \gamma_n^2 B_{qn} e^{-ih_n z} H_q^{(2)}(\gamma_n R) \sin q\varphi. \end{cases}$$

Краевые условия на цилиндре  $R = R_0$  следующие (см. (22) и (17)):

$$E_\varphi^r = \begin{cases} \rho_0 \sum_{q=0}^{\infty} I_\varphi^q(z) \cos q\varphi, & l < z < D, \\ -\cos\varphi e^{-ik\vec{r}}|_{R=R_0}, & 0 < z < l, \end{cases}$$

$$E_z^r = \begin{cases} \rho_0 \sum_{q=0}^{\infty} I_z^q(z) \sin q\varphi, & l < z < D, \\ 0, & 0 < z < l. \end{cases}$$

Умножая эти равенства: первое на  $\cos m\varphi$ , а второе на  $\sin m\varphi$  и интегрируя по  $d\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , найдем

$$\begin{aligned} & \sum_n \left\{ -\frac{imh_n}{R_0} B_{mn} H_m^{(2)}(\gamma_n R_0) + i\omega\mu_0\gamma_n D_{mn} H_m^{(2)'}(\gamma_n R_0) \right\} e^{-i2\pi n z/D} = \\ & = \begin{cases} \rho_0 I_\varphi^m(z) e^{ikz \cos \alpha}, & l < z < D, \\ \beta_m / \epsilon_m, & 0 < z < l, \end{cases} \\ & \sum_n \gamma_n^2 B_{mn} H_m^{(2)}(\gamma_n R_0) e^{-i2\pi n z/D} = \\ & = \begin{cases} \rho_0 I_z^m(z) e^{ikz \cos \alpha}, & l < z < D, \\ 0, & 0 < z < l. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь

$$\beta_m = -\frac{2}{i^{m-1}} J_m'(kR_0 \sin \alpha)$$

и учтено выражение для  $h_n$ .



Из этих рядов Фурье немедленно следует<sup>4</sup>

$$(35) \quad -\frac{imh_n}{R_0} B_{mn} H_m^{(2)}(\gamma_n R_0) + i\omega\mu_0\gamma_n D_{mn} H_m^{(2)'}(\gamma_n R_0) = \\ = \rho_0/D \int_0^D I_\varphi^m(z) e^{ihnz} dz + \frac{i\beta_m}{2\pi n\epsilon_m} (1 - e^{i2\pi nl/D}),$$

$$(36) \quad \gamma_n B_{mn} H_m^{(2)}(\gamma_n R_0) = \frac{\rho_0}{D} \int_0^D I_z^m(z) e^{ihnz} dz.$$

Из полученных уравнений элементарно могут быть найдены  $B_{mn}$  и  $D_{mn}$ , а следовательно, и векторы Герца (33) для  $R > R_0$ . Таким образом, поле снаружи определено.

Поле внутри цилиндра  $R < R_0$  находится аналогично, но с тем лишь отличием, что функции Ганкеля  $H_q^{(2)}$  в (33) заменяются функциями Бесселя  $J_q$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. № 3. С. 199.
2. Фельд Я.Н. // ЖТФ. 1947. Т. 17. № 12. С. 1471.
3. Фельд Я.Н. // РЭ. 1979. Т. 24. № 3. С. 456.
4. Фельд Я.Н. // РЭ. 1983. Т. 28. № 4. С. 642.

Поступила в редакцию  
28.09.1989

Я.Н. Фельд

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗЕРКАЛЬНЫМИ АНТЕННАМИ

Рассмотрено рассеяние плоской волны зеркальными антеннами с вибраторными облучателями. Найдены коэффициенты Фурье векторной функции, равной плотности поверхностного тока на металле зеркала и касательной составляющей электрического вектора на геометрической поверхности, дополняющей поверхность зеркала до замкнутой, по некоторой полной системе функций. При помощи этих коэффициентов построен ряд для указанной вектор-функции, сходящийся по норме пространства  $L^2_R(s_0)$ , каждый член которого удовлетворяет соответствующим условиям Мейкснера на краю зеркала. По найденному току на зеркале определены (по известным формулам) рассеянное поле и дифференциальный поперечник рассеяния зеркальной антенны.

Рассмотрим зеркальную антенну в виде усеченного параболоида вращения, в фокусе которого перпендикулярно оси расположен линейный вибратор  $l$  с подключенным к его клеммам сопротивлением  $z$ . Зеркало будем считать идеально проводящим и бесконечно тонким. Его поверхность обозначим буквой  $s$ , а контур, на который она опирается, – буквой  $\mathcal{L}$ . Пусть на зеркало падает первичная волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ . Обозначим двухстороннюю поверхностную плотность тока, индуцированного волной  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  на зеркале, буквой  $\vec{K}$ , а полный ток, протекающий при этом вдоль вибратора  $l$ , – буквой  $J$ . Полное поле задачи равно

$$\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^r, \quad \vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^r,$$

где  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  – поле, рассеянное антенной.

Дополним поверхность зеркала  $s$  до замкнутой некоторой геометрической поверхностью  $\Sigma$  и введем обозначение  $s_0 = s + \Sigma$ . На поверхности  $s_0$  должны выполняться условия

$$(1) \quad \begin{cases} [\vec{n}^+(\vec{E}^+ - \vec{E}^-)] = 0 & \text{на } s_0; [\vec{n}^+(\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] = 0 & \text{на } \Sigma, \\ \vec{E}_t = 0 & \text{на } s; [\vec{n}^+(\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] = \vec{K} & \text{на } s. \end{cases}$$

Индексами "+" и "-" обозначены предельные значения величин при стремлении к  $s_0$  со стороны, куда направлена внешняя нормаль  $\vec{n}^+$ , и с противоположной соответственно. У непрерывных при переходе через  $s_0$  величин эти индексы не поставлены. Индексом  $t$  отмечены касательные к  $s_0$  составляющие.

Зададим на поверхности  $s_0$  семейство вспомогательных токов с поверхностной плотностью  $\{\vec{K}_m\}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). О выборе этих токов подробнее сказано ниже. Поле, создаваемое током  $\vec{K}_m$  (в свободном пространстве), обозначим буквами  $\vec{E}^m, \vec{H}^m$ . Применяв лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  и  $\vec{E}^m, \vec{H}^m$ , найдем

$$(2) \quad \int_{(s_0)} \{[\vec{E}^r(\vec{H}^{m+} - \vec{H}^{m-})] - [\vec{E}^m(\vec{H}^{r+} - \vec{H}^{r-})]\} \vec{ds} = - \int_{(l)} J \vec{E}^m d\vec{l}.$$

Здесь  $\vec{ds} = \vec{n}^+ ds$  и интегрирование в правой части проводится вдоль вибратора  $l$ .

Учитывая условия (1), непрерывность первичного поля  $E^0, H^0$  при переходе через  $s_0$  и известное соотношение

$$(3) \quad \vec{K}_m = [\vec{n}^+(\vec{H}^{m+} - \vec{H}^{m-})] \text{ на } s_0,$$

перепишем (2) следующим образом:

$$(4) \quad \int_{(s)} \vec{E}^m \vec{K} ds - \int_{(\Sigma)} \vec{E}^r \vec{K}_m ds = - \int_{(l)} J \vec{E}^m d\vec{l} - \int_{(s)} \vec{E}^0 \vec{K}_m ds.$$

При этом учли соотношение

$$\vec{E}_t^r = -\vec{E}_t^0 \quad \text{на } s.$$

Вводя обозначения<sup>1</sup>

$$(5) \quad \vec{I} = \begin{cases} \vec{K} & \text{на } s, \\ \frac{1}{\rho_0} \vec{E}_t^r & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad \vec{F}_m^* = \begin{cases} \vec{E}_t^m & \text{на } s, \\ -\rho_0 \vec{K}_m & \text{на } \Sigma, \end{cases}$$

$$(6) \quad a_m = - \int_{(l)} J \vec{E}^m d\vec{l} - \int_{(s)} \vec{E}^0 \vec{K}_m ds,$$

где  $\rho_0$  – волновое сопротивление свободного пространства, а \* – знак комплексного сопряжения, придадим равенству (4) окончательный вид:

$$(7) \quad \int_{(s_0)} \vec{I} \vec{F}_m^* ds = a_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\vec{I}$  (см. (5)) – искомое неизвестное, а  $\vec{F}_m$  и  $a_m$  – известные величины. Действительно, все входящие в  $\vec{F}_m$  и  $a_m$  величины заданы, за исключением  $J$ . Однако последнюю величину легко определить по известной формуле теории приемных антенн [1], куда входят только параметры рассматриваемой антенны в режиме передачи, а они известны. Будем полагать, что вибратор резонансный, т.е. практически полуволновой. При этом распределение тока в нем имеет вид

$$(8) \quad J = J^0 \cos kx, \quad -l/2 \leq x \leq l/2, \quad l = \lambda/2, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Ток  $J^0$  в пучности, т.е. на клеммах вибратора, в режиме приема определяется формулой [1]

$$(9) \quad J^0 = -\vec{E}^0 \vec{F} / (z_A + z).$$

Здесь  $z_A$  и  $\vec{F}$  – сопротивление излучения и векторная диаграмма направленности, отнесенная к единичному току на клеммах рассматриваемой антенны. Электрический вектор в дальней зоне (приведенный к единичному току на клеммах)

отличается от величины  $\vec{F}$  множителем  $\frac{k^2 \rho_0}{4\pi i} \frac{e^{-ikr}}{r}$ . Эти величины рассматриваются в режиме передачи и для зеркальных антенн известны.

Система уравнений (7) является основной; из нее будем исходить при определении  $\vec{I}$ . Конкретизируем задачу. Как и в работе [2], аппроксимируем зеркало частью сферы радиусом  $r_0$ , равным удвоенному фокусному расстоянию параболоида. Будем требовать при этом, чтобы отклонение указанной части сферы от параболоида не превышало  $\lambda/8$ . Геометрическую поверхность  $\Sigma$  будем считать дополняющей зеркало  $s$  до полной сферы  $s_0$ . Хотя заданное глубокое параболическое зеркало нельзя полностью аппроксимировать частью сферы при достаточно малых допустимых фазовых ошибках на краю раскрыва, это почти не уменьшает общности предлагаемого метода. Действительно, при любых заданных диаметре  $D$  раскрыва зеркала и фазовой ошибке  $\Delta$  на его краю, всегда можно подобрать такие фокусное расстояние  $f$  и радиус сферы  $r_0$ , при которых подобная

<sup>1</sup> Благодаря введению  $\rho_0$  в обозначение (5) каждая из величин  $\vec{I}$  и  $\vec{F}_m$  имеет одну и ту же размерность на всей поверхности  $s_0 = s + \Sigma$ .

выбрать  $f = \frac{r_0}{2} = \frac{D}{4} \sqrt[3]{D/\lambda}$ . В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с центром в центре сферы  $s_0$  и с осью  $z$ , совпадающей с осью параболоида, поверхность зеркала  $s$  определяется соотношениями  $r = r_0, \beta \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , а контур зеркала  $\mathcal{L}$  – соотношениями  $r = r_0, \theta = \beta, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ; поверхность  $\Sigma$  – соотношениями  $r = r_0, 0 \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$ , перпендикулярной оси  $z$  параболоида. Угол  $\beta$  определяется равенством  $\sin \beta = D/2r_0$  и расположен во второй четверти. Фокус, где находится центр вибратора, расположен в точке  $q$ , у которой  $r = r_0/2, \theta = \pi$ , а сам вибратор параллелен оси  $y$  (рис. 1). Первичную волну  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , падающую на зеркало, будем считать плоской, волновой вектор которой  $\vec{k}$  находится в плоскости  $x - z$  и образует угол  $\theta_0$  с осью  $z$  (рис. 2). Компоненты электрического вектора  $\vec{E}^0$  следующие:

$$(10) \quad \begin{cases} E_y^0 = e^{-ik\vec{r}}, & E_x^0 = E_z^0 = 0, \\ \vec{k}\vec{r} = kr(\sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta_0 \cos \theta). \end{cases}$$

Введем на сфере  $s_0$  семейство вспомогательных токов  $\{\vec{K}_m\}$  при помощи формул

$$(11) \quad \vec{K}_m = \begin{cases} \vec{i}_\theta \sin n\varphi \frac{dP_{(\nu+1)/2}^n(\cos \theta)}{d\theta} + \vec{i}_\varphi \frac{n \cos n\varphi}{\sin \theta} P_{(\nu+1)/2}^n(\cos \theta), \\ \nu = 1, 3, \dots, \\ \vec{i}_\theta \frac{n \sin n\varphi}{\sin \theta} P_{\nu/2}^n(\cos \theta) + \vec{i}_\varphi \cos n\varphi \frac{dP_{\nu/2}^n(\cos \theta)}{d\theta}, \\ \nu = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Здесь индекс  $m = (\nu, n)$ , т.е. является сокращенной записью двойной индексации; можно было бы вместо  $\vec{K}_m$  писать  $\vec{K}_\nu^n$ . Векторы  $\vec{i}_\theta \vec{i}_\varphi$  – соответствующие орты, а  $P_\nu^n(\cos \theta)$  – присоединенная функция Лежандра. Специальный выбор семейства  $\{\vec{K}_m\}$  обусловлен следующими соображениями.

1. Каждый из заданных таким образом токов  $\vec{K}_m$  на  $s_0$  возбуждает волну электрического типа для значений  $\nu$  нечетных и магнитного для  $\nu$  четных.

2. Зависимость  $\vec{K}_m$  от  $\varphi$  выбрана в соответствии с аналогичной зависимостью искомого вектора  $\vec{I}$  (см. (5)).

Семейство  $\{\vec{K}_m\}$  линейно независимо, принадлежит пространству  $C^2(s_0)$  и линейные комбинации  $\vec{K}_m$  всюду плотны в  $C^2(s_0)$  (при заданной зависимости от  $\varphi$ ) в соответствии с требованиями [2]. Для определения  $\vec{F}_m^*$  и  $a_m$  (см. (5) и (6)) необходимо найти поле  $\vec{E}^m$ , возбуждаемое током  $\vec{K}_m$ . Учитывая (11), проще всего это сделать, вводя потенциалы Дебая при помощи выражений

$$(12) \quad V_m = \sin n\varphi P_{(\nu+1)/2}^n(\cos \theta) \begin{cases} M_\nu \zeta_{(\nu+1)/2}(kr), & r \geq r_0, \\ N_\nu \psi_{(\nu+1)/2}(kr), & r \leq r_0, \end{cases} \quad \nu = 1, 3, \dots,$$

$$(13) \quad V_m = \cos n\varphi P_{\nu/2}^n(\cos \theta) \begin{cases} M_\nu \zeta_{\nu/2}(kr), & r \geq r_0, \\ N_\nu \psi_{\nu/2}(kr), & r \leq r_0, \end{cases} \quad \nu = 2, 4, \dots,$$

где

$$(14) \quad \zeta_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{\nu+1/2}^{(2)}(x); \quad \psi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\nu+1/2}(x).$$

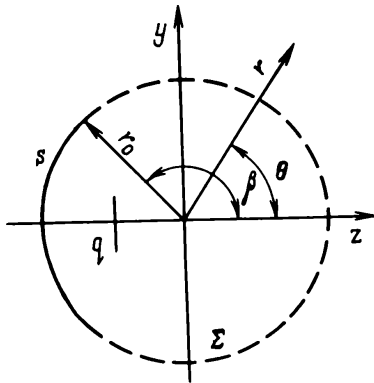


Рис. 1

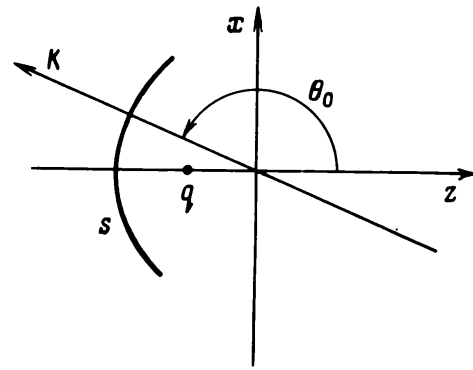


Рис. 2

При помощи потенциалов (12) могут быть построены волны электрического типа, у которых  $H_r = 0$ , а при помощи (13) – волны магнитного типа, у которых  $E_r = 0$ .

Используя условия непрерывности  $\vec{E}_t$  на  $s_0$  и связь между скачком  $\vec{H}_t^m$  при переходе через  $s_0$  и током  $\vec{K}_m$ , возбуждающим это поле, найдем

$$(15) \quad M_\nu = \frac{r_0}{k} \begin{cases} -\rho_0 \psi'_{(\nu+1)/2}(kr_0), & \nu = 1, 3, \dots, \\ i\psi_{\nu/2}(kr_0), & \nu = 2, 4, \dots, \end{cases}$$

$$(16) \quad N_\nu = \frac{r_0}{k} \begin{cases} -\rho_0 \zeta'_{(\nu+1)/2}(kr_0), & \nu = 1, 3, \dots, \\ i\zeta_{\nu/2}(kr_0), & \nu = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Для определения  $\vec{F}_m^*$  (см. (5)) необходимо знать  $\vec{E}_t^m$  на  $s_0$ . Известные соотношения [3] позволяют записать

$$(17) \quad \vec{E}_t^m = \frac{kM_\nu}{r_0} \zeta'_{(\nu+1)/2}(kr_0) \left\{ \vec{i}_\theta \sin n\varphi \frac{dP_{(\nu+1)/2}^n(\cos\theta)}{d\theta} + \vec{i}_\varphi n \cos n\varphi \frac{P_{(\nu+1)/2}^n(\cos\theta)}{\sin\theta} \right\}, \quad \nu = 1, 3, \dots,$$

$$(18) \quad \vec{E}_t^m = \frac{ik\rho_0}{r_0} M_\nu \zeta_{\nu/2}(kr_0) \left\{ \vec{i}_\theta n \sin n\varphi \frac{P_{\nu/2}^n(\cos\theta)}{\sin\theta} + \vec{i}_\varphi \cos n\varphi \frac{dP_{\nu/2}^n(\cos\theta)}{d\theta} \right\}, \quad \nu = 2, 4, \dots,$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Для определения  $a_m$  нужно знать составляющую  $E_y^m$  на оси вибратора ( $z = z_0$ ,  $x = 0$ ,  $-\lambda/4 \leq y \leq \lambda/4$ ), где

$$E_y^m = E_r^m \sin\theta + E_\theta^m \cos\theta.$$

Подставляя сюда вместо  $E_r^m$  и  $E_\theta^m$  их значения, найдем

$$(19) \quad E_y^m = N_\nu \sin n\varphi \left\{ \frac{(\nu+1)(\nu+3)}{4r^2} \sin\theta P_{(\nu+1)/2}^n(\cos\theta) \psi_{(\nu+1)/2}(kr) + \frac{k \cos\theta}{r} \psi'_{(\nu+1)/2}(kr) \frac{d}{d\theta} P_{(\nu+1)/2}^n(\cos\theta) \right\}, \quad \nu = 1, 3, \dots,$$

$$(20) \quad E_y^m = \frac{ink\rho_0}{r} \sin n\varphi \operatorname{ctg} \theta N_\nu \psi_{\nu/2}(kr) P_{\nu/2}^n(\cos \theta), \quad \nu = 2, 4, \dots$$

В последних двух формулах  $\varphi = \pm\pi/2$  при  $y \geq 0$ ,  $\operatorname{tg} \theta = y/z_0$ ,  $r = z_0/\cos \theta$ .

Вернемся теперь к решению системы уравнений (7). Используем при этом метод, аналогичный приведенному в работах [2, 4]. Введем прежде всего гильбертово пространство  $L_R^2(s_0)$ , элементами которого являются вектор-функции, заданные на  $s_0$  и касательные к ней. Скалярное произведение в  $L_R^2(s_0)$  определим формулой

$$(21) \quad (\vec{A}, \vec{B}) = \int_{(s_0)} \vec{A} \hat{R} \vec{B}^* ds.$$

Здесь  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  — два произвольных элемента из  $L_R^2(s_0)$  (с конечными нормами), а  $\hat{R}$  — линейный оператор (матрица), выбираемый так, чтобы выполнялись аксиомы гильбертова пространства и все его элементы удовлетворяли условиям типа Мейкснера для тока при приближении к контуру  $\mathcal{L}$  со стороны  $s$  и электрического поля  $\vec{E}^r$  при приближении со стороны  $\Sigma$ . Практически в качестве  $\hat{R}$  удобно использовать диагональную матрицу второго ранга с положительными элементами следующего вида:

$$(22) \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$R_{11} = \begin{cases} (\cos \beta - \cos \theta)^{-1/2} & \text{на } s, \\ (\cos \theta - \cos \beta)^{1/2} & \text{на } \Sigma, \end{cases}$$

$$R_{22} = \begin{cases} (\cos \beta - \cos \theta)^{1/2} & \text{на } s, \\ 1 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

При этом предполагаем, что на  $s_0$  введена ортогональная система координат  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \varphi$  и одна из координатных линий  $x_1 = \text{const}$  совпадает с  $\mathcal{L}$ .

Обозначение (21) позволяет записать систему (7) следующим образом:

$$(23) \quad (\vec{I}, \hat{R}^{-1} \vec{F}_m) = a_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\hat{R}^{-1}$  — матрица, обратная  $\hat{R}$  ( $\hat{R}^{-1} \hat{R} = 1$ ), а  $m$  — индекс, при помощи которого здесь пересчитываются две счетные последовательности  $\{\nu\}$  и  $\{n\}$  (см. (11) и ниже).

В работе [2] доказано, что семейство  $\{\hat{R}^{-1} \vec{F}_m\}$  линейно независимо и полно в  $L_R^2(s_0)$ . Последнее позволяет использовать (23) для определения  $\vec{I}$ . Процесс, применяемый для решения системы (23), будет более устойчивым, если пронормировать эти уравнения. Для этого определим норму

$$(24) \quad \|\hat{R}^{-1} \vec{F}_m\| = \left\{ \int_{(s)} \vec{E}_t^m \hat{R}^{-1} \vec{E}_t^{m*} ds + \rho_0^2 \int_{(\Sigma)} \vec{K}_m \hat{R}^{-1} \vec{K}_m^* ds \right\}^{1/2}$$

и разделим на нее уравнения (23). В результате получим

$$(25) \quad (\vec{I}, \vec{A}_m) = b_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$(25a) \quad \vec{A}_m = \frac{\hat{R}^{-1} \vec{F}_m}{\|\hat{R}^{-1} \vec{F}_m\|}, \quad b_m = \frac{a_m}{\|\hat{R}^{-1} \vec{F}_m\|}.$$

Систему (25) будем решать методом ортогонализации. Для этого следует перейти от  $\{\vec{A}_m\}$  к ортонормированному семейству вектор-функций  $\{\vec{B}_m\}$ . Ис-

пользуя метод Шмидта, можно получить для  $\vec{B}_m$  следующую рекуррентную формулу [5]:

$$(26) \quad \vec{B}_m = \frac{\vec{A}_m - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n^m \vec{B}_n}{\left\| \vec{A}_m - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n^m \vec{B}_n \right\|}, \quad \beta_n^m = (\vec{A}_m, \vec{B}_n).$$

Учитывая выражение для нормы, найдем

$$(26a) \quad \left\| \vec{A}_m - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n^m \vec{B}_n \right\| = \sqrt{1 - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n^m \beta_n^{m*}}.$$

Легко показать, что эта норма равна также  $\beta_m^m$ . Действительно, полагая во второй формуле (26)  $n = m$  и подставляя в нее вместо  $\vec{B}_m$  его значение из первой формулы (26), после элементарных выкладок с учетом (26a), найдем следующую рекуррентную формулу

$$(26b) \quad \beta_m^m = \sqrt{1 - \sum_{n=1}^{m-1} |\beta_n^m|^2}.$$

Учитывая полученное выше выражение для  $\vec{A}_m$ , можно записать уравнения (25) в виде

$$(27) \quad (\vec{I}, \sum_{n=1}^m \beta_n^m \vec{B}_n) = b_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Представляя искомым вектор  $\vec{I}$  при помощи ряда

$$(27a) \quad \vec{I} = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \vec{B}_p, \quad C_p = (\vec{I}, \vec{B}_p),$$

по полной ортонормированной системе  $\{\vec{B}_p\}$ , перепишем уравнения (27) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^m \beta_n^{m*} C_n = b_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Из этого равенства немедленно следует рекуррентная формула для коэффициентов  $\{C_n\}$ :

$$(28) \quad C_m = \frac{b_m - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n^{m*} C_n}{\beta_m^m}.$$

Введем обозначение

$$(29) \quad (\vec{A}_n, \vec{A}_m) = \alpha_{nm}$$

и, подставляя сюда вместо  $\vec{A}_n$  и  $\vec{A}_m$  из выражения через  $\vec{B}_p$  ( $\vec{A}_n = \sum_{p=1}^n \beta_p^n \vec{B}_p$ ), после элементарных преобразований с учетом ортонормированности  $\{\vec{B}_p\}$  получим

$$(30) \quad \beta_n^m = \frac{\alpha_{nm}^* - \sum_{p=1}^{n-1} \beta_p^{n*} \beta_p^m}{\beta_n^n}; \quad \beta_n^m = 0 \quad \text{при } n > m,$$

$$\beta_1^m = \alpha_{m1}.$$

По рекуррентным формулам (26), (28), (30) и (26б) следует определять  $C_p$  803 и  $\vec{B}_p$  для нахождения  $\vec{I}$  при помощи ряда (27а). Этот ряд сходится по норме  $L_R^2(s_0)$  к некоторой функции из  $L_R^2(s_0)$  и определяет плотность тока  $\vec{K}$  на  $s$  и  $\vec{E}_t^r$  на  $\Sigma$  (см. (5)).

Возможно также свести нахождение  $\vec{I}$  к системе линейных алгебраических уравнений [2], на чем мы не останавливаемся. Если размеры зеркала велики по сравнению с длиной волны, то для ускорения сходимости ряда (27а) следует представить  $\vec{I}$  в виде

$$(31) \quad \vec{I} = \vec{I}^0 + \vec{I}^1,$$

где  $\vec{I}^0$  (т.е.  $\vec{K}$ ) на  $s$  определяется в приближении Кирхгофа, а на  $\Sigma$  (т.е.  $\vec{E}_t^r$ ) находится методом геометрической оптики. Тогда для поправки  $\vec{I}^1$  из (25) следует

$$(32) \quad (\vec{I}^1, \vec{A}_m) = b_m - (\vec{I}^0, \vec{A}_m) \equiv b_m^1, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$(33) \quad \vec{I}^1 = \sum_{p=1}^{\infty} C_p^1 \vec{B}_p,$$

где  $C_p^1 = (\vec{I}^1, \vec{B}_p)$ .

Величину  $C_p^1$  находим по формуле (28), в которой следует заменить  $b_m$  на  $b_m^1$ , а  $C_m$  и  $C_n$  на  $C_m^1$  и  $C_n^1$  соответственно. Все остальные величины сохраняются такими же, однако необходимо обратить внимание на следующее. Выше вектор  $\vec{I}$  искали в пространстве  $L_R^2(s_0)$ , каждый элемент которого удовлетворял условиям Мейкснера (понимаемым в широком смысле как обеспечивающие единственность решения). Для этого в скалярное произведение (21) вводили матрицу (22). Теперь вектор  $\vec{I}^1$  следует искать в другом пространстве, так как он удовлетворяет другим условиям на ребре. Поэтому в матрице  $\hat{R}$  нужно заменить элементы на следующие:

$$R_{11} = \begin{cases} 1 & \text{на } s, \\ (\cos\theta - \cos\beta)^{1/2} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad R_{22} = \begin{cases} (\cos\beta - \cos\theta)^{1/2} & \text{на } s, \\ 1 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Рассеянное поле в дальней зоне имеет вид

$$(34) \quad \vec{E}^r = \frac{e^{-ikr}}{kr} \vec{\Phi}(\theta, \varphi),$$

где

$$\vec{\Phi}(\theta, \varphi) = \frac{k^2 \rho_0}{4\pi i} \left\{ \int_{(s)} \vec{l} e^{ikr_0 \cos\gamma} ds + \int_{(l)} J \vec{i}_y e^{iky \cos\gamma} dy \right\}_{\perp}$$

— диаграмма рассеяния, отнесенная к центру сферы  $s_0$ ,  $\gamma$  — угол между направлениями, проведенными из центра сферы в точки наблюдения и интегрирования, а индекс  $\perp$  указывает на то, что нужно взять поперечную (относительно направления на точку наблюдения) составляющую вектора, стоящего в фигурных скобках.

Дифференциальный поперечник рассеяния в направлении  $\theta, \varphi$  равен

$$(35) \quad \sigma_d = \frac{4\pi r^2 S^r(\theta, \varphi)}{S^0} = \frac{\lambda^2}{\pi} |\Phi(\theta, \varphi)|^2.$$

Здесь  $S^r$  и  $S^0$  — модули векторов Пойнтинга рассеянной в направлении  $\theta, \varphi$  и первичной падающей волн соответственно.



В частном случае, когда  $\theta_0 = 0$  или  $\pi$ , значительная часть формул, следующих после (10), существенно упрощается. 804

Так, учитывая, что при этом первичное поле  $\vec{E}^0$  не зависит от  $\varphi$  (см. (10)), и имеющую место симметрию задачи, поскольку эта волна падает вдоль оси зеркала, следует ограничиться в указанных формулах значением  $n = 1$ . Учитывая также зависимость поля вибратора  $l$  от угла  $\varphi$ , легко сообразить, что искомый ток на зеркале и диаграмма рассеянного поля имеют вид

$$K_\theta = \sin \varphi J_\theta(\theta), \quad K_\varphi = \cos \varphi J_\varphi(\theta)$$

и, соответственно,

$$\Phi_\theta(\theta, \varphi) = \sin \varphi \Phi_\theta(\theta), \quad \Phi_\varphi(\theta, \varphi) = \cos \varphi \Phi_\varphi(\theta),$$

т.е. в выражениях для этих компонент переменные разделяются.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фельд Я.Н., Бененсон Л.С.* Антенно-фидерные устройства. Ч. 2. М.: ВВИА им. Жуковского, 1959. С. 503.
2. *Фельд Я.Н.* // РЭ. 1975. Т. 20. № 1. С. 28.
3. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957.
4. *Кюркчан А.Г.* // РЭ. 1972. Т. 17. № 4. С. 687.
5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Гостехтеориздат, 1947.

Поступила в редакцию  
2.01.90

# Антенно-волноводная техника и распространение радиоволн

УДК 621.396.67

## Обратные задачи теории антенн и критерии реализуемости диаграмм

Я. Н. Фельд

Формулируются и решаются три обратные задачи теории антенн, сводящиеся к определению на криволинейной поверхности  $s$  плотности поверхностного электрического или магнитного тока, и смешанная задача, когда на части поверхности нужно найти электрический, а на остальной части магнитный ток по заданным диаграммам направленности этих токов; приводятся критерии реализуемости указанных диаграмм токами, принадлежащими пространству  $L_R^2(s)$ , и методы наилучшей, в некотором смысле, аппроксимации нереализуемых диаграмм диаграммами, реализуемыми токами из  $L_R^2(s)$ .

Под обратными задачами теории антенн обычно понимают задачи определения тока (или поля в апертуре) на замкнутых или разомкнутых криволинейных поверхностях. Решение при этом ищется в гильбертовом пространстве  $L_R^2(s)$ , частным случаем которого является  $L^2(s)$ . Вес — матрица  $R$ , входящая в скалярное произведение пространства  $L_R^2(s)$ , выбирается так, чтобы искомая плотность тока удовлетворяла, например, условиям Мейкенера на краю или на изломах поверхности  $s$ , если последняя металлическая (зеркало и т. п.). Следует различать три обратные задачи:

определение плотности поверхностного электрического тока по заданной диаграмме направленности (ДН),

определение плотности поверхностного магнитного тока по заданной ДН,

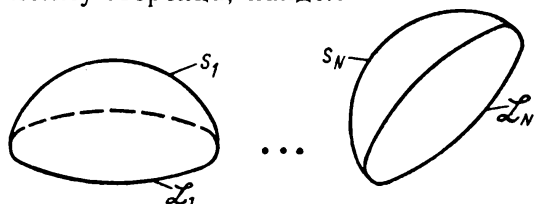
определение плотности электрического тока на части поверхности и магнитного на остальной части поверхности по заданной ДН [1].

**Первая обратная задача.** Чтобы учесть также случай многозеркальных антенн, будем считать поверхность  $s$  многосвязной, т. е. состоящей из нескольких

разомкнутых поверхностей  $s = \sum_{n=1}^N s_n$ , опирающейся на контур  $\mathcal{L}$ , состоящий

из нескольких замкнутых контуров  $\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_n$  (см. рисунок). Обозначим

через  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  поле, создаваемое искомым поверхностным электрическим током с плотностью  $\mathbf{K}$ , распределенным на  $s$  и реализующим заданную ДН  $F(\theta, \varphi)$  ( $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат с центром вблизи  $s$ ). Поскольку ток  $\mathbf{K}$  излучает конечную ваттную мощность, то  $F(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , где  $\Omega$  — единичная сфера. Зададим на сфере  $S_0$  радиусом  $r_0$ , содержащей внутри себя поверхность  $s$ , семейство поверхностных токов  $\{\mathbf{K}_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_n$  в свободном пространстве, обозначим через  $\mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{H}^n$ . Применив к полям  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{H}^n$  лемму Лоренца, найдем



$$\int_{(s)} \mathbf{E}^n \mathbf{K} ds = \int_{(S_0)} \mathbf{E} \mathbf{K}_n ds. \quad (1)$$

При  $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} = (e^{-ikr}/r) \mathbf{F}(\theta, \varphi) + O(r^{-2}), \quad (2)$$

где  $k$  — волновое число.

Аналогично запишем вспомогательные токи на  $S_0$ :

$$K_n = (e^{ikr_0}/r_0)j_n(\theta, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Семейство  $\{j_n\}$  считаем линейно независимым, принадлежащим пространству  $L^2(\Omega)$  и полным в нем. В нашем случае  $L^2(\Omega)$  состоит из векторных функций, заданных на  $\Omega$ , касательных к ней и интегрируемых с квадратом. Подставляя (3) в (1), переходя к пределу, когда  $r_0 \rightarrow \infty$ , и учитывая (2), найдем

$$\int_{(s)} K \overline{e^n} ds = \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (4)$$

где

$$e^n = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \overline{E_t^n} \text{ на } s, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi; \quad (4a)$$

черта сверху — знак комплексного сопряжения;  $E_t^n$  — тангенциальная составляющая  $E^n$ .

Чтобы учесть случаи, когда ток  $K$  удовлетворяет условиям Мейкенера на контуре  $\mathcal{L}$ , будем искать его в пространстве  $L^2_R(s)$  со скалярным произведением

$$(A, B) = \int_{(s)} A \overline{R} B ds, \quad (5)$$

где  $R$  — линейный оператор, выбираемый так, чтобы  $L^2_R(s)$  было гильбертовым пространством, а его элементы — векторы, касательные к  $s$ , — удовлетворяли бы условиям Мейкенера<sup>1</sup> для тока при приближении к  $\mathcal{L}$ . В качестве  $R$  удобно использовать матрицу с положительными элементами:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Если на  $s$  одна из ортогональных координатных линий  $x_1 = \text{const}$  совпадает с  $\mathcal{L}$ , то  $R_{11}$  при приближении к  $\mathcal{L}$  должен вести себя как  $O(\rho^{-1/2})$ , а  $R_{22}$  — как  $O(\rho^{1/2})$ ,  $\rho$  — расстояние до  $\mathcal{L}$ . Если поверхности  $s_n$  замкнутые, то следует положить  $R_{11} = R_{22} = 1$  на  $s$ ; в случае изломов на  $s$  необходимо изменить соответствующим образом  $R_{11}$  и  $R_{22}$ .

Используя (5), перепишем (4) в виде

$$(K, R^{-1}e^n) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где  $R^{-1}$  — матрица, обратная  $R$ ;

$$a_n \equiv \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega \quad (8)$$

— известные числа.

Как легко видеть,  $R^{-1}e^n \in L^2_R(s)$  и удовлетворяет условиям Мейкенера для тока при приближении к  $\mathcal{L}$ . Докажем, что семейство  $\{R^{-1}e^n\}$  полно в  $L^2_R(s)$ . Для этого покажем, что из условий

$$(A, R^{-1}e^n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где  $A \in L^2_R(s)$ , следует  $A = 0$  на  $s$ .

Перепишем (9) с учетом (5)

$$\int_{(s)} A \overline{e^n} ds = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9a)$$

Из леммы Лоренца следует равенство

$$\int_{(s)} A E^n ds = \int_{(S_0)} K_n E\{A; s\} ds, \quad (10)$$

где  $E\{A; s\}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого электрическим током плотности  $A$ , распределенным на  $s$ .

Переходя в (10) к пределу, когда  $r_0 \rightarrow \infty$ , и учитывая (4a) и (3), находим

$$\int_{(s)} A \overline{e^n} ds = \int_{(\Omega)} F^n(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

При этом использована формула типа (2)

<sup>1</sup> Понимаемым в широком смысле как обеспечивающие единственность решения.

$$E\{A; s\} = (e^{-ikr}/r) F^e(\theta, \varphi) + O(r^{-2}).$$

Перепишем (9а) в виде

$$\int_{(\Omega)} F^e(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вследствие полноты  $\{j_n\}$  в пространстве  $L^2(\Omega)$  и того, что  $F^e \in L^2(\Omega)$ , следует  $F^e(\theta, \varphi) = 0$  на  $\Omega$ . Отсюда на основании теоремы Реллиха [2] само поле и возбуждающий его ток  $A$  равны нулю. Таким образом полнота доказана. Однако необходимо отметить, что если одна или несколько поверхностей  $s_n$  замкнуты, то могут быть нарушения доказанной теоремы. Так, для частоты  $\omega$ , при которой имеет место резонанс во внутренней области подобных поверхностей, т. е. там существует решение, удовлетворяющее на  $s_n$  краевому условию  $E_t = 0$  при отсутствии внутри  $s_n$  источников, эта теорема нарушается. Действительно при этом теорема Реллиха не обеспечивает отсутствие поля внутри подобных поверхностей и на них  $A \neq 0$ . Аналогично полноте доказывается линейная независимость  $\{R^{-1}e^n\}$  на  $s$ . Поскольку это семейство линейно независимо и полно в  $L^2_R(s)$ , система (7) пригодна для нахождения  $K$  на  $s$ . Пронормируем ее, прежде всего поделив на  $\|R^{-1}e^n\|$ , после чего получим

$$(K, A_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где

$$A_n = R^{-1}e^n / \|R^{-1}e^n\|, \quad b_n = a_n / \|R^{-1}e^n\|. \quad (12)$$

Далее, используя процесс Шмидта, перейдем к ортонормированной системе функций  $\{B_m\}$ . Поскольку  $B_n$  выражается с помощью линейной комбинации из первых  $n$  функций  $A_n$ , справедливо обратное утверждение. Поэтому

$$A_m = \sum_{n=1}^m \beta_n^m B_n, \quad (13)$$

где  $\beta_n^m = (A_m, B_n)$ .

Отсюда немедленно следует

$$B_m = (A_m - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n^m B_n) / \beta_m^m. \quad (14)$$

Так как  $B_m$  нормирован, то  $\beta_m^m$  — норма числителя, вычисляя которую непосредственно, получим

$$\beta_m^m = \sqrt{1 - \sum_{n=1}^{m-1} |\beta_n^m|^2}. \quad (14a)$$

Обозначая  $\alpha_{nm} = (A_n, A_m)$  и подставляя вместо  $A_n$  и  $A_m$  их выражение (13), найдем

$$\beta_n^m = (\bar{\alpha}_{nm} - \sum_{p=1}^{n-1} \beta_p^n \beta_p^m) / \beta_n^n; \quad (15)$$

$$\beta_n^m = 0 \text{ при } n > m, \quad \beta_1^m = \alpha_{m1}.$$

Представим искомый ток  $K$  в виде ряда

$$K = \sum_{p=1}^{\infty} C_p B_p, \quad (16)$$

где  $C_p = (K, B_p)$ , по полной ортонормированной системе  $\{B_p\}$ .

Подставляя (16) в (11) и учитывая (13), получим

$$\sum_{p=1}^n \bar{\beta}_p^n C_p = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из этого равенства следует рекуррентная формула для коэффициентов  $\{C_p\}$

$$C_n = (b_n - \sum_{p=1}^{n-1} \bar{\beta}_p^n C_p) / \beta_n^n. \quad (17)$$

Рекуррентные формулы (14), (15), (17) и (14а) позволяют определить плотность тока  $K$  с помощью ряда (16) и таким образом решить задачу

синтезирования тока на  $s$  по заданной ДН. Поскольку исходная система функций  $\{R^{-1}e^n\}$  полна в  $L^2_R(s)$ , то полно также получаемое из нее ортонормированное семейство  $\{B_n\}$ . Поэтому ряд (16) для плотности тока сходится по норме пространства  $L^2_R(s)$ . Возможны и другие способы определения  $K$  с помощью (7) [3], на чем мы не останавливаемся.

Докажем, что распределение  $K$  на  $s$ , реализующее заданную ДН  $F$ , единственно. Рассуждая от обратного, предположим, что существуют два таких распределения  $K^{(1)}$  и  $K^{(2)}$ . Тогда для каждого из них справедлива система уравнений (7). Вычитая из одной другую, найдем  $(K^{(1)} - K^{(2)}, R^{-1}e^n) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Так как семейство  $\{R^{-1}e^n\}$  полно в  $L^2_R(s)$ , то из этих равенств следует, что  $K^{(1)} = K^{(2)}$ , и наше утверждение доказано.

Определим теперь класс функций, которому должна принадлежать ДН  $F(\theta, \varphi)$ , чтобы реализующий ее ток  $K \in L^2_R(s)$ . Как отмечалось выше, любая реализуемая ДН  $F \in L^2(\Omega)$ . Однако обратное утверждение, вообще говоря, не

имеет места. Действительно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ , где  $C_n = (K, B_n)$  — коэффициенты Фурье, определяемые (17), должен сходиться вследствие равенства Парсеваля [4]. Поэтому при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty \quad (18)$$

из теоремы Рисса—Фишера [4] следует, что существует функция  $K \in L^2_R(s)$  с коэффициентами Фурье  $\{C_n\}$ , определяемая рядом (16). Класс  $\{F\}$ -реализуемых ДН может отличаться от класса  $\{F\}$ -функций, удовлетворяющих условию (18)\* (оба эти класса естественно должны принадлежать  $L^2(\Omega)$ ), на множестве функций, являющихся нулями пространства  $L^2(\Omega)$ . Добавление таких функций к ДН  $F$  не меняет условие (18) и значения коэффициентов  $\{C_n\}$ . Доказательство сказанного элементарно [5]. Таким образом ДН, реализуемые током из  $L^2_R(s)$ , отличаются от вектор-функций, принадлежащих пространству  $L^2(\Omega)$  и удовлетворяющих условию (18), только нулями пространства  $L^2(\Omega)$ , т. е. функциями, норма которых равна нулю. Учитывая сказанное, в качестве «реализуемой» ДН можно использовать любую вектор-функцию из  $L^2(\Omega)$ , удовлетворяющую условию (18). Действительно, поскольку такие ДН отличаются от физически реализуемых только подмножеством функций, являющихся нулями пространства  $L^2(\Omega)$ , то безразлично, какие из них подставлять в выражения для определения искомого тока на  $s$ . Результаты получаются тождественными.

Критерию (18) можно придать несколько иную форму, при которой будет явно видно, как он зависит от заданной ДН  $F(\theta, \varphi)$ . Для этого, прежде всего, найдем зависимость между ортонормированными вектор-функциями  $\{B_n\}$  и исходными  $\{R^{-1}e^n\}$ :

$$B_n = \sum_{m=1}^n a_m^n R^{-1}e^m, \quad (19)$$

где  $a_m^n$  — постоянные; их можно записать, например, с помощью определителей [4], элементами которых являются скалярные произведения исходных функций, или определить, используя соответствующие рекуррентные формулы [6].

Формулы (19) и (7) позволяют записать выражение для  $C_n$  в виде

$$C_n = (K, B_n) = \sum_{m=1}^n \overline{a_m^n} a_m. \quad (20)$$

Учитывая (20) и (8), можно представить (18) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^n \overline{a_m^n} \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_m(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2 < \infty. \quad (21)$$

Критерий (21) определяет класс ДН, реализуемых токами, распределенными на многосвязных замкнутых или незамкнутых поверхностях и принадлежащими пространствами  $L^2_R(s)$ . При этом выбор матрицы (6) в скалярном произведении

\* Явная связь (18) с  $F$  приведена ниже.

(5) (она существенна при определении  $a_m^n$ ) позволяет обеспечить выполнение условий Мейкенера для тока в случае наличия изломов или краев у поверхности  $s$ .

Критерий (21) сохраняется также в случае второй и смешанной обратных задач. Изменяются только исходные функции  $R^{-1}e^n$ , которые влияют на коэффициенты  $a_m^n$  (19).

Критерий (21) существенно упрощается, если семейство  $\{j_m\}$  выбрано так, что множество  $\{R^{-1}e^m\}$  ортогональное, т. е.

$$(R^{-1}e^m, R^{-1}e^n) = 0, \quad m \neq n. \quad (22)$$

В этом случае  $a_m^n = 0$ , если  $m < n$  и

$$|a_n^n|^2 = (R^{-1}e^n, R^{-1}e^n)^{-1} \equiv \|R^{-1}e^n\|^{-2}. \quad (23)$$

Тогда (21) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2}{\|R^{-1}e^n\|^2} < \infty. \quad (24)$$

Обозначим

$$d_n = \int_{(\Omega)} F(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega \quad (25)$$

и перепишем (24) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_n|^2}{\|R^{-1}e^n\|^2} < \infty. \quad (26)$$

Очевидно, если семейство  $\{j_n\}$  в пространстве  $L^2(\Omega)$  ортонормировано, то  $\{d_n\}$  являются коэффициентами Фурье ДН  $F$  по функциям  $j_n$ .

■ Рассмотрим отдельные примеры применения критерия (26).

Пусть  $s$  — поверхность бесконечного вдоль оси  $z$  кругового цилиндра радиуса  $a$ , на которой распределен ток плотностью  $K = K_z$ , зависящий от одной цилиндрической координаты  $\varphi$  (двумерная задача). Диаграмма  $F$  такого тока также зависит от одной координаты  $\varphi$  и  $F(\varphi) \in L^2(0-2\pi)$ ,  $d\Omega = d\varphi$ . Определим класс ДН, реализуемых током  $K \in L^2(\mathcal{L})$ , т. е. когда  $R \equiv 1$ , а поверхность  $s$  заменяется на контур  $\mathcal{L}$  цилиндра, лежащий в плоскости  $z=0$ . Введем семейство функций

$$j_n = (1/\sqrt{2\pi})e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad (27)$$

В этом случае  $K_n = (e^{ikr_0}/\sqrt{r_0})j_n(\varphi)$ , где  $r_0$  — радиус цилиндра, играющий роль поверхности  $S_0$ . Элементарный расчет приводит к выражению

$$e^n = -\frac{\omega\mu}{2\sqrt{k}} e^{-i(\pi n/2 + \pi/4)} J_n(ka) e^{-in\varphi}. \quad (28)$$

Таким образом семейство  $R^{-1}e^n \equiv e^n$  ортогонально в  $L^2(0-2\pi)$  и можно использовать критерий (26). Подставляя (28) в (26) и учитывая (25), найдем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi \right|^2}{|J_n(ka)|^2} < \infty. \quad (29)$$

Подчеркнем, что  $ka$  не должно быть корнем ни одной из функций  $J_n$ , ибо при этом контур  $\mathcal{L}$  (а точнее область внутри него) оказывается резонансным и нарушается теорема о полноте  $\{e^n\}$  в  $L^2(\mathcal{L})$ .

Так как справедлива асимптотическая формула

$$J_n(ka) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{eka}{2n}\right)^n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (29a)$$

то ряд (29) сходится при

$$|d_n| \equiv \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi \right| = O\left(\frac{1}{|n|^{1+\epsilon}} \left(\frac{eka}{2|n|}\right)^{|n|}\right), \quad (30)$$

где  $\epsilon > 0$ , и диаграмма  $F$ , имеющая такие коэффициенты Фурье, реализуема током  $K \in L^2(\mathcal{L})$ , распределенным на цилиндре радиуса  $a$ .

■ Рассмотрим трехмерную векторную задачу, когда  $s$  — сфера радиуса  $a$ . Введем сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре сферы  $s$ .

Требуется определить класс диаграмм, реализуемых поверхностным электрическим током  $\mathbf{K} \in L^2(s)$ , распределенным на  $s$ . Для простоты записи ограничимся диаграммами, являющимися асимптотиками при  $r \rightarrow \infty$  полей, состоящих из волн электрического типа, определяемых потенциалами Дебая  $V = B_n^m P_n^m(\cos \theta) \Psi_n(kr) \cos m\varphi$ ,  $r < r_0$ , где  $B_n^m$  — постоянные;  $\Psi_n(x) = \sqrt{\pi x / 2} J_{n+1/2}(x)$ ;  $r_0$  — радиус сферы  $S_0$ .  
В качестве вектор-функций  $\{\mathbf{j}_n^m\}$  выберем

$$\mathbf{j}_n^m = \mathbf{i}_\theta \frac{\cos m\varphi}{b_n^m} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) - \mathbf{i}_\varphi \frac{m \sin m\varphi}{b_n^m} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (31)$$

где  $b_n^m$  — постоянные коэффициенты, обеспечивающие ортонормированность семейства  $\{\mathbf{j}_n^m\}$  на сфере  $\Omega$ ; здесь и ниже используется двухиндексная нумерация функций  $\mathbf{j}_n$  и  $\mathbf{e}_n$ .

Ток  $\mathbf{K}_n^m$  связан с  $\mathbf{j}_n^m$  соотношением (3). Тогда (4а) сводится к выражению

$$\mathbf{e}_n^m = \frac{\rho_0 i^n}{ab_n^m} \Psi_n'(ka) \left\{ -\mathbf{i}_\theta \cos m\varphi \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) + \mathbf{i}_\varphi \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \right\},$$

$$\rho_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}. \quad (32)$$

Ортогональность  $\{\mathbf{e}_n^m\}$  в пространстве  $L^2(s)$ , т. е. справедливость равенств (22) при  $R=1$ , доказывается элементарно. Поэтому для реализуемости диаграммы  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$  с помощью тока  $\mathbf{K} \in L^2(s)$ , распределенного на сфере  $s$  радиуса  $a$ , можно использовать критерий (24), положив в нем  $R=1$ . Несложный расчет позволяет написать

$$\|\mathbf{e}_n^m\| = \rho_0 |\Psi_n'(ka)|. \quad (33)$$

Таким образом  $\|\mathbf{e}_n^m\|$  не зависит от  $m$ .

В рассматриваемом случае критерий реализуемости (26) запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{m=0}^n |d_n^m|^2}{\|\mathbf{e}_n^m\|^2} < \infty, \quad (34)$$

где

$$d_n^m = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n^m d\Omega \quad (35)$$

— коэффициент Фурье ( $\mathbf{j}_n^m$  определяется (31)).

Очевидно, ряд (34) сходится, если  $\sum_{m=0}^n |d_n^m|^2 = O(\|\mathbf{e}_n^m\|^2/n^{1+\epsilon})$ ,  $n \rightarrow \infty$ , или, учитывая (29а) и (33),

$$\sum_{m=0}^n |d_n^m|^2 = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}} \left[\frac{eka}{2n+1}\right]^{2n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (36)$$

где  $\epsilon > 0$ .

Критерию (36) можно придать более компактную форму, если записать диаграмму в виде ряда  $\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n$ , где  $\mathbf{F}_n = \sum_{m=0}^n d_n^m \mathbf{j}_n^m(\theta, \varphi)$ . Так как семейство  $\{\mathbf{j}_n^m\}$  ортонормировано на  $\Omega$ , то, применяя равенство Парсеваля [4] к ряду для  $\mathbf{F}_n$ , найдем

$$\|\mathbf{F}_n\|_{\infty}^2 = \int_{(\Omega)} |\mathbf{F}_n|^2 d\Omega = \sum_{m=0}^n |d_n^m|^2,$$

и критерий (36) запишется в виде

$$\|\mathbf{F}_n\|_{\Omega} = O\left(\frac{1}{n^{1/2+\epsilon}} \left[\frac{eka}{2n+1}\right]^n\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (36a)$$

Аналогично можно записать критерий реализуемости диаграмм, являющихся асимптотиками электрических и магнитных волн.

**Нереализуемые диаграммы.** Рассмотрим задачу о наилучшей, в некотором смысле, аппроксимации нереализуемой диаграммы  $\mathbf{F}^*(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , но не удовлетворяющей условию (21), с помощью реализуемой, создаваемой токами из

$$(\mathbf{K}, R^{-1}\mathbf{e}^n) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^n(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (37)$$

Далее можно использовать два приема.

1. Представить ток  $\mathbf{K}$  в виде агрегата из первых  $N$  членов ряда (16):

$$\mathbf{K} = \sum_{p=1}^N C_p^* \mathbf{B}_p \quad \text{на } s, \quad (38)$$

где в соответствии с (37) и (19)

$$C_p^* = (\mathbf{K}, \mathbf{B}_p) = \sum_{n=1}^p \overline{a_n^p} \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^n(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (39)$$

Если обозначить через  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$  диаграмму, в действительности реализуемую током (38), то для нее будут выполняться соотношения типа (7)

$$(\mathbf{K}, R^{-1}\mathbf{e}^n) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Вычитая (37) из (40), получаем

$$\int_{(\Omega)} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^n) \mathbf{j}_n d\Omega = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (41)$$

Из этих  $N$  равенств следует, что реализуемая током  $\mathbf{K}$  диаграмма  $\mathbf{F}$  наилучшим, в некотором смысле, образом аппроксимирует заданную нереализуемую диаграмму  $\mathbf{F}^n$ . Уточним это утверждение. Пусть  $G_N(\Omega)$  — некоторое подпространство пространства  $L^2(\Omega)$ , образованное линейной комбинацией элементов  $\mathbf{j}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Тогда, если  $\mathbf{F}^n \in G_N(\Omega)$ , то на основании известной теоремы [4] из (41) следует, что  $\mathbf{F}^n$  — элемент  $G_N(\Omega)$ , наименее удаленный от  $\mathbf{F}$  (по норме  $L^2(\Omega)$ ).

2. Представим ток в виде агрегата из  $N$  членов

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^N \alpha_m R^{-1} \mathbf{e}^m, \quad (42)$$

где  $\alpha_m$  — постоянные коэффициенты, удовлетворяющие вследствие (37) линейной системе уравнений

$$\sum_{m=1}^N \alpha_m (R^{-1} \mathbf{e}^m, R^{-1} \mathbf{e}^n) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^n \mathbf{j}_n d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Из (37) и (40), последнее из которых опять выполняется для тока (42) и реализуемой им диаграммы  $\mathbf{F}$ , следуют равенства (41) и последующие утверждения.

**Вторая обратная задача.** Вследствие инвариантности уравнений Максвелла относительно перестановки

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}^\mu, \quad \mathbf{J}^\mu \rightarrow -\mathbf{J}, \quad \varepsilon \rightarrow \mu, \quad \mu \rightarrow \varepsilon \quad (43)$$

задача определения плотности магнитного поверхностного тока  $\mathbf{K}^\mu$  на  $s$  по заданной диаграмме  $\mathbf{F}$  (2) может быть сведена к первой обратной задаче. Действительно, вводя «магнитную диаграмму»  $\mathbf{F}^\mu$  с помощью  $\mathbf{H} = (\mathbf{e}^{-ikr}/r) \mathbf{F}^\mu(\theta, \varphi) + O(r^{-2})$ , легко показать, что она связана с  $\mathbf{F}$  соотношением  $\mathbf{F}^\mu = \frac{1}{\rho_0} [\mathbf{i}_r \mathbf{F}]$ , где  $\mathbf{i}_r$  — единичный орт в направлении  $r$ . Поэтому  $\mathbf{F}^\mu$  фактически задана. Таким образом, производя перестановку (43) в (7), (8), к которым сводится решение первой обратной задачи, и учитывая при этом, что  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^\mu$ , найдем

$$(\mathbf{K}^\mu, R^{-1} \mathbf{h}^n) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^\mu(\theta, \varphi) \mathbf{j}_n^\mu(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (44)$$

Здесь (аналогично (4а) и (3))  $\mathbf{h}^n = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{H}}_r^n$  на  $s$ ,  $\mathbf{H}^n$  — магнитный вектор поля, создаваемого магнитным поверхностным током  $\mathbf{K}_r^n = (\mathbf{e}^{ikr_0}/r_0) \mathbf{j}_n^\mu(\theta, \varphi)$ , рас-



пределенным на  $S_0$ ; семейство  $\{j_n^\mu\}$  полно в  $L^2(\Omega)$ ;  $R$  — матрица, подбираемая в соответствии с особенностями тока  $\mathbf{K}^\mu$  на изломах и краях поверхности  $s$ , если таковые имеются; в противном случае следует положить  $R=1$ .

Система (44) решается способом, тождественным примененному выше для решения (7). Аналогично находится критерий реализуемости диаграммы  $\mathbf{F}^\mu$ , а следовательно и  $\mathbf{F}$ . Этот критерий получается из (21) с помощью перестановки (43)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^n \overline{a_m^n} \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^\mu(\theta, \varphi) j_n^\mu(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2 < \infty.$$

Постоянные  $a_m^n$  входят в выражение типа (19)  $\mathbf{B}_n^\mu = \sum_{m=1}^n a_m^n R^{-1} \mathbf{h}^m$  и находятся

из условий ортонормировки  $(\mathbf{B}_n^\mu, \mathbf{B}_p^\mu) = \delta_{np}$ . В частности,  $\mathbf{K}^\mu = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \mathbf{B}_p^\mu$ , где

$$C_p = \sum_{m=1}^p \overline{a_m^p} \int_{(\Omega)} \mathbf{F}^\mu j_m^\mu d\Omega.$$

Критерий реализуемости может быть преобразован в случае ортогональности семейства  $\{R^{-1} \mathbf{h}^m\}$  в пространстве  $L^2_R(s)$  к виду, аналогичному (24).

**Смешанная обратная задача.** Она заключается в нахождении (синтезировании) электрического тока плотности  $\mathbf{K}$  на  $s_1$  и магнитного тока плотности  $\mathbf{K}^\mu$  на  $s_2$ , реализующих заданную диаграмму  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$ . Поверхности  $s_1$  и  $s_2$  в общем случае могут быть многосвязными, и их сумма  $s_1 + s_2$  совпадает с исходной поверхностью  $s$ , которая может состоять из замкнутых и разомкнутых поверхностей.

Зададим на сфере  $S_0$  радиуса  $r_0$  семейство электрических токов  $\{\mathbf{K}_n\}$ . Пусть  $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$  — поле, возбуждаемое током  $\mathbf{K}_n$ , а  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — поле, возбуждаемое искомыми токами  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}^\mu$  с диаграммой  $\mathbf{F}$ . Применяя к этим полям лемму Лоренца, найдем

$$\int_{(s_1)} \mathbf{K} \mathbf{E}^n ds - \int_{(s_2)} \mathbf{K}^\mu \mathbf{H}^n ds - \int_{(S_0)} \mathbf{K}_n \mathbf{E} ds = 0. \quad (45)$$

Обозначив

$$\mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{K} & \text{на } s_1 \\ \mathbf{K}^\mu & \text{на } s_2 \end{cases}; \quad \bar{\Phi}_n = \begin{cases} \mathbf{E}_i^n & \text{на } s_1 \\ -\mathbf{H}_i^n & \text{на } s_2 \end{cases}, \quad (46)$$

запишем (45) с учетом (46) в виде

$$\int_{(s)} \mathbf{I} \bar{\Phi}_n ds = \int_{(S_0)} \mathbf{K}_n \mathbf{E} ds. \quad (47)$$

Учитывая (2) и (3) для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{K}_n$  и переходя к пределу в (47), когда  $r_0 \rightarrow \infty$ , получим

$$\int_{(s)} \mathbf{I} \bar{\Phi}_n^0 ds = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (48)$$

где согласно (46)

$$\bar{\Phi}_n^0 = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \begin{cases} \mathbf{E}_i^n & \text{на } s_1 \\ -\mathbf{H}_i^n & \text{на } s_2 \end{cases} \quad (48a)$$

Вводя соответствующую квадратную диагональную матрицу 2-го порядка (если это требуется), перепишем (48)

$$(\mathbf{I}, R^{-1} \Phi_n^0) = \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) j_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (49)$$

где скалярное произведение слева определяется формулой (5).

Методом, близким к использованному при решении первой обратной задачи, доказывается полнота и линейная независимость семейства  $\{R^{-1} \Phi_n^0\}$  в пространстве  $L^2_R(s)$ . Условие реализуемости диаграммы  $\mathbf{F}(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$  по-прежнему

имеет вид (21), а постоянные  $a_m^n$  входят в выражение  $\mathbf{B}_n = \sum_{m=1}^n a_m^n R^{-1} \Phi_n^0$  и нахо-

дятся из условий  $(\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_m) = \delta_{nm}$ . Искомый вектор  $\mathbf{I}$  можно представить рядом  $\mathbf{I} = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \mathbf{V}_p$ , где коэффициенты  $C_p$ , как это следует из (49), определяются формулой

$$C_p = \sum_{m=1}^p \overline{a_m^p} \int_{(\Omega)} \mathbf{F}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_m(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Для  $\mathbf{V}_p$  и  $C_p$  могут также быть написаны рекуррентные формулы, тождественные (13) и (17).

### Литература

1. Фельд Я. Н.— Радиотехника и электроника, 1981, т. XXVI, № 6.
2. Hönl H., Maue A. W., Westpfahl K.— Theorie der beugung. Springer — Verlag, 1961.
3. Фельд Я. Н.— Радиотехника и электроника, 1979, т. XXIV, № 3.
4. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.
5. Фельд Я. Н.— Радиотехника и электроника, 1987, т. XXXII, № 6.
6. Фельд Я. Н., Ансрян А. К.— Радиотехника и электроника, 1978, т. XXIII, № 4.

Поступила 10 мая 1990 г.



*На юбилее Л.С. Бененсона.*

УДК 538.56

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© Я.Н. ФЕЛЬД

**ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ АНТЕНН**

*(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 6 III 1991)*

Теорема взаимности для двух произвольных антенн, расположенных (в общем случае) в неоднородной среде, при немонохроматических колебаниях может быть получена в результате обобщения соответствующей теоремы для монохроматических (гармонических) колебаний [1, 2].

Для этого рассмотрим две антенны — первую и вторую, к клеммам которых в режиме передачи подключены генераторы с эдс  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$ , удовлетворяющие условиям:

$$(1) \quad E_1(t) = E_2(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0.$$

Внутренние (комплексные) сопротивления этих генераторов на частоте  $\omega$  обозначим  $z_1(\omega)$  и  $z_2(\omega)$ . В режиме приема к клеммам антенн подключаются приемники, сопротивления которых на частоте  $\omega$  равны  $z^{(1)}(\omega)$  и  $z^{(2)}(\omega)$  соответственно. Токи, протекающие через клеммы антенн, в режиме передачи обозначим  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$ , а в режиме приема  $I^{(1)}(t)$  и  $I^{(2)}(t)$ . Очевидно, что все эти токи равны нулю при  $t \leq 0$ . Когда одна из антенн является передающей, другая работает приемной, и наоборот. Входные (комплексные) сопротивления антенн\*, отнесенные к их клеммам, на частоте  $\omega$  обозначим  $z_{a1}(\omega)$  и  $z_{a2}(\omega)$ . Представим прежде всего введенные эдс и токи в виде сумм интегралов монохроматических колебаний

$$(2) \quad \begin{aligned} E_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega, & E_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ I_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega, & I_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

и аналогично

$$(3) \quad I^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} dt, \quad I^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}^{(2)}(\omega) e^{i\omega t} dt.$$

Обратные преобразования Фурье позволяют написать

$$(2a) \quad \begin{aligned} \hat{E}_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_1(t) e^{-i\omega t} dt, & \hat{E}_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_2(t) e^{-i\omega t} dt, \\ \hat{I}_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I_1(t) e^{-i\omega t} dt, & \hat{I}_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I_2(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

\* Как обычно, эти сопротивления определяются в режиме передачи.

$$(3a) \quad \hat{I}^{(1)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I^{(1)}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \hat{I}^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I^{(2)}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

При этом учтены условия (1) и им аналогичные. Поскольку уравнения Максвелла линейные и справедлив принцип суперпозиции, выполняется теорема взаимности для каждой гармоники в отдельности. Такая общая теорема, справедливая также, когда внутреннее сопротивление генератора не равно сопротивлению приемника, т.е.

$$z_1(\omega) \neq z^{(1)}(\omega) \text{ и } z_2(\omega) \neq z^{(2)}(\omega),$$

впервые получена в работе [1] и приведена в книге [2]. Она имеет следующий вид:

$$(4) \quad \hat{I}_1(\omega) \hat{E}^{(1)}(\omega) = \hat{I}_2(\omega) \hat{E}^{(2)}(\omega).$$

Здесь

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{E}^{(1)}(\omega) &= \hat{I}^{(1)}(\omega) [z_{a1}(\omega) + z^{(1)}(\omega)], \\ \hat{E}^{(2)}(\omega) &= \hat{I}^{(2)}(\omega) [z_{a2}(\omega) + z^{(2)}(\omega)] \end{aligned}$$

суть полные эдс соответственно первой и второй антенн, когда они работают в режиме приема.

Учитывая эти равенства и очевидные формулы

$$\hat{I}_1(\omega) = \frac{\hat{E}_1(\omega)}{z_{a1}(\omega) + z_1(\omega)}, \quad \hat{I}_2(\omega) = \frac{\hat{E}_2(\omega)}{z_{a2}(\omega) + z_2(\omega)},$$

можно придать теореме (4) следующую форму [1]:

$$(6) \quad \hat{I}^{(1)} \hat{E}_1 \frac{z_{a1} + z^{(1)}}{z_{a1} + z_1} = \hat{I}^{(2)} \hat{E}_2 \frac{z_{a2} + z^{(2)}}{z_{a2} + z_2},$$

где для краткости записи опущен аргумент  $\omega$  у всех входящих в (6) величин.

Если выполняются равенства

$$(7) \quad z^{(1)} = z_1, \quad z^{(2)} = z_2,$$

то теорема взаимности (6) переходит в следующую:

$$(8) \quad \hat{I}^{(1)} \hat{E}_1 = \hat{I}^{(2)} \hat{E}_2.$$

Теперь перейдем к выводу общей теоремы взаимности для немонахроматических (негармонических) колебаний. Для этого умножим равенство (4) на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по  $d\omega$  от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = \infty$ . В результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_1(\omega) \hat{E}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_2(\omega) \hat{E}^{(2)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Переходя здесь от величин  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$  к  $I_1$  и  $I_2$  при помощи формул (2a) и заменяя при этом в последних переменную интегрирования  $t$  на  $\tau$ , найдем, изменяя порядок интегрирования,

$$(9) \quad \int_0^{\infty} I_1(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}^{(1)}(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau = \int_0^{\infty} I_2(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}^{(2)}(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau.$$

$$(10) \quad E^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad E^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}^{(2)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где  $E^{(1)}(t)$  и  $E^{(2)}(t)$  – мгновенные значения полных эдс антенн в режиме приема. Они вследствие начальных условий (1) также удовлетворяют условиям

$$(11) \quad E^{(1)}(t) = E^{(2)}(t) \doteq 0 \quad \text{при } t \leq 0.$$

Напомним, что эти эдс измеряются на клеммах антенн, когда нагрузки-приемники отключены. Учитывая (10) и (11), можно придать равенству (9) окончательный вид:

$$(12) \quad \int_0^t I_1(\tau) E^{(1)}(t - \tau) d\tau = \int_0^t I_2(\tau) E^{(2)}(t - \tau) d\tau.$$

Эту теорему можно также переписать следующим образом:

$$(12a) \quad \int_0^t E^{(1)}(\tau) I_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t E^{(2)}(\tau) I_2(t - \tau) d\tau.$$

Поскольку равенство (8) принадлежит к тому же типу, что и (4), то, повторяя проведенные выше выкладки, перейдем от (8) к равенству

$$(13) \quad \int_0^t I^{(1)}(\tau) E_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t I^{(2)}(\tau) E_2(t - \tau) d\tau.$$

Эта теорема взаимности впервые была получена в [3]. Однако она, в отличие от (12) или (12a), справедлива только при выполнении условия (7) для любых частот  $\omega$ .

Полученные здесь теоремы взаимности (12) и (12a) являются значительно более общими и справедливы при любых комплексных сопротивлениях приемников и генераторов в диапазоне  $-\infty < \omega < \infty$ , подключаемых к антеннам в соответствующих режимах.

Поступило  
18 III 1991

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я.Н. – ДАН, 1945, т. 48, № 7, с. 503.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. М., 1955, ч. 1, с. 36.
3. Фельд Я.Н. – ДАН, 1943, т. 41, № 7, с. 294.

Я.Н. Фельд

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАДАНЫМИ ТОКАМИ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КОНУСА, ОКОНЧИВАЮЩЕГОСЯ ШАРОМ

Методом вариации постоянных решена задача о возбуждении металлического усеченного конуса, дополненного частью шара, произвольной заданной системой электрических и магнитных токов. Построены две системы парциальных волн. Искомое поле найдено в виде рядов по каждой из этих систем, коэффициенты которых зависят от одной выделенной сферической координаты: в одном случае — от координаты  $\theta$ , во втором — от  $r$ . Сходимость этих рядов, а значит и выбор решения, зависит от величины радиуса шара.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим металлическое тело, состоящее из усеченного конуса, поверхность которого описывается соотношениями

$$\theta = \theta_0 (\theta_0 \leq \pi/2), \quad a \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

и части шара  $r = a, \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (рис. 1). Здесь  $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат с осью  $z$ , совпадающей с осью конуса.

Пусть в области  $\theta_0 < \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \geq a$  распределены заданные источники: электрические токи с плотностью  $\vec{J}$  и магнитные с плотностью  $\vec{J}^\mu$ . Обозначим  $\vec{E}, \vec{H}$  полное поле, возбуждаемое заданными токами в присутствии рассматриваемого тела. Будем полагать, что на поверхности тела выполняется краевое условие

$$(1) \quad \vec{E}_t = 0.$$

Для нахождения этого поля применим "метод вариации постоянных", предложенный в [1] и развитый в [2–4]. Решение при этом строим в виде ряда по парциальным волнам с коэффициентами, зависящими от одной "выделенной" координаты. В качестве последней выберем сначала  $\theta$ . Парциальные волны внутри интервала изменения  $\theta_0 < \theta < \pi$  удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла и на одном конце интервала должны выполняться для них краевые условия задачи. На другом конце интервала или за ним должны находиться источники, возбуждающие эту волну. Следует учитывать парциальные волны, источники которых находятся как у одного конца интервала, так и у другого.

### 1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА

Эти волны определяются при помощи потенциалов Дебая по формулам [2]

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) V, \quad H_r = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \\ E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}, \quad H_\theta = \frac{-ik}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \\ E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ik}{\rho r} \frac{\partial V}{\partial \theta}. \end{array} \right.$$

Использована практическая система единиц и зависимость от времени выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

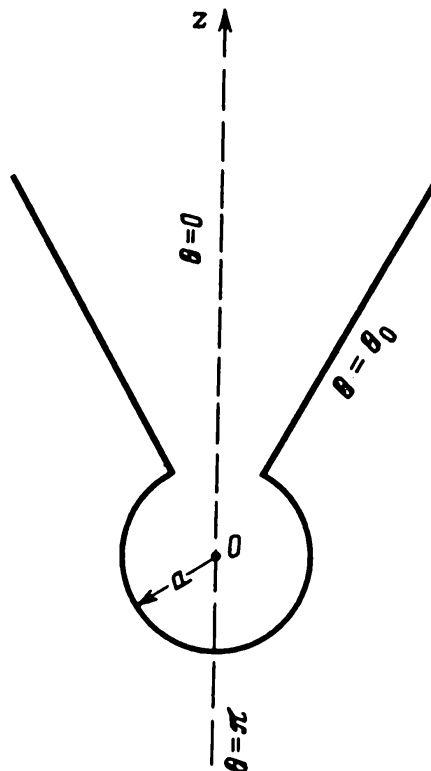


Рис. 1

В соответствии со сказанным выше потенциалы определяются следующими выражениями:

$$(3) \quad V = \zeta_\nu(kr) P_\nu^m(-\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \quad \zeta_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{\nu+1/2}^1(x),$$

где числа  $\nu$  — корни уравнения

$$(3a) \quad \zeta'_\nu(ka) = 0,$$

расположенные в первом квадранте комплексной плоскости. При этом соответствующие парциальные волны удовлетворяют краевым условиям задачи на сфере  $r = a$  и имеют источники, расположенные на полуоси  $\theta = 0$ .

Волны, источники которых расположены на полуоси  $\theta = \pi$ , определяются потенциалами

$$(4) \quad V = \zeta_\nu(kr) [P_\nu^m(\cos \theta) + A_\nu^m P_\nu^m(-\cos \theta)] \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где числа  $\nu$  и  $A_\nu^m$  являются корнями уравнений

$$(4a) \quad \zeta'_\nu(ka) = 0 \quad \text{и} \quad P_\nu^m(\cos \theta_0) + A_\nu^m P_\nu^m(-\cos \theta_0) = 0.$$

При этом выполняются краевые условия задачи на всей поверхности рассматриваемого тела.

## 2. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ МАГНИТНОГО ТИПА

Эти волны определяются формулами [2]

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = 0, \quad H_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) U, \\ E_\theta = \frac{ik\rho}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, \\ E_\varphi = -\frac{ik\rho}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}, \end{array} \right.$$



$$(6) \quad U = \zeta_{\kappa}(kr)P_{\kappa}^m(-\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

и

$$(7) \quad U = \zeta_{\kappa}(kr)[P_{\kappa}^m(\cos\theta) + B_{\kappa}^m P_{\kappa}^m(-\cos\theta)] \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases}$$

Однако здесь числа  $\kappa$  и  $B_{\kappa}^m$ , как легко сообразить, учитывая (5), находятся из уравнений

$$(8) \quad \zeta_{\kappa}(ka) = 0 \text{ и } P_{\kappa}^{m'}(\cos\theta_0) - B_{\kappa}^m P_{\kappa}^{m'}(-\cos\theta_0) = 0.$$

Учитываются корни  $\kappa$ , расположенные в первом квадранте комплексной плоскости. При этом опять выполняются краевые условия задачи для (6) на сфере  $r = a$  и на поверхности всего тела для (7).

В формулах (3)–(8) индекс  $m$  может принимать любые неотрицательные целочисленные значения.

### 3. НУМЕРАЦИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

Из изложенного следует, что существует счетное множество введенных выше парциальных волн. Поэтому их можно перенумеровать при помощи одного индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения, кроме нуля.

Сделаем это при условии, что парциальные волны  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  при  $p > 0$  определяются потенциалами типа (3) и (6), а при  $p < 0$  – потенциалами (4) и (7). Одновременно будем полагать, что волны  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и  $\vec{E}^{-p}, \vec{H}^{-p}$  ( $p > 0$ ) однотипны (т.е. обе электрические или магнитные) и различаются только заменой  $P_{\nu}^m(-\cos\theta) \cdot (P_{\kappa}^m(-\cos\theta))$  на  $P_{\nu}^m(\cos\theta) + A_{\nu}^m P_{\nu}^m(-\cos\theta) (P_{\kappa}^m(\cos\theta) + B_{\kappa}^m P_{\kappa}^m(-\cos\theta))$  в выражениях для потенциалов. Обозначим через  $s(\theta)$  поверхность усеченного конуса  $\theta = \text{const}, r \geq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Для введенных парциальных волн справедливы следующие условия ортогональности:

$$(9) \quad \int_{s(\theta)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} = 0 \text{ при } p \neq \pm q.$$

Доказать это можно, используя лемму Лоренца, которая для области, ограниченной поверхностями  $s(\theta_1), s(\theta_2)$  ( $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ ) и частью сферы  $r = a$ , имеет вид

$$(10) \quad \int_{s(\theta_1)} \{[\vec{E}^p \vec{H}^q] - [\vec{E}^q \vec{H}^p]\} \vec{ds} = \int_{s(\theta_2)} \{[\vec{E}^p \vec{H}^q] - [\vec{E}^q \vec{H}^p]\} \vec{ds}.$$

При этом учтено, что оба поля удовлетворяют условию (1) на сфере  $r = a$ .

Повторяя с небольшими изменениями доказательство, приведенное в [2], рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Индексу  $p$  соответствует электрическая, а  $q$  – магнитная волна. Тогда (10) перепишем следующим образом:

$$\int_{s(\theta_1)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} = \int_{s(\theta_2)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds}.$$

Левая часть – функция  $\theta_1$ , а правая –  $\theta_2$ , поэтому они равны постоянной, которая равна нулю, так как левая часть содержит множитель, являющийся функцией  $\theta_1$ ; то же можно сказать о правой части с заменой  $\theta_1$  на  $\theta_2$ . Доказательство

для случая, когда  $p$  соответствует магнитной, а  $q$  — электрической волне, ана-821 логично приведенному.

2. Индексы  $p$  и  $q$  одного знака и соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам. В этом случае, устремляя  $\theta_1 \rightarrow \theta_0$  (при  $p, q < 0$ ) или  $\theta_2 \rightarrow \pi$  (при  $p, q > 0$ ), приведем (10) к виду

$$(11) \quad \int_{s(\theta)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} = \int_{s(\theta)} [\vec{E}^q \vec{H}^p] \vec{ds},$$

где индекс у  $\theta$  опущен.

Если  $p \neq q$ , то, как следует из (2)–(7), левая и правая части (11) имеют множителями различные функции от  $\theta$  и, следовательно, должны быть равны нулю. Исключением является случай, когда  $p \neq q$  только потому, что в соответствующих выражениях для потенциалов (3), (4) либо (6), (7) у волны  $p$  стоит  $\cos m\varphi$  а у волны  $q$  стоит  $\sin m\varphi$  или наоборот. Однако и в этом случае левая и правая части (11) обращаются в нуль за счет ортогональности указанных тригонометрических функций на интервале  $0 - 2\pi$ .

3. Индексы  $p$  и  $q$  различных знаков и обоим соответствуют либо электрические, либо магнитные волны. В этом случае согласно п. 2

$$(12) \quad \int_{s(\theta)} [\vec{E}^p \vec{H}^{-q}] \vec{ds} = 0 \quad \text{при } p \neq -q.$$

Если теперь в этом равенстве заменить  $-q$  на  $q$ , то изменится только множитель, зависящий от  $\theta$ , содержащийся в левой части (12), а само равенство не нарушится. Таким образом, и

$$\int_{s(\theta)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} = 0 \quad \text{при } p \neq -q.$$

Доказательство справедливости (9) закончено.

#### 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $\theta$

При этом решение может быть представлено в виде следующих рядов:

$$(13) \quad \vec{E} = \sum_p C_p(\theta) \vec{E}^p + \vec{F}, \quad \vec{H} = \sum_p C_p(\theta) \vec{H}^p + \vec{f}.$$

Здесь  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  — введенные выше парциальные волны,  $C_p(\theta)$  — искомые неизвестные функции  $\theta$ ;  $\vec{F}, \vec{f}$  — искомые поправочные члены; суммирование проводится по индексу  $p$ , пробегающему значения  $\pm 1, \pm 2, \dots$ . Учитывая, что парциальные волны удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла в области  $\theta_0 < \theta < \pi$ , и повторяя дословно выкладки и соображения, приведенные в работе [2] (формулы (12)–(17)), получим

$$(14) \quad \frac{dC_q}{d\theta} = \frac{\int_{s(\theta)} (\vec{J} \vec{E}^{-q} - \vec{J}^\mu \vec{H}^{-q}) r ds}{\int_{s(\theta)} \{[\vec{E}^q \vec{H}^{-q}] - [\vec{E}^{-q} \vec{H}^q]\} \vec{ds}}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$(15) \quad F = F_\theta = \frac{\rho}{ik} J_\theta, \quad f = f_\theta = \frac{1}{ik\rho} J_\theta^\mu.$$

Как следует из равенства (10), знаменатель в (14) — величина постоянная, не зависящая от  $\theta$ . Будем полагать, что токи  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^\mu$  распределены в области  $\alpha < \theta < \beta$  ( $\theta_0 < \alpha < \beta < \pi, r > a$ ). При этом числитель в (14) равен нулю при

$\theta < \alpha$  и  $\theta > \beta$  и, следовательно,  $C_q = \text{const}$  вне интервала  $(\alpha, \beta)$ . Очевидно, что для  $q < 0$  коэффициенты  $C_q(\theta) = 0$  при  $\theta \geq \beta$ , так как если бы они были отличны от нуля, то в решении (13) присутствовал бы член с  $p = q$ , обращающийся в бесконечность при  $\theta = \pi$ , чего не должно быть. Аналогично для  $q > 0$  величины  $C_q(\theta) = 0$  при  $\theta \leq \alpha$ , действительно, если бы эти величины были отличны от нуля, то, как следует из (13), комплексная мощность искомого поля, проходящая через поверхность усеченного конуса  $\theta = \theta_0$ , была бы конечна и направлена в сторону возрастания  $\theta$ , что абсурдно. Напомним, что на основании сказанного выше величины  $C_q(\theta) = \text{const}$  при  $\theta \leq \alpha$ .

Учитывая сказанное; проинтегрируем (14) по  $d\theta$  от  $\theta = \alpha$  до  $\theta$ , а затем от  $\theta = \beta$  до  $\theta$ , после чего получим

$$(16) \quad C_q(\theta) = \frac{\pm \int_{v^\pm} \{ \vec{J} \vec{E}^{-q} - \vec{J}^\mu \vec{H}^{-q} \} dv}{\int_{s(\theta)} \{ [\vec{E}^q \vec{H}^{-q}] - [\vec{E}^{-q} \vec{H}^q] \} ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь знак "+" соответствует  $q > 0$ , а знак "-"  $q < 0$ ;  $v^+$  — область, ограниченная поверхностями  $s(\alpha)$ ,  $s(\theta)$  и частью сферы  $r = a$ ,  $v^-$  — область, ограниченная  $s(\theta)$ ,  $s(\beta)$  и частью сферы  $r = a$ . Таким образом, поле, возбуждаемое заданными токами  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^\mu$ , найдено. Полученное решение (13) хорошо сходится при  $ka \gg 1$ .

При  $ka$  порядка единицы или меньше в качестве выделенной координаты следует использовать  $r$ .

## 5. РЕШЕНИЕ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $r$

Это решение имеет вид

$$(17) \quad \vec{E} = \sum_p C_p(r) \vec{E}^p + \vec{F}; \quad \vec{H} = \sum_p C_p(r) \vec{H}^p + \vec{f}.$$

Здесь  $\vec{E}^p$ ,  $\vec{H}^p$  — парциальные волны, которые отличны от использованных выше и определяются следующим образом. Общие формулы (2) и (5) сохраняются, однако потенциалы  $V$  и  $U$  теперь задаются выражениями

$$(18) \quad V = \zeta_\nu(kr) P_\nu^m(-\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где числа  $\nu$  — корни уравнения

$$(18a) \quad P_\nu^m(-\cos \theta) = 0,$$

а

$$(19) \quad U = \zeta_\kappa(kr) P_\kappa^m(-\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где числа  $\kappa$  — корни уравнения

$$(19a) \quad P_\kappa^m(-\cos \theta_0) = 0.$$

Учитываются только корни  $\nu$  и  $\kappa$ , расположенные в правой полуплоскости.

Потенциалы типа (18), как и выше, определяют электрические волны, а (19) — магнитные. Эти волны удовлетворяют принципу излучения при  $r \rightarrow \infty$  и краевому условию (1) на поверхности конуса  $\theta = \theta_0$ . Источники этих волн находятся в точке  $r = 0$ . Рассмотренные волны нумеруются при помощи одного индекса  $p$ , принимающего целочисленные положительные значения.

Кроме рассмотренных следует ввести еще парциальные волны, источники которых расположены на бесконечности  $r = \infty$ . При этом электрические волны

определяются потенциалами типа

$$(20) \quad V = [\psi_\nu(kr) - \frac{\psi'_\nu(ka)}{\zeta'_\nu(ka)} \zeta_\nu(kr)] P_\kappa^m(-\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases}$$

где  $\psi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\nu+1/2}(x)$ , а числа  $\nu$  являются корнями уравнения

$$(20a) \quad P_\nu^m(-\cos \theta_0) = 0,$$

расположенными в правой полуплоскости.

Аналогично магнитные волны определяются потенциалами

$$(21) \quad U = [\psi_\kappa(kr) - \frac{\psi_\kappa(ka)}{\zeta_\kappa(ka)} \zeta_\kappa(kr)] P_\kappa^m(-\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где числа  $\kappa$  – корни уравнения

$$(21a) \quad P_\kappa^{m'}(-\cos \theta_0) = 0,$$

расположенные в правой полуплоскости.

Отметим, что уравнения (19a) и (21a), а также второе равенство (8) должны быть умножены на  $\sin \theta_0$ , когда рассматривается задача с  $\theta_0 \rightarrow 0$ .

Для волн, определяемых потенциалами (20) и (21), выполняется краевое условие (1) на всей поверхности рассматриваемого тела. Эти волны нумеруются при помощи индекса  $p$ , принимающего целочисленные отрицательные значения.

Одновременно будем полагать, что волны  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и  $\vec{E}^{-p}, \vec{H}^{-p}$  ( $p > 0$ ) однотипны (т.е. обе электрические или обе магнитные) и различаются только заменой  $\zeta_\nu(kr)$  ( $\zeta_\kappa(kr)$ ) на

$$\psi_\nu(kr) - \frac{\psi'_\nu(ka)}{\zeta'_\nu(ka)} \zeta_\nu(kr), (\psi_\kappa(kr) - \frac{\psi_\kappa(ka)}{\zeta_\kappa(ka)} \zeta_\kappa(kr))$$

в выражениях для соответствующих потенциалов.

## 6. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН В СЛУЧАЕ ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТЫ $r$

Обозначим  $s(r)$  часть поверхности сферы радиусом  $r$ , для которой  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$  ( $r \geq a$ ). Тогда условие ортогональности для введенных парциальных волн имеет вид

$$(22) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} = 0 \quad \text{при } p \neq \pm q.$$

Доказательство проведем, как и выше, применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и  $\vec{E}^q, \vec{H}^q$  в области, ограниченной поверхностями  $s(r)$ ,  $s(a)$  и частью конуса  $\theta = \theta_0$ . Учитывая, что эти поля удовлетворяют на конусе краевому условию (1), получим

$$(23) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} - \int_{s(r)} [\vec{E}^q \vec{H}^p] \vec{ds} = \int_{s(a)} \{[\vec{E}^p \vec{H}^q] - [\vec{E}^q \vec{H}^p]\} \vec{ds}.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Индексы  $p$  и  $q$  одного знака и соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам. При этом равенство (23) сводится к следующему:

$$(24) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] \vec{ds} = \int_{s(r)} [\vec{E}^q \vec{H}^p] \vec{ds}.$$

Для  $p < 0$  и  $q < 0$  это равенство немедленно следует из справедливости краевого условия (1) для подобных волн. Если  $p > 0$  и  $q > 0$ , то правая часть

(23) = const, а левая, как это следует из формул (2), (5) и выражений для потенциалов (18)–(21), равна некоторой функции от  $r$ , умноженной на константу, что возможно, если эти константы равны нулю. В свою очередь, если  $p \neq q$ , то левая и правая части (24) также равны различным функциям от  $r$ , умноженным на константы, что возможно, если последние равны нулю. Исключением является случай, когда  $p \neq q$  только потому, что в соответствующих выражениях для потенциалов у волны  $p$  стоит  $\cos m\varphi$ , а у волны  $q$  стоит  $\sin m\varphi$  или наоборот. Однако и в этом случае левая и правая части (24) обращаются в нуль вследствие ортогональности указанных тригонометрических функций на интервале  $0 - 2\pi$ .

2. Индексы  $p$  и  $q$  различных знаков и соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам. В этом случае согласно доказанному в п. 1

$$(25) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^{-q}] d\vec{s} = 0, \quad \text{когда } p \neq -q.$$

Если теперь в этом равенстве заменить  $-q$  на  $q$ , то в выражении для соответствующего потенциала изменится только множитель, зависящий от  $r$  (см. (18), (20) и (19), (21)). Следовательно, изменится только множитель, зависящий от  $r$ , содержащийся в левой части (25), а само равенство не нарушится. Таким образом, и

$$\int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] d\vec{s} = 0 \quad \text{при } p \neq -q.$$

3. Индексу  $p$  соответствует электрическая, а  $q$  – магнитная волна или наоборот.

Доказательство тождественно приведенному в п. 1. Таким образом, справедливость равенства (22) установлена для всех парциальных волн.

#### 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $r$

Уравнения Максвелла имеют вид

$$(26) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{k}{i\rho} \vec{E} + \vec{J}, \quad \text{rot } \vec{E} = ik\rho \vec{H} - \vec{J}^\mu,$$

где токи  $\vec{J}$ ,  $\vec{J}^\mu$  заданы и распределены в области  $r_\alpha < r < r_\beta$ . Подставляя выражения (17) в уравнения (26), найдем

$$(27) \quad \left. \begin{aligned} \sum_p [\nabla C_p \vec{H}^p] + \text{rot } \vec{f} &= -\frac{ik}{\rho} \vec{F} + \vec{J}, \\ \sum_p [\nabla C_p \vec{E}^p] + \text{rot } \vec{F} &= ik\rho \vec{f} - \vec{J}^\mu, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta_0 < \theta \leq \pi, \\ r > a. \end{aligned}$$

Так как число неизвестных здесь больше, чем может быть определено из этих уравнений, полагаем

$$F_\theta = F_\varphi = f_\theta = f_\varphi = 0,$$

после чего система (27) расщепляется на две:

$$(28) \quad \vec{F} = \frac{\rho}{ik} J_r \vec{i}_r, \quad \vec{f} = \frac{1}{ik\rho} J_r^\mu \vec{i}_r$$

и

$$(29) \quad \sum_p [\nabla C_p \vec{H}^p] + \text{rot } \vec{f} = J_\perp, \quad \sum_p [\nabla C_p \vec{E}^p] + \text{rot } \vec{F} = -\vec{J}_\perp^\mu.$$

Здесь  $\vec{J}_\perp$  и  $\vec{J}_\perp^\mu$  – поперечные относительно орта  $\vec{i}_r$  части векторов  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^\mu$ .

Формулы (28) определяют векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{f}$ , а система (29) может быть использована для нахождения коэффициентов  $C_p(r)$ . Для этого умножим первое равенство (29) скалярно на  $\vec{E}^{-q}$ , а второе – на  $\vec{H}^{-q}$  и результаты проинтегрируем по поверхности  $s(r)$  ( $r > a$ ). Учитывая условия ортогональности (22), найдем

$$\begin{aligned} & \frac{dC_q}{dr} \int_{s(r)} [\vec{E}^{-q} \vec{H}^q] \vec{ds} + \frac{dC_{-q}}{dr} \int_{s(r)} [\vec{E}^{-q} \vec{H}^{-q}] \vec{ds} = \\ & = \int_{s(r)} \vec{E}^{-q} (\text{rot } \vec{f} - \vec{J}_\perp) ds, \\ & \frac{dC_q}{dr} \int_{s(r)} [\vec{E}^q \vec{H}^{-q}] \vec{ds} + \frac{dC_{-q}}{dr} \int_{s(r)} [\vec{E}^{-q} \vec{H}^{-q}] \vec{ds} = \\ & = - \int_{s(r)} \vec{H}^{-q} (\text{rot } \vec{F} + \vec{J}_\perp^\mu) ds. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно неизвестных  $C'_q(r)$  и  $C'_{-q}(r)$ , получим

$$(30) \quad \frac{dC_q}{dr} = \frac{\int_{s(r)} \{ \vec{E}^{-q} (\text{rot } \vec{f} - \vec{J}_\perp) + \vec{H}^{-q} (\text{rot } \vec{F} + \vec{J}_\perp^\mu) \} ds}{\int_{s(r)} \{ [\vec{E}^{-q} \vec{H}^q] - [\vec{E}^q \vec{H}^{-q}] \} ds}$$

Выражение для  $C'_{-q}(r)$  получаем из (30) заменой  $q$  на  $-q$ . Числитель в (30) упрощается, если учесть (28). Легко показать, что

$$\begin{aligned} \int_{s(r)} \vec{E}^{-q} \text{rot } \vec{f} ds &= \int_{s(r)} \vec{H}^{-q} J_r^\mu \vec{i}_r ds, \\ \int_{s(r)} \vec{H}^{-q} \text{rot } \vec{F} ds &= - \int_{s(r)} \vec{E}^{-q} J_r \vec{i}_r ds. \end{aligned}$$

При этом учтено также, что физически реализуемая составляющая  $J_r = 0$  при  $\theta = \theta_0$ . Используя эти равенства, придадим (30) следующий вид:

$$(31) \quad \frac{dC_q}{dr} = \frac{\int_{s(r)} \{ \vec{E}^{-q} \vec{J} - \vec{H}^{-q} \vec{J}^\mu \} ds}{\int_{s(r)} \{ [\vec{E}^q \vec{H}^{-q}] - [\vec{E}^{-q} \vec{H}^q] \} ds}.$$

Как видно из (23), знаменатель в (31) – величина постоянная, не зависящая от  $r$ . Числитель в (31) равен нулю при  $r > r_\beta$  и  $r < r_\alpha$  и, следовательно,  $C_q = \text{const}$  вне интервала  $r_\alpha < r < r_\beta$ . Для  $q < 0$  коэффициенты  $C_q = 0$  при  $r \geq r_\beta$ , а для  $q > 0$  коэффициенты  $C_q = 0$  при  $r \leq r_\alpha$ . Последнее следует из соображений, аналогичных приведенным выше для  $C_q(\theta)$ . Учитывая сказанное, проинтегрируем равенство (31) по  $dr$  от  $r = r_\alpha$  до  $r$ , а затем от  $r = r_\beta$  до  $r$ , после чего найдем

$$(32) \quad C_q(r) = \frac{\pm \int_{v^\pm} \{ \vec{J} \vec{E}^{-q} - \vec{J}^\mu \vec{H}^{-q} \} dv}{\int_{s(r)} \{ [\vec{E}^q \vec{H}^{-q}] - [\vec{E}^{-q} \vec{H}^q] \} ds}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь знак "+" соответствует положительным  $q$ , а знак "-" – отрицательным;  $v^+$  – область, ограниченная поверхностями  $s(r_\alpha)$ ,  $s(r)$  и частью конуса  $\theta = \theta_0$ , а  $v^-$  – область, ограниченная поверхностями  $s(r)$ ,  $s(r_\beta)$  и частью конуса  $\theta = \theta_0$ .

Формулы (17), (28) и (32) дают решение задачи о возбуждении идеально проводящего конуса, оканчивающегося идеально проводящей сферой (рис. 1), произвольной системой электрических и магнитных токов; в частности, эти фор-

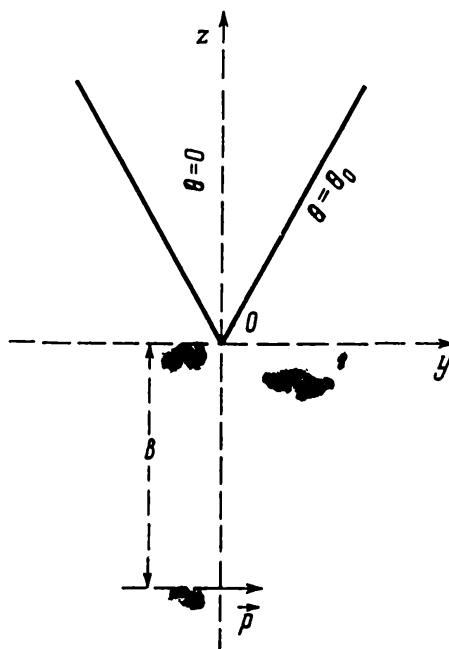


Рис. 2

мулы пригодны для определения поля, возбуждаемого любыми отверстиями, прорезанными в поверхности конуса или сферы, если известны распределения касательной составляющей электрического вектора в этих отверстиях.

Рассмотрим еще предельный случай, когда радиус сферы стремится к нулю, т.е. имеет место дифракция на одном конусе  $\theta = \theta_0$ . При этом все формулы (17)–(32) сохраняются, за исключением выражений (20) и (21) для потенциалов, которые принимают вид

$$(33) \quad V = \psi_\nu(kr)P_\nu^m(-\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

и

$$(34) \quad U = \psi_\kappa(kr)P_\kappa^m(-\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases}$$

Величины  $\nu$  и  $\kappa$  определяются по-прежнему из уравнений (20а) и (21а).

### Возбуждение металлического конуса электрическим диполем (пример)

Пусть диполь расположен на оси  $z$  в точке с координатами  $r = b$ ,  $\theta = \pi$  и моментом  $\vec{p}$ , ориентированным параллельно оси  $y$  (рис. 2). Угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$ . При этом первичное поле диполя имеет компоненту  $E_\varphi^0$ , пропорциональную  $\sin \varphi$ , и компоненту  $E_\theta^0$ , пропорциональную  $\cos \varphi$  [5]. Аналогичную зависимость от  $\varphi$  имеют рассеянное поле и токи, наведенные на конусе. Поэтому в рассматриваемом случае, учитывая сказанное и формулы (2), (5), потенциалы (18)–(21) сводим к следующим:

$$(18б) \quad V = \zeta_\nu(kr)P_\nu^1(-\cos\theta) \sin \varphi, \quad P_\nu^1(-\cos\theta_0) = 0,$$

$$(19б) \quad U = \zeta_\kappa(kr)P_\kappa^1(-\cos\theta) \cos \varphi, \quad P_\kappa^{1'}(-\cos\theta_0) = 0,$$

$$(20б) \quad V = \psi_\nu(kr)P_\nu^1(-\cos\theta) \sin \varphi, \quad P_\nu^1(-\cos\theta_0) = 0,$$

$$(21б) \quad U = \psi_\kappa(kr)P_\kappa^1(-\cos\theta) \cos \varphi, \quad P_\kappa^{1'}(-\cos\theta_0) = 0.$$

Искомое поле, определяемое формулами (17), в области  $r > b$  имеет вид **827**

$$(35) \quad \vec{E} = \sum_{q=1}^{\infty} C_q \vec{E}^q, \quad \vec{H} = \sum_{q=1}^{\infty} C_q \vec{H}^q.$$

Корни  $\nu$  и  $\kappa$  будем нумеровать в соответствии с возрастанием их модулей. Причем для того чтобы перенумеровать  $\nu$  и  $\kappa$ , а следовательно, и соответствующие им парциальные волны одним индексом  $q$ , корни  $\nu$  будем нумеровать при помощи нечетных значений  $q$ , и  $\kappa$  — при помощи четных. Таким образом,

$$|\nu_q| \leq |\nu_{q+1}| \quad \text{и} \quad |\kappa_q| \leq |\kappa_{q+2}|.$$

Фигурирующие в (35) коэффициенты  $C_q$  постоянны и согласно (32), (186), (196) равны

$$C_q = \frac{iv_q(1+\nu_q)\omega\rho r\psi'_{\nu_q}(kb)}{2\pi kb \int_{-\cos\theta_0}^1 \left\{ \left( \sqrt{1-x^2} \frac{dP_{\nu_q}^1(x)}{dx} \right)^2 - \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_{\nu_q}^1(x) \right)^2 \right\} dx};$$

$$q = 1, 3, \dots,$$

и

$$C_q = \frac{\kappa_q^2 \omega r \psi_{\kappa_q}(kb)}{2\pi kb \int_{-\cos\theta_0}^1 \left\{ \left( \sqrt{1-x^2} \frac{dP_{\kappa_q}^1(x)}{dx} \right)^2 - \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_{\kappa_q}^1(x) \right)^2 \right\} dx};$$

$$q = 2, 4, \dots$$

Парциальные волны электрические и магнитные в решении (35) определяются при помощи формул (2) и (5) соответственно, где потенциалы  $V$  и  $U$  задаются формулами (186) и (196).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // РЭ. 1976. Т. 21. № 12. С. 2615.
2. Фельд Я.Н., Фельд С.Я. // РЭ. 1977. Т. 22. № 9. С. 1829.
3. Фельд Я.Н., Фельд С.Я. // РЭ. 1978. Т. 23. № 10. С. 2212.
4. Фельд Я.Н., Фельд С.Я. // РЭ. 1980. Т. 25. № 12. С. 2481.
5. Фельд Я.Н. // РЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1596.

Поступила в редакцию  
11.12.90



# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Журнал основан  
в январе 1956 г.

Выходит 12 раз  
в год

Том 36

Декабрь 1991

Вып.12

МОСКВА

” НАУКА ”

УДК 621.396.677

© 1991 г.

Я.Н. Фельд, Л.С. Бененсон

## ДИФРАКЦИОННО-ЩЕЛЕВЫЕ АНТЕННЫ

(Обзор теории и методов расчета)

### ВВЕДЕНИЕ

Излучение через отверстие в металлическом экране-стенке замкнутого резонатора впервые рассмотрено М.С. Нейманом [1], который высказал идею о принципиальной возможности создания на основе этого эффекта антенн нового типа: дифракционных. Аналогичную задачу позднее рассмотрел Л.И. Мандельштам [2]. В этих работах изучены малые (в долях  $\lambda$ ) отверстия, эффект излучения которых незначителен. Широко применять щелевые антенны начали во второй половине 40-х годов, когда конструктивные и технологические преимущества щелевых излучателей перед вибраторами (в диапазоне СВЧ) стали очевидны. Уже в 1947 г. была описана телевизионная передающая антенна в виде решетки продольных щелей, выполненных на вертикально стоящей цилиндрической трубе и возбуждаемых кабелем [3].

В дальнейшем стали разрабатывать и волноводно-щелевые антенны. Первоначально расчеты таких антенн выполняли приближенными методами: энергетическим [4–6] и эквивалентных схем [7] при определении параметров отдельных излучателей экспериментальным путем. Одновременно развивалась и строгая теория. Так, А.А. Пистолькорс [8] сформулировал принцип двойственности для щелей в бесконечном плоском экране, при помощи которого поле таких щелей сводится к полю ленточных вибраторов, дополняющих экран до сплошного. Аналог оптического принципа Бабинне дан Букером [9]. Позднее М.А. Леонтович [10] и Я.Н. Фельд [11] предложили более общие формулировки этого принципа. А.А. Пистолькорс рассчитал также и диаграммы направленности щелей в плоском экране [12] и круговом цилиндре [13], изучил волны в желобе [14]. Фундамент строгой теории щелевых антенн заложен в работах [15–22], завершившихся обобщающей монографией [23]. В этих работах сформулированы граничные задачи электродинамики и получены интегральные уравнения для решения этих задач [15], развиты

общие методы решения интегральных уравнений дифракционно-щелевых антенн [16], рассмотрены осесимметричные [17] и несимметричные [18] узкие щели, для которых найдены законы распределения напряжений вдоль щелей и излучаемая ими мощность [19], исследованы щели в резонаторе, причем для нахождения распределения напряжения в щели на резонансных частотах резонатора разработан специальный метод [20]. Общая теория применена также для расчета излучения щели в круглом волноводе [21].

Для приближенного расчета многощелевых антенн Я.Н. Фельдом предложен метод наведенных магнитодвижущих сил [22], в дальнейшем обобщенный так, чтобы решать интегральные уравнения с любой степенью точности [24]. Интегральное уравнение для излучающей щели в прямоугольном волноводе изучено Стивенсоном [25]. Ряд вопросов теории щелевых антенн рассмотрен в [26, 27]. Дальнейшему развитию общей теории щелевых антенн и устройств посвящены исследования И.Б. Левинсона, П.Ш. Фридберга, Л.Н. Гейвандова и Х.Л. Гарба [28]. В работе [28] интегральное уравнение щелевой антенны, полученное Я.Н. Фельдом [18], преобразовано в уравнение 2-го рода, а решение его записано в виде рядов по собственным модам волновода; при этом рассмотрены нелогарифмически узкие щели. В последующих работах решен ряд важных частных задач, таких, например, как расчет поперечных [29] и продольных [30] щелей, учет конечной толщины стенки волновода [31], расчет слабоизлучающих щелей (прорезаемых вдоль линий тока на стенке волновода или резонатора) [32] и щелей в резонаторах [33]; для расчета коэффициентов матриц рассеяния щели как элемента связи волноводов и резонаторов применен метод стационарных функционалов [34]. В этой работе использованы результаты исследований Л.А. Вайнштейна [35] и Я.Н. Фельда [36] по двойному вариационному принципу. Разработанный в [36] общий метод построения стационарных функционалов для любых параметров, являющихся линейными функционалами тока или поля, позволяет находить как диаграммы направленности излучателей, так и их взаимные сопротивления, проводимости и другие характерные величины.

В дальнейшем общую теорию успешно применяли при решении различных практических задач. Так, в частности, получены формулы для расчета собственных и взаимных проводимостей щелей: внутренних [37, 38] и внешних [39, 40]. А.А. Олинер [41] составил стационарный функционал для вычисления внутренней собственной проводимости щели в волноводе и рассчитал ее для наиболее важных случаев.

Разработан метод последовательных приближений решения уравнения волноводных многощелевых антенн, при котором в первом приближении учитывается лишь основная (первичная) волна в волноводе, а поправки, обусловленные высшими типами волн и внешними взаимодействиями, находятся в последующих приближениях [42–44].

Рассчитаны одиночные излучатели различных конфигураций: крестообразные на боковой стенке [45] и в торце [46] волновода, нерезонансные [47] и наклонно-смещенные [48] щели, найдены эквивалентные параметры различных щелей [49–51].

Рассчитаны многощелевые антенны различных конструкций, например, решетки длинных поперечных щелей в стенке плоского волновода [52, 53], антенны бегущей волны с учетом отражений основной волны от излучателей [54]. Среди более поздних работ интересна методика, при которой внешние и внутренние взаимодействия учитываются путем введения эквивалентной проводимости щели в решетке, а в аналитические формулы вводятся экспериментальные данные [55–57].

Ниже представлены основы общей теории щелевых антенн и практических расчетов волноводно-щелевых антенн.

Задачей общей теории [15] является нахождение электромагнитных полей, возбуждаемых внутри и вне дифракционно-щелевой антенны. Для этого следует либо, найдя касательные компоненты  $\vec{E}_\tau$  электрического вектора на геометрической поверхности отверстия (щели), решить затем внешнюю и внутреннюю краевые задачи электродинамики, т.е. определить поля вне и внутри замкнутой поверхности, на которой задано  $\vec{E}_\tau$ , либо, найдя поверхностные электрические токи, текущие по металлу антенны, вычислить поля этих токов по известным квадратурным формулам.

Ниже рассматривается более простой первый метод, базирующийся на первой краевой задаче электродинамики, сводящейся к определению поля в объеме  $V$  по значениям  $\vec{E}_\tau$ , заданным на замкнутой поверхности  $s$ , ограничивающей этот объем изнутри или снаружи. Это поле определяется формулами

$$(1) \quad \vec{E}(q') = \int_s \vec{E}'(q', q; \vec{K}^\mu) ds, \quad \vec{H}(q') = \int_s \vec{H}'(q', q; \vec{K}^\mu) ds,$$

где  $\vec{K}^\mu = [\vec{n}\vec{E}]$  – поверхностный магнитный ток, распределенный на  $s$ ;  $\vec{E}(q', q; \vec{K}^\mu)$ ,  $\vec{H}(q', q; \vec{K}^\mu)$  – поле, возбуждаемое в точке  $q$  объема  $V$  магнитным током  $\vec{K}^\mu$ , распределенным на элементе  $ds$  поверхности  $s$ , которая при этом считается идеально проводящей;  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней (по отношению к  $V$ ) нормали к  $s$ . Если в области  $V$  находятся заданные сторонние точки  $\vec{J}^{ct}$ , то к полям (1) следует добавить поле этих токов, удовлетворяющее на  $s$  условию  $\vec{E}_\tau \{ \vec{J}^{ct} \} = 0$ .

Решение первой краевой задачи может быть найдено также прямым методом. При этом на поверхности  $s$  задается семейство вспомогательных поверхностных электрических токов  $\{ \vec{K}_n \}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); при расчете поля этих токов все пространство рассматривается как однородная среда с теми же параметрами, что и внутри  $V$ . Применяя лемму Лоренца к искомому полю  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и вспомогательному полю  $\vec{E} \{ \vec{K}_n; s \}$ ,  $\vec{H} \{ \vec{K}_n; s \}$ , создаваемому током  $\vec{K}_n$ , распределенным на  $s$ , найдем

$$(2) \quad \int_s [\vec{E}\vec{H} \{ \vec{K}_n; s \}] d\vec{s} = \int_s [\vec{E}' \{ \vec{K}_n; s \} \vec{H}] d\vec{s}.$$

Вводя обозначения

$$(3) \quad a_n = \int_s [\vec{E}\vec{H} \{ \vec{K}_n; s \}] d\vec{s}, \quad \vec{F}_n^* = [n\vec{E} \{ \vec{K}_n; s \}],$$

перепишем (2) в виде

$$(4) \quad \int_s \vec{H}\vec{F}_n^* ds = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь  $F_n$  – известные функции,  $a_n$  – известные постоянные.

Если токи  $\{ \vec{K}_n \}$  линейно независимы, принадлежат пространству  $H^1(s)$  и их линейные комбинации всюду плотны в нем, то семейство  $\{ \vec{F}_n \}$  линейно независимо, принадлежит пространству  $L^2(s)$  и полно в нем. Ортогонализируя семейство  $\{ \vec{F}_n \}$ , т.е. вводя функции

$$(5) \quad \vec{\Phi}_m = \sum_{n=1}^m a_n^{(m)} \vec{F}_n,$$

где коэффициенты  $a_n^{(m)}$  находятся из условий  $(\vec{\Phi}_n, \vec{\Phi}_m) = \delta_{nm}$ , получим для  $\vec{H}_\tau$  ряд типа Фурье:

$$(6) \quad \vec{H}_\tau = \sum_n c_n \vec{\Phi}_n \quad (c_n = \sum_{m=1}^n a_m a_m^{(n)*}),$$

сходящийся по норме  $L^2(s)$ , после чего поле  $\vec{E}, \vec{H}$  в области  $V$  можно найти при помощи известных формул типа Гюйгенса—Кирхгофа. 831

Если требуется учесть особенности поля и тока на краях щели, то необходимо ввести матрицу  $R$ , учитывающую эти особенности, и заменить всюду пространство  $L^2(s)$  на  $L_R^2(s)$ , а  $H^1(s)$  на  $H^2(s)$  [15].

#### А. Интегральные уравнения дифракционно-щелевых антенн

Пусть в замкнутой металлической поверхности  $s$  прорезано одно или несколько отверстий, суммарную геометрическую поверхность которых обозначим через  $s_0$  [16]. Решая первую краевую задачу для внутренней  $V^i$  и внешней  $V^e$  областей, ограниченных  $s$ , найдем поле  $\vec{E}\{\vec{\xi}\}, \vec{H}\{\vec{\xi}\}$ , возбуждаемое в областях  $V^e$  и  $V^i$  распределением (пока неизвестным) электрического поля  $\vec{\xi} \equiv \vec{E}_\tau$  на  $s$ . Если  $\vec{H}^0$  — магнитный вектор поля возбуждаемого в областях  $V^i$  в первом и  $V^e$  во втором случаях заданными источниками при отсутствии (металлизации) отверстия, то условие непрерывности касательной составляющей  $\vec{H}_\tau$  магнитного вектора полного поля при переходе через отверстие  $s$ :

$$(7a) \quad \vec{H}_\tau^i\{\vec{\xi}\} + \vec{H}_\tau^0 = \vec{H}_\tau^e\{\vec{\xi}\}$$

на  $s_0$  в первом случае или

$$(7b) \quad \vec{H}_\tau^i\{\vec{\xi}\} = \vec{H}_\tau^0 + \vec{H}_\tau^e\{\vec{\xi}\}$$

на  $s_0$  во втором случае дает основное интегральное уравнение для  $\vec{\xi} \equiv \vec{E}_\tau$ . Здесь  $\vec{H}_\tau^e\{\cdot\}$  и  $\vec{H}_\tau^i\{\cdot\}$  — линейные операторы, действующие на  $\vec{\xi}$ . Рассмотрим некоторые частные случаи вида  $s_0$ .

*Плоский экран с отверстиями* [16]. Задача о щелях и отверстиях в плоском экране при помощи принципа двойственности легко сводится к задаче о металлической ленте, дополняющей экран до сплошного. Однако целесообразно привести и решение первоначальной задачи, поскольку его можно использовать при рассмотрении конечных экранов со щелями.

Для отверстия  $s_0$  (произвольной формы) в плоском экране, применяя вторую из формул (1), принцип зеркального отображения и известные выражения для поля через вектор Герца [58], запишем для верхнего полупространства, где находится первичный источник:

$$(8) \quad \vec{H}(q') = \vec{H}^0 + (\text{grad}' \text{div}' + k^2)(2\pi i \omega \mu)^{-1} \int_{s_0} \vec{K}^\mu \frac{\exp(-ikr)}{r} ds,$$

$$\vec{K}^\mu = [\vec{n} \vec{E}].$$

Здесь  $\vec{H}^0$  — первичное поле при сплошном экране;  $r$  — расстояние между точками  $q$  и  $q'$ , операция дифференцирования должна проводиться по координатам точки  $q'$ .

Это выражение в предположении, что на  $s_0$  справедливо равенство  $\vec{H} \vec{d}s = 0$ , может быть приведено к виду

$$(9a) \quad \vec{H}(q') = \frac{\epsilon \omega}{2\pi i} \int_{s_0} \vec{K}^\mu \frac{\exp(-ikr)}{r} ds + \vec{H}^0.$$

Аналогично для нижнего полупространства, где нет источников,

$$(9b) \quad \vec{H}(q') = - \frac{\epsilon \omega}{2\pi i} \int_{s_0} \vec{K}^\mu \frac{\exp(-ikr)}{r} ds.$$

Уравнение типа (6) при этом примет вид

$$(10) \quad \frac{\epsilon \omega}{\pi i} \int_{s_0} \vec{K}^\mu \frac{\exp(-ikr)}{r} ds = \vec{H}_\tau^0.$$

Последнее выражение и представляет собой интегральное уравнение 1-го рода относительно  $\vec{K}^\mu$ , т.е. фактически для  $\vec{E}_\tau$ . Выпишем его для двух частных примеров, когда выполняется условие  $\vec{H}\vec{d}s = 0$ .

1. Отверстие  $s_0$  имеет форму кольца с центром в начале цилиндрической системы координат  $R, \varphi, z$ , причем ось  $Oz$  перпендикулярна экрану, а первичным источником поля является расположенный в точке  $R = 0, z = a$  электрический диполь с моментом  $\vec{p}$ , параллельным оси  $Oz$ . При этом уравнение (8) приводится к виду

$$(11a) \quad \int_{s_0} E_R \cos(\varphi - \varphi') \frac{\exp(-ikr)}{r} ds = \frac{\pi}{i\omega\epsilon} H_\varphi^0(q'), \quad q' \in s_0,$$

где  $\varphi'$  — азимут точки  $q'$ , первичное поле  $H_\varphi^0$  определяется как удвоенное поле диполя в однородном пространстве; компонента  $E_R$  независима от  $\varphi$ .

2. Отверстие  $s_0$  представляет собой линейную щель шириной  $2a$ , параллельную оси  $Ox$ , возбуждаемую плоской волной с  $H^0 \equiv H_x^0(q') = 2 \exp(iky' \sin \varphi_0)$ ,  $\varphi_0$  — угол падения. Поскольку  $\vec{E}$  не зависит от  $x$ , уравнению (10) можно придать следующий вид:

$$(11b) \quad \int_{-a}^a E_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikr)}{r} dx dy = \frac{2\pi}{i\omega\epsilon} \exp(iky' \sin \varphi_0).$$

Используя известную формулу Зоммерфельда, перепишем уравнение (11б) в виде

$$(11в) \quad \int_{-a}^a E_y(y) H_0^{(2)}(k|y - y'|) dy = \frac{2}{\epsilon\omega} \exp(iky' \sin \varphi_0).$$

Метод, предложенный в [16], позволяет найти решение этого интегрального уравнения, выражаемое рядом по функциям Матье.

*Замкнутый металлический экран (резонатор, волновод) с отверстиями* [17]. Интегральное уравнение (7) содержит оператор  $\vec{H}_\tau^{e,i}\{\cdot\}$ , который в общем случае выписать достаточно сложно. Поэтому преобразуем его так, чтобы искомая функция  $\vec{E}_\tau = \vec{E}$  была в явном виде. Для этого введем в областях  $V^e$  и  $V^i$  вспомогательные поля  $\vec{E}^e, \vec{H}^e$  и  $\vec{E}^i, \vec{H}^i$ , удовлетворяющие внутри соответствующих областей однородным уравнениям Максвелла и следующим граничным условиям:

$$(12) \quad \vec{E}_\tau^e = \begin{cases} 0 & \text{на } s_e, \\ \vec{e}^1 & \text{на } s_0, \end{cases} \quad \vec{E}_\tau^i = \begin{cases} 0 & \text{на } s_i, \\ -\vec{e}^1 & \text{на } s_0, \end{cases}$$

где  $\vec{e}^1$  — вектор, касательный к  $s_0$ ;  $s_e$  и  $s_i$  — внешняя и внутренняя поверхности экрана после прорезания отверстия  $s_0$ . Поле  $\vec{E}^e, \vec{H}^e$  должно также удовлетворять "принципу излучения" на бесконечности. Применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^e, \vec{H}^e$  и  $\vec{E}^i, \vec{H}^i$  в области  $V^e$  и  $\vec{E}^i, \vec{H}^i$  и  $\vec{E}, \vec{H}$  в области  $V^i$ , где  $\vec{E}, \vec{H}$  — искомое поле антенны, и учитывая условия (12), а также непрерывность поля  $\vec{E}, \vec{H}$  при переходе через  $s_0$ , найдем

$$(13) \quad \int_{s_0} [\vec{E}(\vec{H}^e - \vec{H}^i)] \vec{d}s = \begin{cases} - \int_{V_0} \vec{j}^{\text{ст}} \vec{E}^i dV, \\ \int_{V_0} \vec{j}^{\text{ст}} \vec{E}^e dV. \end{cases}$$

Здесь  $\vec{j}^{\text{ст}}$  — плотность заданного стороннего тока (источника), распределенного в области  $V_0$ , возбуждающего поле  $\vec{E}, \vec{H}$ ; при этом верхняя запись правой части соответствует расположению  $V_0$  внутри  $V^i$  (работа на передачу), нижняя —  $V_0$

внутри  $V^e$  (работа на прием). Если же первичное возбуждение осуществляется волной  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  (см. выше), то получим второй вариант записи этого уравнения: 833

$$(14) \quad \int_{s_0} [\vec{E}(\vec{H}^e - \vec{H}^i)] \vec{d}s = \pm \int_{s_0} [\vec{e}^1 \vec{H}^0] \vec{d}s,$$

где знак "+" соответствует возбуждению антенны из  $V^i$ , а "-" — из  $V^e$ .

В общем случае определим вектор  $\vec{e}^1$  при помощи двух различных выражений:

$$\vec{e}^1 = \delta(R) \vec{t}_u \quad \text{и} \quad \vec{e}^1 = \delta(R) \vec{t}_v,$$

где  $u, v$  — криволинейные ортогональные координаты, вводимые на  $s_0$ ;  $\vec{t}_u, \vec{t}_v$  — единичные орты, касательные к линиям  $u$  и  $v$ ;  $R$  — расстояние между точкой интегрирования  $q(u, v)$  и произвольной точкой  $q_0$  на  $s_0$ ;  $\delta(R)$  — дельта-функция Дирака.

Для этих случаев можно записать

$$\vec{H}^e - \vec{H}^i = \vec{K}(q, q_0; t_{u_0}),$$

$$\vec{H}^e - \vec{H}^i = \vec{K}(q, q_0; t_{v_0}).$$

При этом, например, уравнение (14) сводится к следующим двум, определяющим  $E_u$  и  $E_v$  на  $s_0$ :

$$(15a) \quad \int_{s_0} [\vec{E}(q) \vec{K}(q, q_0; t_{u_0})] \vec{d}s = \pm H_v^0(q_0),$$

$$(15b) \quad \int_{s_0} [\vec{E}(q) \vec{K}(q, q_0; t_{v_0})] \vec{d}s = \mp H_u^0(q_0).$$

### Б. Решение интегральных уравнений дифракционно-щелевых антенн методом наведенных магнитодвижущих сил

Интегральные уравнения часто решают, представляя искомую функцию в виде разложения в бесконечный ряд по полной системе функций. При этом интегральное уравнение сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно амплитуд разложения. При численных расчетах эту систему обрезают до конечного числа  $M$ . Поэтому в принципе можно искать приближенное решение, выбирая какую-либо достаточно полную систему линейно независимых функций, применяя метод, аналогичный методу Галеркина. Как показано в [22], известный метод наведенных ЭДС является, по сути дела, одночленным вариантом метода Галеркина.

Применительно к расчету дифракционно-щелевых антенн в [22] сформулирован (а в [24] обобщен на случай произвольного числа функций разложения) метод наведенных магнитодвижущих сил (МДС). В этом методе решение для  $\vec{E}$  в (7) записывается в виде

$$(16) \quad \vec{E} = \sum_{n=1}^M V_n \vec{e}_n,$$

где  $V_n$  — искомые постоянные;  $\vec{e}_n$  — заданные на  $s_0$  и касательные к ней вектор-функции с указанными выше свойствами.

Подставляя разложение (16) в уравнение (7) и умножая его на  $[\vec{e}_m \vec{d}s]$  ( $1 \leq m \leq M$ ) и интегрируя по  $s_0$ , получим с учетом линейности операторов систему из  $M$  линейных алгебраических уравнений относительно  $V_n$ :

$$(17) \quad \sum_{n=1}^M V_n Y_{mn} = F_m, \quad 1 \leq m \leq M,$$

где

$$(18a) \quad Y_{mn} = Y_{mn}^e + Y_{mn}^i, \quad Y_{mn}^{e,i} = \pm \int_{s_0} [\vec{e}_m \vec{H}^{e,i} \{ \vec{e}_n \}] d\vec{s}$$

— внешние и внутренние взаимные проводимости щелевых излучателей; вследствие справедливости теоремы взаимности  $Y_{mn} = Y_{nm}$ ;

$$(18b) \quad F_m = \int_{s_0} [\vec{e}_m \vec{H}^0] d\vec{s}$$

— МДС.

Решив систему (17), найдем постоянные  $V_n$ , а затем по формуле (16) — и  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Величину  $\vec{\mathcal{E}}$  можно также найти при помощи стационарного функционала

$$(19) \quad L\{\vec{\mathcal{E}}\} = \int_{s_0} [\vec{\mathcal{E}}(\vec{H}^e\{\vec{\mathcal{E}}\} - \vec{H}^i\{\vec{\mathcal{E}}\} - 2\vec{H}^0)] d\vec{s},$$

используя метод Ритца.

Если вектор-функции  $\vec{e}_n$  выбраны вещественными, то активная мощность  $W_\Sigma$ , излучаемая через отверстие  $s_0$ , определяется формулой

$$(20) \quad W_\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{n,m}^{1 \dots M} V_n V_m^* Y_{nm}^*.$$

### В. Щелевые антенны с осевой симметрией

Рассмотрим круглый волновод или резонатор в виде тела вращения с симметричной волной  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  типа  $E$ , в поверхности которого прорезано  $N$  кольцевых щелей с поверхностями  $s_n$ , шириной  $d_n$  [17]. При этом поле такой антенны также

осесимметрично и у поверхности щелей  $s_0 = \sum_{n=1}^N s_n$  имеет только одну касательную (поперечную) составляющую  $E_\nu$ , определяемую уравнением (15б).

Перепишем это уравнение, полагая  $u = \varphi$  ( $\varphi$  — угол поворота вокруг оси вращения  $Oz$ ),  $H^e = H_\varphi^e, H^i = H_\varphi^i, E_\varphi^e = E_\varphi^i = 0, \vec{e}^i = t_\nu' \delta(\nu - \nu_0)$  на  $s_0$ :

$$(21) \quad \int_l E_\nu (H_\varphi^e - H_\varphi^i) h_\varphi h_\nu d\nu = \frac{1}{2\pi} H_\varphi^0(\nu_0),$$

где  $h_\varphi, h_\nu$  — коэффициенты Ламэ,  $l = \sum_{n=1}^N l_n, l_n$  — интервал изменения  $\nu$  в пределах щели  $s_n$ .

Ядро интегрального уравнения преобразуем, выделив часть, содержащую особенность:

$$(22) \quad H_\varphi^e - H_\varphi^i = \frac{i\omega\mu}{\pi} h_\varphi(\nu_0) \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR)}{R} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' + O(1).$$

Здесь  $O(1)$  — регулярная функция, учитывающая отличие  $s_0$  от плоскости.

Умножая (21) на  $f_\alpha(\nu_0) h_\nu d\nu_0$ , где  $f_\alpha(\nu), \alpha = 1, 2, \dots, N$  — семейство функций, удовлетворяющих условиям

$$(23) \quad \int_{l_\alpha} f_\alpha(\nu) h_\nu d\nu = 1 \quad \text{и} \quad \int_{l_\alpha} f_\alpha(\nu) \ln R(\nu, \nu_0) h_\nu d\nu = \text{const},$$

и интегрируя по  $l_\alpha$ , получим

$$(24) \quad \sum_{n=1}^N \int_{l_n} E_\nu(\nu) I_\alpha(\nu) h_\nu d\nu = W_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

$$I_{\alpha}(v) = \int_{l_{\alpha}} f_{\alpha}(v_0)(H_{\varphi}^e - H_{\varphi}^i)h_{v_0} h_{v_0} dv_0,$$

$$(25) \quad W_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{l_{\alpha}} f_{\alpha}(v_0)H_{\varphi}^0(v_0)h_{v_0} dv_0.$$

Для узких щелей, когда  $d_n \ll \lambda$ , из (23) и (22) следует, что величины  $I_{\alpha}(v)$  практически постоянны на отдельных интервалах  $l_{\alpha}$  и система (24) может быть приведена к виду

$$(26) \quad \sum_{n=1}^N V_n Y_{\alpha n} = W_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(27) \quad V_n = \int_{l_n} E_v(v)h_v dv$$

— напряжение на  $n$ -й щели;  $I_{\alpha}(V_n) = Y_{\alpha n}$  — взаимная проводимость  $\alpha$ -й и  $n$ -й щелей, численно равная суммарному току, протекающему при отсутствии щелей по внутренней и внешней сторонам резонатора (волновода) через пояс  $s_n$ , когда к обеим сторонам пояса  $s_{\alpha}$  приложены единичные ЭДС, направленные по  $v$ . Укажем, что  $f_{\alpha}$  совпадает с электростатическим распределением заряда на длинной проводящей пластине шириной  $d_{\alpha}$ .

*Сферическая щелевая антенна* [23]. Пусть резонатор представляет собой идеально проводящую сферу радиусом  $r_0$  со стенкой нулевой толщины и одиночной кольцевой щелью вдоль параллели, возбуждаемой электрическим диполем, расположенным в центре сферы. При этом система (26) сводится к одному уравнению.

$$(26a) \quad V_1 = W_1/Y_{11}.$$

Вычислив вспомогательные поля  $\vec{E}^{e,i}$ ,  $\vec{H}^{e,i}$ , найдем

$$(26b) \quad V_1 = \frac{kp(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)}{\sin\vartheta_0 \psi_1(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{P'_n(\cos\vartheta_0)}{P'_n(kr_0)\zeta'_n(kr_0)[P_n(\cos\vartheta)]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}}$$

Здесь  $p$  — момент диполя;  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — углы, определяющие края щели,  $\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{n+1/2}(\rho)$ ,  $\zeta_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\rho)$ . Излучаемая мощность при этом равна

$$(26b) \quad W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(W_1, V_1^*), \quad W_1 = \frac{i \cdot 2\pi k^2 \sin^2 \vartheta_0}{\psi'_1(kr_0)} p.$$

Вычисляя отношение  $W_{\Sigma}/W_{\Sigma_0}$ , где  $W_{\Sigma_0}$  — мощность излучения того же диполя в пустоте, видим резкое возрастание излучаемой мощности при резонансном размере сферы ( $kr_0 = 3$ ). Напомним, что расчеты выполнены при условии  $p = \text{const}$ .

### Г. Несимметричные логарифмически узкие щели

Пусть на замкнутой идеально проводящей поверхности произвольным образом прорезана узкая щель длиной  $l$  и постоянной шириной  $d$  ( $d \ll l, \lambda$ ), края которой определяются равенствами  $u = 0$ ,  $u = d$ , а концы —  $v = 0$ ,  $v = v_1$ , радиусы кривизны  $\rho$  линий  $v = \text{const}$  велики по сравнению с  $d$  (линии  $u = \text{const}$  идут вдоль щели,  $v = \text{const}$  ортогональны краям щели). Так как щель узкая и почти ортогональна токам на поверхности неразрезанного экрана, то  $|E_v| \ll |E_u|$  всюду



на поверхности  $s_0$  щели, за исключением небольших участков у концов  $v = 0$  и  $v = v_1$ , где  $E_u = 0$  [18].

Пусть вспомогательные поля определяются вектором  $\vec{e}^1 = \delta(R)\vec{t}_u$ . Тогда  $|H_u^e - H_u^i| \ll |H_v^e - H_v^i|$  и интегральное уравнение (15а) приводится к виду

$$(28) \quad \int_{s_0} E_u (H_v^e - H_v^i) ds = H_v^0(q_0).$$

Несложные выкладки позволяют записать

$$(29) \quad H_v^e - H_v^i = (\pi i \omega \mu)^{-1} L_0 \frac{\exp(-ikR)}{R} + F(v, v_0),$$

где  $F$  — регулярная на  $s_0$  функция, а  $L_0$  — оператор,

$$L_0 = \frac{1}{h_{v_0}} \frac{\partial}{\partial v_0} \frac{1}{h_{v_0}} \frac{\partial}{\partial v_0} + k^2.$$

Вводя выражение (29) в уравнение (28) и выделяя в интеграле логарифмический член, получим

$$(30) \quad 2L_0 \int_0^d E_u(u, v_0) \ln kR_1 du = G[U, v_0] - \pi i \omega \mu H_v^0(q_0),$$

где

$$G[U, v_0] \equiv L_0 K[U, v_0] + \pi i \omega \mu \int_0^v U(v) F(v, v_0) h_v dv,$$

$K[U, v_0]$  — линейный относительно  $U$  оператор, остающийся после выделения

логарифмического члена;  $U(v) = \int_0^d E_u(u, v) du$  — напряжение между краями щели;

$R_1$  — расстояние между точками  $u, v_0$  и  $u_0, v_0$  на  $s_0$ .

Умножая (30) на  $f(u_0) du_0^1$ , где  $f(u_0) = [\pi \sqrt{u_0(d-u_0)}]^{-1}$ , и интегрируя по интервалу  $0 \leq v_0 \leq d$ , найдем

$$(31) \quad L_0 U(v_0) = \alpha G[U, v_0] - \pi i \omega \mu \alpha H_v^0(v_0).$$

Переходя от координаты  $v_0$  к длине дуги  $\tau$ , отсчитываемой вдоль кривой  $v$  от ее начала  $v = 0$ :

$$\tau = \int_0^{v_0} h_v dv, \quad d\tau = h_{v_0} dv_0,$$

перепишем это уравнение в виде

$$(32) \quad \frac{d^2 U}{d\tau^2} + k^2 U = \alpha G[U, \tau] - \pi i \omega \mu \alpha H_\tau^0(\tau).$$

К нему следует добавить краевые условия на концах щели

$$(32a) \quad U = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad \text{и} \quad \tau = l.$$

<sup>1</sup> Функция  $f(u_0)$  удовлетворяет условиям  $2 \int_0^d f(u_0) \ln kR_1 du_0 = \frac{1}{\alpha} = \text{const}$  при  $0 < u < d$ ,

$\alpha = [2 \ln \frac{kd}{4}]^{-1}$  и  $\int_0^d f(u_0) du_0 = 1$  и аналогична функции  $f_\alpha(v)$ , введенной выше.

Уравнение (32) для напряжения на щели аналогично уравнению для тока у вибраторных (проволочных) антенн. При  $\alpha \ll 1$ , т.е. для логарифмически узкой щели, уравнение (32) проще всего решать методом разложения в ряд по параметру малости  $\alpha$ , как и в теории проволочных антенн (где  $\alpha = [\ln ka]^{-1}$ ,  $a$  — радиус вибратора). Однако при этом для настроенных и расстроенных антенн приходится пользоваться различными формами решения. Удобнее другой метод, позволяющий получить единые решения, независимо от длины щели. Для этого запишем решение в виде суммы

$$(33) \quad U = U^1 + V,$$

где  $U^1$  удовлетворяет уравнению

$$(34) \quad -\frac{d^2 U^1}{d\tau^2} + p^2 U^1 = -\pi i \omega \alpha H_\tau^0(\tau),$$

$$p^2 = k^2 - i\alpha\beta$$

( $\beta$  — параметр, который будет определен ниже), с граничными условиями  $U^1 = 0$  при  $\tau = 0$  и  $\tau = l$ .

Вычитая из уравнения (32) равенство (34), получим

$$(35) \quad \frac{d^2 V}{d\tau^2} + k^2 V = \alpha \{G[U, \tau] - i\beta U^1\}, \quad v = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и } \tau = l.$$

Интегрируя это уравнение относительно  $V$ , полагая правую часть известной и требуя, чтобы решение существовало для любого значения  $kl$ , найдем в первом приближении (т.е. полагая  $U = U^1$ )

$$(36) \quad \beta = \frac{\int_0^l G[U^1, x] \sin k(l-x) dx}{i \int_0^l U^1 \sin k(l-x) dx}$$

и

$$(37) \quad V = \frac{\alpha}{k} \int_0^\tau \{G[U^1, x] - i\beta U^1\} \sin k(\tau-x) dx.$$

Продолжая этот процесс, получим для  $V$  и  $\beta$  ряды по степеням  $\alpha$ .

Таким образом,  $V = V' O(\alpha)$ ;  $U = U^1 (1 + O(\alpha))$  и при  $\alpha \ll 1$ , т.е. для логарифмически узких щелей  $U \cong U^1$  и уравнение (32) для напряжения  $U$  совпадает с (34):

$$(38) \quad \frac{d^2 U}{d\tau^2} + p^2 U = -i\pi\omega\mu H_\tau^0(\tau), \quad U = 0 \text{ при } \tau = 0, l.$$

Решая это уравнение, для любых  $l$  и  $\lambda$  найдем

$$(39) \quad U = \frac{\alpha}{\sin pl} \psi(l) \sin p\tau - \alpha \psi(\tau), \quad \psi(\tau) = \frac{\pi i \omega \mu}{p} \int_0^\tau H_x^0(x) \sin p(\tau-x) dx.$$

Обозначая  $\beta = \beta' + i\beta''$ , получим  $p \cong (k + \alpha\beta''/2k) - i\alpha(\beta'/2k)$ , где  $\alpha\beta''/2k$  — коэффициент затухания, а  $\alpha\beta''/2k$  — поправка, дающая укорочение волны в щели:  $\Delta\lambda = \frac{\pi\beta''}{\alpha k^3}$ ,  $\lambda_{щ} = \lambda - \Delta\lambda$ . Для узких щелей  $\alpha\beta/2k$  — малая величина, поэтому в формуле (39) можно полагать  $p = k$ , за исключением случаев настроенных ( $l = \lambda_{щ}/2$ )

или слаборасстроенных щелей, когда параметр  $p$  должен быть сохранен только в  $\sin pl$ . При этом для настроенной щели

$$(40) \quad U = \frac{2k}{i\beta'l} \psi(l) \sin k\tau + O(\alpha).$$

Величину  $\beta'$  можно найти из уравнения энергетического баланса, или вычисляя собственную проводимость щели методом наведенных МДС, не прибегая к формуле (36).

#### Д. Несимметричные узкие щели

Изложенные выше методы решения основного интегрального уравнения щелевой антенны (32) относятся к логарифмически узким щелям. В работах [28, 29] развит метод решения этого уравнения, пригодный и в случае просто узких щелей ( $kd \ll 1$ , но  $|\alpha| \sim 1$ ) таких, в которых электрическое поле имеет только одну поперечную компоненту.

При помощи функции Грина  $\Gamma(v, v_0)$  оператора  $L_0 \equiv \partial^2/\partial\tau^2 + k^2$  (см. формулу (31)) уравнение (32) преобразуется в интегральное уравнение 2-го рода:

$$(41) \quad v(v) = -\frac{1}{\chi} \{F[V, v] + i\hat{g}h\},$$

где  $V(v) = U/Z_0 I_0$  — безразмерное напряжение;  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ;  $I_0$  — амплитуда магнитного поля вектора первичной возбуждающей волны;  $\chi = \sin kl/\alpha$ ;  $F = \hat{g}G$ ;  $g(v, v_0^*) = k \sin kl \cdot \Gamma(v, v_0)$ ;  $h_v = IH_v^0(v)/I_0$  и введены обозначения

$$(x, y) = \frac{1}{l} \int_0^l x(v)y(v) dv,$$

$$\hat{g}x = \frac{1}{l} \int_0^l g(v, v_0)x(v_0) dv_0.$$

Здесь величина  $G$  определена формулой (30).

При решении уравнения (41) для случая, когда щель связывает два объема, регулярные части  $N_\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ) ядра уравнения (29) могут быть представлены в виде билинейных разложений:

$$(42) \quad N_\mu(v, v') = \sum_m f_{\mu m} \kappa_{\mu m}(v) \kappa_{\mu m}^*(v'),$$

где  $f_{\mu m}$  — коэффициенты разложения;  $v, v'$  — координаты вдоль оси щели;  $\kappa_{\mu m}(v)$  — распределение  $m$ -й моды  $\mu$ -го объема вдоль оси щели.

При этом решение уравнения (41) найдено в виде

$$(43) \quad V(v) = -\frac{1}{\chi} \left\{ \sum_{\mu, m} c_{\mu m} f_{\mu m} \hat{g} \kappa_{\mu m} + i\hat{g}h \right\}, \quad \mu = 1, 2, \dots;$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

где коэффициенты

$$(44) \quad c_{\mu m} = (V, \kappa_{\mu m}^*) \equiv V_{\mu m}^0$$

определены из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$(45) \quad \sum_{\mu, m} [\chi \delta_{\mu\nu} \delta_{mn} + f_{\mu m} (\hat{g} \kappa_{\mu m}, \kappa_{\nu n}^*)] c_{\mu m} = -i(\hat{g}h, \kappa_{\nu n}^*), \quad \nu = 1, 2, \dots;$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

получающейся при подстановке (43) в (44).

Выражение (45) можно переписать в виде, аналогичном уравнениям (17) 839  
метода наведенных МДС:

$$(46) \quad \sum_{\mu, m} Y_{mn}^{\mu\nu} V_{\mu m}^0 = I_n^\nu, \quad \nu = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots$$

Однако между этими уравнениями есть существенное различие: если в (17) величины  $V_n$  суть амплитуды гармоник распределения напряжения в щели (в одногармониковом приближении – просто амплитуды напряжения), то величины  $V_{\mu m}^0$  в (46) согласно (44) пропорциональны амплитудам возбуждения щелью парциальных (собственных) волн (колебаний) связываемых объемом, т.е. по сути дела пропорциональны элементам матрицы рассеяния  $S$  щели как элемента связи объемов. При расчете связи объемов практически достаточно ограничиться их нахождением. Вычислять же распределение напряжения  $V(v_0)$  в щели необходимо лишь в случае щелевой антенны для расчета по нему характеристик излучения. Элементы  $S_{mn}^{\mu\nu}$  матрицы рассеяния – коэффициенты щелевой связи объемов – можно находить и непосредственно из стационарных функционалов. Так, в случае поперечной щели, связывающей два прямоугольных волновода с общей широкой стенкой, в [34] при использовании идей работ [35, 36] получено выражение

$$S_{mn}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{Y_{mn} Y_{\mu\nu}} \frac{\int_0^l V_{mn}(v) H_{\mu\nu}(v) dv \int_0^l V_{\mu\nu}(v) H_{mn}(v) dv}{\int_0^l \int_0^l V_{mn}(v) N(v, v') V_{\mu\nu}(v') dv dv'}$$

Здесь  $V_{mn}(v)$ ,  $V_{\mu\nu}(v)$  – распределения напряжения в щели, возбуждаемые падающими волнами типов  $mn$  и  $\mu\nu$  соответственно;  $N(v, v')$  – ядро интегрального уравнения щели;  $H_{\mu\nu}$ ,  $H_{mn}$  – компоненты (вдоль оси щели) магнитных полей волн типов  $\mu\nu$  и  $mn$ ;  $Y_{mn}$ ,  $Y_{\mu\nu}$  – их волновые проводимости амплитуды векторов полей при этом пронормированы так, чтобы

$$\int_{S_{11}} [\vec{E}_{mn} \vec{H}_{mn}] \vec{d}s = 1, \quad \int_{S_{12}} [\vec{E}_{\mu\nu} \vec{H}_{\mu\nu}] \vec{d}s = 1,$$

индексы  $mn$  и  $\mu\nu$  относятся к первому и второму волноводам). При вычислениях по формуле, полученной для случая поперечной щели, распределения  $V(v)$  можно записывать в простом виде, соответствующем логарифмически узким щелям. Отметим, что, хотя величины  $k_{\mu m}(0)$ ,  $k_{\mu m}(l)$  не равны нулю,

$$\hat{g}k_{\mu m}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \hat{g}k_{\mu m}(l) = 0.$$

Система (45) решается методом редукции; для хорошей аппроксимации число сохраняемых уравнений  $M \gg kl$ . Изложенную методику можно применять и для расчета щелей, излучающих в свободное пространство (см., например, [30]). В работе [33] показано, что "безразмерное" напряжение в случае просто узких щелей ( $\alpha \sim 1$ ) при любых  $\chi$  имеет порядок 1, т.е. резонансные свойства в этом случае не выражены.

В работе [31] развит общий метод учета толщины стенок, в которых прорезаются щели. Показано, что характеристики излучения узкой щели, прорезанной в стенке конечной толщины  $t \ll l$ ,  $\lambda$ , с точностью до членов порядка  $td/l\lambda$  совпадают с характеристиками излучения щели эффективной ширины

$$d_{\text{эф}} = df\left(\frac{t}{d}\right), \quad f\left(\frac{t}{d}\right) \ll 1,$$

прорезанной в бесконечно тонкой стенке. Строгое выражение для функции  $f\left(\frac{t}{d}\right)$

приведено в [31], а при  $\frac{t}{d} \gg 1$  справедлива простая асимптотическая формула

$$f\left(\frac{t}{d}\right) \cong 0,94 \exp\left(-\frac{\pi t}{2d}\right).$$

Погрешность этой формулы максимальна при  $t = 0$  и составляет 6,4%; при  $t/d \gg 0,25$  погрешность менее 1%. Как показано в [31], узкая ( $\frac{l}{d} \gg 1$ , но  $\ln \frac{l}{d} \sim 1$ ) щель в толстой ( $\frac{t}{d} \gg 1$ ) стенке ведет себя как логарифмически узкая ( $\ln \frac{l}{d_{эф}} \gg 1$ ) щель в бесконечно тонкой стенке.

В работе [29] изложена теория слабоизлучающих щелей, прорезанных вдоль линий возбуждающего тока в стенке конечной толщины  $t \ll l$ . Полученные в [29] результаты послужили основой теории волноводных измерительных линий.

### Е. Излучающие щели в настроенных резонаторах

Если рабочая частота  $\omega \rightarrow \omega_{рез}$  — к резонансной частоте замкнутого резонатора, неразрезанного щелью, то при этом левая, а следовательно, и правая части уравнения (32) остаются конечными. Однако методы решения, при которых используется малость параметра, уже не применимы, так как отдельные члены правой части (32) обращаются при этом в бесконечность. Поэтому в работе [20] изложен метод получения уравнения, все члены которого остаются конечными при  $\omega \rightarrow \omega_{рез}$ , и его решение можно получить, используя малость  $\alpha$ . Для этого в случае, когда  $\omega_{рез}$  является  $m$ -кратно вырожденной частотой неразрезанного резонатора, которой соответствуют свободные колебания  $\vec{e}^\nu, \vec{h}^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ), вводится некоторая система функций  $a_n(\tau)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, m$ ). Дифференцируя (32)  $n$  раз по  $\tau$ , умножая затем на  $a_n(\tau)$  и суммируя результат по  $n$  от 0 до  $m$ , найдем

$$(47) \quad \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L_0 U = \alpha \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} G[U, \tau] + \\ + i\omega\alpha \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0, \quad L_0 = \frac{d^2}{d\tau^2} + k^2.$$

Функции  $a_n(\tau)$  следует выбрать так, чтобы каждая сумма оставалась конечной при  $\omega \rightarrow \omega_{рез}$ . Для этого используем полученное при помощи леммы Лоренца равенство

$$(48) \quad \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0 = - \int_{V_0} \vec{j}^{ct} \vec{\mathcal{E}} dv.$$

Здесь  $\vec{\mathcal{E}}$  — электрический вектор поля, не имеющего источников внутри резонатора и определяемого там краевыми условиями

$$(48a) \quad \vec{\mathcal{E}}_\tau = 0 \text{ на } s_t, \quad \vec{\mathcal{E}}_\tau = \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(R) \vec{i}(q) \text{ на } s_0,$$

где  $R$  — расстояние между точками наблюдения  $q$  и  $q_0(\tau_0)$  на щели;  $\vec{i}(q)$  — орт, направленный поперек щели.

Очевидно, можно считать, что это поле создается сторонней ЭДС, равной

$\vec{E}^{ct} = -\vec{\mathcal{E}}_\tau$  на  $s_0$ . Поле будет конечным при резонансе только при условии равенства нулю работы сторонней ЭДС над полями  $\vec{e}^\nu, \vec{h}^\nu$ , т.е. при

$$\int_{s_0} [\vec{E}^{ct} \vec{h}^\nu] d\vec{s} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, m,$$

что эквивалентно при учете (48а) соотношениям

$$(49) \quad \sum_{n=1}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} h_\tau^\nu = -a_0(\tau) h_\tau^\nu.$$

Из этой системы уравнений найдем значения  $a_n(\tau)$ , при которых  $\vec{\mathcal{E}}$ , а вследствие (48), и отдельные суммы в (47) остаются конечными при  $\omega \rightarrow \omega_{рез}$ . Так как число неизвестных в системе (49) на единицу превышает число уравнений, то одно из них можно выбрать произвольно, например,

$$a_0(\tau) = \det \left| \frac{d^\mu}{d\tau^\mu} h_\tau^\nu \right|$$

— определитель  $m$ -го порядка с общим членом  $\frac{d^\mu}{d\tau^\mu} h_\tau^\nu$ . При этом

$$a_n(\tau) = -\Delta_n, \quad n = 1, 2, \dots, m,$$

— тот же определитель, в котором  $n$ -й столбец заменен столбцом с общим членом  $h_\tau^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ).

Полагая, что функции  $a_n(\tau)$  выбраны в соответствии со сказанным выше, перепишем уравнение (47) в виде

$$(50) \quad \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} (L_0 U) = \alpha Q[U] + \alpha \Phi(\tau),$$

$$U = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad \text{и} \quad \tau = l.$$

Здесь

$$\Phi(\tau) = i\pi\omega\mu \sum_{n=0}^m a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0,$$

$Q[U]$  — линейный относительно  $U$  оператор, равный первой сумме правой части (47).

Уравнение (50) справедливо и в интервале частот, содержащем  $\omega_{рез}$ , и его уже можно решать методом разложения по малому параметру  $\alpha$ . Так, при  $m = 1$  в нулевом приближении для  $l \neq n\lambda/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) получим

$$(51) \quad U_0 \cong -\frac{A \sin k\tau}{k \sin kl} \int_0^l h_\tau^1(x) \sin k(l-x) dx + \frac{A}{k} \int_0^\tau h_\tau^1(x) \sin k(\tau-x) dx,$$

$$A = \int_{V_0} \vec{j}^{ct} \vec{e}^1 dV \left[ \int_0^l \frac{U_0}{A} h_\tau^1 d\tau \right]^{-1},$$

$U_0/A$  от  $A$  не зависит.

При  $l = n\lambda/2$  (резонансная щель)

$$U_0 = M \sin k\tau, \quad M = \int_{V_0} \vec{j}^{ct} \vec{e}^1 dV \left[ \int_0^l h^1 \sin k\tau d\tau \right]^{-1}.$$

В обоих случаях, т.е. при любых длинах  $l$  и  $\omega = \omega_{рез}$ , имеем  $U = U_0 + O(\alpha)$ , где  $U_0 = O(1)$ , в отличие от случая  $\omega \neq \omega_{рез}$ , когда при  $l \neq n\lambda/2$  имеем  $U = O(\alpha)$ .

В работе [20] приведены распределения напряжения вдоль щели, прорезанной вдоль части параллели в настроенном цилиндрическом резонаторе. В дальнейшем эту задачу рассматривали другими методами. В работе [27] уравнение (32) видоизменено путем выделения в  $G[\cdot]$  резонансного члена, после этого к уравнению (32) можно непосредственно применить метод возмущений и на частотах, близких к резонансу. При этом уже из уравнения первого приближения определяются волновые числа резонатора со щелью. В то же время исследование решения интегродифференциального уравнения узкой щели в стенке резонатора, проведенное в [33], показало, что в нем допустимы предельные переходы  $\chi = \frac{\sin kl}{\alpha} \rightarrow 0$  и  $\Delta = 1 - k/k_0 \rightarrow 0$ ,  $k_0$  — резонансное волновое число резонатора ("щелевой" и "объемные" резонансы) или и  $\chi \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  одновременно. Естественно, что распределения напряжения вдоль щели при этом отличаются от обычного синусоидального.

### Ж. Мощность и сопротивление излучения дифракционно-щелевых антенн

Мощность излучения  $W_\Sigma$  дифракционно-щелевой антенны в виде произвольного отверстия  $s_0$  в замкнутой металлической поверхности, возбуждаемой изнутри линейным проводником  $L$  с током  $J$ , равна [19]

$$(52) \quad W_\Sigma = 0,5 \operatorname{Re} \int_{s_0} [\vec{E}\vec{H}^*] \vec{d}s = -0,5 \operatorname{Re} \int_L \vec{E}J \vec{d}l$$

$\vec{E}, \vec{H}$  — поле антенны.

Пусть потери в среде внутри антенны отсутствуют и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  — поле, возбуждаемое тем же током  $J$  при металлизации отверстия  $s_0$ . Применяя сопряженную лемму [19] к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , найдем

$$(53) \quad \int_{s_0} \{[\vec{E}\vec{H}^0^*] + [\vec{E}^0^*\vec{H}]\} \vec{d}s = - \int_L \{\vec{E}J^* + \vec{E}^0^*J\} \vec{d}l$$

или, поскольку  $\vec{E}_\tau^0 = 0$  на  $s_0$ ,

$$(54) \quad - \int_L \vec{E}J^* \vec{d}l = \int_L \vec{E}^0^*J \vec{d}l + \int_{s_0} [\vec{E}\vec{H}^*] \vec{d}s$$

Таким образом,

$$(55) \quad W_\Sigma = 0,5 \operatorname{Re} \int_L J\vec{E}^0^* \vec{d}l + 0,5 \operatorname{Re} \int_{s_0} [\vec{E}\vec{H}^0^*] \vec{d}s = 0,5 \operatorname{Re} \int_{s_0} [\vec{E}\vec{H}^0^*] \vec{d}s,$$

так как  $\operatorname{Re} \int_L J\vec{E}^0^* \vec{d}l = 0$ , поскольку  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  соответствует замкнутому резонатору и при отсутствии потерь не развивает ваттную вещественную мощность.

Сопротивление излучения антенны, отнесенное к току  $I_0$  в клеммном сечении провода  $L$  (оно же — входное сопротивление антенны),  $Z_\Sigma = - \frac{1}{2|I_0|^2} \int_L J^* \vec{E} \vec{d}l$  согласно той же сопряженной лемме равно

$$(56) \quad Z_\Sigma = \frac{1}{2|I_0|^2} \int_L J\vec{E}^0^* \vec{d}l + \frac{1}{2|I_0|^2} \int_{s_0} [\vec{E}^0\vec{H}^0^*] \vec{d}s$$

$$(57) \quad W_{\Sigma} = 0,5 \operatorname{Re} \int_0^l U(\tau) H_{\tau}^{0*}(\tau) d\tau,$$

$$Z_{\Sigma} = \frac{1}{2|I_0|^2} \int_L J \vec{E}^{0*} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{2|I_0|^2} \int_0^l U(\tau) H_{\tau}^{0*}(\tau) d\tau.$$

Таким образом, при расчете  $W_{\Sigma}$  и  $Z_{\Sigma}$  вместо истинного поля следует использовать более просто вычисляемое поле  $\vec{H}^0$ , возбуждаемое тем же первичным источником, но при металлизации отверстия  $s_0$ . Кроме того, поскольку найденные выражения для  $W_{\Sigma}$  и  $Z_{\Sigma}$  — линейные функционалы  $\vec{E}$  или  $U$  на  $s_0$  и  $\vec{H}$  в них не фигурирует, это позволяет применить для расчета  $W_{\Sigma}$  и  $Z_{\Sigma}$  метод стационарных функционалов, при которых можно использовать приближенные выражения для  $\vec{E}$  и  $U$  на  $s_0$ .

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАВЕДЕННЫХ МДС К РАСЧЕТУ ВОЛНОВОДНО-ЩЕЛЕВЫХ АНТЕНН

Изложенные выше общие методы в принципе дают возможность провести расчет любых щелевых систем с достаточно высокой точностью. Однако во многих практически важных случаях достаточно ограничиться приближенным расчетом, используя одночленное приближение обобщенного метода наведенных МДС [24, 42]. При этом оказывается возможным получение в замкнутом виде простых расчетных формул для основных параметров щелевой антенны, в то время как при использовании более точных методов можно найти только численные результаты. Однако одночленное приближение применимо лишь в тех случаях, когда распределение напряжения на щели слабо зависит от вида возбуждающего поля и может быть задано заранее. В этом случае требуется найти только его амплитуду. В частности, этот случай соответствует резонансным или слаборасстроенным щелям всех видов, а также поперечным симметрично возбуждаемым нерезонансным щелям. При этих расчетах необходимо использовать выражения для поля  $(\vec{E}, \vec{H})$ , возбуждаемого в волноводе щелевыми излучателями. В случае волновода с произвольными нагрузками по концам, возбуждаемого одиночной щелью (см. [38]),

$$(58) \quad (\vec{E}, \vec{H}) = \begin{cases} \sum_{\mu} A_{\mu} \{(\vec{E}_{\mu}, \vec{H}_{\mu}) + R_{\mu}(\vec{E}_{-\mu}, \vec{H}_{-\mu})\}, & z > z_2, \\ \sum_{\mu} B_{\mu} \{(\vec{E}_{-\mu}, \vec{H}_{-\mu}) + R_{-\mu}(\vec{E}_{\mu}, \vec{H}_{\mu})\}, & z < z_1, \end{cases}$$

$$(59) \quad A_{\mu} = \frac{c_{\mu} + R_{-\mu} c_{-\mu}}{1 - R_{\mu} R_{-\mu}}, \quad B_{\mu} = \frac{c_{-\mu} + R_{\mu} c_{\mu}}{1 - R_{\mu} R_{-\mu}}, \quad c_{\pm\mu} = -\frac{1}{T_{|\mu|}} V F^{(\mp\mu)},$$

$$T_{|\mu|} = \int_{S_{\perp}} \{[\vec{E}_{\mu} \vec{H}_{-\mu}] - [\vec{E}_{-\mu} \vec{H}_{\mu}]\} \vec{i}_z ds.$$

Здесь  $z_1 \leq z \leq z_2$  — область расположения щели;  $\mu$  — тип парциальной волны в волноводе; знаки "±" указывают направление ее распространения ("+" — в сторону  $z > 0$ , "-" — в обратную сторону;  $R_{\pm\mu}$  — коэффициенты отражения от правой (+) и левой (-) конечных нагрузок волновода.



В этом случае щель характеризуется своей матрицей рассеяния  $S$  в волноводе [24]:

$$(60) \quad S = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix},$$

где  $\Gamma_{11}$  и  $\Gamma_{22}$  – коэффициенты отражения;  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$  – коэффициенты прохождения при возбуждении со сторон  $z < 0$  и  $z > 0$ , соответственно, причем поскольку  $R_{\mp\mu} = 0$ ,  $A = c_+$ ,  $B = c_-$ ,

$$(61) \quad \Gamma_{11} = c_-, \quad \Gamma_{12} = 1 + c_+, \quad \Gamma_{22} = c'_+, \quad \Gamma_{21} = 1 + c'_-,$$

$c'_\pm$  вычисляются при возбуждении щели со стороны  $z > 0$ , а  $c_\pm$  – со стороны  $z < 0$  (в этих формулах и ниже индекс типа волны опущен).

При помощи леммы Лоренца доказывается равенство  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ , так что  $c_+ = c'_-$ . При симметричном распределении напряжения вдоль щели  $c_- = c'_+$ , откуда  $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$ . Оставшиеся коэффициенты  $c_-$  и  $c_+$  с учетом соотношений  $F^- = F^{+*}$  (для распространяющихся волн),  $V = F^+/Y$  (из (17) при  $N = 1$ ),  $g^j = |F^+|^2/T$  ( $g^j$  – внутренняя активная проводимость щели), могут быть представлены в виде

$$(62) \quad c_+ = -\frac{g^j}{Y}, \quad c_- = \frac{g^j}{Y} \exp(2i\alpha),$$

откуда

$$(63) \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{1 + \kappa}, \quad \Gamma_{11} = -\frac{\kappa \exp(2i\alpha)}{1 + \kappa}, \quad V = 2\sqrt{\frac{P_0}{g^j}} \frac{\kappa}{1 + \kappa} \exp(i\alpha),$$

где  $\kappa = g^j/(Y - g^j)$  – параметр щели,  $\alpha = \arg F^+$  (в случае продольной и поперечной резонансных щелей  $\alpha = 0$  и  $\pi/2$  соответственно),  $P_0 = 0,25T$  – мощность, переносимая первичной волной через сечение волновода.

Относительная излучаемая мощность (коэффициент излучения) при этом равна  $P_\Sigma = 1 - |\Gamma_{12}|^2 - |\Gamma_{11}|^2 = \frac{2\text{Re}\kappa}{|1 + \kappa|^2}$ . В случае резонансных щелей реактивная проводимость  $b = 0$  и при  $g^j = g^e$  параметр  $\kappa = 1$  и, следовательно,  $\Gamma_{12} = |\Gamma_{11}| = 0,25$ , мощность  $P_\Sigma = 0,5$  максимальна.

Внешнюю проводимость во многих случаях можно вычислять, как и для щели в плоском экране. При этом в соответствии с принципом двойственности

$$(64) \quad Y^e = 2Z_{\text{виб}}/Z_0^2,$$

где  $Z_{\text{виб}}$  – сопротивление излучения ленточного вибратора, дополняющего экран до сплошного,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0, \mu_0$  – параметры внешней среды.

Рассматривая систему, состоящую из продольной и поперечной щелей с общим центром, найдем, что, поскольку они между собой не взаимодействуют, каждая из них может быть рассчитана по формулам (63) независимо; и если щели резонансные, то суммарные параметры

$$(65) \quad \Gamma_{11} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)}, \quad \Gamma_{12} = \frac{1 - \kappa_1\kappa_2}{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)}$$

и при  $\kappa_1 = \kappa_2$  имеем  $\Gamma_{11} = 0$ , а если, кроме того,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ , то и  $\Gamma_{12} = 0$ , а  $P_\Sigma = 1$ .

Если амплитуды падающей и отраженной волн на входе отрезка волновода со щелью суть  $a_1$  и  $b_1$ , а на его выходе –  $a$  и  $b$  (причем волны с  $a, a_1$  распространяются в направлении  $z > 0$ , волны с  $b, b_1$  – обратном), то очевидно, что  $\begin{pmatrix} b_1 \\ a \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1 \\ b \end{pmatrix}$ .

При практических расчетах многощелевых антенн используют "проходные" матрицы  $\mathbf{M}$ , связывающие амплитуды  $(a_1, b_1)$  и  $(a, b)$  (проходная матрица цепочки щелей равна произведению проходных матриц отдельных элементов).

Выражая элементы проходной матрицы через  $\Gamma_{ik}$ , найдем

$$(66) \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} 1 & \exp(i(\beta - \alpha)) \\ -\exp(i(\alpha - \beta)) & -1 \end{vmatrix} \equiv \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_3,$$

где

$$\mathbf{M}_1 = \begin{vmatrix} \exp(-i\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(i\alpha) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{vmatrix} \exp(-i\beta) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta) \end{vmatrix}$$

эквивалентны отрезкам регулярной линии с электрической длиной  $\theta_1 = -\alpha$ ,  $\theta_2 = -\beta$  ( $\beta = \arg F^-$ ), а матрица  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{E} + \kappa \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$  ( $\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  — единичная матрица), соответствует проводимости  $Y_{\text{экв}} = 2\kappa$ , шунтирующей эквивалентную линию в сечении  $z = 0$ . При этом продольные резонансные щели, для которых  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3 = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2$ , эквивалентны шунтирующим линию сопротивлениям  $Z = Y_{\text{экв}}^{-1}$ ; в случае резонансных поперечных щелей  $\alpha = -\beta = \pi/2$ , т.е.  $\theta_2 = \Lambda/4$ ,  $\theta_1 = -\Lambda/4$  ( $\Lambda$  — длина волны в волноводе), проводимость  $Y_{\text{экв}}$  через длину  $\Lambda/4$  пересчитывается в последовательно включенное сопротивление  $Z = Y_{\text{экв}} = 2\kappa$ , а суммарная длина двух дополнительных отрезков  $\theta_1 + \theta_2$  оказывается равной нулю. Представление типа (66) сохраняет свой вид для волн любых типов, в том числе и нераспространяющихся (в этом случае  $g$  и  $T$  чисто мнимые); это дает возможность записать такую проходную матрицу с учетом волн высших типов, а также для щели в многомодовом волноводе [24].

### Б. Щели в полубесконечном волноводе

Пусть полубесконечный волновод расположен вдоль положительной полуоси  $z > 0$  с торцом в сечении  $z = 0$ . Тогда при распространении в волноводе в направлении  $z < 0$  первичной волны  $\vec{E}_-, \vec{H}_-$  поле, возбуждающее щель (прорезанную в области  $z_1 < z < z_2$  с центром в сечении  $z = z_{\text{щ}}$ ), будем суперпозицией падающей и отраженной от торца волн вида  $[(\vec{E}_-, \vec{H}_-) - (\vec{E}_+, \vec{H}_+)]$  (так как  $R_- = 1, R_+ = 0$ ), а поле, возбуждаемое щелью в области  $z > z_2$  волновода, будет равно [24]

$$(67) \quad (\vec{E}, \vec{H})_{\text{щ}} = A(\vec{E}_+, \vec{H}_+), \quad A = c_+ - c_- = -\frac{V}{T} (F^- - F^+) = \\ = \frac{|F^- - F^+|^2}{TY} = \frac{2g^i}{Y} = \frac{2\kappa}{1 + \kappa},$$

так как  $V = \frac{F^- - F^+}{Y} = -\frac{(F^- - F^+)^*}{Y}$ , а  $g^i, Y, \kappa = \frac{g^i}{Y - g^i}$  соответствуют полубесконечному волноводу. Отнесенные к торцу  $z = 0$  величины при этом равны

$$(68) \quad \Gamma_{11} = -1 + A = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad Z_{\text{вх}} = \frac{1 + \Gamma_{11}}{1 - \Gamma_{11}} = \kappa.$$

Нетрудно показать, что

$$(69) \quad g^i = 2g_\infty^i \sin^2(\gamma z_{\text{щ}} - \alpha), \quad b^i = b_\infty^i + \Delta b^i, \quad \Delta b^i = -g_\infty^i \sin 2(\gamma z_{\text{щ}} - \alpha),$$

где  $g_\infty^i, b_\infty^i$  соответствуют бесконечному волноводу,  $\gamma$  — постоянная распространения первичной волны. Условия полного согласования щели с волноводом при

$b^i = 0$  в случае  $b_\infty^i = 0$  приводят к соотношениям  $g^i = 2g_\infty^i = g^e$ , а также  $z_{щ} = \pi/2\gamma = \Lambda/4$  для продольной и  $z_{щ} = (\pi + 2\alpha)/2\gamma = \Lambda/2$  — для поперечной щелей (отметим, что, подбирая  $z_{щ}$ , можно настроить нерезонансную щель так, чтобы  $\Delta b^i = -b_\infty^i$ ,  $b^i = 0$ ; однако условие  $g^i = g^e$  при этом может быть не выполнено). В то же время при  $z_{щ} = \Lambda/2$  для продольной щели и  $z_{щ} = \Lambda/4$  для поперечной  $\kappa = 0$ ,  $|\Gamma_{11}| = 1$ , т.е. щель не излучает (оказывается короткозамкнутой). Приведенные соотношения сохраняются и в случае торцевых щелей, когда  $z_{щ} = 0$ .

### В. Щель в поперечной перегородке внутри бесконечного волновода

В этом случае  $g^e = g^i = g$ ,  $\kappa = [1 + i\frac{b}{g}]^{-1}$ ,  $\Gamma_{11} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = -i\frac{b}{g}[2 + i\frac{b}{g}]^{-1}$ ,  
 $\Gamma_{12} = A = \frac{2\kappa}{1 + \kappa} = [1 + i\frac{b}{2g}]^{-1}$ . Отнесенная к плоскости перегородки входная проводимость системы из перегородки со щелью и находящимся за ним волноводом равна  $Y_{вх} = \frac{1 - \Gamma_{11}}{1 + \Gamma_{11}} = \frac{1}{\kappa} = 1 + i\frac{b}{g}$ , что соответствует волноводу, шунтированному проводимостью  $Y_{вх} = i\frac{b}{g}$ . Отсюда следует, что резонансная щель ( $b = 0$ ) полностью пропускает падающую мощность [24].

## 3. ВОЛНОВОДНЫЕ МНОГОЩЕЛЕВЫЕ АНТЕННЫ

### А. Прямой расчет типовых линейных многощелевых антенн

Одночленное приближение метода наведенных МДС применимо и к расчету волноводных многощелевых антенн [24, 42, 43]. Для этого используют уравнения (17), задавая распределения  $\vec{e}_n$  (формула (16)) равными нулю на всех щелях, кроме  $n$ -й. В этом случае  $Y_{mm}$  представляют собой собственные проводимости отдельных щелей, а  $Y_{mn}$ ,  $n \neq m$  — взаимные проводимости щелей с номерами  $m$  и  $n$ . Такие уравнения аналогичны соответствующим уравнениям, получаемым при использовании обычного метода наведенных ЭДС и применяемым для расчета многорезонаторных антенн (см., например, [22]). Однако в случае многощелевых антенн возможен более точный расчет, чем в случае многорезонаторных антенн, вследствие более простой конфигурации фидерного тракта, представляющего собой один общий питающий волновод с линейной решеткой щелевых излучателей. Изложим такой расчет для этого частного случая, который выполняется методом последовательных приближений, когда в первом приближении учитывается лишь основная распространяющаяся волна; а если расстояния между излучателями отличаются от резонансных, кратных полуволне в волноводе, то в первом приближении пренебрегается и отражениями от щелей волны основного типа, поскольку они в значительной степени взаимокомпенсируются. В соответствии со сказанным, уравнения (17) запишем в виде

$$(70) \quad \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq m}}^M V_n^{(\nu)} y_{mn}^{(1)} + V_m^{(\nu)} Y_{mm} = \Phi_m^{(\nu)}, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(71a) \quad \Phi_m^{(\nu)} = F_m - \sum_{n \neq m}^{1 \div N} V_n^{(\nu-1)} (Y_{mn}^e + \sum_{\mu > 1} y_{mn}^{(\mu)}),$$

$$(716) \quad \Phi_m^{(\nu)} = F_m - \sum_{n \neq m}^{1 \div N} V_n^{(\nu-1)} (Y_{mn}^e + \sum_{\mu > 1} y_{mn}^{(\mu)}) - \sum_{n=m+1}^N V_n^{(\nu-1)} y_{mn}^{(1)}.$$

Первый случай соответствует так называемым "резонансным" антеннам, когда расстояние между излучателями кратно полуволне в волноводе, при этом  $M = N$ ; второй – антенне с режимом бегущей волны в волноводе (обоснование этого режима дано ниже), при этом  $M = m - 1$ . В формулах (71)  $y_{mn}^{(\mu)}$  – парциальные внутренние взаимные проводимости, обусловленные парциальной волной с индексом "μ"; индекс "ν" означает номер итерации; при  $\nu = 1$   $V_n^{(0)} = 0$  и  $\Phi_m^{(1)} = F_m = f_m^1$  ( $f$  – парциальные МДС).

Как нетрудно показать,

$$(72) \quad y_{mn}^{(1)} = \sqrt{g_{mm}^{(1)} g_{nn}^{(1)}} \exp[-i\gamma_1 |z_m - z_n|],$$

причем в резонансной антенне  $\exp[-i\gamma_1 |z_m - z_n|] = \pm 1$ .

Решение уравнений (70) при  $\nu = 1$  легко найти, используя формулы Крамера и вычисляя детерминант системы и его алгебраические дополнения. В случае резонансной антенны с одностипными щелями, расположенными через  $\Lambda/2$  так, чтобы между соседними щелями был дополнительный сдвиг фазы  $\pi$  через одну щель<sup>2</sup> (что обеспечивает синфазность возбуждения), найдем

$$(73) \quad V_m^{(1)} = 2 \sqrt{\frac{P_0}{g_{mm}^{(1)}}} \frac{\kappa_m \exp(i\alpha)}{1 + \sum_{n=1}^N \kappa_n},$$

$$\Gamma_{11}^{(1)} = \sum_{m=1}^N c_m^{(-1)} = - \frac{\sum_{m=1}^N \kappa_m}{1 + \sum_{n=1}^N \kappa_n} \exp(2i\alpha),$$

$$\Gamma_{12}^{(1)} = 1 + \sum_{m=1}^N c_m^{(1)} = \left[ 1 + \sum_{m=1}^N \kappa_m \right]^{-1}.$$

Как видно, эти формулы отличаются от записанных выше для одиночной щели в бесконечном волноводе заменой  $\kappa$  на  $\sum_{m=1}^N \kappa_m$ . Поэтому условие оптимального

согласования  $\sum_{m=1}^N \kappa_m = 1$  также соответствует излучению лишь 0,5 падающей мощности. Очевидно, что в случае волновода с поршнем получим (см. формулу (68)):

$$(74) \quad \Gamma_{11}^{(1)} = \left[ \sum_{m=1}^N \kappa_m - 1 \right] \left[ \sum_{m=1}^N \kappa_m + 1 \right]^{-1}, \quad Z_{вх} = \sum_{m=1}^N \kappa_m,$$

и условию идеального согласования также соответствует  $\sum_{m=1}^N \kappa_m = 1$ , но парамет-

<sup>2</sup> Для этого, например, в случае прямоугольного волновода на широкой стенке щели прорезаются по разные стороны от средней линии.

$$(75) \quad V_m = \frac{u_m}{\prod_{n < m} (1 + \kappa_m)}, \quad u_m = \frac{f_m^{(1)}}{Y_{mm}}$$

где  $u_m$  – амплитуда напряжения на  $m$ -й щели при отсутствии остальных. При этом использовано соотношение  $f_n^{(1)} y_{nm}^{(1)} = g_{nh}^{(1)} f_m^{(1)}$ . Определим далее коэффициент прохождения в оконечную нагрузку

$$(76) \quad \Gamma_{12}^{(1)} = 1 + \sum_{n=1}^N c_n^{(1)} = \left[ \prod_{n=1}^N (1 + \kappa_n) \right]^{-1}$$

и коэффициент отражения на входе антенны

$$(77) \quad \Gamma_{11}^{(1)} = \sum_{n=1}^N c_n^{(1)} = - \sum_{n=1}^N \kappa_n \exp(2i(\alpha_n - \gamma z_{шn})) \left[ \prod_{m < n} (1 + \kappa_m) \right]^{-1}.$$

Коэффициент  $\Gamma_{11}^{(1)}$  вычислен приближенно, поскольку при расчете  $V_n^{(1)}$  отражения от щелей не учитываются.

В антенне этого типа принципиально имеем  $\Gamma_{12} \neq 0$ ; наличие отражений от оконечной нагрузки ( $R_+ \neq 0$ ) эквивалентно возбуждению антенны с конца волной с амплитудой  $R_+ \Gamma_{12}$ . Уравнения (70), (71б) могут быть легко разрешены и без применения правила Крамера. При этом

$$(78) \quad V_1^{(\nu)} = \frac{\Phi_1^{(\nu)}}{Y_{11}}, \quad V_2^{(\nu)} = \frac{\Phi_2^{(\nu)}}{Y_{22}} - \frac{V_1^{(\nu)} y_{21}^{(1)}}{Y_{22}} = \frac{\Phi_2^{(\nu)}}{Y_{22}} - \frac{\Phi_1^{(\nu)} y_{21}^{(1)}}{Y_{11} Y_{22}} \quad \text{и т.д.}$$

Выражения (78) удобно использовать для последующих итераций ( $\nu > 1$ ). Применение проходных матриц дает возможность рассчитывать различные характеристики щелевой антенны, в частности коэффициент отражения на входе антенны, при любых расстояниях между щелями. Для простейшего случая идентичных излучателей и равных расстояний между центрами соседних щелей обратная проходная матрица

$$(79) \quad M_\Sigma = QM \dots QM \approx Q^N + \kappa[(Qu)Q^{N-1} + \dots + Q^{N-1}(Qu)],$$

где  $Q$  – проходная матрица отрезка  $d$  волновода (между щелями)<sup>3</sup>.

Вычисляя приближенно коэффициенты матрицы  $M_\Sigma$ , найдем коэффициент отражения:

$$(80) \quad \Gamma_{11}(\theta) = \Gamma_{\text{макс}} \exp(-i \cdot 2\pi(N-1)\theta) \frac{\sin(2\pi N\theta)}{N \sin 2\pi\theta},$$

$$\Gamma_{\text{макс}} = - \frac{N\kappa \exp(i\delta)}{1 + N\kappa},$$

где  $\theta = d/\Lambda$ ,  $\delta = \alpha - \beta$ ,  $\Gamma_{\text{макс}}$  – коэффициент отражения, соответствующий резонансному расстоянию  $\theta = 0,5$ .

Функция  $\Gamma_{11} = f(\theta)$  имеет главные максимумы при  $\theta = 0,5p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ), т.е.  $d/\Lambda = p/2$  (при резонансных расстояниях), нули при  $d/\Lambda = p_0/2N$  ( $p_0 = 1, \dots, N/2$ ) и побочные лепестки с уровнями  $\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^{-1}$ , где  $n$  – номер лепестка.

<sup>3</sup> Матрица  $u = \begin{vmatrix} 1 & \exp(i(\beta - \alpha)) \\ -\exp(i(\alpha - \beta)) & -1 \end{vmatrix}$  (см. формулу (66)).

Первым нулям соответствует  $d/\Lambda = p(1 \pm 1/N)/2$ , т.е. изменение резонансного расстояния  $\Lambda/2$  всего на  $1/N$ . Таким образом, переход от резонансного режима к режиму бегущей волны осуществляется уже при малом изменении частоты. Минимальному среднему уровню боковых лепестков соответствует  $d/\Lambda = 0,25$ . При более точных расчетах график коэффициента отражения, по-видимому, будет соответствовать огибающей графика  $\Gamma_{11}(\theta)$  из формулы (80), т.е.  $\Gamma_{\text{макс}}/N \sin 2\pi\theta$ ,  $\theta \neq 0,5$ .

### Б. Обратный расчет линейной многощелевой антенны

На практике, помимо прямых, необходимо решать и обратные задачи, т.е. находить геометрию антенны, обеспечивающую реализацию заданных характеристик. В случае щелевых антенн обратный расчет заключается (см. [24]) в нахождении величин  $\kappa$ ,  $g_{nn}^{(1)}$  и расположения излучателей по заданному распределению напряжения на щелях (связь диаграммы направленности и распределений в апертуре антенны достаточно хорошо изучена). Такой расчет в первом приближении легко выполним. Так, в случае резонансной антенны

$$(81) \quad \frac{V_n^{(1)}}{V_1^{(1)}} = \sqrt{\frac{g_{11}^{(1)}}{g_{nn}^{(1)}}} \frac{\kappa_n}{\kappa_1} \quad \text{и} \quad g_{nn}^{(1)} = \left| \frac{V_n^{(1)}}{V_1^{(1)}} \right|^2 g_{11}^{(1)}$$

(второе соотношение при  $b_{nn} = b_{11}$ ).

В случае антенны бегущей волны

$$(82) \quad \frac{V_n^{(1)}}{V_{n+1}^{(1)}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} (1 + \kappa_n) = \sqrt{\frac{g_{n+1,n+1}^{(1)}}{g_{nn}^{(1)}}} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} (1 + \kappa_{n+1}) \times \\ \times \exp(i(\alpha_n - \alpha_{n+1} + \gamma d)),$$

откуда в случае настроенных щелей

$$(83) \quad \kappa_n = \left| \frac{V_{n+1}^{(1)}}{V_n^{(1)}} \right|^2 \frac{\kappa_{n+1}}{(1 + \kappa_{n+1})^2}, \quad n = N - 1, \dots, 1.$$

Аналогичные расчетные формулы можно получить и в случае нерезонансных щелей.

### В. Дисперсионные уравнения для многощелевого волновода

Дисперсионные уравнения для расчета постоянной распространения  $h = \beta - i\alpha$  волны в многощелевом волноводе с одинаковыми и единообразно прорезанными щелями можно найти, применяя достаточно строгий общий метод, наложенный в [59, 60]. В первом приближении в случае одномодового волновода упрощенное дисперсионное уравнение имеет вид [24]

$$(84) \quad \sin \gamma^{(1)} d [\cos h d - \cos \gamma^{(1)} d]^{-1} = \frac{Y - g^{(1)}}{i g^{(1)}} \equiv \frac{1}{i \kappa}.$$

Отделяя в (84) вещественную и мнимую части, получим

$$(85) \quad \cos \beta d \operatorname{ch} \alpha d = \cos \gamma^{(1)} d + \frac{\xi \xi}{1 + \xi^2} \sin \gamma^{(1)} d, \\ \sin \beta d \operatorname{sh} \alpha d = \frac{\xi}{1 + \xi^2} \sin \gamma^{(1)} d,$$

где  $\xi = b/g^e$ ,  $\xi = g^i/g^e$ .

$$\begin{aligned} \cos \beta d &\sim \cos \gamma^{(1)} d + \frac{\zeta \xi}{1 + \xi^2} \sin \gamma^{(1)} d, \\ \alpha d &\sim \frac{\zeta}{1 + \xi^2} \frac{\sin \gamma^{(1)} d}{\sin \beta d}. \end{aligned} \quad (86)$$

В случае резонансных щелей  $\xi = 0$  и

$$\cos \beta d = \cos \gamma^{(1)} d, \quad \beta = \gamma^{(1)}, \quad \alpha d = \zeta, \quad \alpha = \zeta/d. \quad (87)$$

Последнее соотношение используется при упрощенном так называемом "энергетическом" методе расчета многощелевых антенн, когда волновод со щелями аппроксимируется волноводом с распределенными потерями, соответствующими постоянной затухания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман М.С. // Изв. электропромышленности слабого тока. 1940. № 6. С. 1.
2. Мандельштам Л.И. // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. № 9. С. 9 (471).
3. Jordan, Müller // Electronics. 1947. № 2. P. 90.
4. Cullen A.L., Goward G.K. // JIEE (L.). 1946. Pt. IIIA. V. 93. № 4. P. 683.
5. Cullen A.L. // IRE Trans. 1962. V. AP-10. № 5. P. 561.
6. Chernin, Bickmore R.W. // IRE Conv. Rec. 1956. Pt. 1. P. 1.
7. Watson W.H. // JIEE (L.). 1946. Pt. IIIA. V. 93. № 4. P. 737.
8. Пистолькорс А.А. // ЖТФ. 1944. Т. 14. № 12. С. 693.
9. Booker H.C. // JIEE (L.). 1948. Pt. IIIA. V. 93. № 4. P. 620.
10. Леонтович М.А. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 6. С. 630.
11. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 7. С. 1165.
12. Пистолькорс А.А. // ЖТФ. 1944. Т. 14. № 12. С. 681.
13. Пистолькорс А.А. // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 2. С. 127.
14. Пистолькорс А.А. // ЖТФ. 1946. Т. 16. № 10. С. 1061.
15. Фельд Я.Н. // ЖЭТФ. 1943. Т. 13. № 3-4. С. 110; 1944. Т. 14. № 9. С. 330.
16. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48. № 3. С. 181.
17. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. № 2. С. 111; 1947. Т. 55. № 5. С. 411.
18. Фельд Я.Н. // ЖТФ. 1947. Т. 17. № 9. С. 1051; № 12. С. 1457.
19. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. № 5. С. 481.
20. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. № 4. С. 371.
21. Фельд Я.Н. // Радиотехника. 1947. Т. 2. № 5. С. 42; 1946. Т. 1. № 6. С. 3.
22. Фельд Я.Н. // ЖТФ. 1948. Т. 18. № 10. С. 1265.
23. Фельд Я.Н. Основы теории щелевых антенн. М.: Сов. радио, 1948.
24. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства. Ч. 2. Гл. 14, 15. М.: Академия им. Жуковского Н.Е. 1959.
25. Stevenson A.E. // J. Appl. Phys. 1948. V. 29. № 1. P. 24.
26. Левин М.Л. // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58, № 6. С. 1039; 1948. Т. 60. № 5. С. 787; 1948. Т. 63. № 6. С. 661; 1953. Т. 91. № 4. С. 807.
27. Гапонов А.В., Левин М.Л. // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 6. С. 150.
28. Левинсон И.Б., Фридберг П.Ш. // РЭ. 1965. Т. 10. № 2. С. 260; 1966. Т. 11. № 5. С. 831; № 6. С. 1076.
29. Фридберг П.Ш. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 2. С. 119; Т. 194. № 1. С. 73.
30. Гарб Х.Л., Казимянец В.Н., Фридберг П.Ш. // РЭ. 1972. Т. 17. № 12. С. 2504.
31. Гарб Х.Л., Левинсон И.Б., Фридберг П.Ш. // РЭ. 1968. Т. 13. № 12. С. 2152.
32. Гарб Х.Л., Фридберг П.Ш. // РЭ. 1970. Т. 15. № 4. С. 710.
33. Фридберг П.Ш. // РЭ. 1971. Т. 16. № 9. С. 1578; 1973. Т. 18. № 3. С. 469.
34. Левинсон И.Б., Фридберг П.Ш. // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 6. С. 1335.
35. Вайнштейн Л.А. // ЖТФ. 1961. Т. 31. № 1. С. 29.
36. Фельд Я.Н. // РЭ. 1962. Т. 7. № 1. С. 53.
37. Левин М.Л. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1948. Т. 12. № 3. С. 310.
38. Бененсон Л.С. // ЖТФ. 1952. Т. 29. № 4. С. 509.
39. Панченко Б.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 2. С. 243.
40. Яцук Л.П., Шубарин Ю.В. // РЭ. 1967. Т. 12. № 6. С. 1105.
41. Oliver A.A. // IRE Trans. 1957. V. AP-5. № 1. P. 4.
42. Бененсон Л.С. // Тр. ЦНИИ. М.: 1950. Вып. 22. С. 9.

43. *Евстропов Г.А., Царапкин С.А.* // РЭ. 1965. Т. 10. № 9. С. 822.
44. *Горобец Н.Н., Жиронкина А.В., Яцук Л.П.* // Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. 1982. Вып. 2. С. 23.
45. *Simmons R.* // IRE Trans. 1957. V.AP-15. № 1. P. 31.
46. *Горобец Н.Н., Жиронкина А.В., Яцук Л.П. и др.* // Антенны. М.: Сов. радио, 1979. № 27. С. 159.
47. *Яцук Л.П., Смирнова И.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1967. Т. 10. № 4. С. 359.
48. *Вешникова И.Е., Евстропов Г.А.* // РЭ. 1965. Т. 10. № 7. С. 1181.
49. *Бененсон Л.С.* // Тр. ВНИИ. М.: 1959. Вып. 22. С. 67.
50. *Лященко В.А.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1971. Т. 14. № 10. С. 1122.
51. *Горобец Н.Н., Сомов В.А.* // Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. 1982. Вып. 2. С. 33.
52. *Honey R.* // IRE. Trans. 1959. V.AP-7. № 2. P. 320.
53. *Jones E.M.* // IRE Trans. 1960. V.AP-8. № 3. P. 401.
54. *Евстропов Г.А., Царапкин С.А.* // РЭ. 1966. Т. 11. № 5. С. 822.
55. *Elliot R.S.* // IEEE Trans. 1986. V.AP-34. № 9. P. 1144; 1983. V.AP-31. № 1. P. 48.
56. *Киселев С.В., Крицын В.А., Запитерский В.К., Турко Л.С.* // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехническая. 1985. Вып. 6. С. 20.
57. *Киселев С.В., Крицын В.А., Турко Л.С.* // Антенны. М.: Радио и связь, 1989. № 36. С. 52.
58. *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма: Пер. с англ. / Под ред. Рыгова С.М. М.: Гостехтеориздат, 1948. С. 310.
59. *Бененсон Л.С., Фельд Я.Н.* // РЭ. 1959. Т. 4. № 3. С. 417.
60. *Бененсон Л.С., Марченко И.Н.* // РЭ. 1970. Т. 15. № 2. С. 263.

Поступила в редакцию  
5.06.91



Я.Н. Фельд, Н.Г. Пономарев

## ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ИМПЕДАНСНЫХ РЕБРИСТЫХ И ШТЫРЬКОВЫХ СТРУКТУР

Дан метод расчета электрической прочности ребристых и штырьковых импедансных структур, вдоль которых распространяются поверхностные волны. Рассмотрены волноводные и плоские системы с крышками. Метод расчета проверен экспериментально. Показано хорошее совпадение экспериментальных результатов с расчетными.

В антенной технике применяются как ребристые, так и "штырьковые" структуры. Штырьковая структура представляет собой металлическую плоскость, на которой установлены штырьки. Сверху над штырьками может быть расположена вторая металлическая плоскость, параллельная первой (рис. 1). Такая система, так же как и ребристая структура, может быть использована для замедления электромагнитных волн. В отличие от ребристой структуры, которая анизотропна (замедление в ней зависит от направления распространения), штырьковая структура практически достаточно изотропна. Меняя шаг либо высоту штырьков, можно изменять замедление по требуемому закону.

Изотропия и сравнительная простота получения переменного замедления в штырьковых структурах позволяют широко использовать их при построении линзовых антенн.

Одним из важных параметров как ребристых, так и штырьковых структур является мощность, которую они могут пропустить, поэтому целесообразно рассмотреть вопрос об их электрической прочности.

При распространении поверхностной волны основного типа над бесконечной структурой (как ребристой, так и штырьковой) с крышкой<sup>1</sup> составляющие поля приближенно выражаются следующими формулами (основные размеры и ориентация координат указаны на рис. 1 и 2) [1]:

$$(1) \quad E_z = A \operatorname{sh} \alpha(y - b) e^{i(\omega t - \beta z)},$$

$$(2) \quad E_y = \frac{i\beta}{\alpha} A \operatorname{ch} \alpha(y - b) e^{i(\omega t - \beta z)},$$

$$(3) \quad H_x = \frac{i\omega\epsilon}{\alpha} A \operatorname{ch} \alpha(y - b) e^{i(\omega t - \beta z)},$$

$$(4) \quad \beta^2 = k^2 + \alpha^2, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

а  $\alpha$  определяется из соотношения

$$(5) \quad \operatorname{ctg} kh = \frac{k}{\alpha} \frac{D - d}{D} \operatorname{cth} \alpha b,$$

$D$  — расстояние между штырьками.

Для волновода со структурой формулы для составляющих поля имеют вид

$$(6) \quad E'_z = A' \operatorname{sh} \alpha'(y - b) \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - \beta' z)},$$

$$(7) \quad E'_y = \frac{i\beta'}{\alpha'} A' \operatorname{ch} \alpha'(y - b) \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - \beta' z)},$$

<sup>1</sup> Плоский волновод со структурой.

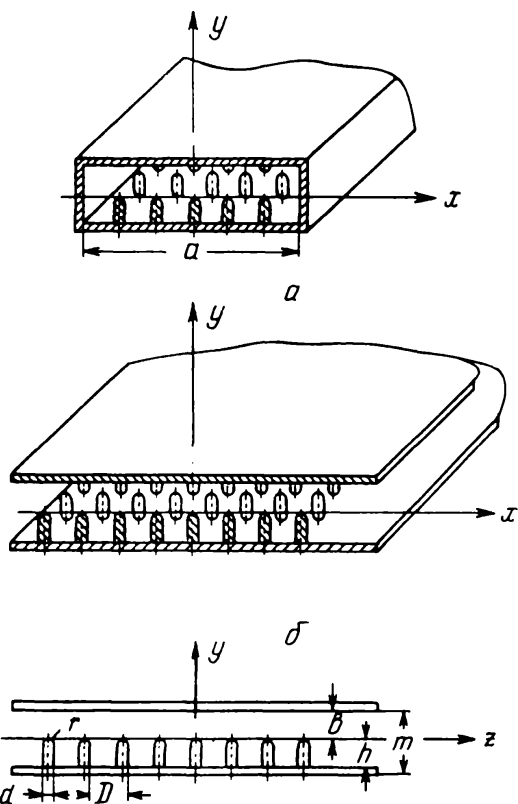


Рис. 1. Штырьковая структура;  $a$ : в прямоугольном волноводе;  $b$ : в параллельных пластинах

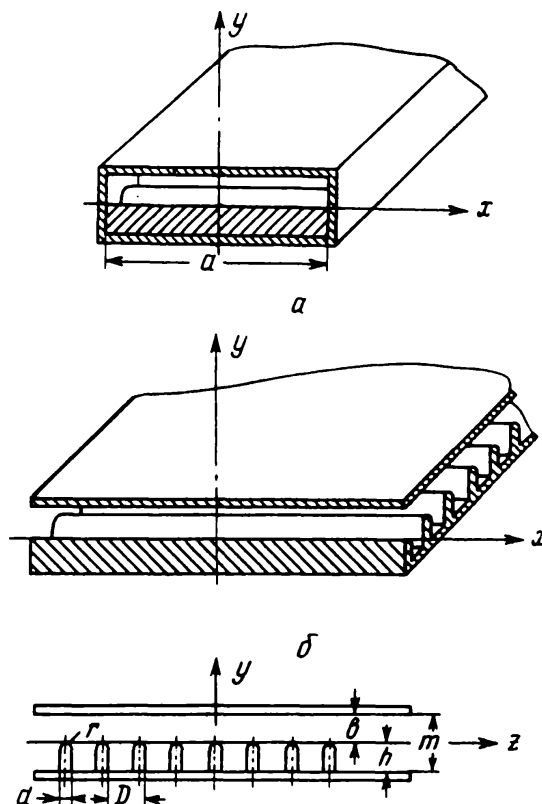


Рис. 2. Ребристая структура;  $a$ : в прямоугольном волноводе;  $b$ : в параллельных пластинах

$$(8) \quad H'_z = - \frac{\beta' \pi}{\omega \mu \alpha' a} A' \operatorname{ch} \alpha' (y - b) \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - \beta' z)},$$

$$(9) \quad H'_y = \frac{\pi}{i \omega \mu a} A' \operatorname{ch} \alpha' (y - b) \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - \beta' z)},$$

$$(10) \quad H'_x = - \frac{\kappa^2}{i \omega \mu \alpha'} A' \operatorname{ch} \alpha' (y - b) \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - \beta' z)},$$

где

$$(11) \quad \alpha'^2 = \beta'^2 - \kappa^2, \quad \kappa^2 = k^2 - (\pi/a)^2,$$

а  $\alpha'$  определяется из выражения

$$(12) \quad \operatorname{ctg} \kappa h = \frac{\kappa}{\alpha'} \frac{D - d}{D} \operatorname{cth} \alpha' b.$$

Определим мощность, переносимую поверхностной волной. Мощность  $P$  на единицу ширины бесконечной структуры можно определить по формуле

$$(13) \quad P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^b E_y H_x^* dy \text{ [Вт/м]},$$

где  $H_x^*$  — величина, комплексно-сопряженная с  $H_x$ .

Для волновода со структурой мощность равна

$$(14) \quad P' = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^b \int_{-a/2}^{+a/2} E_y H_x^* dx dy \text{ [Вт]}.$$

Подставляя в (13) и (14) составляющие полей из (1)–(10) и интегрируя, **854** получим

$$(15) \quad P = \frac{1}{4} \frac{\beta \omega \epsilon}{\alpha^3} A^2 (\operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \alpha b)$$

для плоского волновода со структурой.

$$(16) \quad P' = \frac{1}{8} \frac{\beta' \kappa^2}{\alpha'^3 \omega \mu} A'^2 a (\operatorname{sh} \alpha' b \operatorname{ch} \alpha' b + \alpha' b)$$

для прямоугольного волновода со структурой.

Разрешая (15) и (16) относительно  $A$  и  $A'$  и подставляя в формулы (1)–(10), можно связать составляющие поля с мощностью поверхностной волны.

Из формул для составляющих поля видно, что, во-первых, составляющая  $E_y$  значительно больше  $E_z$  и, во-вторых, обе компоненты сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Поэтому при расчете пробивной напряженности необходимо учитывать только  $y$ -составляющую электрического вектора.

Учитывая (15) и (16), выпишем  $E_y$ :

1) для плоского волновода

$$(17) \quad E_y = i \sqrt{4PW} \frac{\beta \alpha}{k} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \alpha b} \operatorname{ch} \alpha (y - b) e^{i(\omega t - \beta z)},$$

2) для прямоугольного волновода

$$(18) \quad E'_y = i \sqrt{8P'W} \frac{\alpha' \beta' k}{\kappa^2 a} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha' b \operatorname{ch} \alpha' b + \alpha' b} \operatorname{ch} \alpha' (y - b) e^{i(\omega t - \beta z)},$$

где  $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$ .

Для дальнейшего нам необходимо определить среднее значение  $E_y$  по вертикали. Так как поле с ростом  $y$  убывает по экспоненте, то при стремлении  $b \rightarrow \infty$  имеем  $E_{y \text{ ср}} \rightarrow 0$ . Поле поверхностной волны в основном сосредоточено у импедансной поверхности и при достаточно больших значениях  $b$  практически не будет зависеть от дальнейшего роста  $b$ . Учитывая это, определим  $E_{y \text{ ср}}$  при помощи следующей формулы:

$$(19) \quad E_{y \text{ ср}} = \frac{1}{l} \int_0^l E_y dy,$$

где

$$(20) \quad l = \begin{cases} b & \text{при } \operatorname{ch} \alpha b \leq e, \\ b_{\text{д}} & \text{при } \operatorname{ch} \alpha b \geq e. \end{cases}$$

Здесь  $b_{\text{д}}$  – расстояние от плоскости  $y = 0$  по вертикали, на котором поле убывает в  $e$  раз,  $b_{\text{д}} = b - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ch}(\operatorname{ch} \alpha b / e)}{\alpha}$ . Если  $\operatorname{ch} \alpha b \leq e$ , то в системе не будет такой

плоскости, на которой поле в  $e$  раз меньше, чем при  $y = 0$ . Величина  $E_{y \text{ ср}}$ , определенная формулой (19), сохраняет конечное значение при любых  $b$ , в том числе и при  $b \rightarrow \infty$ , и представляет собой среднее значение по области, в которой, по существу, сосредоточена почти вся мощность, переносимая полем.

После этих замечаний определим  $E_{y \text{ ср}}$  и  $E'_{y \text{ ср}}$ , подставляя в (19) выражения (17) и (18) и интегрируя:

$$(21) \quad E_{y \text{ ср}} = \sqrt{4PW} \frac{\beta}{\kappa \alpha l^2} \frac{[\operatorname{sh} \alpha b - \operatorname{sh} \alpha (b - l)]^2}{\operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \alpha b}$$

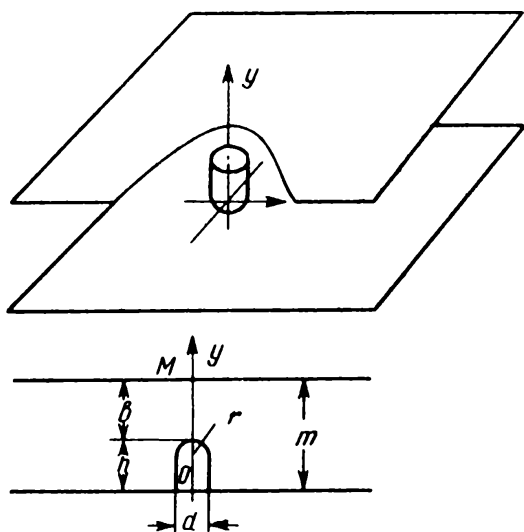


Рис. 3. Металлический штырь между двумя бесконечными металлическими плоскостями

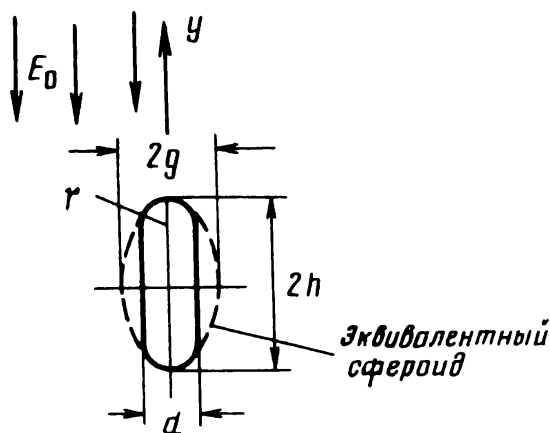


Рис. 4. Отображение штыря в нижней плоскости

для плоского волновода,

$$(22) \quad E'_{y\text{cp}} = \sqrt{8P'W} \frac{\beta'ka^{-1}}{\alpha'\kappa^2l'^2} \frac{[\text{sh}\alpha'b - \text{sh}\alpha'(b-l')]^2}{\text{sh}\alpha'b \text{ch}\alpha'b + \alpha'b}$$

для прямоугольного волновода со структурой.

Разрешая (21) и (22) относительно  $P$  и  $P'$ , получим выражения для мощности поверхностной волны для плоского и прямоугольного волноводов:

$$(23) \quad P = \frac{E_{y\text{cp}}^2}{4W} l \frac{k\alpha l(\text{sh}\alpha b \text{ch}\alpha b + \alpha b)}{\beta[\text{sh}\alpha b - \text{sh}\alpha(b-l)]^2},$$

$$(24) \quad P' = \frac{E'_{y\text{cp}}{}^2}{8W} al' \frac{\kappa^2\alpha'l'(\text{sh}\alpha'b \text{ch}\alpha'b + \alpha'b)}{k\beta'[\text{sh}\alpha'b - \text{sh}\alpha'(b-l')]^2}.$$

Формулы (23) и (24) выведены в предположении импедансных усредненных граничных условий, которые, как известно, справедливы для достаточно малых периодов структуры и не учитывают неоднородность поля, появляющуюся вследствие наличия штырьков или ребер и связанную с резким повышением градиента потенциала у вершин последних. Попытаемся учесть это возрастание градиента потенциала, вводя в формулы (23) и (24) поправочные коэффициенты, учитывающие неравномерность поля над структурой.

Сначала рассмотрим вопрос о распределении поля над штырьковой структурой, а затем над ребристой.

Решить задачу о распределении поля над штырьковой структурой в электродинамической постановке весьма трудно. Мы идеализируем ее, и рассмотрим прежде всего задачу о распределении электростатического поля над одним штырьком, установленным на бесконечной металлической плоскости. Сверху эту систему будем считать ограниченной второй металлической плоскостью, параллельной первой (рис. 3).

Ниже показано, что решение такой задачи может быть сведено к рассмотрению уединенного штырька, имеющего в 2 раза большую длину по сравнению с исходным (получающегося в результате зеркального отображения в нижней плоскости), находящегося в параллельном его оси однородном электростатическом поле (рис. 4).

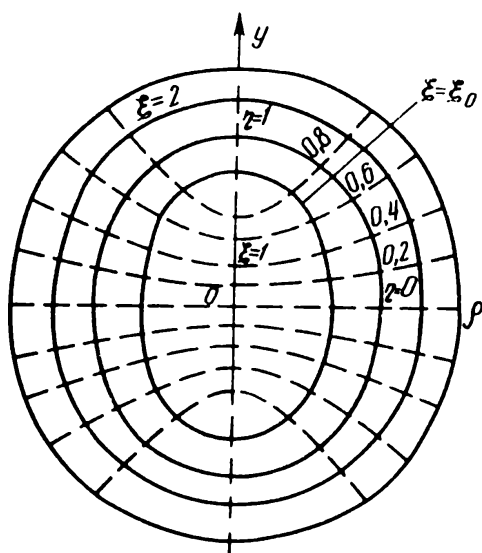


Рис. 5. Сечение координатных поверхностей сфероидальной (эллиптической) системы плоскостью, проходящей через ось  $y$

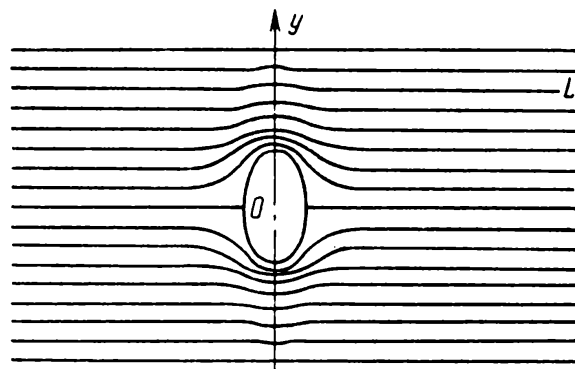


Рис. 6. Сечение эквипотенциальных поверхностей плоскостью, проходящей через большую ось металлического сфероида

Пусть первичное однородное поле определяется распределением потенциала

$$(25) \quad V_0 = -E_0 y,$$

где  $E_0$  — постоянная напряженность однородного электростатического поля. Вследствие того, что штырек имеет форму, близкую к вытянутому сфероиду, удобно ввести сфероидальную систему координат  $\xi, \eta, \varphi$ .

Эти координаты связаны с цилиндрическими  $\rho, \theta, y$  известными соотношениями:

$$(26a) \quad y = c \xi \eta,$$

$$(26b) \quad \rho = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)},$$

где  $2c$  — расстояние между фокусами сфероидальной системы координат. На рис. 5 изображено сечение сфероидальной координатной системы плоскостью, проходящей через ось  $y$ . В этой системе семейство конфокальных сфероидов выражается равенством  $\xi = \text{const}$ , а ортогональных к ним гиперболоидов — равенством  $\eta = \text{const}$ .

Будем считать, что поверхность металлического штырька (рис. 5) совпадает со сфероидом  $\xi = \xi_0$ . Искомый потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Решение последнего в сфероидальной системе координат, имеющее осевую симметрию и удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, имеет вид

$$(27) \quad V = P_1(\eta)[AP_1(\xi) + BQ_1(\xi)],$$

где  $P_1$  — полином Лежандра 1-го рода,  $Q_1$  — функция Лежандра 2-го рода,  $A$  и  $B$  — постоянные коэффициенты.

Действительно, это решение на бесконечности должно перейти в (25), поэтому в него не могут входить функции Лежандра более высоких порядков. Постоянные  $A$  и  $B$  определим из граничных условий на поверхности штырька  $\xi = \xi_0$  и на бесконечности. Принимая потенциал штырька равным нулю, найдем

$$(28) \quad V = P_1(\eta)[AP_1(\xi_0) + BQ_1(\xi_0)] = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно  $A/B$ , получим

$$(29) \quad A/B = - \frac{Q_1(\xi_0)}{P_1(\xi_0)}.$$

Для окончательного определения постоянных используем граничное условие на бесконечности. При  $y \rightarrow \infty$  857

$$(30) \quad V \rightarrow -E_0 y.$$

Так как  $P_1(\xi) = \xi$ ,  $Q_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1$ , и при  $y \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow \frac{r_1}{c}$  и  $\eta \rightarrow \frac{y}{r_1}$  ( $r_1 = \sqrt{y^2 + \rho^2}$ ), условие (30) с учетом (27) и (25) перепишем так:

$$(31) \quad A/c = -E_0$$

и

$$(32) \quad B = cE_0 \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0}}.$$

Выражения (31), (32) позволяют придать найденному решению (27) следующий вид:

$$(33) \quad V = E_0 y \left[ 1 - \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{1}{\xi}}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0}} \right].$$

Учитывая известное соотношение  $\frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} = \operatorname{arcth} \xi$ , придадим (33) окончательный вид:

$$(34) \quad V = E_0 y \left[ 1 - \frac{\operatorname{arcth} \xi - \frac{1}{\xi}}{\operatorname{arcth} \xi_0 - \frac{1}{\xi_0}} \right].$$

Легко видеть, что потенциал (34) обращается в нуль на всей плоскости  $y = 0$ , т.е. она является эквипотенциальной. Остальные эквипотенциальные поверхности имеют вид, изображенный на рис. 5. Как видно из рисунка, на достаточном расстоянии от штырька эквипотенциальные поверхности приближаются к плоскости, параллельной плоскости  $y = 0$ . Очевидно, что если две любые эквипотенциальные поверхности, например  $y = 0$  и  $L_1$  (рис. 6), заметаллизировать, то картина поля при этом не изменится и решение (34) сохранит смысл. Это позволяет утверждать, что с помощью (34) можно решить также с достаточной точностью задачу о штырьке между параллельными металлическими поверхностями, изображенными на рис. 3.

Определим максимальную напряженность поля у вершины штырька в точке  $y = h$ ,  $\rho = 0$ :

$$(35) \quad E_{y \text{ макс}}^{\text{ст}} = - \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{\substack{y=h, \\ \rho=0}}.$$

Дифференцируя (34) по  $y$  с учетом (26), получим

$$(36) \quad E_{y \text{ макс}}^{\text{ст}} = \frac{E_0}{\xi_0(\xi_0^2 - 1)(\operatorname{arcth} \xi_0 - \frac{1}{\xi_0})}.$$

$$(37) \quad \frac{1}{\xi_0(\xi_0^2 - 1)(\operatorname{arcth} \xi_0 - \frac{1}{\xi_0})} = k_1,$$

тогда

$$(38) \quad E_{y_{\max}}^{\text{ст}} = k_1 E_0.$$

Таким образом, максимальная напряженность поля у вершины штырька в  $k_1$  раз превышает напряженность однородного электростатического поля.

Определим на отрезке между штырьком и крышкой среднюю напряженность электростатического поля. Для этого, используя (34), вычислим разность потенциалов между штырьком и крышкой и поделим ее на расстояние между вершиной штырька и крышкой:

$$(39) \quad E_{y_{\text{ср}}}^{\text{ст}} = E_0 \frac{y_1}{y_1 - y_0} \left[ 1 - \frac{\operatorname{arcth} \xi_1 - \frac{1}{\xi_1}}{\operatorname{arcth} \xi_0 - \frac{1}{\xi_0}} \right].$$

Здесь  $y_1 = h + b$  — координата точки  $M$  на крышке,  $y_0 = b$  — координата вершины штырька,  $\xi_1 = y_1/c$ .

Найдем отношение максимальной напряженности поля (36) к средней (39):

$$(40) \quad \frac{E_{y_{\max}}^{\text{ст}}}{E_{y_{\text{ср}}}^{\text{ст}}} = \frac{y_1 - y_0}{y_1 \xi_0 (\xi_0^2 - 1) \left[ \left( \operatorname{arcth} \xi_0 - \frac{1}{\xi_0} \right) - \left( \operatorname{arcth} \xi_1 - \frac{1}{\xi_1} \right) \right]} \equiv k_2.$$

Тогда получим

$$(41) \quad E_{y_{\max}}^{\text{ст}} = k_2 E_{y_{\text{ср}}}^{\text{ст}}.$$

Очевидно, что  $k_2 \rightarrow k_1$  при  $y_1 \rightarrow \infty$  и  $k_2 \rightarrow 1$  при  $y_1 \rightarrow y_0$ .

Таким образом, коэффициент  $k_2$  учитывает увеличение напряженности поля у вершины штырька по сравнению с  $E_{y_{\text{ср}}}^{\text{ст}}$ , вызванное формой штырька (острием).

Возвращаясь к исходной задаче об электрической прочности импедансной штырьковой структуры с крышкой, будем предполагать (и это явится основным допущением), что максимальная напряженность поля поверхностной волны у вершины штырька также в  $k_2$  раз превышает среднее значение поля, определяемое формулой (19), т.е.

$$(42) \quad E_{y_{\max}} = k_2 E_{y_{\text{ср}}}.$$

Это достаточно близкое к действительности предположение, так как увеличение напряженности поля у вершины штырька для поверхностной волны является по существу электростатическим эффектом.

Полагаем  $E_{y_{\max}} = E_{\text{проб}}$ , тогда учитывая (42), получим

$$(43) \quad E_{y_{\text{ср}}} = E_{\text{проб}}/k_2.$$

Подставляя в (23) и (24) вместо величины  $E_{y_{\text{ср}}}$  ее значение из (43), имеем

$$(44) \quad P_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{4W} l \frac{k\alpha l(\operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \alpha b)}{\beta k_2^2 [\operatorname{sh} \alpha b - \operatorname{sh} \alpha(b-l)]^2}$$

для плоского волновода и

$$(45) \quad P'_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{8W} \alpha l' \frac{\kappa^2 \alpha' l' (\text{sh} \alpha' b \text{ch} \alpha' b + \alpha' b)}{k \beta' k_2^2 [\text{sh} \alpha' b - \text{sh} \alpha' (b - l')]^2}$$

для прямоугольного волновода. Здесь  $P_{\text{проб}}$  и  $P'_{\text{проб}}$  – пробивные мощности.

Введем обозначения

$$(46) \quad \frac{\beta [\text{sh} \alpha b - \text{sh} \alpha (b - l)]^2}{k \alpha l (\text{sh} \alpha b \text{ch} \alpha b + \alpha b)} = k_3^2$$

и

$$(47) \quad \frac{k^2 \beta' [\text{sh} \alpha' b - \text{sh} \alpha' (b - l')]^2}{\kappa^2 \alpha' l' (\text{sh} \alpha' b \text{ch} \alpha' b + \alpha' b)} = k_3'^2.$$

Учитывая (46) и (47), выпишем окончательные формулы для пробивных мощностей:

$$(48) \quad P_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{4W} l \frac{1}{k_2^2 k_3^2} \text{ [Вт/м]}$$

и

$$(49) \quad P'_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{8W} \alpha l' \frac{1}{k_2^2 k_3'^2} \text{ [Вт]},$$

где  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_3'$  вычисляются по формулам (40), (46) и (47) соответственно.

Для определения пропускаемых (рабочих) мощностей штырьковых структур результаты, полученные из формул (48) и (49), необходимо поделить на коэффициент запаса, который обычно полагаем равным 2.

Рассчитаем электрическую прочность ребристой структуры по методике, аналогичной использованной при расчете мощности, пропускаемой штырьковой структурой.

Формулы (23) и (24) справедливы как для ребристой, так и для штырьковой структуры. Затем мы их уточнили, вводя коэффициент  $k_2$ , учитывающий неравномерность поля над штырьком. Введем аналогичный коэффициент для ребристой структуры. Для его нахождения необходимо рассмотреть задачу о распределении поля над ребром, установленным на бесконечной металлической плоскости. Как и при рассмотрении задачи о штырьке, будем полагать, что первичное однородное электростатическое поле определяется распределением потенциала, выражаемым (25). Для решения задачи удобно ввести эллиптическую систему координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  с осью  $\chi$ , параллельной ребру. Эти координаты связаны с декартовыми известными соотношениями:

$$(50) \quad x = \chi, \quad y = c \xi \eta, \quad z = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)},$$

где  $2c$  – расстояние между фокусами. Будем полагать, что поверхность ребра совпадает с эллиптическим цилиндром  $\xi = \xi_0$  (рис. 5).

Можно показать, что искомым потенциал, удовлетворяющий граничным условиям на бесконечности и не зависящей от координаты  $\chi$ , имеет вид

$$(51) \quad V = A \eta [\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} + B \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}].$$

Определив постоянные  $A$  и  $B$  из граничных условий на поверхности цилиндра и



на бесконечности, окончательно получим

$$(52) \quad V = \frac{E_0 c}{2} \eta \left[ \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} - \left( \frac{h+g}{c} \right)^2 \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right],$$

где  $h$  — большая полуось и  $g$  — малая полуось эллипса  $\xi = \xi_0$ .

Максимальная напряженность поля имеет место при  $\xi = \xi_0$  и  $\eta = 1$ :

$$E_{у\max}^{\text{ст}} = - \frac{\partial V}{\partial y} \Bigg|_{\substack{\xi = \xi_0, \\ \eta = 1}}.$$

Дифференцируя (52) с учетом (50) и подставляя  $\xi = \xi_0$  и  $\eta = 1$ , получим

$$(53) \quad E_{у\max}^{\text{ст}} = \left( 1 + \frac{h}{g} \right) E_0.$$

Введем обозначение

$$(54) \quad 1 + h/g = k_4,$$

тогда

$$(55) \quad E_{у\max}^{\text{ст}} = k_4 E_0.$$

Таким образом, максимальная напряженность поля у вершины эллиптического цилиндра в  $k_4$  раз превышает напряженность однородного электростатического поля.

Определим на отрезке от вершины ребра до крышки среднюю напряженность поля. Нетрудно убедиться в том, что она равна

$$(56) \quad E_{у\text{ср}}^{\text{ст}} = \frac{E_0}{2} \frac{y_1}{\xi_1(y_1 - y_0)} \left[ \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1} - \left( \frac{h+g}{c} \right)^2 \frac{1}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1}} \right],$$

где  $y_1 = h + b$  — координата точки  $M$  верхней крышки,  $y_0 = h$  — координата вершины ребра,  $\xi_1 = y_1/c$ .

Из формул (56) и (53) определим, во сколько раз максимальная напряженность поля больше средней:

$$(57) \quad \frac{E_{у\max}^{\text{ст}}}{E_{у\text{ср}}^{\text{ст}}} = \frac{2\xi_1(y_1 - y_0)(1 + h/g)}{y_1 \left[ \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1} - \left( \frac{h+g}{c} \right)^2 \frac{1}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1}} \right]}.$$

Введем обозначение

$$(58) \quad \frac{2\xi_1(y_1 - y_0)(1 + h/g)}{y_1 \left[ \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1} - \left( \frac{h+g}{c} \right)^2 \frac{1}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1}} \right]} = k_5,$$

тогда

$$(59) \quad E_{у\max}^{\text{ст}} = k_5 E_{у\text{ср}}^{\text{ст}}.$$

Очевидно, что  $k_5 \rightarrow k_4$  при  $y_1 \rightarrow \infty$  и  $k_5 \rightarrow 1$  при  $y_1 \rightarrow y_0$ .

Коэффициент  $k_5$  — искомый поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность поля над ребром.

Учитывая рассуждения, которые проводили при введении коэффициента  $k_2$  для штырьковой структуры, по аналогии можно записать для ребристой структуры, что

$$(60) \quad E_{у\text{ср}} = E_{\text{проб}}/k_5.$$

Подставляя в формулы (23) и (24) вместо величины  $E_{y, \text{ср}}$  ее значение из (60), **861** выпишем расчетные формулы для пробивных мощностей  $P_{\text{проб}}$  и  $P'_{\text{проб}}$  для плоского и прямоугольного волноводов соответственно:

$$(61) \quad P_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{4W'} l \frac{1}{k_5^2 k_3^2} \text{ [Вт/м]}$$

и

$$(62) \quad P'_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{8W} al' \frac{1}{k_5^2 k_3'^2} \text{ [Вт]},$$

где  $l, k_3, k_3', k_5$  определяются формулами (20), (46), (47), (60).

Формулы (48), (49) и (61), (62) являются расчетными при определении пробивных мощностей как штырьковых, так и ребристых структур. Однако эти формулы неудобны для расчетов электрической прочности открытых структур ( $b \rightarrow \infty$ ). Для облегчения расчетов выпишем формулы для открытых структур ( $b \rightarrow \infty$ ), которые нетрудно получить из основных выражений (48), (49) и (61), (62):

$$(63) \quad P_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{4W} l \frac{1}{k_1^2 k_6^2} \text{ [Вт/м]}$$

для открытой штырьковой структуры и

$$(64) \quad P'_{\text{проб}} = \frac{E_{\text{проб}}^2}{8W} al' \frac{1}{k_1^2 k_6'^2} \text{ [Вт]}$$

для волновода со штырьковой структурой, у которого верхняя стенка отнесена на бесконечность. Здесь  $k_1$  определяется выражением (37),

$$(65) \quad k_6^2 = \frac{\beta(1 - 1/e)^2}{k}, \quad l = 1/\alpha, \quad l' = 1/\alpha',$$

$$(66) \quad k_6'^2 = \frac{k\beta'(1 - 1/e)^2}{\kappa^2}.$$

Постоянные  $\beta, \alpha, \beta', \alpha'$  определяются из следующих выражений:

$$(67) \quad \beta^2 = \alpha^2 + k^2, \quad \text{ctg}(kh) = \frac{D-d}{D} \frac{k}{\alpha},$$

$$(68) \quad \beta'^2 = \alpha'^2 + \kappa^2, \quad \kappa^2 = k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \quad \text{ctg } \kappa h = \frac{D-d}{D} \frac{\kappa}{\alpha'}.$$

При расчетах электрической прочности открытых ребристых структур ( $b \rightarrow \infty$ ) в (63) и (64) коэффициент  $k_1$  необходимо поменять на  $k_4$ .

Из выполненных выкладок видно, что часть расчетов была проведена в электростатическом приближении. Экспериментальные исследования показали достаточную точность изложенного метода для инженерных расчетов.

Применим выведенные формулы для расчета электрической прочности структур.

Штырьки, применяемые для структур, имеют форму круглых цилиндров, оканчивающихся полусферами, радиусы  $r$  которых совпадают с радиусами цилиндров.

В расчетных формулах у нас фигурирует сфероид  $\xi = \xi_0$ . Поэтому необходимо заменить штырек таким сфероидом вращения, у которого максимальная плот-

ность заряда у вершины была бы как можно ближе к плотности заряда у вершины штырька. Это, по-видимому, возможно, если большую полуось сфероида выбрать равной высоте штырька, а также приравнять их радиусы кривизны у вершин. Радиус кривизны в вершине сфероида равен

$$(69) \quad R = g^2/h,$$

где  $g$  – малая полуось сфероида:  $g = \sqrt{h^2 - c^2}$ . Приравнивая на основании сказанного  $R$  к радиусу штырька  $r$ , найдем малую полуось эквивалентного сфероида и половину фокусного расстояния:

$$(70) \quad g = \sqrt{hr}, \quad c = h\sqrt{1 - h/r}.$$

Напомним, что в (70)  $h$  – высота штырька и  $r$  – радиус штырька.

Обычно применяемые ребристые структуры имеют ребра в форме прямоугольных пластин. Такая форма ребер невыгодна, так как она уменьшает пропускаемую мощность вследствие большой напряженности поля, возникающей на острых краях ребер. Поэтому верхушки ребер целесообразно скруглять. Радиус  $r$  скругления ребра удобно выбирать равным половине его величины  $d$ . Для такой формы ребра можно считать по аналогии со штырьком параметры эквивалентного эллиптического цилиндра ( $\xi = \xi_0$ ) равными соответственно

$$(71) \quad c = h\sqrt{1 - h/r}, \quad g = \sqrt{hr},$$

где  $h$  – высота ребра (большая полуось эллипса  $\xi = \xi_0$ ),  $g$  – малая полуось эллипса,  $2c$  – расстояние между фокусами эллипса.

С целью проверки выведенных формул рассчитывали некоторые структуры и экспериментально исследовали их электрическую прочность в трехсантиметровом диапазоне волн.

Во-первых, исследовали электрическую прочность волновода со штырьковой структурой. Высота испытуемого волновода  $m = 10$  мм,  $h = 4,8$  мм,  $r = 1,25$  мм,  $D = 5$  мм, ширина волновода  $a = 23$  мм. Для этих данных по формулам (40) и (47) с учетом (75) рассчитаны коэффициенты  $k_2$  и  $k'_3$ :

$$k_2 = 3,2, \quad k'_3 = 0,93.$$

Затем по формуле (49) определяли пробивную мощность для данного волновода. При расчете пробивную напряженность поля воздуха полагали равной  $E_{\text{проб}} = 40$  кВ/см, как это обычно рекомендуется для сантиметрового диапазона волн [2]. Расчетная пробивная мощность равна 67 кВт.

При экспериментальной проверке волновод возбуждался магнетронным генератором, который работал в импульсном режиме. Установка позволяла плавно изменять мощность, подводимую к испытуемому волноводу. Волновод стыковался с магнетроном и с согласующим рупором. Коэффициент бегущей волны в системе был не ниже 80%. Испытания на пробой проводили несколько раз во избежание случайных ошибок. Пробой регистрировали на слух и визуально. В результате многократных экспериментальных проверок установлено, что испытуемый волновод со штырьковой структурой пробивается при подводимой мощности, равной 65 кВт. Пробой наблюдали между верхней крышкой и штырьками.

Затем проводили исследования на пробой волновода с ребристой структурой. Высота волновода  $m = 10$  мм,  $h = 5$  мм,  $r = 1,25$  мм,  $D = 5$  мм, ширина волновода  $a = 23$  мм. По формулам (61) и (47) с учетом (76) и (77) подсчитаны коэффициенты  $k_5$  и  $k'_3$ :

$$k_5 = 1,86, \quad k'_3 = 0,94.$$

По формуле (65) определена пробивная мощность волновода, которая оказалась равной 200 кВт.

В результате экспериментальных исследований установлено, что волновод с ребристой структурой пробивается при мощности, равной 205 кВт.

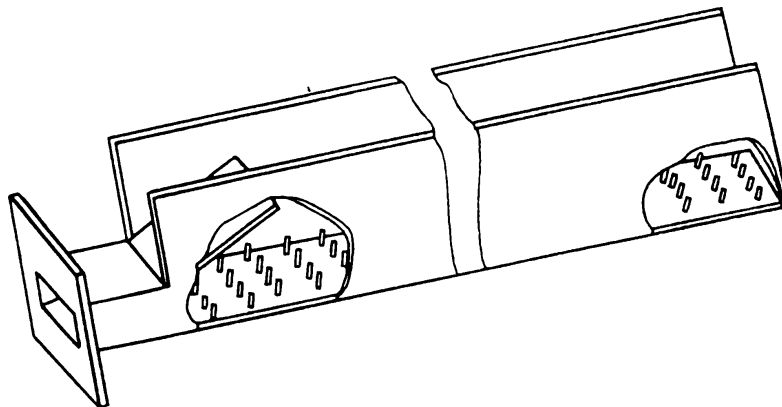


Рис. 7. Волновод со штырьковой структурой без верхней крышки

Далее проводили исследования на пробой волновода со штырьковой структурой, у которого верхняя крышка отсутствовала ( $b \rightarrow \infty$ ). Боковые стенки волновода были увеличены до 100 мм (рис. 7).

По формулам (37) и (69) определяли коэффициенты  $k_1$  и  $k'_6$ :

$$k_1 = 5,6, \quad k'_6 = 0,6.$$

Затем по формуле (67) рассчитывали пробивную мощность, которая равна 110 кВт.

При экспериментальной проверке установлено, что этот волновод пробивается при мощности, равной 100 кВт.

Таким образом, экспериментальные исследования электрической прочности структур хорошо согласуются с результатами теоретического расчета. Это позволяет рекомендовать предложенную методику расчета для определения электрической прочности как ребристых, так и штырьковых структур.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эллиот Р.С. Теория плоских ребристых структур. // Вопросы радиолокационной техники. 1955. № 5. С. 40.
2. Линии передачи сантиметровых волн / Пер. с англ. под ред. Ремез Г.А. М.: Сов. радио, 1951.

Поступила в редакцию  
6.06.91

## Антенно-фидерные системы

УДК 537.874.01

© 1992 г. Я.Н. Фельд, Н.Г. Пономарев

### СИНТЕЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПЕДАНСА НА ЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ РАССЕЯНИЯ

Предложен метод формирования заданной диаграммы рассеяния при помощи создания на рассеивающем теле соответствующего распределения импеданса. Рассмотрен случай, когда заданы одна диаграмма рассеяния и соответствующая ей первичная волна; при этом решение обеспечивается диагональной матрицей импеданса. Исследован также случай, когда задаются две диаграммы рассеяния и две соответствующие им первичные волны, при этом импеданс задается полной четырехэлементной матрицей.

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим замкнутую, достаточно гладкую поверхность  $S$ , на которой выполняются импедансные краевые условия типа

$$(1) \quad \vec{E}_t = \hat{Z} [\vec{n} \vec{H}] \quad \text{на } S.$$

Здесь  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – полное поле;  $\vec{n}$  – наружная нормаль к  $S$ ;  $\vec{E}_t$  – тангенциальная компонента вектора  $\vec{E}$ ;  $\hat{Z}$  – импеданс-матрица, имеющая в некоторой системе координат  $u_1, u_2$  следующий вид:

$$(2) \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы  $\hat{Z}$  – скалярные функции точки на  $S$ .

Пусть на  $S$  падает первичная волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ . Полное поле при этом равно

$$(3) \quad \vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^r, \quad \vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^r,$$

где  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  – вторичное поле, рассеянное поверхностью  $S$ .

Интересующая нас задача заключается в нахождении законов распределения  $z_{11}$  и  $z_{22}$  на  $S$ , при которых обеспечивается заданная диаграмма  $\alpha \vec{F}(\theta, \varphi)$  рассеянного поля. Здесь  $\alpha$  – константа, о выборе которой сказано ниже,  $\vec{F}(\theta, \varphi)$  – поперечная по отношению к  $r$  вектор-функция, нормированная по модулю максимума на единицу, а  $r, \theta, \varphi$  – сферическая система координат с центром внутри  $S$ ; величины  $\vec{F}, \alpha$  и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  предполагаем заданными.

Решение этой задачи разобьем на три этапа.

1. Нахождение распределения вспомогательных источников-токов, обеспечивающих реализацию заданной диаграммы.

2. Определение поля этих источников у поверхности  $S$ .

3. Расчет по этим значениям поля функций  $z_{11}$  и  $z_{22}$  с учетом условия (1).

Используем в качестве вспомогательных источников поверхностные электрические токи с плотностью  $\vec{K}$ , распределенные на некоторой замкнутой геометрической поверхности  $s$ , расположенной внутри  $S$  или совпадающей с последней. Эта поверхность должна во всяком случае охватывать область, в которой находятся особенности поля  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$ , аналитически продолженного внутрь  $S$  [1].

Поскольку ток  $\vec{K}$  на  $s$  должен обеспечить создание диаграммы, тождественной диаграмме рассеянного поля, очевидно, что этот ток должен возбуждать поле  $\vec{e}, \vec{h}$ , совпадающее вне  $S$  с  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$ .

Действительно, если эти поля различны вне  $S$ , то вследствие теоремы Реллиха приходим к противоречию, так как их разность имеет диаграмму, равную нулю. При расчете  $\vec{e}, \vec{h}$  предполагаем, что импедансная поверхность  $S$  отсутствует.

Для нахождения  $\vec{K}$  на  $s$  используем методику, разработанную в [2]. Следуя ей, зададим на геометрической сфере  $S_0$  с достаточно большим радиусом  $r = R_0$ , содержащей внутри поверхность  $S$  (рисунок), семейство поверхностных электрических токов с плотностью  $\vec{K}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Пусть  $\vec{E}^n, \vec{H}^n$  – поле, возбуждаемое током  $\vec{K}_n$  в пустом пространстве. Применяя к полям  $\vec{E}^n, \vec{H}^n$  и  $\vec{e}, \vec{h}$  лемму Лоренца, найдем

$$(4) \quad \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^n ds = \int_{(S_0)} \vec{K}_n \vec{e} ds.$$

Поле  $\vec{e}$  в дальней зоне имеет вид

$$(5) \quad \vec{e} = \frac{\exp(-ikr)}{kr} \alpha \vec{F}(\theta, \varphi) + O(r^{-2}),$$

поскольку поле  $\vec{e}$  должно иметь диаграмму, равную заданной диаграмме  $\alpha F$  рассеянного поля. Здесь  $k$  – волновое число.

Аналогично можно записать вспомогательные токи на  $S_0$ :

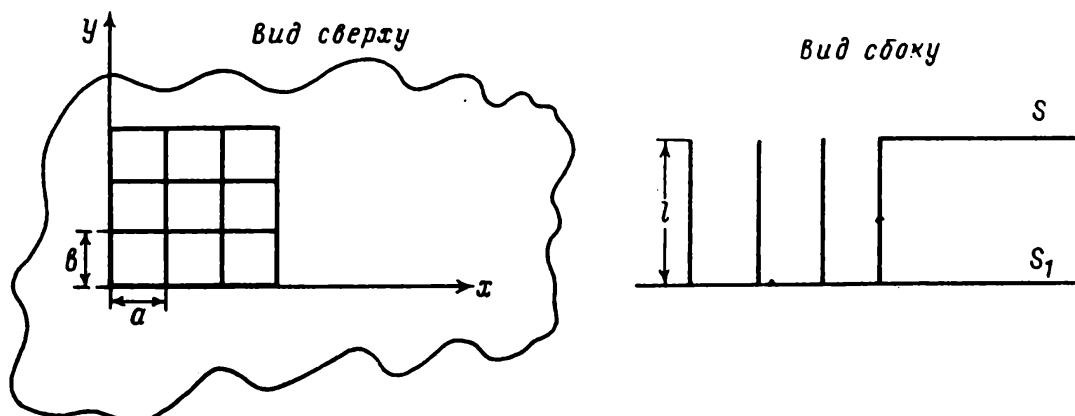
$$(6) \quad \vec{K}_n = \frac{\exp(ikR_0)}{kR_0} \vec{j}_n(\theta, \varphi).$$

Подставляя (5) и (6) в (4) и переходя к пределу, когда радиус  $R_0$  сферы  $S_0$  стремится к бесконечности, найдем

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \int_{(s)} \vec{K} \vec{E}^n ds = \frac{\alpha}{k^2} \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega$$

или

$$(7) \quad \int_{(s)} \vec{K} \vec{\Phi}_n^* ds = \frac{\alpha}{k^2} \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots$$



Здесь  $\vec{\Phi}_n^* = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \vec{E}_t^n$  на  $s$ ,  $d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta$ , интегрирование в правой части (7) 866

проводится по единичной сфере  $\Omega$ , \* – знак комплексного сопряжения.

В работе [2] доказано, что если семейство  $\{\vec{j}_n\}$  линейно независимо и полно в  $L^2(\Omega)$ , то семейство  $\{\vec{\Phi}_n\}$  линейно независимо и полно в  $L^2(s)$ . В рассматриваемом случае пространства  $L^2(\Omega)$  и  $L^2(s)$  состоят из векторных функций, заданных на соответствующих поверхностях и касательных к ним, имеющих конечную норму.

Сказанное выше позволяет определить  $\vec{K}$  на  $s$  при помощи (7). Для этого следует ортонормировать семейство  $\{\vec{\Phi}_n\}$ , т.е. перейти к системе функций

$$(8) \quad \vec{\psi}_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n^m \vec{\Phi}_n, \quad m = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_{(s)} \vec{\psi}_m \vec{\psi}_n^* ds = \delta_{mn}.$$

Определяя при помощи одного из известных методов [2, 3] постоянные  $\alpha_n^m$  и используя уравнения (7), найдем выражение для искомого тока:

$$(9) \quad \vec{K} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \vec{\psi}_m,$$

где

$$c_m = \frac{\alpha}{k^2} \sum_{n=1}^m \alpha_n^m \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Ряд для  $\vec{K}$  сходится по норме  $L^2(s)$ . Допустимый класс диаграмм  $\vec{F}$ , для которых  $\vec{K} \in L^2(s)$ , определяется неравенством [2]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^m \alpha_n^m \int_{(\Omega)} \vec{F} \vec{j}_n d\Omega \right|^2 < \infty.$$

Пример выбора  $\vec{j}_n$  приведен в [2]. Можно также, минуя ортонормировку, записать  $\vec{K}$  в виде

$$(10) \quad \vec{K} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \vec{\Phi}_m.$$

Тогда коэффициенты  $C_m$  можно определить из системы линейных алгебраических уравнений, подставляя (10) в (7):

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \int_{(s)} \vec{\Phi}_m \vec{\Phi}_n^* ds = \frac{\alpha}{k^2} \int_{(\Omega)} \vec{F} \vec{j}_n d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом агрегат из первых  $N$  членов ряда (10) даст наилучшую аппроксимацию  $\vec{K}$  в метрике  $L^2(s)$ .

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ $S$

Составляющие поля  $\vec{E}_t^r, \vec{H}_t^r$  на  $S$  (точнее их предельные значения при стремлении к  $S$  снаружи) можно определить с помощью вектора Герца по найденному току  $\vec{K}$  на  $s$ , поскольку поле  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  совпадает вне  $S$  с полем  $\vec{e}, \vec{h}$ , возбуждаемым током  $\vec{K}$  в свободном пространстве. Таким образом, вне  $S$

$$(11) \quad \vec{E}^r = \vec{e} = \text{rot rot } \vec{\Pi}, \quad \vec{H}^r = \vec{h} = i\omega \epsilon \text{rot } \vec{\Pi},$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon} \int_{(s)} \vec{K} \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} ds,$$

$\rho$  – расстояние между точками интегрирования и наблюдения.

В тех случаях, когда заданная диаграмма  $\alpha \vec{F}(\theta, \varphi)$  и поверхность  $S$  таковы, что выполняется гипотеза Рэлея, для нахождения  $\vec{E}_t^r, \vec{H}_t^r$  на  $S$  нет необходимости вводить вспомогательный ток  $\vec{K}$  на  $s$ , поскольку рассеянное поле может быть определено непосредственно при помощи заданной диаграммы  $\alpha \vec{F}$ .

Эта гипотеза выполняется, если внутри  $S$  можно построить сферу так, чтобы все особенности поля  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  (аналитически продолженного внутрь  $S$ ) находились внутри этой сферы.

Для того чтобы реализовать указанную возможность, введем прежде всего вектор Герца для поля  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$ . Этот вектор удовлетворяет всюду вне  $S$  однородному уравнению Гельмгольца. Поэтому, предполагая выполнение гипотезы Рэлея, можно представить его вне  $S$  следующим рядом:

$$(12) \quad \vec{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{A}^{nm} \exp(im\varphi) P_n^m(\cos\theta) \zeta_n(kr).$$

Здесь  $\vec{A}^{nm}$  – постоянные векторные коэффициенты,

$$(12a) \quad \zeta_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \exp(i(n+1)\frac{\pi}{2}) \frac{\exp(-ix)}{x}.$$

При этом выполняется также принцип излучения.

В дальней зоне справедливо соотношение (см. (5))

$$(13) \quad \vec{E}_r \sim k^2 \vec{\Pi}_\perp \sim \frac{\exp(-ikr)}{kr} \alpha \vec{F}(\theta, \varphi),$$

где  $\vec{\Pi}_\perp$  – поперечная относительно орта  $\vec{i}_r$  часть  $\vec{\Pi}$ .

Таким образом, учитывая (12), (13), в дальней зоне имеем

$$(14) \quad \alpha \vec{F}(\theta, \varphi) = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^{n+1} \vec{A}_\perp^{nm} \exp(im\varphi) P_n^m(\cos\theta).$$

Здесь

$$(15) \quad \vec{A}_\perp^{nm} = A_\theta^{nm} \vec{i}_\theta + A_\varphi^{nm} \vec{i}_\varphi.$$

Напомним, что вектор  $\vec{A}^{nm}$  постоянный, а  $\vec{A}_\perp^{nm}$  – переменный. Если зададим вектор  $\vec{A}^{nm}$  его декартовыми компонентами  $A_x^{nm}, A_y^{nm}, A_z^{nm}$ , которые являются постоянными числами, то получим следующие формулы:

$$(15a) \quad \begin{cases} A_\theta^{nm} = (A_x^{nm} \cos\varphi + A_y^{nm} \sin\varphi) \cos\theta - A_z^{nm} \sin\theta, \\ A_\varphi^{nm} = -A_x^{nm} \sin\varphi + A_y^{nm} \cos\varphi. \end{cases}$$

Следовательно, доказано, что любая реализуемая диаграмма может быть представлена выражением (14), где  $\vec{A}_\perp^{nm}$  определяется формулами (15), (15a), а постоянные числа  $A_x^{nm}, A_y^{nm}, A_z^{nm}$  могут быть любыми, но должны убывать с ростом индексов достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость соответствующих рядов для поля. Отдельные члены ряда (14) можно трактовать как парциальные диаграммы, при помощи которых можно аппроксимировать любые нереализуемые диаграммы с точностью, не приводящей к сверхнаправленности.

Аппроксимируя заданную диаграмму конечным числом членов ряда (14), т.е. определяя числа  $A_x^{nm}, A_y^{nm}, A_z^{nm}$ , а следовательно, и вектор  $\vec{A}^{nm}$ , находим



вектор  $\vec{\Pi}$  по формуле (12) и поле  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  вне  $S$  и у поверхности  $S$  по формулам (11).

Таким образом, изложены два способа определения рассеянного поля, охватывающие все возможные случаи задания диаграммы рассеяния и поверхности  $S$ .

#### 4. СИНТЕЗ ИМПЕДАНСА НА ПОВЕРХНОСТИ $S$

Определив рассеянное поле, а следовательно, и полное поле, при помощи условия (1) можно найти импеданс-матрицу (2). Для этого заменим (1) соответствующими двумя равенствами.

Вводя на  $S$  ортогональную криволинейную систему координат  $u_1, u_2$ , можно записать

$$(16) \quad E_1 = -z_{11}H_2, \quad E_2 = z_{22}H_1 \quad \text{на } S.$$

Здесь  $E_1, E_2(H_1, H_2)$  – проекции вектора  $\vec{E}(\vec{H})$  на направления касательных к линиям  $u_2 = \text{const}$  и  $u_1 = \text{const}$  соответственно; предполагаем, что орты  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{n}$  образуют правую тройку.

Учитывая (3), соотношения (16) можно переписать в виде

$$(17) \quad E_1^0 + E_1^r = -z_{11}(H_2^0 + H_2^r), \quad E_2^0 + E_2^r = z_{22}(H_1^0 + H_1^r).$$

Разрешая эти равенства относительно  $z_{11}$  и  $z_{22}$ , получим

$$(18) \quad z_{11} = -\frac{E_1^0 + E_1^r}{H_2^0 + H_2^r}, \quad z_{22} = \frac{E_2^0 + E_2^r}{H_1^0 + H_1^r} \quad \text{на } S.$$

Поскольку поля известны, формулы (18) определяют искомую импедансную матрицу.

Покажем теперь, что импедансы (18) обеспечивают единственность решения задачи дифракции первичной волны  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  на поверхности  $S$  с краевым условием (1). Как известно, необходимым и достаточным условием единственности решения последней задачи является неположительность потока ваттной мощности полного поля через поверхность  $S$  наружу, т.е.

$$(19) \quad \text{Re} \int_{(S)} [(\vec{E}^0 + \vec{E}^r)(\vec{H}^0 + \vec{H}^r)^*] d\vec{s} \leq 0.$$

Перемножая выражение под интегралом, получим

$$\begin{aligned} & \text{Re} \int_{(S)} [\vec{E}^0 \vec{H}^0]^* d\vec{s} + \text{Re} \int_{(S)} \{[\vec{E}^0 \vec{H}^r]^* + \\ & + [\vec{E}^r \vec{H}^0]^*\} d\vec{s} + \text{Re} \int_{(S)} [E^r H^r]^* d\vec{s} \leq 0 \end{aligned}$$

или, поскольку первый член здесь равен нулю,

$$(20) \quad \text{Re} \int_{(S)} [\vec{E}^r \vec{H}^r]^* d\vec{s} \leq -\text{Re} \int_{(S)} \{[\vec{E}^0 \vec{H}^r]^* + [\vec{E}^r \vec{H}^0]^*\} d\vec{s}.$$

Учитывая (5), введем обозначения

$$(21) \quad \vec{E}^n = \vec{E}^r/\alpha, \quad \vec{H}^n = \vec{H}^r/\alpha,$$

где  $\alpha$  – та же константа, что и в формуле (5). Очевидно, что  $\vec{E}^n, \vec{H}^n$ , так же как и  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , не зависят от  $\alpha$ .

Пусть  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ , где  $\alpha'$  и  $\alpha''$  – действительные числа. Неравенство (20) при этом можно переписать так:

$$(22) \quad \begin{aligned} |\alpha|^2 \text{Re} \int_{(S)} [\vec{E}^n \vec{H}^n]^* d\vec{s} & \leq -\alpha' \text{Re} \int_{(S)} \{[\vec{E}^0 \vec{H}^n]^* + [\vec{E}^n \vec{H}^0]^*\} d\vec{s} - \\ & - \alpha'' \text{Im} \int_{(S)} \{[\vec{E}^0 \vec{H}^n]^* - [\vec{E}^n \vec{H}^0]^*\} d\vec{s}. \end{aligned}$$

Поскольку интегралы в (22) не зависят от  $\alpha'$  и  $\alpha''$ , эти константы всегда могут 869 быть выбраны так, чтобы неравенство (22) выполнялось. Действительно, если множитель при  $\alpha'$  в правой части отличен от нуля, то полагая  $\alpha'' = 0$  и выбирая у  $\alpha'$  соответствующий знак и значение  $|\alpha'|$  достаточно малым, удовлетворим неравенству (22). Аналогично, если множитель у  $\alpha''$  в правой части отличен от нуля, то полагая  $\alpha' = 0$  и выбирая у  $\alpha''$  соответствующий знак и  $|\alpha''|$  достаточно малым, удовлетворим (22).

Возможны и другие варианты выбора величин  $\alpha'$  и  $\alpha''$ , обеспечивающие выполнение неравенства (22).

Таким образом, константа  $\alpha$  в формуле (5) должна быть задана в соответствии со сказанным выше. При этом рассматриваемая задача имеет единственное решение. Соответствующая ему диаграмма рассеянной волны совпадает с заданной  $\alpha \vec{F}(\theta, \varphi)$ .

Вместо необходимого и достаточного условия (19) можно ограничиться в ряде случаев только достаточным условием:

$$(23) \quad \operatorname{Re} z_n \geq 0, \quad \operatorname{Re} z_{22} \geq 0.$$

В этом легко убедиться, преобразовав (19) при помощи соотношений (16) и (3). В результате получим

$$(24) \quad \operatorname{Re} \int_{(S)} (z_{11} |H_2|^2 + z_{22} |H_1|^2) ds \geq 0,$$

откуда сразу следует, что условия (23) достаточны (но не необходимы) для выполнения неравенства (24). Учитывая (21), выражения (18) можно переписать:

$$(25) \quad z_{11} = - \frac{E_1^0 + \alpha E_1^H}{H_2^0 + \alpha H_2^H} \quad z_{22} = \frac{E_2^0 + \alpha E_2^H}{H_1^0 + \alpha H_1^H}$$

Выбирая  $\alpha$ , можно обеспечить выполнение условий (23), если области значений  $\alpha$ , при которых вещественные части (25) на  $S$  неотрицательны, пересекаются.

### 5. СИНТЕЗ АНИЗОТРОПНОГО ИМПЕДАНСА НА ЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ДВУМ ЗАДАНЫМ ДИАГРАММАМ РАССЕЯНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИМ ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ ПАДЕНИЯ ПЕРВИЧНОЙ ВОЛНЫ

В отличие от формулы (2) здесь предполагаем, что импеданс-матрица имеет все четыре элемента, неравные нулю, т.е.

$$(26) \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{22} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть заданы две диаграммы рассеяния:  $\alpha_1 \vec{F}^1$ ,  $\alpha_2 \vec{F}^2$ , соответствующие двум первичным полям  $\vec{E}^{01}$ ,  $\vec{H}^{01}$  и  $\vec{E}^{02}$ ,  $\vec{H}^{02}$ , облучающим рассматриваемое тело с поверхностью  $S$ .

Повторяя выкладки разд. 2, придем к двум уравнениям, аналогичным уравнению (7):

$$(27) \quad \int_{(s)} \vec{K}^{(1)} \Phi_n^* ds = \frac{\alpha_1}{k^2} \int_{(\Omega)} \vec{F}^{(1)}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega,$$

$$\int_{(s)} \vec{K}^{(2)} \vec{\Phi}_n^* ds = \frac{\alpha_2}{k^2} \int_{(\Omega)} \vec{F}^{(2)}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Здесь, как и в разд. 2,  $s$  – вспомогательная геометрическая поверхность, проведенная внутри  $S$  (или совпадающая с ней),  $\vec{K}^{1,2}$  – вспомогательные токи,

$$\alpha_{1,2} \vec{F}^{1,2}, \quad \vec{\Phi}_n^* = \lim_{R \rightarrow \infty} E_r^{(n)} \text{ на } s,$$

где  $\vec{E}^{(n)}$  – электрический вектор, создаваемый поверхностным током плотностью

$$\vec{K}_n = \frac{\exp(ikR)}{R} \vec{j}_n(\theta, \varphi),$$

распределенным на сфере радиусом  $R$ ; интегрирование справа в (27) приводим по единичной сфере  $\Omega$ .

Величину  $K^{1,2}$  определяем при помощи равенств (27) одним из двух методов, указанных в разд. 2. Зная эти токи на  $s$ , найдем по известным формулам поля  $\vec{E}^{r1}, \vec{H}^{r1}$  и  $\vec{E}^{r2}, \vec{H}^{r2}$ , возбуждаемые этими токами. Полные поля  $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$  и  $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$  исходной задачи равны

$$(28) \quad \vec{E}^{1,2} = \vec{E}^{r1,2} + \vec{E}^{01,2}, \quad \vec{H}^{1,2} = \vec{H}^{r1,2} + \vec{H}^{01,2}.$$

Как и выше (см. (1)), на поверхности  $S$  рассматриваемого тела должны выполняться условия

$$(29) \quad \vec{E}_r^{(1)} = \hat{Z}[\vec{n} \vec{H}^{(1)}] \quad \text{и} \quad \vec{E}_r^{(2)} = \hat{Z}[\vec{n} \vec{H}^{(2)}],$$

где  $\vec{n}$  – наружная нормаль к  $S$ .

Если  $u_1, u_2$  – ортогональная криволинейная система координат на  $S$ , орты которых образуют с  $\vec{n}$  правую тройку, а  $A_1, A_2$  – проекции вектора  $\vec{A}$  на направления касательных к линиям  $u_1, u_2$ , то уравнения (29) с учетом (26) можно записать так:

$$(30) \quad \begin{cases} E_1^{(1)} = -z_{11}H_2^{(1)} + z_{12}H_1^{(1)}, & E_1^{(2)} = -z_{11}H_2^{(2)} + z_{12}H_1^{(2)}, \\ E_2^{(1)} = -z_{21}H_2^{(1)} + z_{22}H_1^{(1)}, & E_2^{(2)} = -z_{21}H_2^{(2)} + z_{22}H_1^{(2)} \end{cases}$$

на  $S$ .

Так как все компоненты полей в (30) известны, эту систему уравнений можно использовать для определения матрицы-импеданса  $\hat{Z}$ . Действительно, разрешая (30), найдем

$$(31) \quad \begin{aligned} z_{11} &= \frac{E_1^{(1)}H_1^{(2)} + E_1^{(2)}H_1^{(1)}}{H_1^{(1)}H_2^{(2)} - H_2^{(1)}H_1^{(2)}}, & z_{12} &= \frac{E_1^{(1)}H_2^{(2)} - E_1^{(2)}H_2^{(1)}}{H_1^{(1)}H_2^{(2)} - H_2^{(1)}H_1^{(2)}}, \\ z_{21} &= \frac{E_2^{(1)}H_1^{(2)} - E_2^{(2)}H_1^{(1)}}{H_1^{(1)}H_2^{(2)} - H_2^{(1)}H_1^{(2)}}, & z_{22} &= \frac{E_2^{(1)}H_2^{(2)} - E_2^{(2)}H_2^{(1)}}{H_1^{(1)}H_2^{(2)} - H_2^{(1)}H_1^{(2)}} \end{aligned}$$

на  $S$ .

Постоянные  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – множители при заданных диаграммах – задаются так, чтобы обеспечить единственность решения задачи дифракции у поверхности  $S$  с краевыми условиями (29). Эти постоянные следует выбирать в соответствии с неравенством (19) и соображениями, приведенными после него. При этом опять необходимо ввести поля, не зависящие от постоянных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , при помощи формул

$$\begin{aligned} E^{n1} &= \frac{1}{\alpha_1} E^{r1}, & H^{n1} &= \frac{1}{\alpha_1} H^{r1}, \\ E^{n2} &= \frac{1}{\alpha_2} E^{r2}, & H^{n2} &= \frac{1}{\alpha_2} H^{r2}. \end{aligned}$$

Задачу определения импеданса упростим, если вместо необходимых и достаточных условий типа (19) используем для определения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  достаточные

$$(32) \quad \operatorname{Re} z_{11} \geq 0, \quad 4 \operatorname{Re} z_{11} \operatorname{Re} z_{22} \geq |z_{12} + z_{21}^*|^2.$$

Если рассматриваемая поверхность  $S$  рэлеевская, то задача нахождения рассеянного поля может быть упрощена, как это сделано в разд. 3.

Таким образом, задав два первичных поля, т.е. два направления падения квазиплоской волны на рассматриваемое тело, и две соответствующие им диаграммы рассеяния, можно определить по формулам (31) все четыре элемента матрицы импеданса  $\hat{Z}$ .

## 6. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ МАТРИЧНОГО ИМПЕДАНСА

Рассмотрим плоскую поверхность  $S$ , на которой следует создать некоторый матричный импеданс  $\hat{Z}$  типа (2). Будем вначале полагать  $\hat{Z} = \text{const}$  на  $S$ .

Реализовать такой импеданс можно, например, при помощи волноводов длиной  $l$  с прямоугольным поперечным сечением  $a \times b$ , открытые концы которых доходят до поверхности  $S$ . Противоположные концы волноводов закорочены металлической поверхностью  $S_1$  (рисунок).

Волноводы примыкают друг к другу, образуя подобие сот, и заполнены средой с потерями, имеющей комплексные параметры  $\epsilon$  и  $\mu$ . Предполагаем, что при возбуждении волноводов со стороны открытых концов в них могут распространяться магнитные волны типа  $\langle\langle H_{10} \rangle\rangle$  и  $\langle\langle H_{01} \rangle\rangle$ .

Вводя декартову систему координат  $x, y, z$  с плоскостью  $z = 0$ , совпадающей с  $S$  и с осями  $x$  и  $y$ , параллельными сторонам  $a$  и  $b$  волноводов, получим для интересующих нас компонент поля в волноводах следующие очевидные выражения:

$$\begin{aligned} E_y &= A \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \{ \exp(ih_{10}z) - \exp(-ih_{10}(z + 2l_{10})) \}, \\ H_x &= \frac{h_{10}}{\omega\mu} A \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \{ \exp(ih_{10}z) + \exp(-ih_{10}(z + 2l_{10})) \}, \\ h_{10} &= \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \pi^2/a^2}, \quad \operatorname{Re} h_{10} > 0 \end{aligned}$$

для волны  $H_{10}$  в центральном волноводе и

$$\begin{aligned} E_x &= A \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \{ \exp(ih_{01}z) - \exp(-ih_{01}(z + 2l_{01})) \}, \\ H_y &= -\frac{h_{01}}{\omega\mu} A \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \{ \exp(ih_{01}z) + \exp(-ih_{01}(z + 2l_{01})) \}, \\ h_{01} &= \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \pi^2/b^2}, \quad \operatorname{Re} h_{01} > 0 \end{aligned}$$

для волны  $H_{01}$ . При этом учтено, что волноводы закорочены при  $z = -l$  и имеют различную длину:  $l = l_{10}$  и  $l_{01}$  для волн  $H_{10}$  и  $H_{01}$  соответственно. Как это осуществить одновременно, указано ниже. В остальных волноводах будут существовать аналогичные поля.

Учитывая записанные выражения для полей и формулы (16), где следует полагать

$$E_1 = E_x, \quad E_2 = E_y \quad \text{и} \quad H_1 = H_x, \quad H_2 = H_y,$$

$$z_{11} = i \frac{\omega\mu}{h_{01}} \operatorname{tg}(h_{01}l_{01}), \quad z_{22} = i \frac{\omega\mu}{h_{10}} \operatorname{tg}(h_{10}l_{10}).$$

Можно показать, что для этих величин  $\operatorname{Re} z_{11} \geq 0$  и  $\operatorname{Re} z_{22} \geq 0$ . Очевидно, что если поверхность  $S$  криволинейна и ее радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны, то, располагая ниже  $S$  подобные волноводы, примыкающие к  $S$  открытыми концами, обеспечим на  $S$  соответствующий матричный импеданс (2). Меняя вдоль  $S$  размеры волноводов  $a$ ,  $b$  и  $l_{10}$ ,  $l_{01}$ , а также параметры  $\epsilon$  и  $\mu$  сред, которые их заполняют, можно получить необходимый закон изменения матрицы импеданса на  $S$  в соответствии с формулами (18).

Если при этом окажется, что  $l_{10} > l_{01}$ , то в волноводах следует поставить при  $z = -l_{01}$  решетку из параллельных оси  $x$  тонких проводов, которые будут, практически, свободно пропускать волну  $H_{10}$  и полностью отражать волну  $H_{01}$ . Аналогично, если  $l_{10} < l_{01}$ , то провода должны быть параллельны оси  $y$  и располагаться в сечениях  $z = -l_{10}$ . Таким образом, можно одновременно получить различную длину закороченных волноводов для волн  $H_{10}$  и  $H_{01}$ .

Отметим работы [5–7], где рассмотрены близкие значения иными методами, в том числе определение формы рассеивателя.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н.//РЭ. 1986. Т. 31. № 7. С. 1265.
2. Фельд Я.Н.//РЭ. 1981. Т. 26. № 6. С. 1154.
3. Фельд Я.Н.//Радиотехника. 1990. № 11. С. 52.
4. Фельд Я.Н.//1-я Всесоюз. школа-семинар по дифракции и распространению волн. Москва–Харьков, 1968. С. 93.
5. Ерохин Г.А., Кочержевский В.Г.//РЭ. 1974. Т. 19. № 1. С. 30.
6. Ерохин Г.А., Кочержевский В.Г.//Радиотехника. 1979. Т. 34. № 3. С. 44.
7. Ерохин Г.А.//РЭ. 1986. Т. 31. № 7. С. 1447.

Поступила в редакцию  
5.12.91

Радиотехника, 1992, №9, стр.70-81.

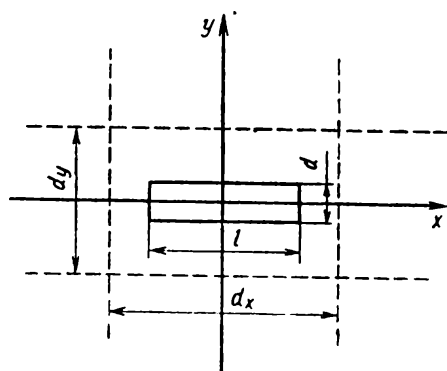
## Плоские двумерные щелевые решетки

Я.Н. Фельд

Исследуются двумерные плоские решетки щелевых излучателей, прорезанные в металлическом экране; рассмотрены бесконечные и конечные решетки; учитываются краевые эффекты.

Цель работы — рассмотреть различные методы расчета бесконечных и конечных плоских щелевых решеток.

**Бесконечная решетка щелевых излучателей.** Рассмотрим бесконечную решетку прямоугольных щелей размером  $l \times d$ , прорезанных в бесконечном плоском идеальном экране, совпадающем с плоскостью  $z = 0$  ( $x, y, z$  — декартова система координат). Большие стороны щелей длиной  $l$  параллельны оси  $x$ , периоды решетки равны  $d_x$  и  $d_y$  (рис. 1). Щели возбуждаются соответствующими линиями, например, волноводами. Введем сферическую систему координат  $r, \Theta, \varphi$  с центром и осью, совпадающими с центром и осью  $z$  декартовой системы. Пусть щели возбуждаются с одинаковыми амплитудами и сдвигами фаз между соседними щелями, равными  $\alpha_x$  вдоль оси  $x$  и  $\alpha_y$  вдоль оси  $y$ . Тогда компоненты волнового вектора  $k$ , соответствующего сдвигам фаз  $\alpha_x, \alpha_y$ , равны  $k_x = \alpha_x/d_x, k_y = \alpha_y/d_y$ . Справедливы также соотношения



$$k_x = k \cos \theta_x^\Gamma = k \cos \varphi^\Gamma \sin \Theta^\Gamma,$$

$$k_y = k \cos \theta_y^\Gamma = k \sin \Theta^\Gamma \sin \varphi^\Gamma.$$

Рис. 1

Здесь  $\theta_x^\Gamma, \theta_y^\Gamma$  — углы, образованные вектором  $k$  с осями  $x$  и  $y$ , а  $\Theta^\Gamma, \varphi^\Gamma$  — углы, определяющие направление  $k$  в сферической системе координат. Распреде-

ние касательной составляющей электрического вектора  $E$  в плоскости  $z = 0$  зададим с учетом теоремы Флоке формулами:

$$\mathcal{E} \equiv E_y = e^{-ik_x x - ik_y y} f(x, y); \quad E_x = 0, \quad (1)$$

где  $f(x, y)$  — периодическая функция с периодами  $d_x$  и  $d_y$  по соответствующим координатам. Предположение  $E_x = 0$  справедливо с высокой точностью для узких щелей, а также для широких щелей, возбуждаемых, например, волной  $H_{10}$  прямоугольного волновода.

Очевидно

$$f(x, y) = \sum_{nm} \mathcal{E}_{nm} e^{-i\left(\frac{2\pi}{d_x} nx + \frac{2\pi}{d_y} my\right)}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{E}_{nm}$  — постоянные.

Подставляя (2) в (1), найдем

$$(3)$$

Здесь

$$k_{xn} = k_x + \left(\frac{2\pi n}{d_x}\right), \quad k_{ym} = k_y + \left(\frac{2\pi m}{d_y}\right); \quad k_x = \frac{\alpha_x}{d_x}, \quad k_y = \frac{\alpha_y}{d_y}.$$

Для определения постоянных  $\mathcal{E}_{nm}$  умножим (3) на  $\exp(ik_{xn}x + ik_{ym}y)$  и проинтегрируем по прямоугольнику периодов. Тогда получаем

$$\mathcal{E}_{nm} = \frac{1}{d_x d_y} \iint_{s_{щ}} \mathcal{E}(x, y) e^{i(k_{xn}x + k_{ym}y)} dx dy. \quad (4)$$

Здесь интегрирование производится по щели, так как  $\mathcal{E}$  на металле равно нулю.

Оставив пока вопрос о распределении  $\mathcal{E}$  на щели, найдем поле в полупространстве  $z \geq 0$ . Уравнениям поля и краевым условиям при  $z = 0$  удовлетворим, положив

$$E_y = \sum_{nm} \mathcal{E}_{nm} e^{-i(k_{xn}x + k_{ym}y + \kappa_{nm}z)}, \quad E_x = 0, \quad (5)$$

где  $\kappa_{nm} = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2 - k_{ym}^2}$ ;  $\text{Re} \kappa_{nm} \geq 0$ ,  $\text{Im} \kappa_{nm} \leq 0$ .

Из уравнений Максвелла следует

$$-i\omega\mu \frac{\partial H_x}{\partial z} = k^2 E_y + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}.$$

Подставляя  $E_y$  из (5) и производя интегрирование по  $z$ , имеем

$$H_x = \sum_{nm} \frac{k_{xn}^2 - k^2}{\omega\mu\kappa_{nm}} \mathcal{E}_{nm} e^{-i(k_{xn}x + k_{ym}y + \kappa_{nm}z)}, \quad z \geq 0. \quad (6)$$

Остальные компоненты поля не понадобятся. Выражения (5), (6) представляют собой суммы плоских волн, распространяющихся в направлениях, образующих с осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  углы, косинусы которых соответственно равны  $k_{xn}/k$ ,  $k_{ym}/k$ ,  $\kappa_{nm}/k$ . При вещественном  $\kappa_{nm}$  — это распространяющиеся вол-

ны, при  $\kappa_{nm} = -i|\kappa_{nm}|$  — затухающие. Величина  $\kappa_{00}$  всегда вещественна и соответствует основному максимуму решетки

$$\kappa_{00} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \cos \theta^r.$$

Если решетка имеет побочные главные максимумы в действительной области, то существуют соответствующие им вещественные  $\kappa_{nm}$ , в противном случае все остальные  $\kappa_{nm}$  (кроме  $\kappa_{00}$ ) — мнимые.

Найдем комплексную мощность  $W$ , излучаемую одной щелью (находящейся в решетке) в полупространство  $z > 0$ . Очевидно

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_{щ}} [E H^*] ds = -\frac{1}{2} \int_{s_{щ}} E_y H_x^* ds \quad (7)$$

(\* — знак комплексного сопряжения).

Подставив в (7) выражения (5) и (6), после интегрирования получим

$$W = d_x d_y \sum_{nm} \frac{k^2 - k_{xn}^2}{2\omega \mu \kappa_{nm}^*} |\mathcal{E}_{nm}|^2, \quad (8)$$

Определение поля  $\mathcal{E}$  в щели. Прежде всего необходимо конкретизировать внутреннюю часть устройства, расположенную в области  $z < 0$ . Положим, что щели возбуждаются прямоугольными одноименными волноводами с волной  $H_{10}$ , идеально согласованными с генераторами. Распределение напряжения вдоль щели определим в первом приближении, используя известное [1] дифференциальное уравнение, после чего поле  $\mathcal{E}$  на (нулевой) щели можно аппроксимировать выражением

$$\mathcal{E} = \frac{V_0}{\pi} \frac{\cos(k^0 x)}{\sqrt{(d/2)^2 - y^2}}, \quad (9)$$

где  $V_0$  — напряжение в середине щели,  $k^0 = \pi/l$ . Формулой (9) можно пользоваться при  $d \ll \lambda$  и  $l \leq \lambda/2$ . Напомним, что  $x$  и  $y$  отсчитываются от центра нулевой щели (см. рис. 1). Постоянные  $\mathcal{E}_{nm}$  найдем, подставив в (4) выражение (9)

$$\mathcal{E}_{nm} = \frac{V_0}{\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\cos(k^0 x)}{\sqrt{(d/2)^2 - y^2}} e^{i(k_{xn}x + k_{ym}y)} dy dx.$$

Произведя интегрирование, получим

$$\mathcal{E}_{nm} = \frac{2k^0 V_0}{d_x d_y} J_0\left(\frac{k_{ym} d}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{k_{xn} l}{2}\right)}{(k^0)^2 - k_{xn}^2}. \quad (10)$$

Остается найти  $V_0$ , которое зависит от угла качания, т.е. от сдвигов фаз  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  при фиксированной амплитуде падающей волны  $H_{10}$  в питающих волноводах.

Для этого рассмотрим внутреннюю задачу.

Возбуждение волновода, нагруженного щелью, падающей волной  $H_{10}$ . Поле внутри центрального (нулевого  $n = m = 0$ ) волновода

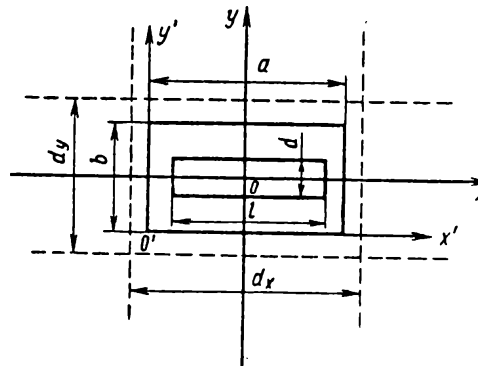
$$E = E^0 + E^i, \quad H = H^0 + H^i,$$



где  $E^0, H^0$  — поле, возбуждаемое первичной падающей на апертуру волной  $H_{10}$ , при условии, что щель металлизирована;  $E^i, H^i$  — поле, возбуждаемое распределением  $\mathcal{E}$  на щели, которое равно полю, создаваемому магнитным током, распределенным на металлизированной поверхности щели  $s_{щ}$  с плотностью [2]

$$K^\mu = [i_z E].$$

Здесь  $i_z$  — единичный орт в направлении оси  $z$ .  
Интересующие нас составляющие поля  $E^0, H^0$ :



$$\left. \begin{aligned} E_x^0 &= 0, E_y^0 = \frac{i\rho_0 k}{\gamma} \sin \frac{\pi x'}{a} \sin \gamma z; \\ \rho_0 &= \sqrt{i\omega\epsilon}, \\ H_y^0 &= 0, H_x^0 = \sin \left( \frac{\pi x'}{a} \right) \cos \gamma z; \\ \gamma &= k \sqrt{1 - \left( \frac{\pi}{ka} \right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Рис. 2

где  $x' = x + a/2$ ,  $y' = y + b/2$  (см. рис. 2).

Поле  $E^i, H^i$  найдем, полагая (используя принцип зеркального изображения), что оно возбуждается в пустом бесконечном волноводе магнитным током  $2K_\mu$ , распределенным на поверхности  $s_{щ}$  [3].

Выпишем составляющую

$$H_x^i = \sum_{nm} \left( \frac{i2km}{\rho_0 b} A_{nm} + \frac{\gamma_{nm}(2n+1)}{ia} B_{nm} \right) \pi \sin \frac{(2n+1)\pi x'}{a} \cos \frac{2m\pi y'}{b} e^{i\gamma_{nm} z},$$

$z \leq 0$ .

Здесь  $A_{nm}, B_{nm}$  — амплитуды электрических и магнитных волн. Волны других четностей по  $n$  и  $m$  не возбуждаются.

После несложных выкладок по известным [3] формулам найдем

$$H_x^i = \sum_{nm}^{0-\infty} C_{nm} \sin \left[ \frac{(2n+1)\pi}{a} x' \right] \cos \left[ \frac{2m\pi}{b} y' \right] e^{i\gamma_{nm} z}, \quad z \leq 0, \quad (12)$$

где

$$C_{nm} = \frac{8\pi}{\rho_0} \left\{ \frac{k(2m)^2}{\gamma_{nm} b^2} + \frac{(2n+1)^2 \gamma_{nm}}{ka^2} \right\} \frac{(-1)^{n+m} V_0 \cos \left( \frac{2n+1}{2a} \pi l \right) J_0 \left( m\pi \frac{d}{b} \right)}{\left[ (2n+1) \frac{2b}{a} + (2m) \frac{2a}{b} \right] \left[ (k^0)^2 - (2n+1)^2 \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]}. \quad (13)$$

В (11)—(13) и ниже

$$\gamma_{nm} = k \sqrt{1 - (2n+1)^2 \pi^2 / (ka)^2 - (2m\pi/kb)^2}; \quad \operatorname{Re} \gamma_{nm} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \gamma_{nm} \leq 0.$$

В частном случае (при  $a = l$ ) (13) упрощается

$$C_{nm} = \frac{2a}{\rho_0} \left\{ \frac{k(2m)^2}{\gamma_{0m} b^2} + \frac{\gamma_{0m}}{ka^2} \right\} \frac{(-1)^m V_0 J_0(m\pi d/b)}{b/a + (2m)^2 a/b},$$

$$C_{nm} = 0 \text{ при } n > 0.$$

Для определения напряжения  $V_0$  и его зависимости от  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  используем условие непрерывности составляющей  $H_x$  полного поля при переходе через поверхность щели  $s_{щ}$ . Очевидно должно выполняться равенство

$$H_x = H_x^i + H_x^0 \text{ на } s_{щ}, \quad (14)$$

где составляющие полей находятся по (6), (12) и (11) соответственно. Поскольку в нашем распоряжении имеется только одна не определенная постоянная  $V_0$ , то удовлетворить (14) можно только в среднем. Сделаем это, потребовав выполнения непрерывности комплексной мощности при переходе через щель.

Для этого перейдем к комплексно-сопряженному уравнению (14), умножим его на  $(-E/2)$  и результат проинтегрируем по поверхности щели  $s_{щ}$ , после чего получим

$$-\frac{1}{2} \int_{s_{щ}} \mathcal{E} H_x^* ds = -\frac{1}{2} \int_{s_{щ}} \mathcal{E} H_x^{i*} ds - \frac{1}{2} \int_{s_{щ}} \mathcal{E} H_x^{0*} ds. \quad (15)$$

Так как  $E_y = \mathcal{E}$  при  $z = 0$ , то (15) представляет собой условие непрерывности комплексной мощности при пренебрежении составляющей  $E_x$ , что безусловно справедливо для узких щелей.

Воспользовавшись (8) для левой части (15) и подставляя в правую значения (9), (11) и (12), после несложных вычислений найдем

$$\frac{dx dy}{V_0} \sum_{nm} \frac{k^2 - k_{xn}^2}{2k_0 \rho_{xnm}^2} |\mathcal{E}_{nm}|^2 = \frac{\pi}{l} \frac{\cos(\pi l/2a)}{(\pi/a)^2 - (k^0)^2} - \sum_{nm} C_{nm}^* \frac{(-1)^m k_0 J_0(m\pi \frac{d}{b})}{(k^0)^2 - (2n+1)^2 (\frac{\pi}{a})^2} (-1)^n \cos[(2n+1) \frac{\pi l}{2a}]. \quad (16)$$

Подставив в (16) вместо  $\mathcal{E}_{nm}$  выражение (10), получим

$$\frac{2k^0 V_0^*}{k_0 \rho_{xnm} dx dy} \sum_{nm} \frac{k^2 - k_{xn}^2}{\kappa_{nm}^*} J_0^2\left(\frac{k_{ym} d}{2}\right) \frac{\cos^2(k_{xn} l/2)}{[(k^0)^2 - k_{xn}^2]^2} + \sum_{nm} C_{nm}^* \frac{(-1)^{m+n} J_0(m\pi \frac{d}{b}) \cos[(2n+1) \frac{\pi l}{2a}]}{(k^0)^2 - (2n+1)^2 (\frac{\pi}{a})^2} = \frac{\cos(\frac{\pi l}{2a})}{(\frac{\pi}{a})^2 - (k^0)^2}. \quad (17)$$

Решая (17) относительно  $V_0$ , найдем с учетом (14)

$$V_0 = \frac{\cos(\frac{\pi l}{2a}) \sqrt{(\frac{\pi}{a})^2 - (k^0)^2}}{\sum_{nm} \left\{ \frac{2k^0 (k^2 - k_{xn}^2)}{k_0 \rho_{xnm} dx dy} J_0^2\left(\frac{k_{ym} d}{2}\right) \frac{\cos^2(k_{xn} l/2)}{[(k^0)^2 - k_{xn}^2]^2} + \frac{C_{nm}}{V_0} \Gamma_{nm} \right\}}, \quad (18)$$

где

$$\Gamma_{nm} = \frac{(-1)^{n+m} J_0(m\pi \frac{d}{b}) \cos[(2n+1) \frac{\pi l}{2a}]}{[(k^0)^2 - (2n+1)^2 (\frac{\pi}{a})^2]}.$$

Как видно из (13),  $C_{nm}/V_0$  не зависит от  $V_0$ . Таким образом, (18) полностью определяет напряжение  $V_0$  в пучности щели. Вычислим коэффициент отраже-

ния  $R$  в центральном питающем волноводе для основной распространяющейся волны  $H_{10}$ , отнесенный к сечению  $z = 0$ . Учитывая (11) и (12), найдем

$$R = 2C_{00} + 1 = \frac{16\pi\gamma_{00}V_0\cos(\pi/2a)}{\rho_0kab\left[(k^0)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]} + 1.$$

Диаграмма направленности одного излучателя в решетке. Диаграмма отдельного излучателя — щели в решетке, когда остальные каналы идеально согласованы с нагрузками, а мощность по ним к щелям непосредственно не подводится, т.е. отсутствуют волны, идущие к апертуре, может быть найдена следующим образом.

При возбуждении всей решетки распределение падающего — первичного поля в плоскости щелей

$$H_x^1 = \sum_{nm} Y_{nm} e^{-i(n\alpha_x + m\alpha_y)}. \quad (19)$$

Здесь

$$Y_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} - nd_x \right) \right] & \text{при } x, y \in S_{nm}, \\ 0 & \text{при } x, y \notin S_{nm} \end{cases}$$

( $S_{nm}$  — сечение волновода с номером  $n, m$ ).

Напомним, что  $x, y$  отсчитываются от центра сечения волновода с  $n = m = 0$ .

Проинтегрируем равенство (19) по  $d\alpha_x d\alpha_y$  в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_x^1 d\alpha_x d\alpha_y = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{nm} Y_{nm} e^{-i(n\alpha_x + m\alpha_y)} d\alpha_x d\alpha_y = 4\pi^2 Y_{00}.$$

Таким образом,

$$Y_{00}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_x^1 d\alpha_x d\alpha_y$$

и на основании принципа суперпозиции поле излучения решетки при возбуждении только одного (центрального) элемента может быть найдено путем соответствующего интегрирования поля, создаваемого возбуждением  $H_x^1$  (см. (19)).

Учитывая сказанное и (5), найдем поле одного элемента в решетке

$$E_{y1} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{nm} \mathcal{E}_{nm} e^{-i(k_{nx}x + k_{ny}y + \kappa_{nm}z)} d\alpha_x d\alpha_y,$$

аналогично для  $H_{x1}$ . Очевидно,

$$E_{y1} \equiv \mathcal{E}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{nm} \mathcal{E}_{nm} e^{-i(k_{nx}x + k_{ny}y)} d\alpha_x d\alpha_y \text{ при } z = 0. \quad (20)$$

Поле  $E_{y1}$  при  $z \geq 0$  можно записать также в виде:

$$E_{y1} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y) - \gamma z} d\alpha d\beta, \quad (21)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}, \operatorname{Re} \gamma > 0.$$

Очевидно (см. (20)),

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,$$

$$B(\alpha, \beta) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_1 e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy. \quad (22)$$

Подставляя в (22) выражение (20), запишем

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} \left\{ \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{nm} \mathcal{E}_{nm}(\alpha_x, \alpha_y) e^{-i(k_{xn}x + k_{ym}y)} d\alpha_x d\alpha_y \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{nm} \iint_{-\pi}^{\pi} d\alpha_x d\alpha_y \mathcal{E}_{nm} \int_0^{dx} \int_0^{dy} dx' dy' e^{i(\alpha - k_{xn})x' + i(\beta - k_{ym})y'} \times \\ &\times \sum_{\nu\mu} e^{i(\alpha - k_{xn})\nu dx + i(\beta - k_{ym})\mu dy}. \end{aligned}$$

Здесь суммирование по  $\nu$  и  $\mu$  идет от  $-\infty$  до  $+\infty$  и использована замена переменных  $x' = x - \nu dx$ ,  $y' = y - \mu dy$ .

Поскольку (см. выше)  $k_{xn} dx = \alpha_x + 2\pi n$ , а  $k_{ym} dy = \alpha_y + 2\pi m$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{\nu\mu} e^{i(\alpha - k_{xn})\nu dx + i(\beta - k_{ym})\mu dy} &= \sum_{\nu\mu} e^{i(\alpha dx - \alpha_x)\nu + i(\beta dy - \alpha_y)\mu} = \\ &= 4\pi^2 \delta(\alpha dx - \alpha_x) \delta(\beta dy - \alpha_y). \end{aligned}$$

Используя их, найдем

$$B(\alpha, \beta) = dx dy \mathcal{E}_{00}(\alpha dx, \beta dy) = 2k^0 V_0(\alpha_x \rightarrow \alpha dx, \alpha_y \rightarrow \beta dy) J_0\left(\frac{\beta d}{2}\right) \frac{\cos(\alpha l/2)}{(k^0)^2 - \alpha^2}$$

при  $|\alpha dx| < \pi$  и  $|\beta dy| < \pi$ ; (23)

$$B(\alpha, \beta) = 0 \text{ при } |\alpha dx| > \pi \text{ или } |\beta dy| > \pi.$$

Формула (21) с учетом (23) позволяет определить поле одного элемента в решетке. Переходя в (21) к дальней зоне, когда  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ , найдем диаграмму одного элемента в решетке. Сделаем замену переменных —  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Тогда (21) переписывается так

$$E_{y1} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, \beta) e^{-i r(\alpha \sin \theta \cos \varphi + \beta \sin \theta \sin \varphi) - \gamma r \cos \theta} d\alpha d\beta. \quad (24)$$

Составляющая  $E_{x1}$ , как и  $E_x$ , равна нулю при  $z \geq 0$ , поскольку  $E_x = E_{x1} = 0$  при  $z = 0$  (щель узкая), а в полупространстве  $z > 0$  источников нет.

Переходя в (24) к дальней зоне ( $r \rightarrow \infty$ ), найдем

$$E_{y1} \sim \frac{k}{8\pi r} e^{-i kr + i\pi/2} \cos \theta B(k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi).$$

Здесь

$$\begin{aligned} B(k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi) &= 2k^0 V_0(\alpha_x \rightarrow k d_x \sin \theta \cos \varphi, \alpha_y \rightarrow k d_y \sin \theta \sin \varphi) \times \\ &\times J_0\left(\frac{k d}{2} \sin \theta \sin \varphi\right) \frac{\cos\left[\frac{k l}{2}(\sin \theta \cos \varphi)\right]}{(k^0)^2 - k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}; \end{aligned} \quad (25)$$

$V_0 = V_0(\alpha_x, \alpha_y)$  — определяется (18), где  $C_{nm}/V_0$  дается формулой (13).

Диаграмма направленности  $F_1$  одного элемента в решетке

$$F_1(\theta, \varphi) = \cos \theta B(k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi), \quad (26)$$

где  $B(k \sin \Theta \cos \varphi, k \sin \Theta \sin \varphi)$  — находится по (25).

Расчет диаграмм направленности конечных двумерных решеток без учета краевых эффектов. В пренебрежении краевыми эффектами могут быть использованы два метода расчета диаграмм. Изложим их на примере щелевых решеток, щели которых прорезаны в плоском металлическом экране достаточно большого размера (чтобы можно было применить принцип зеркального изображения) и возбуждаются соответствующими одноמודовыми прямоугольными волноводными каналами с волной типа  $H_{10}$ . Распределение напряжения вдоль всех щелей предполагается одинаковым, совпадает по амплитуде и отличается пропорциональным  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  набегом фаз по соответствующим координатам. Такое распределение называется равномерным.

Предположим также, что генераторы, питающие волноводы, идеально согласованы с нагруженными щелями волноводами и волны, бегущие от щелей, от генераторов не отражаются.

*1-й метод.* Предполагается, что решетка бесконечная по обеим координатам, но активно возбуждаются только  $N$  щелей по координате  $x$  и  $M$  щелей по координате  $y$  (рис. 2), т.е. всего  $NM$  щелей. Это означает, что только по волноводам, питающим  $NM$  щелей, волны бегут от генераторов к щелям. По остальным волноводам волны бегут только от щелей. Пользуясь принципом суперпозиции для источников (генераторов), активно возбуждающих конечную решетку из указанных выше  $NM$  щелей, и равномерным распределением источников, можно написать следующее выражение для диаграммы направленности

$$\Phi(\Theta, \varphi) = F_1(\Theta, \varphi) F_{N,M}(\Theta, \varphi; \alpha_x, \alpha_y), \quad (27)$$

где  $F_1$  — диаграмма одного элемента, находящегося в бесконечной решетке, определяемая (26);  $F_{NM}$  — множитель решетки из  $NM$  ненаправленных излучателей, зависящий также от углов качания  $\Theta^r, \varphi^r$ , т.е. от сдвигов фаз  $\alpha_x, \alpha_y$  между соседними излучателями;  $\Theta, \varphi$  — углы точки наблюдения в сферической системе координат.

Формула (27) получена с помощью так называемой “теоремы умножения диаграмм” [2]. В общем виде она формулируется следующим образом: диаграмма направленности решетки идентичных и одинаково ориентированных (равномерно возбуждаемых) излучателей представляет собой произведение двух функций — диаграммы одиночного излучателя (в данном случае в системе) и диаграммы системы (в данном случае из  $NM$ ) ненаправленных излучателей, возбуждаемых с комплексными амплитудами  $A_n$ , которые находятся из условия  $F_n = A_n F_1$  ( $|A_n| = 1$ )  $n = 1, 2, \dots, NM$  ( $F_n$  — диаграмма  $n$ -го излучателя в решетке).

Применяя эту теорему дважды — один раз для нахождения диаграммы (по мощности) ряда из  $N$  ненаправленных излучателей, расположенных вдоль оси  $x$ , а затем из  $M$  излучателей, расположенных вдоль оси  $y$ , найдем [2]

$$\Psi_{N,M} = |F_{N,M}|^2 = \frac{\sin^2(N\psi_x/2)}{N^2 \sin^2(\psi_x/2)} \frac{\sin^2(M\psi_y/2)}{M^2 \sin^2(\psi_y/2)}, \quad (28)$$

где  $\psi_x = kd_x \cos \theta_x - \alpha_x$ ,  $\psi_y = kd_y \cos \theta_y - \alpha_y$ ,  $\cos \theta_x = \sin \Theta \cos \varphi$ ,  $\cos \theta_y = \sin \Theta \sin \varphi$ ,  $\theta_x$  и  $\theta_y$  — углы между направлением на точку наблюдения и осями  $x$  и  $y$  соответственно).

При этом диаграмма пронормирована на единицу путем деления на  $(NM)^2$ .

Учитывая (27) и (28), получаем диаграмму решетки и  $NM$  щелевых излучателей по мощности

$$|\Phi|^2 = |F_1|^2 \frac{\sin^2(N\psi_x/2)}{N^2 \sin^2(\psi_x/2)} \frac{\sin^2(M\psi_y/2)}{M^2 \sin^2(\psi_y/2)}. \quad (29)$$

**2-й метод.** Рассмотрим конечную решетку, состоящую из  $N$  щелей вдоль оси  $x$  и  $M$  таких рядов вдоль оси  $y$ , прорезанных в бесконечном (практически достаточно большом) плоском экране и питаемых соответствующими волноводами (см. выше).

Будем считать, что генераторы, питающие волноводы, обеспечивают равномерное распределение напряжения в щелях с одинаковыми амплитудами и сдвигами фаз  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  между соседними щелями вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Тогда в соответствии с теоремой 1 первой граничной задачи электродинамики [2] поле такой системы совпадает с полем магнитных токов, распределенных с плотностью  $[E n]$  ( $n$  — внешняя нормаль к экрану) на сплошном экране в местах, где ранее находились щели; напомним, что  $E$  — электрический вектор в щелях.

Используя принцип зеркального изображения для магнитных токов над сплошным экраном, можно утверждать, что диаграмма и поле рассматриваемой решетки, совпадают с диаграммой и полем решетки магнитных токов, находящихся в свободном пространстве (без экрана) и распределенным с плотностью в плоскости  $z = 0$

$$K^\mu = 2[E n]. \quad (30)$$

Ввиду идентичности этих излучателей и равномерности  $E$ , а значит и  $K^\mu$ , можно использовать “теорему умножения диаграмм” и определить диаграмму конечной решетки щелей по формуле

$$|\Phi|^2 = |\hat{F}_1|^2 |F_{N,M}|^2, \quad (31)$$

где  $|F_{N,M}|^2$  — множитель решетки, определяемый (28),

$$|\hat{F}_1|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta_x\right) / \sin^2\theta_x$$

— диаграмма (по мощности) одного магнитного тока (30). При этом для  $E$  использовали формулу (9).

Электрические силовые линии образуют кольца с осью  $x$ .

Формулы (29) и (31) отличаются только первыми множителями, так как  $F_1 \neq \hat{F}_1$ , что объясняется различными математическими моделями в 1- и 2-м методах, аппроксимирующими реальную решетку. Обе формулы в рассматриваемом приближении приводят к одному и тому же результату. Это обусловлено тем, что:

1. Пренебрегать краевыми эффектами можно, когда решетка велика.
2. Основной и близкие к нему боковые лепестки определяются множителем решетки  $F_{N,M}$ , одинаковым для обеих формул.

3. Расхождение при расчетах по (29) и (31) начнется только для дальних лепестков за счет различных (для этих углов) множителей  $F_1$  и  $\hat{F}_1$ , однако там обе формулы несправедливы, поскольку на форму дальних лепестков существенно влияют краевые эффекты.

Из сказанного следует, что там, где это допустимо, можно пользоваться любой из формул (29) и (31).

Формула (31) проще для практического применения. Ею следует пользоваться в тех случаях, когда распределение напряжения или тока в излучателях решетки слабо зависит от взаимного влияния последних. Это имеет место для резонансных излучателей, например, для полуволновых, а также более коротких.

Конечная плоская двумерная решетка щелевых излучателей. Учет краевых эффектов. Рассмотрим конечную решетку щелей, прорезанных в достаточно большом плоском экране. Общее число щелей в решетке  $NM$  ( $N$  щелей в ряду и  $M$  рядов). Все обозначения прежние. Как и выше, щели возбуждаются прямоугольными одномодовыми волноводами. Первичные волны, распространяющиеся в них по направлению к щелям, заданы. Они имеют одинаковые амплитуды и сдвиг фаз между ними в соседних волноводах ряда равен  $\alpha_x$ , а между соседними рядами —  $\alpha_y$ .

Предполагается, что щели резонансные и распределение напряжения на щели номер  $n$ ,  $m$  ( $n$ -я щель  $m$ -го ряда)

$$V_{n,m} = V_{n,m}^0 \cos(\pi x/l),$$

где  $x$  отсчитывается от середины рассматриваемой щели.

Таким образом, комплексная постоянная  $V_{n,m}^0$  равна напряжению в пучности соответствующей щели. Задачей является определение этих постоянных для всех щелей, после чего нахождение поля (а значит и диаграммы направленности) рассматриваемой решетки сведется к нахождению поля системы эквивалентных магнитных токов, расположенных в свободном пространстве (см. 2-й метод).

Найти  $V_{n,m}^0$  легче всего методом наведенных МДС [1] в его простейшей форме, когда закон распределения поля  $\mathcal{E}$  на поверхности щелей известен и требуется только определить масштаб кривых распределения, т.е. в нашем случае  $V_{n,m}^0$ . Следуя [1], можно получить систему алгебраических уравнений первой степени для напряжений  $V_{n,m}^0$

$$\sum_{n'=1}^N \sum_{m'=1}^M V_{n',m'}^0 Y_{n,m;n',m'} = F_{nm}^i; \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (32)$$

В дальнейшем для сокращения записи воспользуемся одноиндексной нумерацией щелей, заменяя всюду  $n, m$  одной буквой  $\nu = \{n, m\}$ . Тогда (32) примет вид

$$\sum_{\nu'} V_{\nu'}^0 Y_{\nu,\nu'} = F_{\nu}^i. \quad (33)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Y_{\nu,\nu'} &= Y_{\nu,\nu'}^i + Y_{\nu,\nu'}^e, & Y_{\nu,\nu'}^i &= - \int_{(\nu)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) H_x^i\{e_{\nu'}\} dx, \\ Y_{\nu,\nu'}^e &= \int_{(\nu)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) H_x^e\{e_{\nu'}\} dx, & F_{\nu}^i &= \int_{(\nu)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) H_x^{0\nu} dx. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

В (34) интегрирование идет вдоль  $\nu$  щели по  $x$ , меняющимся от  $-l/2$  до  $+l/2$ .

Величины  $H_x^i\{e_{\nu'}\}$  и  $H_x^e\{e_{\nu'}\}$  —  $x$ -е компоненты магнитных векторов. Первая из них находится в результате решения 1-й краевой внутренней задачи для  $\nu'$ -го волновода, когда на поверхности щели задана касательная составляющая электрического вектора

$$e_{\nu'} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) i y}{\pi \sqrt{(d/2)^2 - y^2}}, \quad \left. \begin{array}{l} -d/2 \leq y \leq d/2, \\ -l/2 \leq x \leq l/2, \end{array} \right\} \quad (35)$$

на остальных поверхностях  $E_t = 0$ .

Очевидно,  $Y_{\nu, \nu'}^i = 0$ , если  $\nu \neq \nu'$ .

Вторая находится из решения внешней краевой задачи для полупространства  $z \geq 0$ , когда на поверхности  $\nu'$ -й щели задана касательная составляющая электрического вектора (35), а на остальной части плоскости  $z = 0$ , ограничивающей полупространство  $z > 0$ ,  $E_t = 0$ .

Решение этих краевых задач при одном и том же векторе  $e$  на  $\nu'$ -й щели обеспечивает непрерывность  $E_t$  при переходе через нее.

Величина  $H_x^{0\nu}$ , фигурирующая в (34), является  $x$ -й компонентой магнитного вектора поля, возбуждаемого в  $\nu$ -м волноводе первичной волной при условии, что  $\nu$ -я щель металлизирована. Это поле определяется формулами типа (11) с учетом фазового множителя, соответствующего  $\nu$ -му волноводу.

Величины  $Y_{\nu, \nu'}^{i, e}$  имеют размерность проводимостей и называются соответственно внутренними и внешними,  $F_\nu^i$  — внутренняя магнитодвижущая сила.

Таким образом, получена конечная система алгебраических уравнений первой степени (33) (в которой число уравнений равно числу щелей) для определения напряжений  $V_\nu^0$  в пучности щелей. Коэффициенты  $Y_{\nu, \nu'}^i$  этих уравнений и правые части  $F_\nu^i$  определяются формулами (34) и могут быть сравнительно просто вычислены (см. ниже). Для решения уравнений (33) может быть использована хорошо известная стандартная методика.

Расчет проводимости и магнитодвижущих сил. Начнем с расчета внешних проводимостей  $Y_{\nu, \nu'}^e$  (34). Фигурирующая в ней составляющая  $H_x^e\{e_{\nu'}\}$  совпадает с составляющей магнитного вектора поля, создаваемого магнитным током  $2K_{\nu'}^\mu = 2[e_{\nu'}, n]$  в свободном пространстве. Поэтому можно записать

$$Y_{\nu, \nu'}^e = \int_{(\nu)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) H_x^e\{2K_{\nu'}^\mu\} dx = -2 \frac{e}{\mu} \int_{(\nu)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) E_x\{K_{\nu'}\} dx = \frac{2}{\rho_0} Z_{\nu, \nu'},$$

где  $K_{\nu'}$  — электрический ток, численно равный  $K_{\nu'}^\mu$ ,  $E_x\{K_{\nu'}\}$  — компонента электрического вектора, создаваемого этим током в свободном пространстве,  $Z_{\nu, \nu'}$  — взаимное сопротивление, наведенное током  $K_{\nu'}$  на  $\nu$ -й вибратор и пересчитанное к пучности последнего.

Таким образом, получили формулу

$$Y_{\nu, \nu'}^e = \frac{2}{\rho_0} Z_{\nu, \nu'},$$

связывающую одностороннюю внешнюю наведенную проводимость двух щелей с полным наведенным сопротивлением двух соответствующих вибраторов. Она позволяет рассчитывать наведенные внешние проводимости щелей в плоском экране по известным таблицам и графикам В.В. Татарина для полуволновых вибраторов [4].

Так, легко убедиться, что  $Y_{\nu, \nu'}^e = \frac{2}{\rho_0} (R_{2s+1R 2q})$  ( $Z_{\nu, \nu'} = R_{2s+1R 2q}$ ),

где  $R_{2s}$  и  $R_{2q}$  находятся по таблицам или графикам В.В. Татарина для соответствующих смещений  $\nu$ -й и  $\nu'$ -й щелей по оси  $x$  и  $y$ .



Перейдем к определению внутренних проводимостей  $Y_{\nu,\nu'}^i$ . Как отмечалось выше,  $Y_{\nu,\nu'}^i = 0$  при  $\nu \neq \nu'$ . Остается определить  $Y_{\nu,\nu}^i$ . Исходя из (34) запишем

$$Y_{\nu,\nu}^i = - \int_{(v)} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) H_x^i\{e_\nu\} dx,$$

где  $H_x^i\{e\}$  определяется (12).

Проинтегрировав, найдем

$$Y_{\nu,\nu}^i = \sum_{nm}^{0-\infty} 2C_{nm}(-1)^{n+m} \frac{\cos[(2n+1)\pi l/2a]}{(2n+1)^{2\pi l/a^2 - \pi/l}},$$

где  $C_{nm}$  вычисляется по (13) с учетом (18). Таким образом,  $Y_{\nu,\nu}^i$  не зависит от номера  $\nu$  волновода. Остается привести формулу для  $F_\nu^i$ . Используя (34) и выражение для  $H_x^0$  из (11) и учитывая, что  $H_x^{0\nu} = H_x^0 e^{-i(n\alpha_x + m\alpha_y)}$

( $\nu = \{n, m\}$ ), найдем

$$F_\nu^i = \frac{2\cos(\pi l/2a)}{\pi(l^{-1} - la^{-2})} e^{-i(n\alpha_x + m\alpha_y)}.$$

Полученные формулы позволяют учесть краевые эффекты при расчете щелевых решеток.

## Литература

1. Фельд Я.Н. и Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства, ч. II. — М.: изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1959.
2. Фельд Я.Н. и Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч. I. — М.: изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1955.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
4. Татаринов В.В. Коротковолновые направленные антенны. — М.: Связьтехиздат, 1936.

Поступила 27 января 1992 г.

УДК 538.56

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© Я.Н. ФЕЛЬД

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
НА МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ*(Представлено академиком А.Ф. Богомоловым 28 I 1992)*

В работе [1] подобная задача решалась методом, при котором необходимо вычислять двумерные интегралы и решать первую краевую задачу электродинамики для области, занимаемой телом. Здесь мы постараемся обобщить и развить методы, предложенные в работах [2, 3] для тел с нулевыми и импедансными краевыми условиями, на магнитодиэлектрические тела.

**Трехмерная задача.** Рассмотрим однородное тело с параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$ , занимающее область  $Q^+$ . Поверхность, ограничивающую тело, обозначим буквой  $s$  и будем считать ее достаточно гладкой. Вся внешняя часть пространства  $Q^-$  однородна и ее параметры  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ . Полное поле в области  $Q^-$  запишем в виде  $E + E^0$ ,  $H + H^0$ , где  $E^0$ ,  $H^0$  — падающая на тело первичная волна, а в области  $Q^+$  — в виде  $E$ ,  $H$ . Введенное таким образом искомое поле  $E$ ,  $H$  всюду удовлетворяет однородным уравнениями Максвелла, принципу излучения на бесконечности и краевым условиям

$$(1) \quad E_t^+ = E_t^- + E_t^0, \quad H_t^+ = H_t^- + H_t^0 \quad \text{на } s.$$

Здесь  $E_t^+$  и  $E_t^-$  — предельные значения тангенциальной составляющей  $E$  при стремлении к  $s$  со стороны областей  $Q^+$  и  $Q^-$  соответственно; аналогично для  $H$ .

Пусть внутри области  $Q^+$  могут быть размещены  $N$  точек таким образом, чтобы геометрические сферы с центрами в этих точках, целиком расположенные внутри тела\*, содержали все особенности рассеянного поля, аналитически продолженного в область  $Q^+$ . Для краткости изложения ниже предполагается, что  $N = 2$  (обобщение на случай, когда  $N > 2$  очевидно). Обозначим эти две точки буквами  $O_1$  и  $O_{-1}$  и введем две системы сферических координат  $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$  и  $r_{-1}, \vartheta_{-1}, \varphi_{-1}$  с центрами в этих точках. Оси  $z_1$  и  $z_{-1}$  этих систем будем считать параллельными, а углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_{-1}$  отсчитывать от общей оси  $x$ , проходящей через точки  $O_1$  и  $O_{-1}$  (рис. 1).

Введем теперь вспомогательные поля следующим образом.

1. Во внешнем пространстве  $Q^-$  эти поля обозначим буквами  $E^{(p)}$ ,  $H^{(p)}$  и определим при помощи потенциалов Дебая типа

$$(2) \quad V_{\pm 1} = \sqrt{\pi k_0 r_{\pm 1}} / 2 H_{\nu+1/2}^{(2)}(k_0 r_{\pm 1}) P_{\nu}^{|m|}(\cos \vartheta_{\pm 1}) e^{im\varphi_{\pm 1}},$$

где  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \nu$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . В (2) индекс "+1" относится к полям, возбуждаемым мультиполями, находящимися в точке  $O_1$ , а индекс "-1" — в точке  $O_{-1}$ .

\*Эти сферы могут, в частности, пересекаться.

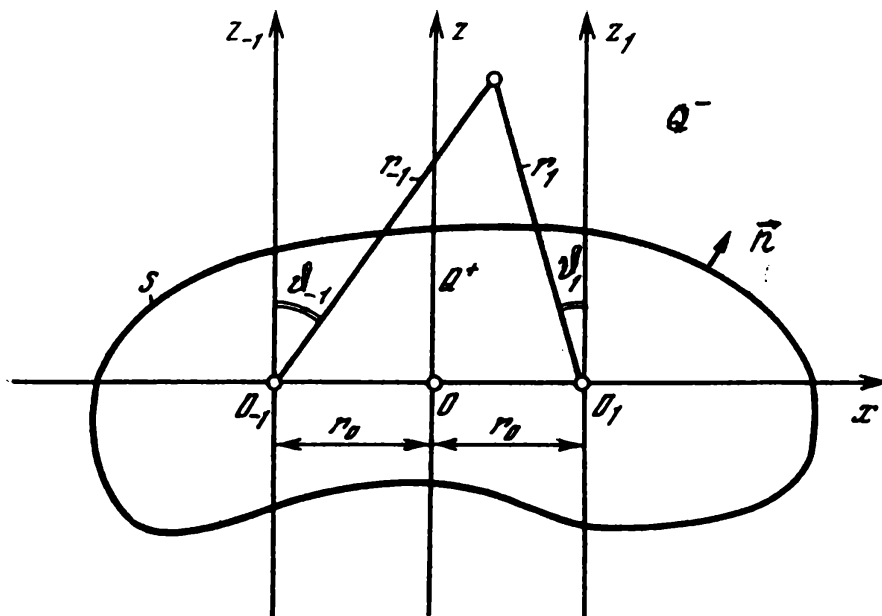


Рис. 1

2. В области  $Q^+$ , занимаемой телом, вспомогательные поля  $e^{(p)}$ ,  $h^{(p)}$  находятся при помощи потенциалов Дебая типа

$$(3) \quad U_{\pm 1} = \sqrt{\pi k r_{\pm 1}} / 2 J_{\nu+1/2}(k r_{\pm 1}) P_{\nu}^{|m|}(\cos \vartheta_{\pm 1}) e^{im\varphi_{\pm 1}},$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \nu$ .

Поля  $E^{(p)}$ ,  $H^{(p)}$  и  $e^{(p)}$ ,  $h^{(p)}$  находятся при помощи потенциалов (2) и (3) соответственно по известным формулам [3, 4] для волн электрического и магнитного типов, которые мы не приводим. Предполагается, что все эти поля пронумерованы при помощи одного индекса  $p$ , пробегающего целочисленные значения, что всегда возможно, так как число этих полей счетно. Например, можно использовать для этого представление

$$p = 4(\nu + m) + 2\nu(\nu - 1) + \eta,$$

где  $\nu \geq 0$ ,  $m \geq 0$ , а  $\eta = 0, 1, 2, 3$ .

Каждому заданному  $p_0 \geq 0$  однозначно соответствуют отсюда значения  $\nu_0$ ,  $m_0$  и  $\eta_0$ . Индексу  $-p_0$  соответствуют величины  $\nu_0$ ,  $-m_0$ ,  $\eta_0$ . Индексам  $\eta = 0$  и  $\eta = 2$  соответствуют при этом волны электрического и магнитного типов, возбуждаемые мультиполем, находящимся в точке  $O_1$ ; индексам  $\eta = 1$  и  $\eta = 3$  — волны электрического и магнитного типов от мультиполя в  $O_{-1}$ . Применяя к полям  $E, H$  и  $E^{(p)}, H^{(p)}$  лемму Лоренца в области  $Q^{-1}$  и к полям  $E, H$  и  $e^{(p)}, h^{(p)}$  в области  $Q^+$ , найдем

$$(4) \quad \int_{(s)} \{ [E^- H^{(p)}] - [E^{(p)} H^-] \} ds = 0,$$

$$\int_{(s)} \{ [E^+ h^{(p)}] - [e^{(p)} H^+] \} ds = 0.$$

Учитывая, что  $ds = n ds$ , где  $n$  — внешняя нормаль к  $s$ , можно, исключив  $E^-$  и  $H^-$  из первого уравнения (4) при помощи условия (1), придать соотношениям (4) следующий вид:

$$(5) \quad \int_{(s)} (E_t^+ A_p^* + H_t^+ B_p^*) ds = \int_{(s)} \{ [E^0 H^{(p)}] - [E^{(p)} H^0] \} ds,$$

$$\int_{(s)} (E_t^+ C_p^* + H_t^+ D_p^*) ds = 0.$$

Здесь

$$(6) \quad \mathbf{A}_p^* = [\mathbf{H}^{(p)} \mathbf{n}], \quad \mathbf{B}_p^* = [\mathbf{E}^{(p)} \mathbf{n}], \quad \mathbf{C}_p^* = [\mathbf{h}^{(p)} \mathbf{n}], \quad \mathbf{D}_p^* = [\mathbf{e}^{(p)} \mathbf{n}],$$

где звездочка – знак комплексного сопряжения.

Каждое из этих четырех семейств вектор-функций, касательных к  $s$ , линейно независимо и полно в  $L^2(s)$ ; доказательство аналогично приведенному в [2]. Поэтому равенства (5) можно использовать для нахождения  $\mathbf{E}_t^+$  и  $\mathbf{H}_t^+$  на  $s$ . Введем скалярное произведение

$$(7) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{(s)} \mathbf{A} \mathbf{B}^* ds,$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы, касательные к  $s$ , после чего равенства (5) можно записать в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} (\mathbf{E}_t^+, \mathbf{A}_p) + (\mathbf{H}_t^+, \mathbf{B}_p) &= a_p, \\ (\mathbf{E}_t^+, \mathbf{C}_p) + (\mathbf{H}_t^+, \mathbf{D}_p) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$(8a) \quad a_p = \int_{(s)} \{ [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{(p)}] - [\mathbf{E}^{(p)} \mathbf{H}^0] \} ds.$$

Будем искать составляющие  $\mathbf{E}_t^+$  и  $\mathbf{H}_t^+$  на  $s$  при помощи рядов

$$(9) \quad \mathbf{E}_t^+ = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_q \mathbf{A}_q, \quad \mathbf{H}_t^+ = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \beta_q \mathbf{B}_q,$$

где  $\alpha_q$  и  $\beta_q$  – искомые постоянные коэффициенты.

Подставляя эти ряды в (8), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_q (\mathbf{A}_q, \mathbf{A}_p) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \beta_q (\mathbf{B}_q, \mathbf{B}_p) &= a_p, \\ \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_q (\mathbf{A}_q, \mathbf{C}_p) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \beta_q (\mathbf{B}_q, \mathbf{D}_p) &= 0. \end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно заменить следующей:

$$(10) \quad \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{qp} X_q = b_p, \quad -\infty < p < \infty.$$

Здесь

$$(11) \quad X_q = \begin{cases} \alpha_{q/2}, & q = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ \beta_{(q-1)/2}, & q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \end{cases} \quad b_p = \begin{cases} a_{p/2}, & p = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ 0, & p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \end{cases}$$

$$(12) \quad A_{qp} = \begin{cases} (\mathbf{A}_{q/2}, \mathbf{A}_{p/2}) & \text{при } q = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \quad p = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ (\mathbf{B}_{(q-1)/2}, \mathbf{B}_{p/2}) & \text{при } q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \quad p = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ (\mathbf{A}_{q/2}, \mathbf{C}_{(p-1)/2}) & \text{при } q = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \quad p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \\ (\mathbf{B}_{(q-1)/2}, \mathbf{D}_{(p-1)/2}) & \text{при } q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \quad p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases}$$

В системе линейных алгебраических уравнений (10) постоянные  $A_{qp}$  и  $b_p$  известны, и решая ее, найдем  $\{X_q\}$ , т.е. учитывая (11), поля (9) на  $s$ . Зная  $\mathbf{E}_t^+$ ,  $\mathbf{H}_t^+$  и вследствие (1) поля  $\mathbf{E}_t^-$ ,  $\mathbf{H}_t^-$  на  $s$ , найдем искомое поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в областях  $Q^+$  и  $Q^-$ , используя "теорему эквивалентности", по формулам Гюйгенса–Кирхгофа [5] (см. также [1]), после чего элементарно находится диаграмма направленности рассеянного поля [5]. Коэффициенты  $a_p$  (а значит, и  $b_p$  (см. (11))) можно найти также при помощи формул, следующих из леммы Лоренца, примененной к полям

$E^0, H^0$  и  $E^{(p)}, H^{(p)}$  в областях  $Q^-$  и  $Q^+$  соответственно,

$$(86) \quad a_p = - \int_{(v_0)} E^{(p)} j^0 dv = \int_{(s_1 + s_{-1})} \{ [E^0 H^{(p)}] - [E^{(p)} H^0] \} ds.$$

Здесь  $j^0$  — плотность тока, возбуждающего первичное поле, распределенного в объеме  $v_0$ , находящемся в  $Q^-$ . В последнем интеграле  $s_1$  и  $s_{-1}$  — сферы малого радиуса  $r_\epsilon$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_{-1}$ . Задав, например,  $E^0, H^0$  в виде плоской волны

$$(13) \quad E^0 = E_z^0 = \exp[-ik_0 r \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)],$$

найдем по второй формуле (86) значения  $a_p$ , тождественно совпадающие с данными формул (23)–(24) работы [3]; необходимо только заменить в последних  $m$  на  $p$ ,  $n$  на  $m$  и  $k$  на  $k_0$  согласно обозначениям настоящей работы. Здесь  $r, \vartheta, \varphi$  — сферическая система координат с центром в точке  $O$ , находящейся на оси  $x$  на равном расстоянии  $r_0$  от точек  $O_1$  и  $O_{-1}$ .

Двумерная задача. К ней мы приходим, рассматривая падение первичной волны  $E^0, H^0$ , не зависящей от координаты  $z$ , у которой  $E^0 = E_z^0$ , на бесконечно длинный магнитоэлектрический цилиндр с осью  $z$ , контур  $\mathcal{L}$  поперечного сечения которого определяется уравнением

$$R = \rho(\varphi).$$

Здесь  $R, \varphi, z$  — цилиндрическая система координат. Искомое поле  $E, H$  в областях  $Q^+$  и  $Q^-$ , которые теперь являются плоскими ( $Q^+$  — сечение цилиндра при  $z = 0$ , а  $Q^-$  — внешняя по отношению к  $Q^+$  часть плоскости  $z = 0$ ), также не зависит от  $z$  и его электрический вектор поляризован параллельно оси  $z$  ( $E = E_z$ ). Поместим в  $Q^+$  две точки  $O_1$  и  $O_{-1}$ , выбирая их из соображений, приведенных в предыдущем разделе, и введем две полярные системы координат  $R_1, \varphi_1$  и  $R_{-1}, \varphi_{-1}$  с центрами в этих точках.

Будем полагать, что углы  $\varphi, \varphi_1, \varphi_{-1}$  отсчитываются от одной оси  $x$ , проходящей через точки  $O_1$  и  $O_{-1}$ , а начало основной системы координат  $R, \varphi$  лежит на оси  $x$  между точками  $O_1$  и  $O_{-1}$  так, что координаты этих точек в системе  $R, \varphi$  равны

$$R = R_0, \varphi_0 \quad \text{и} \quad R = R_0, \varphi = \pi$$

соответственно.

Вспомогательные поля зададим при помощи равенств

$$(14) \quad E^{(p)} = E_z^{(p)} = \begin{cases} H_{|p|/2}^{(2)}(k_0 R_1) \exp\left(i \frac{p}{2} \varphi_1\right) & \text{при } p = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ H_{|p-1|/2}^{(2)}(k_0 R_{-1}) \exp\left(i \frac{p-1}{2} \varphi_{-1}\right) & \text{при } p = \pm 1, \pm 3, \dots, \end{cases}$$

$$(14a) \quad H_{\varphi_{\pm 1}}^{(p)} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E^{(p)}}{\partial R_{\pm 1}}, \quad H_{R_{\pm 1}}^{(p)} = - \frac{1}{i\omega\mu_0 R_{\pm 1}} \frac{\partial E^{(p)}}{\partial \varphi_{\pm 1}}, \quad H_z^{(p)} = 0$$

для области  $Q^-$  и

$$(15) \quad e^{(p)} = e_z^{(p)} = \begin{cases} I_{|p|/2}(kR_1) \exp\left(i \frac{p}{2} \varphi_1\right) & \text{при } p = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ I_{|p-1|/2}(kR_{-1}) \exp\left(i \frac{p-1}{2} \varphi_{-1}\right) & \text{при } p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \end{cases}$$

$$(15a) \quad h_{\varphi_{\pm 1}}^{(p)} = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial e^{(p)}}{\partial R_{\pm 1}}, \quad h_{R_{\pm 1}}^{(p)} = - \frac{1}{i\omega\mu R_{\pm 1}} \frac{\partial e^{(p)}}{\partial \varphi_{\pm 1}}, \quad h_z^{(p)} = 0$$

для области  $Q^+$ . Формулы (4)–(12) сохраняются и для двумерной задачи с той же только разницей, что в них интегрирование по  $s$  должно быть заменено интегрированием по контуру  $\mathcal{L}$ .

Так, равенства (5) и (8а) приобретают вид

$$(16) \quad \int_{(\mathcal{L})} (\mathbf{E}_t^+ \mathbf{A}_p^* + \mathbf{H}_t^+ \mathbf{B}_p^*) dl = a_p, \\ \int_{(\mathcal{L})} (\mathbf{E}_t^+ \mathbf{C}_p^* + \mathbf{H}_t^+ \mathbf{D}_p^*) dl = 0, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$(16a) \quad \int_{(\mathcal{L})} \{[\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{(p)}] - [\mathbf{E}^{(p)} \mathbf{H}^0]\} n dl = a_p.$$

Здесь интегрирование идет по контуру  $\mathcal{L}$  рассматриваемого цилиндра, лежащего в сечении  $z = 0$ ,  $dl$  – элемент дуги контура  $\mathcal{L}$ ,  $\mathbf{n}$  – наружная нормаль к поверхности цилиндра (т.е. к  $\mathcal{L}$ ). Векторы  $\mathbf{A}_p^*$ ,  $\mathbf{B}_p^*$  и т.д. определяются формулами (6).

Учитывая поляризацию первичного поля и формулы (14), (15), видим, что векторы  $\mathbf{E}_t^+$ ,  $\mathbf{A}_p^*$ ,  $\mathbf{C}_p^*$  параллельны оси  $z$ , а векторы  $\mathbf{H}_t^+$ ,  $\mathbf{B}_p^*$ ,  $\mathbf{D}_p^*$  касательны к контуру  $\mathcal{L}$ . Решения уравнений (16), как и в трехмерном случае, ищем в виде (9). Подставляя их в (16) и используя обозначение (7), где интегрирование по  $s$  заменено интегрированием по  $\mathcal{L}$ , приходим к системе уравнений типа (10), где все величины определяются формулами (11), (12). Вычислим еще значение  $a_p$ , а значит, и  $b_p$  (см. (11)); для этого в формуле (8б) интегрирование по  $(s_1 + s_{-1})$  заменим интегрированием по окружностям  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_{-1}$  малого радиуса  $R_\epsilon$ , охватывающим источники-мультиполи, находящиеся в точках  $O_1$  и  $O_{-1}$ . Учитывая (14), (14а) и определив первичное поле формулой

$$E^0 = E_z^0 = \exp[-ik_0 R \cos(\varphi - \varphi_0)],$$

найдем для  $a_p$  значения, тождественные приведенным в формуле (10) работы [3], где следует заменить  $n \rightarrow p$ ,  $k \rightarrow k_0$ .

Поступило  
28 I 1992

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я.Н. – РиЭ, 1974, т. 19, № 5, с. 927.
2. Фельд Я.Н. – РиЭ, 1986, т. 31, № 7, с. 1265.
3. Фельд Я.Н. – РиЭ, 1989, т. 34, № 8, с. 1569.
4. Вайнштейн А.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
5. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. М., 1955, ч. 1.

УДК 538.56

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© Я.Н. ФЕЛЬД

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЛЕММЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком Ю.В. Гуляевым 25 II 1992)

Наряду с известными квадратичными леммами типа леммы Лоренца [1] и сопряженной леммы [2] может быть сформулирована еще одна лемма подобного типа, которая, насколько нам известно, до сего времени в литературе отсутствует.

Переходя к выводу леммы, рассмотрим в одной и той же среде два поля  $E_1, H_1$  и  $E_2, H_2$ , возбуждаемые электрическими и магнитными токами с плотностями  $j_1, j_1^\mu$  и  $j_2, j_2^\mu$  соответственно, одной и той же частоты  $\omega$ . Поля эти удовлетворяют следующим уравнениям Максвелла:

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{rot } H_1 &= i\omega\epsilon E_1 + j_1, \\ \text{rot } E_1 &= -i\omega\mu H_1 - j_1^\mu, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{rot } H_2 &= i\omega\epsilon E_2 + j_2, \\ \text{rot } E_2 &= -i\omega\mu H_2 - j_2^\mu. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение системы (1) на  $H_2$ , а первое уравнение системы (2) на  $H_1$  и вычтем из первого второе, после чего получим

$$H_2 \text{ rot } H_1 - H_1 \text{ rot } H_2 = i\omega\epsilon E_1 H_2 + H_2 j_1 - i\omega\epsilon E_2 H_1 - H_1 j_2$$

или

$$(3) \quad \text{div} [H_1 H_2] = i\omega\epsilon (E_1 H_2 - E_2 H_1) + H_2 j_1 - H_1 j_2.$$

Аналогично, умножив второе уравнение системы (1) на  $E_2$ , а второе уравнение системы (2) на  $E_1$  и вычтя из первого второе, найдем

$$(4) \quad \text{div} [E_1 E_2] = i\omega\mu (E_1 H_2 - E_2 H_1) - E_2 j_1^\mu + E_1 j_2^\mu.$$

Разделив равенство (3) на  $\epsilon$ , а равенство (4) на  $\mu$  и вычитая из второго первое, придем к следующей лемме:

$$(5) \quad \frac{1}{\mu} \text{div} [E_1 E_2] - \frac{1}{\epsilon} \text{div} [H_1 H_2] = (E_1 j_2^\mu - E_2 j_1^\mu) \frac{1}{\mu} + (H_1 j_2 - H_2 j_1) \frac{1}{\epsilon}.$$

Этому равенству можно придать более удобную форму. Для этого умножим его на  $\mu$  и используем обозначение  $\rho_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , после чего оно примет следующий вид:

$$(6) \quad \text{div} [E_1 E_2] - \rho_0^2 \text{div} [H_1 H_2] = (E_1 j_2^\mu - E_2 j_1^\mu) + \rho_0^2 (H_1 j_2 - H_2 j_1).$$

Как следует из вывода, лемма (6), а значит, и (5) справедливы также для неоднородных сред, когда  $\epsilon$  и  $\mu$  являются функциями координат точки наблюдения.

Мы будем полагать, что  $\rho_0$  – волновое сопротивление среды – константа. Это справедливо и для неоднородных сред, когда их параметры связаны соотноше-

нием  $\epsilon = c\mu$ , где  $c$  — константа. В этом случае от дифференциальной формы леммы (6) можно перейти к интегральной.

Действительно, проинтегрируем равенство (6) по некоторой области  $V$ , ограниченной\* поверхностью  $s$ , после чего получим

$$\int_{(V)} \{\operatorname{div}[\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2] - \rho_0^2 \operatorname{div}[\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2]\} dV = \int_{(V)} \{\mathbf{E}_1 j_2^\mu - \mathbf{E}_2 j_1^\mu + \rho_0^2 (\mathbf{H}_1 j_2 - \mathbf{H}_2 j_1)\} dV$$

или, используя теорему Гаусса о преобразовании объемных интегралов в поверхностные,

$$(7) \quad \int_{(s)} \{[\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2] - \rho_0^2 [\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2]\} ds = \int_{(V)} \{\mathbf{E}_1 j_2^\mu - \mathbf{E}_2 j_1^\mu + \rho_0^2 (\mathbf{H}_1 j_2 - \mathbf{H}_2 j_1)\} dV.$$

Здесь  $ds = n ds$ , где  $n$  — наружная по отношению к  $V$  нормаль к  $s$ .

Напомним, что лемма (7), в отличие от дифференциальной леммы (6), получена при условии, что  $\rho_0 = \text{const}$ . Представляет интерес частный случай леммы (7), когда  $V = V_\infty$  — все бесконечное пространство, а ограничивающая его поверхность  $s$  — бесконечная сфера. При этом поверхностный интеграл в равенстве (7) обращается в нуль, так как в дальней зоне\*\*

$$\mathbf{E}_1 = \rho_0 [\mathbf{H}_1 \mathbf{n}], \quad \mathbf{E}_2 = \rho_0 [\mathbf{H}_2 \mathbf{n}] \quad \text{и} \quad [\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2] ds = \rho_0^2 [\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2] ds,$$

а лемма (7) принимает вид

$$(8) \quad \int_{(V_\infty)} \{\mathbf{E}_1 j_2^\mu - \mathbf{E}_2 j_1^\mu + \rho_0^2 (\mathbf{H}_1 j_2 - \mathbf{H}_2 j_1)\} dV = 0.$$

Полученную лемму (7) имеет смысл называть третьей квадратичной леммой электродинамики в отличие от известных — Лоренца и сопряженной.

Найденные леммы (7) и (8) могут быть использованы для нахождения новых теорем взаимности, решения краевых задач и т.п.

Так, например, рассмотрим два электрических диполя с моментами

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{i\omega} I_1 d\mathbf{l}_1, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{i\omega} I_2 d\mathbf{l}_2,$$

где  $I_1, I_2$  — токи, а  $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$  — их длины. Будем также предполагать, что  $\rho_0 = \text{const}$  в  $V_\infty$ . Применив ко всему пространству  $V_\infty$  лемму (8), найдем

$$(9) \quad I_2 \mathbf{H}_1 d\mathbf{l}_2 = I_1 \mathbf{H}_2 d\mathbf{l}_1 \quad \text{или} \quad \mathbf{p}_2 \mathbf{H}_1 = \mathbf{p}_1 \mathbf{H}_2.$$

Здесь  $\mathbf{H}_1$  — магнитная напряженность, создаваемая первым диполем в точке нахождения второго диполя, а  $\mathbf{H}_2$  — напряженность, создаваемая вторым в точке нахождения первого. Если ввести понятия наведенных магнитодвижущих сил, равных

$$(10) \quad \mathcal{E}_1^\mu = \mathbf{H}_2 d\mathbf{l}_1, \quad \mathcal{E}_2^\mu = \mathbf{H}_1 d\mathbf{l}_2,$$

то теорему взаимности (9) можно записать в виде

$$(9a) \quad I_2 \mathcal{E}_2^\mu = I_1 \mathcal{E}_1^\mu,$$

Подчеркнем, что токи здесь относятся к соответствующим диполям в режиме передачи, а наведенные магнитодвижущие силы — в режиме приема.

Теорема взаимности в форме (9a) справедлива также для любых конечных антенн, если фигурирующие в ней токи и наведенные магнитодвижущие силы считать отнесенными к клеммам соответствующих антенн.

\* Поверхность  $s$  может ограничивать  $V$  как снаружи, так и изнутри.

\*\* Предполагается, что все токи  $j$  и  $j^\mu$  расположены на конечном расстоянии.



Аналогично, для двух магнитных диполей с магнитными моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  из леммы (8) следует:

$$(11) \quad \mathbf{m}_2 \mathbf{E}_1 = \mathbf{m}_1 \mathbf{E}_2.$$

Если один из диполей, например, первый электрический с моментом  $\mathbf{p}_1$ , а второй магнитный с моментом  $\mathbf{m}_2$ , то из леммы (8), получим:

$$(12) \quad \mathbf{m}_2 \mathbf{E}_1 = \rho_0^2 \mathbf{p}_1 \mathbf{H}_2,$$

где  $\mathbf{E}_1$  — напряженность, создаваемая первым диполем в месте нахождения второго, а  $\mathbf{H}_2$  — напряженность, создаваемая вторым диполем в месте нахождения первого.

Применим еще лемму (7) для решения краевых задач. Рассмотрим внешнюю краевую задачу — нахождения поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в бесконечной области  $V^e$ , ограниченной изнутри замкнутой поверхностью  $s$ , внутри которой находятся все источники поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . В области  $V^e$  будем полагать  $\rho_0 = \text{const}$ , а внутри  $s$  среда может иметь параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$  являющимися любыми функциями координат. Введем еще вспомогательное поле  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ , при расчете которого будем считать  $\rho_0 = \text{const}$  во всем пространстве и равным  $\rho_0$  заданному выше в области  $V^e$ . Источником поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  будем считать магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}$ , расположенный в точке наблюдения  $q$  области  $V^e$ . Применим лемму (7) к полям  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  в области  $V^e$ . Так как в последней имеется единственный источник — диполь в точке  $q$ , то из леммы (7) сразу следует:

$$(13) \quad \mathbf{mE}(q) = \frac{1}{i\omega} \int_{(s)} \{[\mathbf{Ee}] - \rho_0^2 [\mathbf{Hh}]\} ds \quad (I^\mu d\mathbf{l} = i\omega \mathbf{m}).$$

Здесь  $d\mathbf{s}$  направлено внутрь поверхности  $s$ . Поскольку направление вектора  $\mathbf{m}$  может быть любым, то формула (13) определяет вектор  $\mathbf{E}$  в любой точке области  $V^e$  через значения тангенциальных составляющих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на  $s$ . Если при расчете поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  поверхность  $s$  считать идеально проводящей, то формула (13) сведется к следующей:

$$(14) \quad \mathbf{mE}(q) = - \frac{\rho_0^2}{i\omega} \int_{(s)} [\mathbf{Hh}] ds,$$

так как  $[\mathbf{en}] = 0$  на  $s$ . Таким образом, формула (14) дает решение второй краевой задачи электродинамики [3]. Если при расчете поля  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  поверхность  $s$  полагать идеально магнитопроводящей, то формулу (13) можно записать как

$$(15) \quad \mathbf{mE}(q) = \frac{1}{i\omega} \int_{(s)} [\mathbf{Ee}] ds,$$

так как при этом  $[\mathbf{hn}] = 0$  на  $s$  и формула (15) давала бы решение первой краевой задачи [3]. Для нахождения вектора  $\mathbf{H}$  нужно заменить магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}$  электрическим диполем с моментом  $\mathbf{p}$ , после чего получим, используя лемму (7), аналогичные формулы для  $\mathbf{H}$ .

Можно также получить лемму, сопряженную с леммой (6), если полагать  $\epsilon$  и  $\mu$  вещественными. Для этого следует заменить систему (2) комплексно-сопряженной с ней и, повторив все действия, проведенные выше при получении леммы (6), найдем, *mut. mut.*,

$$(16) \quad \text{div}[\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*] + \rho_0^2 \text{div}[\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2^*] = (\mathbf{E}_1 j_2^{\mu*} - \mathbf{E}_2^* j_1^\mu) + \rho_0^2 (\mathbf{H}_2^* j_1 - \mathbf{H}_1 j_2^*).$$

Здесь звездочка — знак комплексного сопряжения.

Как и выше, можно перейти к интегральной лемме типа (7), если в рассматриваемой области  $V$  волновое сопротивление среды  $\rho_0 = \text{const}$ . Так, проинтегрировав равенство (16) по области  $V$ , ограниченной поверхностью  $s$ , получим

$$\int_{(s)} \{[\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*] + \rho_0^2 [\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2^*]\} ds = \int_{(V)} \{\mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2^{\mu*} - \mathbf{E}_2^* \mathbf{j}_1^{\mu} + \rho_0^2 (\mathbf{H}_2^* \mathbf{j}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{j}_2^*)\} dV.$$

Поверхностный интеграл в этом равенстве не исчезает при стремлении  $s$  к бесконечно удаленной сфере, поэтому лемма типа (8) в рассматриваемом случае не имеет места.

Поступило  
5 III 1992

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
2. *Фельд Я.Н.* — ДАН, 1947, т. 56, № 5.
3. *Фельд Я.Н., Бененсон Л.С.* Антенны дециметровых и сантиметровых волн. М.: 1955.



*Фото для газеты ЦНИРТИ "Радиотехник"*

РиЭ.— 1993.— Т.38, №1.— С.38-48.

УДК 621.396.67.01

© 1993 г. Я.Н. Фельд

## **ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

Для нестационарных широкополосных процессов получены квадратичные леммы, аналогичные лемме Лоренца. Приведены теоремы взаимности для электрических и магнитных диполей, а также для конечных антенн. Дано решение первой, второй и медленной гранично-начальной задач.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Роль и значение широкополосных сигналов в радиотехнике и электродинамике хорошо известны. Обычно такие процессы изучают путем сведения их к конечной или бесконечной сумме чисто гармонических колебаний. Прохождение каждого такого колебания через соответствующие устройства исследуют в отдельности с

последующим суммированием результатов. Однако представляет несомненный 896 интерес получение общих теорем и методов решения краевых задач, применимых непосредственно к нестационарным, неустановившимся, негармоническим процессам, которым в последнее время посвящено большое число работ.

В данной работе изложены некоторые подобные теоремы и методы. При этом использованы неоднородные уравнения Максвелла.

### 1. КВАДРАТИЧНЫЕ ЛЕММЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ОБОБЩЕНИЕМ ЛЕММЫ ЛОРЕНЦА НА НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим в одной и той же среде два различных электромагнитных поля, возбуждаемых различными системами токов. В общем случае среду будем считать дисперсионной, изотропной и неоднородной. Все величины, относящиеся к первому полю, будем отмечать индексом "1", а ко второму – индексом "2". Мгновенные значения векторов полей удовлетворяют уравнения Максвелла.

Преобразованные по Фурье векторы поля обозначим теми же буквами с тильдой. Так, например, преобразованный по Фурье электрический вектор  $\vec{E}$  обозначен через  $\hat{E}$  и связан с ним соотношением<sup>1</sup>

$$(1) \quad \hat{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} e^{-i\omega t} dt.$$

Если вектор  $\vec{E}$  является функцией пространственных координат и времени  $t$ , то вектор  $\hat{E}$  – функция пространственных координат и угловой частоты  $\omega$ .

Обратное преобразование имеет вид

$$(2) \quad \vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E} e^{i\omega t} d\omega$$

и выражает электромагнитный процесс с произвольной зависимостью от времени  $t$  через сумму чисто гармонических колебаний. Аналогичная связь имеет место и для всех остальных векторов поля. Умножив уравнения Максвелла, которым удовлетворяют векторы поля на  $e^{-i\omega t}/2\pi$  и проинтегрировав по  $dt$  в интервале  $-\infty < t < \infty$ , убедимся, что преобразованные по Фурье векторы поля удовлетворяют известным уравнениям Максвелла для гармонических колебаний частоты  $\omega$ . Важно отметить, что для гармонических полей связь между векторами индукций и напряженностями поля задается при помощи  $\epsilon$  и  $\mu$ , которые являются скалярными величинами также для дисперсионных сред. Поэтому для таких полей выполняется хорошо известная лемма Лоренца [1]. Следовательно, на основании сказанного выше она выполняется также для преобразованных по Фурье векторов и имеет следующий вид:

$$(3) \quad \int_{(s)} \{ [\hat{E}_1, \hat{H}_2] - [\hat{E}_2, \hat{H}_1] \} d\vec{s} = \int_{(V)} (\hat{J}_1 \hat{E}_2 - \hat{J}_2 \hat{E}_1) dV$$

Здесь  $V$  – область, ограниченная замкнутой поверхностью  $s$ , а  $d\vec{s} = \vec{n} ds$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор (внешний по отношению к области  $V$ ) нормали к  $s$ . При этом для сокращения записи мы ограничились только чисто электрическими токами плотностью  $\hat{J}_1$  и  $\hat{J}_2$  для соответствующих полей. Обобщения на случай наличия также магнитных токов очевидны.

Перейдем от равенства (3), справедливого для преобразованных по Фурье величин, к соответствующему равенству для мгновенных значений векторов поля и токов. Для этого умножим равенство (3) на  $e^{i\omega t}$  а затем проинтегрируем по

<sup>1</sup> Предполагаем, что все написанные ниже интегралы сходятся.

$d\omega$  от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = \infty$ . В результате получим

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(s)} \{ [\hat{\vec{E}}_1 \hat{\vec{H}}_2] - [\hat{\vec{E}}_2 \hat{\vec{H}}_1] \} d\vec{s} e^{i\omega t} d\omega = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(V)} (\hat{\vec{J}}_1 \hat{\vec{E}}_2 - \hat{\vec{J}}_2 \hat{\vec{E}}_1) dV e^{i\omega t} d\omega.$$

Преобразуем один из входящих в это равенство членов, например первый, стоящий справа. Прежде всего поменяем в нем порядок интегрирования:

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(V)} \hat{\vec{J}}_1 \hat{\vec{E}}_2 dV e^{i\omega t} d\omega = \\ = \int_{(V)} dV \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\vec{J}}_1 \hat{\vec{E}}_2 e^{i\omega t} d\omega,$$

а затем перейдем от вектора  $\hat{\vec{J}}_1$  к  $\vec{J}_1$  при помощи формулы типа (1), заменяя при этом в последней переменную интегрирования  $t$  на  $\tau$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\vec{J}}_1 \hat{\vec{E}}_2 e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_1 \{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\vec{E}}_2 e^{i\omega(t-\tau)} \times \\ \times d\omega \} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\tau.$$

При этом мы опять поменяли порядок интегрирования по переменным  $\omega$  и  $\tau$ , использовали формулу типа (2) и явно обозначили зависимость мгновенных векторов от времени.

Подставляя полученное выражение в формулу (5), находим

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(V)} \hat{\vec{J}}_1 \hat{\vec{E}}_2 dV e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{(V)} dV \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\tau.$$

Аналогичное преобразование можно провести и в остальных членах равенства (4), и вновь поменяв порядок интегрирования, получим

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{(s)} \{ [\vec{E}_1(\tau) \vec{H}_2(t-\tau)] - \\ - [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] \} d\vec{s} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{(V)} (\vec{J}_1(\tau) \times \\ \times \vec{E}_2(t-\tau) - \vec{J}_2(\tau) \times \vec{E}_1(t-\tau)) dV.$$

Как легко видеть, в этой лемме можно поменять местами аргументы в каждом из членов.

Напомним, что всюду явно выписываем только зависимость векторов от времени. Зависимость от пространственных координат предполагаем, но явно не отмечаем.

Особый интерес представляет частный случай леммы (7), когда все источники

$$(8) \quad \left. \begin{matrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \vec{J}_1 \\ \vec{J}_2 \end{matrix} \right\} = 0 \text{ при } t \leq 0$$

и лемма (7) принимает вид

$$(9) \quad \int_0^t d\tau \int_{(s)} \{ [\vec{E}_1(\tau) \vec{H}_2(t-\tau)] - [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] \} d\vec{s} = \int_0^t d\tau \int_{(V)} (\vec{J}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) - \vec{J}_2(\tau) \vec{E}_1(t-\tau)) dV.$$

Леммы (7) и (9), как следует из их вывода, справедливы для любой неоднородной, изотропной среды при наличии временной дисперсии, когда параметры среды являются также функциями частоты.

Уравнения Максвелла инвариантны относительно замены

$$(10) \quad \begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad \vec{D} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow -D, \\ \vec{J} &\rightarrow \vec{J}^\mu, \quad \vec{J}^\mu \rightarrow -\vec{J}, \end{aligned}$$

поэтому, проведя подобную замену, например в лемме (9), найдем

$$(11) \quad \int_0^t d\tau \int_{(s)} \{ [\vec{E}_1(\tau) \vec{H}_2(t-\tau)] - [\vec{E}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)] \} d\vec{s} = - \int_0^t d\tau \int_{(V)} (\vec{J}_1^\mu(\tau) \vec{H}_2(t-\tau) - \vec{J}_2^\mu(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)) dV.$$

Здесь  $\vec{J}_1^\mu$  и  $\vec{J}_2^\mu$  — плотности магнитных токов, возбуждающих соответствующие поля.

Уравнения Максвелла линейные, поэтому при наличии как электрических, так и магнитных токов в леммах (9) и (11) левые части сохраняются, а правые состоят из суммы выражений, написанных справа в формулах (9) и (11) с соответствующими пределами интегрирования по  $d\tau$ .

Леммы, аналогичные (9) и (11), впервые получены в работе [2].

Если под областью  $V$  понимать все бесконечное пространство  $V_\infty$ , то ограничивающей ее поверхностью  $s$  будет бесконечно удаленная сфера. Если все токи, возбуждающие поля, находятся на конечном расстоянии от начала координат и для них выполнены начальные условия (8), можно утверждать, что поля вне некоторой конечной сферы вследствие конечной скорости их распространения отсутствуют при  $\tau \leq t$ . Поэтому, если  $V = V_\infty$ , поверхностные интегралы в леммах (9) и (11) пропадают и леммы принимают следующий вид:

$$(9a) \quad \int_0^t d\tau \int_{(V_\infty)} (\vec{J}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) - \vec{J}_2(\tau) \vec{E}_1(t-\tau)) dV = 0$$

и

$$(11a) \quad \int_0^t d\tau \int_{(V_\infty)} (\vec{J}_1^\mu(\tau) \vec{H}_2(t-\tau) - \vec{J}_2^\mu(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)) dV = 0.$$

Начнем рассмотрение с теоремы взаимности для двух электрических диполей с моментами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , любым образом расположенных в пространстве и возбуждающих поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  соответственно. Будем полагать, что эти поля и моменты удовлетворяют начальным условиям типа (8). Тогда, применив лемму (9а), получим

$$(12) \quad \int_0^t \{ I_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\vec{l}_1 - I_2(\tau) \vec{E}_1(t-\tau) d\vec{l}_2 \} d\tau = 0.$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  — полные токи диполей в режиме передачи, а  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$  — их длины.

Векторы  $\vec{E}_2$  и  $\vec{E}_1$  следует брать в точках нахождения первого и второго диполей соответственно. Если учесть очевидные соотношения

$$I_1 d\vec{l}_1 = \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial \tau}; \quad I_2 d\vec{l}_2 = \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial \tau},$$

то равенству (12) можно придать вид

$$\int_0^t \frac{\partial \vec{p}_1(\tau)}{\partial \tau} \vec{E}_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial \vec{p}_2(\tau)}{\partial \tau} \vec{E}_1(t-\tau) d\tau.$$

Интегрируя его по частям, с учетом начальных условий типа (8) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \vec{p}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \vec{p}_2(\tau) \vec{E}_1(t-\tau) d\tau.$$

Отсюда сразу следует равенство

$$(13) \quad \int_0^t \vec{p}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t \vec{p}_2(\tau) \vec{E}_1(t-\tau) d\tau,$$

где  $\vec{E}_2$  ( $\vec{E}_1$ ) следует брать в точке нахождения первого (второго) диполя. Это и есть искомая теорема взаимности для электрических диполей при любых законах изменения их моментов во времени, удовлетворяющих начальным условиям

$$\vec{p}_1(t) = \vec{p}_2(t) = 0 \text{ при } t \leq 0.$$

Представляет интерес придать теореме взаимности (12) еще один вид. Для этого введем обозначение

$$(14) \quad \mathfrak{E}^{(1)}(t) = \vec{E}_2(t) d\vec{l}_1 \text{ и } \mathfrak{E}^{(2)}(t) = \vec{E}_1(t) d\vec{l}_2.$$

Здесь  $\mathfrak{E}^{(1)}$  ( $\mathfrak{E}^{(2)}$ ) — ЭДС, наведенная вторым (первым) диполем на первый (второй), когда первый (второй) работает в режиме приема, а второй (первый) в режиме передачи. Используя обозначение (14), придадим лемме (12) следующий вид:

$$(15) \quad \int_0^t I_1(\tau) \mathfrak{E}^{(1)}(t-\tau) d\tau = \int_0^t I_2(\tau) \mathfrak{E}^{(2)}(t-\tau) d\tau.$$

В таком виде теорема взаимности справедлива как для электрических диполей, так и для любых конечных антенн. В последнем случае токи и ЭДС измеряются на клеммах антенн, а сама теорема справедлива при любых сопротивлениях приемников и генераторов, подключаемых к антеннам в соответствующих режимах.

Подчеркнем, что в (15) нижние индексы ставим у величин, относящихся к ан-



теннам в режиме передачи, а верхние – в режиме приема. Прямое доказательство теоремы (15) для любых антенн дано в работе [3] и базируется на преобразованиях типа (8), примененных к теореме взаимности, справедливой для чисто гармонических колебаний [4].

Теорема взаимности для двух магнитных диполей с моментами  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$  может быть получена в результате использования леммы (11) или путем применения перестановки (10) непосредственно к лемме (13); в результате найдем

$$(16) \quad \int_0^t \vec{m}_1(\tau) \vec{H}_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t \vec{m}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau) d\tau.$$

Если поле  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  возбуждается электрическими токами, а поле  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  – магнитными, то из лемм (9) и (11) при  $V = V_\infty$  следует

$$\int_0^t d\tau \int_{(V_\infty)} (\vec{J}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) + \vec{J}_2^\mu(\tau) \vec{H}_1(t-\tau)) dV = 0.$$

Выбирая электрический ток в виде диполя с моментом  $\vec{p}_1$ , а магнитный – в виде диполя с моментом  $\vec{m}_2$ , получим, учитывая размеры диполей и переходя от токов к моментам, следующую теорему:

$$(17) \quad \int_0^t \vec{p}_1(\tau) \vec{E}_2(t-\tau) d\tau = - \int_0^t \vec{m}_2(\tau) \vec{H}_1(t-\tau) d\tau.$$

Все теоремы этого раздела справедливы для любых неоднородных изотропных сред при наличии временной дисперсии; в них под интегралами можно менять местами и аргументы в сомножителях.

### 3. ГРАНИЧНО-НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Первой гранично-начальной задачей электродинамики (ГНЗЭ) [5] называется задача, при которой требуется определить для момента времени  $t = \tau$  ( $\tau$  – текущая координата времени,  $t$  – произвольное фиксированное время) электромагнитное поле в области  $V$ , ограниченной замкнутой геометрической поверхностью  $s$ , по следующим данным.

1. На поверхности  $s$  задана тангенциальная составляющая электрического вектора  $\vec{E}_t$  для  $0 \leq \tau \leq t$ .

2. В области  $V$  заданы значения векторов поля

$$(18) \quad \vec{E} = \vec{E}_0, \vec{H} = \vec{H}_0 \text{ при } \tau = 0.$$

3. Если внутри  $V$  имеются источники поля, то они должны быть заданы.

4. Если область  $V$  простирается на бесконечность, то необходимо потребовать, чтобы все источники поля находились на конечном расстоянии и существовала для каждого момента времени  $t$  конечная сфера, вне которой поле отсутствует.

Аналогично формулируется также вторая ГНЗЭ с тем лишь отличием, что в п. 1 фигурирует не электрический, а магнитный вектор.

И если на части  $s_1$  поверхности  $s$  задана напряженность  $\vec{E}_t$ , а на остальной части  $s_2$  задана  $\vec{H}_t$ , то эту задачу называют смешанной ГНЗЭ.

В данном разделе предполагаем, что дисперсия отсутствует и векторы индукции связаны с напряженностями поля соотношениями (18а)  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , где  $\epsilon$  и  $\mu$  могут зависеть от пространственных координат и не зависят от времени.

Эти задачи на основании теоремы единственности имеют однозначное решение.

Для решения указанных задач используем лемму типа (9), предварительно обобщив ее на случай начальных условий (18).

Для этого рассмотрим два поля:  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ , возбуждаемых электрическими токами  $\vec{J}, \vec{J}^{(1)}$  соответственно, изменяющимися по любому закону во времени. В связи с отличием начальных условий (18) от нулевых условий (8) удобнее перейти от мгновенных значений векторов поля к преобразованным по Лапласу, обозначая последние теми же буквами с тильдой. Так, например,

$$(19) \quad \hat{\vec{E}} = \int_0^{\infty} \vec{E} e^{-p\tau} d\tau.$$

Обратное преобразование, как известно, имеет вид

$$(19a) \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \hat{\vec{E}} e^{p\tau} dp \text{ при } \tau \geq 0,$$

где  $\alpha$  выбираем так, чтобы все особые точки подынтегральной функции располагались левее прямой  $\text{Re } p = \alpha$ . Аналогичная связь имеет место и для остальных векторов.

Уравнения для векторов с тильдой, которые называются изображениями, получаем из уравнений Максвелла для мгновенных значений векторов поля путем умножения последних на  $e^{-p\tau} d\tau$  с последующим интегрированием от 0 до  $\infty$ . В результате имеем

$$(20) \quad \begin{cases} \text{rot } \hat{\vec{H}} = -\hat{\vec{D}}_0 + p\hat{\vec{D}} + \hat{\vec{J}}; & \text{rot } \hat{\vec{H}}^{(1)} = -\hat{\vec{D}}_0^{(1)} + p\hat{\vec{D}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(1)}, \\ \text{rot } \hat{\vec{E}} = \hat{\vec{B}}_0 - p\hat{\vec{B}}; & \text{rot } \hat{\vec{E}}^{(1)} = \hat{\vec{B}}_0^{(1)} - p\hat{\vec{B}}^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь  $\vec{D}_0, \vec{D}_0^{(1)}$  и  $\vec{B}_0, \vec{B}_0^{(1)}$  — значения мгновенных векторов индукций при  $\tau = 0$ , т.е. в начальный момент времени.

Из равенств (18a) и формул типа (19) следует аналогичные соотношения для изображений:

$$(20a) \quad \hat{\vec{D}} = \epsilon \hat{\vec{E}}, \quad \hat{\vec{D}}^{(1)} = \epsilon \hat{\vec{E}}^{(1)}, \quad \hat{\vec{B}} = \mu \hat{\vec{H}}, \quad \hat{\vec{B}}^{(1)} = \mu \hat{\vec{H}}^{(1)}.$$

Учитывая последние, из уравнений (20) можно получить подобно тому, как это сделано для гармонических колебаний, лемму типа Лоренца для изображений:

$$(21) \quad \text{div} [\hat{\vec{E}} \hat{\vec{H}}^{(1)}] - \text{div} [\hat{\vec{E}}^{(1)} \hat{\vec{H}}] = \hat{\vec{J}} \hat{\vec{E}}^{(1)} - \hat{\vec{J}}^{(1)} \hat{\vec{E}} - \hat{\vec{D}}_0 \hat{\vec{E}}^{(1)} + \\ + \hat{\vec{D}}_0^{(1)} \hat{\vec{E}} + \hat{\vec{B}}_0 \hat{\vec{H}}^{(1)} - \hat{\vec{B}}_0^{(1)} \hat{\vec{H}}.$$

Интегрируя это равенство по области  $V$  и используя теорему Гаусса—Остроградского, найдем интегральную форму леммы для изображений:

$$(22) \quad \int_{(s)} \{ [\hat{\vec{E}} \hat{\vec{H}}^{(1)}] - [\hat{\vec{E}}^{(1)} \hat{\vec{H}}] \} d\vec{s} = \int_{(V)} (\hat{\vec{J}} \hat{\vec{E}}^{(1)} - \hat{\vec{J}}^{(1)} \hat{\vec{E}} - \hat{\vec{D}}_0 \hat{\vec{E}}^{(1)} + \\ + \hat{\vec{D}}_0^{(1)} \hat{\vec{E}} + \hat{\vec{B}}_0 \hat{\vec{H}}^{(1)} - \hat{\vec{B}}_0^{(1)} \hat{\vec{H}}) dV.$$

Перейдем теперь от изображений к мгновенным значениям векторов поля. Для этого умножим равенство (22) на  $\frac{1}{2\pi i} e^{pt} dp$  и проинтегрируем от  $\alpha - i\infty$  до  $\alpha + i\infty$ . Меняя местами порядок интегрирования и применяя теорему о свертке, получим

$$(23) \quad \int_0^t d\tau \int_{(s)} \{ [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] - [\vec{E}^{(1)}(\tau) \vec{H}(t-\tau)] \} d\vec{s} = \\ = \int_0^t d\tau \int_{(V)} (\vec{J}(t-\tau) \vec{E}^{(1)}(\tau) - \vec{J}^{(1)}(\tau) \vec{E}(t-\tau)) dV + \int_{(V)} \{ \vec{D}_0^{(1)} \vec{E}(t) - \\ - \vec{D}_0 \vec{E}^{(1)}(t) + \vec{B}_0 \vec{H}^{(1)}(t) - \vec{B}_0^{(1)} \vec{H}(t) \} dV.$$

Поскольку  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  заданы (см. (18)), то и векторы  $\vec{D}_0 = \epsilon \vec{E}_0, \vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0$  известны, 902  
 это же относится и к полю с индексом (1). Таким образом, полученная лемма (23) учитывает ненулевые начальные условия типа (18) для обоих входящих в нее полей.

Подобная лемма в дифференциальной форме, найденная в результате перехода от равенства (21) для изображений к равенству для мгновенных значений полей, впервые получена в работе [5] в предположении, что в области  $V$  токи отсутствуют.

Перейдем теперь к решению первой ГНЗЭ в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $s$ . Искомое поле обозначим через  $\vec{E}, \vec{H}$ , а под  $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$  будем подразумевать вспомогательное поле, возбуждаемое электрическим диполем с моментом  $\vec{p}$ , помещенным в точку наблюдения  $q'$ . Ориентация диполя не зависит от времени. Будем также предполагать, что поле  $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$  и  $\vec{p}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \vec{E}^{(1)} = \vec{H}^{(1)} = 0 \text{ при } t = 0 \text{ внутри } V;$$

$$2) \vec{E}_\tau^{(1)} = 0 \text{ на } s \text{ при } t \geq 0,$$

здесь  $\vec{E}_\tau^{(1)}$  – тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}^{(1)}$ ,

$$3) p(\tau) = \begin{cases} 1, \tau > 0, \\ 0, \tau < 0, \end{cases} p'(\tau) = \delta(\tau \pm 0),$$

где  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака.

Искомое поле  $\vec{E}, \vec{H}$  будем считать удовлетворяющим начальным условиям (18), в которых векторы  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  заданы в области  $V$ , а тангенциальная составляющая  $\vec{E}_\tau$  вектора  $\vec{E}$  задана на поверхности  $s$  для интервала времени  $0 \leq \tau \leq t$ .

Применим лемму (23) для только что введенных полей. Однако учитывая, что поле  $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$  в точке  $q'$  области  $V$  обращается в бесконечность, исключим последнюю при помощи бесконечно малой сферы  $s_0$  с центром в  $q'$ . Область внутри  $s_0$  обозначим через  $V_0$ . Тогда, используя условия 1,2 для поля  $E^{(1)}, H^{(1)}$ , придадим лемме (23) следующий вид:

$$(24) \quad \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] \vec{d}s - \int_0^t d\tau \int_{(s_0)} \{ [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] - [\vec{E}^{(1)}(\tau) \vec{H}(t-\tau)] \} \vec{d}s = \int_0^t d\tau \int_{(V-V_0)} \vec{J}(t-\tau) \vec{E}^{(1)}(\tau) dV + \int_{(V-V_0)} \{ \vec{B}_0 \vec{H}^{(1)}(t) - \vec{D}_0 \vec{E}^{(1)}(t) \} dV.$$

Здесь в обоих поверхностных интегралах вектор  $\vec{d}s$  направлен в сторону внешней по отношению к  $V$  и  $V_0$  нормали к поверхностям  $s$  и  $s_0$ .

Переходя в равенстве (24) к пределу, когда сфера  $s_0$  стягивается к точке  $q'$ , а  $V - V_0 \rightarrow V$ , найдем

$$(25) \quad \lim_{s_0 \rightarrow q'} \int_0^t d\tau \int_{(s_0)} \{ [\vec{E}^{(1)}(\tau) \vec{H}(t-\tau)] - [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] \} \vec{d}s = \\ = - \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] \vec{d}s + \int_0^t d\tau \int_{(V)} \vec{J}(t-\tau) \vec{E}^{(1)}(\tau) dV + \\ + \int_{(V)} \{ \vec{B}_0(t) \vec{H}^{(1)}(t) - \vec{D}_0 \vec{E}^{(1)}(t) \} dV.$$

Здесь, как это следует из вывода, объемные интегралы необходимо понимать в смысле "главного значения" Коши. Вычислим теперь предел интеграла, стоящего в левой части равенства (25). После несложных выкладок, при которых использованы формулы для поля диполя в ближней зоне, а также соотношения типа

$$\begin{aligned} \int_{(s_0)} E_{\theta}^{(1)} H_{\varphi} ds &= \int_0^{\pi} E_{\theta}^{(1)} r_0 d\theta \int_0^{2\pi} H_{\varphi} \sin \theta r_0 d\varphi = \\ &= \pi r_0^3 \int_0^{\pi} E_{\theta}^{(1)} \left( J_p + \frac{\partial D_p}{\partial t} \right) \sin^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

вытекающие из уравнений Максвелла ( $r_0$  — радиус сферы  $s_0$ ), получим (см. приложение)

$$\begin{aligned} (25a) \quad \lim_{s_0 \rightarrow q'} \int_0^t d\tau \int_{(s_0)} \{ [\vec{E}^{(1)}(\tau) \vec{H}(t-\tau)] - [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] \} d\vec{s} = \\ = E_p(t, q') - \frac{1}{3} E_p(0, q') + \frac{1}{3\epsilon} \int_0^t J_p(\tau, q') d\tau. \end{aligned}$$

Здесь  $E_p(t, q')$  означает проекцию вектора  $\vec{E}$  на направление момента  $\vec{p}$  вспомогательного диполя, причем в отличие от остального изложения явно отмечена зависимость  $E_p$  не только от времени, но и от точки наблюдения  $q'$ ; такой же смысл имеет обозначение  $J_p(\tau, q')$ . При выводе использовано также условие 3. Подставляя полученное значение предела в равенство (25), найдем

$$\begin{aligned} (26) \quad E_p(t, q') &= \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{H}^{(1)}(\tau) \vec{E}(t-\tau)] d\vec{s} + \int_0^t \int_{(V)} \vec{J}(t-\tau) \vec{E}^{(1)}(\tau) dV + \frac{1}{3} E_p(0, q') - \\ &- \frac{1}{3\epsilon} \int_0^t J_p(\tau, q') d\tau + \\ &+ \int_{(V)} \{ \vec{B}_0 \vec{H}^{(1)}(t) - \vec{D}_0 \vec{E}^{(1)}(t) \} dV \text{ при } t > 0. \end{aligned}$$

Заменив вспомогательный электрический диполь магнитным с моментом  $\vec{m}$  и векторами создаваемого им поля  $\vec{E}^{(2)}$ ,  $\vec{H}^{(2)}$ , удовлетворяющими тем же условиям 1–3, что и в случае электрического диполя, аналогично предыдущему найдем

$$\begin{aligned} (27) \quad H_m(t, q') &= \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(2)}(\tau)] d\vec{s} + \frac{1}{3} H_m(0, q') - \\ &- \int_0^t d\tau \int_{(V)} \vec{J}(t-\tau) \vec{E}^{(2)}(\tau) dV - \int_{(V)} \{ \vec{B}_0 \vec{H}^{(2)}(t) - \vec{D}_0 \vec{E}^{(2)}(t) \} dV. \end{aligned}$$

В формуле (27) отсутствует член типа  $-\frac{1}{3\epsilon} \int_0^t J_p(\tau, q') d\tau$ , фигурирующий в (26), поскольку мы предположили, что в рассматриваемой области  $V$  отсутствуют магнитные токи, возбуждающие искомое поле.

Так как местонахождение вспомогательных диполей и направление их моментов могут быть любыми, формулы (26) и (27) дают решение задачи определения поля по заданным граничным и начальным условиям.

Метод решения второй и смешанной ГНЗЭ остается тем же с тем лишь отличием, что в случае второй задачи в граничном условии 1 вектор  $\vec{E}^{(1)}$  заменяется вектором  $\vec{H}^{(1)}$ .

$$\pm \int_0^t d\tau \int_{(s)} [\vec{E}^{(1,2)}(\tau) \vec{H}(t-\tau)] d\vec{s},$$

где "+" соответствует формуле (26), а "-" — формуле (27).

В случае смешанной задачи условие 1 заменяется следующим:

на части  $s_1$  поверхности  $s$  равна нулю напряженность  $\vec{E}_t^{(1)}$ , а на остальной части  $s_2$  поверхности  $s$  ( $s = s_1 + s_2$ ) равна нулю  $\vec{H}_t^{(1)}$ . Такой же вид имеет условие 1 для поля  $\vec{E}^{(2)}$ ,  $\vec{H}^{(2)}$ .

Условия 2 и 3 остаются прежними. При этом, как легко сообразить, поверхностный интеграл в формулах (26) и (27) заменяется следующим:

$$\pm \int_0^t d\tau \left\{ \int_{(s_1)} [\vec{H}^{(1,2)}(\tau) \vec{E}(t-\tau)] d\vec{s} + \int_{(s_2)} [\vec{E}^{(1,2)}(\tau) \times \vec{H}(t-\tau)] d\vec{s} \right\},$$

где "+" соответствует формуле (26), а "-" — формуле (27).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим прежде всего внутренний интеграл, стоящий в левой части формулы (25):

$$\begin{aligned} (\text{П. 1}) \quad A &\equiv \int_{(s_0)} \{ [\vec{E}^{(1)}(\tau) \vec{H}(t-\tau)] - [\vec{E}(t-\tau) \vec{H}^{(1)}(\tau)] \} d\vec{s} = \\ &= \int_{(s_0)} \{ E_\theta^{(1)}(\tau) H_\varphi(t-\tau) - E_\theta(t-\tau) H_\varphi^{(1)}(\tau) \} ds = \\ &= \int_0^\pi E_\theta^{(1)}(\tau) \left[ \int_0^{2\pi} H_\varphi(t-\tau) \sin\theta \cdot r_0 d\varphi \right] r_0 d\theta - \int_0^\pi H_\varphi^{(1)}(\tau) \left[ \int_0^{2\pi} E_\theta(t-\tau) \sin\theta \cdot r_0 d\varphi \right] r_0 d\theta. \end{aligned}$$

Здесь  $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат с центром в точке  $q'$  и осью, совпадающей с направлением момента диполя  $\vec{p}$ .

Интегрирование проводим по поверхности бесконечно малой сферы  $s_0$  радиусом  $r_0$  с центром в точке  $q'$ . Поэтому, используя первое уравнение Максвелла и теорему Стокса, получим для внутренних интегралов последней формулы следующие выражения:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(t-\tau) \sin\theta \cdot r_0 d\varphi = [J_p(t-\tau) + D'_p(t-\tau)] \pi r_0^2 \sin^2\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} E_\theta(t-\tau) \sin\theta \cdot r_0 d\varphi = -\sin^2\theta E_p(t-\tau) 2\pi r_0,$$

где компоненты полей и тока, стоящие в правых частях, следует брать в точке  $q'$ .

Подставляя эти значения в предыдущую формулу, найдем

$$\begin{aligned} (\text{П. 2}) \quad A &= \int_0^\pi E_\theta^{(1)}(\tau) \{ J_p(t-\tau) + D'_p(t-\tau) \} \pi r_0^3 \sin^2\theta d\theta + \\ &+ \int_0^\pi H_\varphi^{(1)}(\tau) E_p(t-\tau) 2\pi r_0^2 \sin^2\theta d\theta. \end{aligned}$$

$$(П.3) \quad \begin{cases} E_{\theta}^{(1)}(\tau) = (1/4\pi\epsilon) (\sin\theta/r_0^3) p(\tau), \\ H_{\varphi}^{(1)}(\tau) = (1/4\pi r_0^2) \sin\theta p'(\tau). \end{cases}$$

Члены порядка  $r_0^{-2}$  и  $r_0^{-1}$  в выражении для  $E_{\theta}^{(1)}$  и порядка  $r_0^{-1}$  для  $H_{\varphi}^{(1)}$  пропадут при переходе к пределу в формуле (25).

Подставляя значения (П.3) в равенство (П.2) и интегрируя по  $d\theta$ , а также учитывая, что все компоненты полей и тока относятся к точке  $q'$  и являются при этом постоянными, найдем

$$(П.4) \quad A = p(\tau)/3\epsilon \{J_p(t-\tau) + D_p'(t-\tau)\} + (2/3)p'(t)E_p(t-\tau).$$

Интегрируя полученную формулу по  $d\tau$  от  $\tau = 0$  до  $\tau = t$  и учитывая условие 3 для  $p$ , имеем

$$\lim_{s_0 \rightarrow q'} \int_0^t A d\tau = 1/3\epsilon \int_0^t J_p(\tau) d\tau + E_p(t) - (1/3)E_p(0).$$

Таким образом, учитывая обозначение (П.1) равенство (25а) строго доказано.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
2. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1943. Т. 41. № 7. С. 294.
3. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 325.
4. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48. № 7. С. 503.
5. Фельд Я.Н. // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48. № 3. С. 181.

Поступила в редакцию  
21.07.92

*Электродинамика и распространение радиоволн*

УДК 621.396

© 1993 г. Л.С. Бепесон, Я.Н. Фельд

**НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ЛЕММЫ  
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ**

Приведен ряд новых квадратичных лемм, являющихся обобщением обычной и сопряженной лемм Лорентца на случай полей несовпадающих частот, возбуждаемых своими источниками в средах с различными материальными параметрами, а также записанных для произведений одноименных (а не разноименных, как обычно) векторов полей. Приведен ряд примеров практического применения подобных лемм.

**ВВЕДЕНИЕ**

На практике широко применяются квадратичные соотношения, связывающие векторы двух электромагнитных полей. В частности, для установившихся гармонических процессов известны комплексная теорема Пойнтинга [1], лемма Лорентца [2] и сопряженная лемма [3]. Эти соотношения записаны для полей одинаковых частот, возбуждаемых своими источниками в одной и той же среде. Последние две леммы нетрудно обобщить на случай полей разных частот, заданных в средах с различными материальными параметрами. Приведем эти новые соотношения для изотропных сред при временной зависимости  $\exp(i\omega t)$ .

**1. ОБОБЩЕННАЯ ЛЕММА ЛОРЕНТЦА**

Пусть поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  частотой  $\omega_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  частотой  $\omega_2$  возбуждаются в средах соответственно с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$ , в общем случае комплексными и изменяющимися от точки к точке. Записывая уравнения Максвелла для этих полей с источниками  $\vec{J}_1, \vec{J}_{\mu 1}$  и  $\vec{J}_2, \vec{J}_{\mu 2}$ :

$$(1a) \quad \text{rot } \vec{H}_1 = i\omega_1 \epsilon_1 \vec{E}_1 + \vec{J}_1,$$

$$(1b) \quad \text{rot } \vec{E}_1 = -i\omega_1 \mu_1 \vec{H}_1 - \vec{J}_{\mu 1};$$

$$(2a) \quad \text{rot } \vec{H}_2 = i\omega_2 \epsilon_2 \vec{E}_2 + \vec{J}_2,$$

$$(2b) \quad \text{rot } \vec{E}_2 = -i\omega_2 \mu_2 \vec{H}_2 - \vec{J}_{\mu 2}$$

и умножая уравнение (1a) на  $\vec{E}_2$ , (2a), на  $\vec{E}_1$ , (1b) на  $\vec{H}_2$ , (2a) на  $\vec{H}_1$ , составим из

полученных выражений комбинации вида  $\vec{H}_i \operatorname{rot} \vec{E}_k - \vec{E}_k \operatorname{rot} \vec{H}_i = \operatorname{div}[\vec{E}_k \vec{H}_i]$ :

$$(3a) \quad \operatorname{div}[\vec{E}_1 \vec{H}_2] = -(\vec{J}_2 \vec{E}_1 + \vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2) - i(\omega_2 \varepsilon_2 \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \omega_1 \mu_1 \vec{H}_1 \vec{H}_2),$$

$$(3b) \quad \operatorname{div}[\vec{E}_2 \vec{H}_1] = -(\vec{J}_1 \vec{E}_2 + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1) - i(\omega_1 \varepsilon_1 \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \omega_2 \mu_2 \vec{H}_1 \vec{H}_2).$$

Интегрируя эти равенства по области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$  и включающей источники полей, получим интегральные соотношения

$$(4a) \quad \int_S [\vec{E}_1 \vec{H}_2] \vec{ds} + \int_V (\vec{J}_2 \vec{E}_1 + \vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2) dV = \\ = -i \int_V (\omega_2 \varepsilon_2 \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \omega_1 \mu_1 \vec{H}_1 \vec{H}_2) dV,$$

$$(4b) \quad \int_S [\vec{E}_2 \vec{H}_1] \vec{ds} + \int_V (\vec{J}_1 \vec{E}_2 + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1) dV = \\ = -i \int_V (\omega_1 \varepsilon_1 \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \omega_2 \mu_2 \vec{H}_1 \vec{H}_2) dV,$$

где  $\vec{ds} = \vec{n} ds$ ;  $\vec{n}$  – нормаль к  $S$ , внешняя по отношению к  $V$ .

Вычитая из равенства (4a) равенство (4b), а также складывая их, получим два равноправных выражения:

$$(5a) \quad \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1]\} \vec{ds} - \int_V \{(\vec{J}_1 \vec{E}_2 - \vec{J}_2 \vec{E}_1) - \\ - (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2 - \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1)\} dV = I_1,$$

$$(5b) \quad \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2] + [\vec{E}_2 \vec{H}_1]\} \vec{ds} + \int_V \{(\vec{J}_1 \vec{E}_2 + \vec{J}_2 \vec{E}_1) + \\ + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2 + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1)\} dV = I_2,$$

где

$$(6a) \quad I_1 = i \int_V \{(\omega_1 \varepsilon_1 - \omega_2 \varepsilon_2) \vec{E}_1 \vec{E}_2 + (\omega_2 \mu_2 - \omega_1 \mu_1) \vec{H}_1 \vec{H}_2\} dV,$$

$$(6b) \quad I_2 = -i \int_V \{(\omega_1 \varepsilon_1 + \omega_2 \varepsilon_2) \vec{E}_1 \vec{E}_2 + (\omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2) \vec{H}_1 \vec{H}_2\} dV.$$

Соотношения (4) и (5) специально записаны так, чтобы их левые части сохраняли свой вид, независимо от частот полей и параметров среды. Равенство (5a) является обобщением известной леммы Лорентца и переходит в нее при  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Равенство (5b) даже при этих же соотношениях, когда  $I_2 = -2i\omega \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2) dV$ , до сих пор не записывали.

Равенство  $I_1 = 0$  справедливо и в случае полей в невзаимных средах, если  $\omega_1 = \omega_2$ , а элементы тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей связаны соотношениями  $\varepsilon_2^{(ik)} = \varepsilon_1^{(ki)}$ ,  $\mu_2^{(ik)} = \mu_1^{(ki)}$  [4]. Если же при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,

$\mu_1 = \mu_2 = \mu$  имеем  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то

$$(7a) \quad I_1 = i(\omega_1 - \omega_2) \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2 - \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2) dV,$$

$$(7b) \quad I_2 = -i(\omega_1 + \omega_2) \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2) dV.$$



Сопряженную лемму, обобщенную на случаи  $\omega_1 \neq \omega_2$ ,  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ , получим, умножая равенства (1а) и (1б) на  $\vec{E}_2^*$ ,  $\vec{H}_2^*$ , а равенства, комплексно-сопряженные равенствам (2а) и (2б), – на  $\vec{E}_1$  и  $\vec{H}_1$  соответственно. После аналогичных преобразований, как и выше, получим

$$(8a) \quad \int_S [\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] \vec{ds} + \int_V (\vec{J}_2^* \vec{E}_1 + \vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^*) dV = \\ = i \int_V (\omega_2 \epsilon_2^* \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \omega_1 \mu_1 \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

$$(8б) \quad \int_S [\vec{E}_2^* \vec{H}_1] \vec{ds} + \int_V (\vec{J}_1 \vec{E}_2^* + \vec{J}_{\mu 2}^* \vec{H}_1) dV = \\ = -i \int_V (\omega_1 \epsilon_1 \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \omega_2 \mu_2^* \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

а также

$$(9a) \quad \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] + [\vec{E}_2^* \vec{H}_1]\} \vec{ds} + \int_V \{(\vec{J}_1^* \vec{E}_2^* + \vec{J}_2^* \vec{E}_1) + \\ + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* + \vec{J}_{\mu 2}^* \vec{H}_1)\} dV = I_3,$$

где

$$I_3 = i \int_V \{(\omega_2 \epsilon_2^* - \omega_1 \epsilon_1) \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + (\omega_2 \mu_2^* - \omega_1 \mu_1) \vec{H}_1 \vec{H}_2^*\} dV,$$

$$(9б) \quad \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] - [\vec{E}_2^* \vec{H}_1]\} \vec{ds} - \int_V \{(\vec{J}_1 \vec{E}_2^* - \vec{J}_2^* \vec{E}_1) - \\ - (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* - \vec{J}_{\mu 2}^* \vec{H}_1)\} dV = I_4,$$

где

$$I_4 = i \int_V \{(\omega_2 \epsilon_2^* + \omega_1 \epsilon_1) \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - (\omega_2 \mu_2^* + \omega_1 \mu_1) \vec{H}_1 \vec{H}_2^*\} dV.$$

При  $\epsilon_{1,2} = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega_{1,2}}$ ,  $\mu_{1,2} = \mu - i \frac{\sigma_\mu}{\omega_{1,2}}$  и  $\omega_2 \neq \omega_1$  имеем

$$(10a) \quad I_3 = i(\omega_2 - \omega_1) \int_V (\epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV - \\ - 2 \int_V (\sigma \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \sigma_\mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

$$(10б) \quad I_4 = i(\omega_2 + \omega_1) \int_V (\epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

а если, кроме того,  $\omega_2 = \omega_1 = \omega$  и, следовательно,  $\epsilon_2 = \epsilon_1$ ,  $\mu_2 = \mu_1$ , то

$$(11a) \quad I_3 = -2 \int_V (\sigma \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \sigma_\mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

$$(11б) \quad I_4 = 2i\omega \int_V (\epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV.$$

Если же в последнем случае  $\sigma = \sigma_\mu = 0$ , т.е. потери в среде отсутствуют, то  $I_3 = 0$  и равенство (9а) принимает вид обычной сопряженной леммы. Равенство (9б) даже в простейшем варианте (т.е. при  $I_4$  в виде (11б)), так же как и (5б), ранее не записывали.

### 3. БАЛАНС ВЗАИМНЫХ МОЩНОСТЕЙ ДВУХ ПОЛЕЙ

Если комплексную теорему Пойнтинга записать для суперпозиции двух полей:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$  (считая при этом, что  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , а потери в среде отсутствуют), то получим соотношение (см. [2])

$$(12) \quad \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] + [\vec{E}_2 \vec{H}_1^*]\} \vec{ds} + \int_V \{(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 + \vec{J}_2^* \vec{E}_1) + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*)\} dV = 2i\omega \operatorname{Re} \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV$$

или, отделяя вещественные и мнимые части, два равенства:

$$(13a) \quad \operatorname{Re} \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] + [\vec{E}_2 \vec{H}_1^*]\} \vec{ds} = - \operatorname{Re} \int_V \{(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 + \vec{J}_2^* \vec{E}_1) + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*)\} dV,$$

$$(13б) \quad \operatorname{Im} \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] + [\vec{E}_2 \vec{H}_1^*]\} \vec{ds} = - \operatorname{Im} \int_V \{(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 + \vec{J}_2^* \vec{E}_1) + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*)\} dV + 2\omega \operatorname{Re} \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

которые можно назвать балансами активных (13а) и реактивных (13б) взаимных мощностей двух полей. Учитывая, что

$$\operatorname{Re}[\vec{E}_2^* \vec{H}_1] = \operatorname{Re}[\vec{E}_2 \vec{H}_1^*], \quad \operatorname{Re}(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1) = \operatorname{Re}(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*),$$

$$\operatorname{Im}[\vec{E}_2^* \vec{H}_1] = - \operatorname{Im}[\vec{E}_2 \vec{H}_1^*], \quad \operatorname{Re}(\vec{J}_1 \vec{E}_2^* + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1) = - \operatorname{Im}(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 + \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*),$$

видим, что соотношения (9) при  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $\sigma = \sigma_\mu = 0$  и (13) совпадают, т.е. сопряженная лемма (9) также дает балансы взаимных активных и реактивных мощностей. В то же время  $\operatorname{Im}$  от (9а) и  $\operatorname{Re}$  от (9б) дают два дополнительных новых соотношения:

$$(14a) \quad \operatorname{Im} \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1^*]\} \vec{ds} + \operatorname{Im} \int_V \{(\vec{J}_2^* \vec{E}_1 - \vec{J}_1^* \vec{E}_2) + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* - \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*)\} dV = \operatorname{Im} I_3,$$

$$(14б) \quad \operatorname{Re} \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2^*] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1^*]\} \vec{ds} - \operatorname{Re} \int_V \{(\vec{J}_1^* \vec{E}_2 - \vec{J}_2^* \vec{E}_1) - (\vec{J}_{\mu 1} \vec{H}_2^* - \vec{J}_{\mu 2} \vec{H}_1^*)\} dV = \operatorname{Re} I_4.$$

При  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu - i \frac{\sigma_\mu}{\omega}$

$$(15a) \quad \operatorname{Im} I_3 = -2 \operatorname{Im} \int_V (\sigma \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \sigma_\mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV,$$

$$(15б) \quad \operatorname{Re} I_4 = -2 \operatorname{Im} \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* - \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV.$$

Приведенные обобщенные леммы могут быть применены в различных случаях; в частности, при решении задачи возбуждения резонаторов, когда поле, возбужденное в резонаторе, представлено в виде разложений по собственным модам резонатора, которые, как известно, удовлетворяют уравнениям Максвелла на разных (резонансных) частотах. С целью иллюстрации приведем этот расчет, выполненный с использованием сопряженной леммы (8) (в [5] для этого применяли соотношения типа (4)). Рассмотрим сначала систему собственных мод резонатора, полагая при этом параметры среды в резонаторе вещественными и одинаковыми для всех мод и считая, что вырождение отсутствует. Так как на стенках резонатора  $\vec{E}_\tau = 0$ , а источники у мод отсутствуют, равенства (8) для любых двух мод с  $\omega_2 \neq \omega_1$ , принимают вид

$$(16a) \quad \omega_2 \int_V \epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* dV - \omega_1 \int_V \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^* dV = 0,$$

$$(16b) \quad \omega_1 \int_V \epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* dV - \omega_2 \int_V \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^* dV = 0$$

однородной системы с неравным нулю определителем

$$\begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \neq 0,$$

откуда следует условие ортогональности мод:

$$(17) \quad \int_V \epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* dV = \int_V \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^* dV = 0.$$

При  $\omega_2 = \omega_1$  имеем из (16) норму  $N_1$  соответствующей моды:

$$(18) \quad \int_V \epsilon |\vec{E}_1|^2 dV = \int_V \mu |\vec{H}_1|^2 dV = N_1$$

(равную удвоенной средней запасенной энергии моды; как известно, энергии, запасаемые в электрическом и магнитном полях мод равны и переходят за период ВЧ-колебаний из одного вида в другой).

После  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  с частотой  $\omega$ , возбуждаемое источниками  $\vec{J}$ ,  $\vec{J}_\mu$  в резонаторе, представим в виде разложений, учитывая при этом лишь "соленоидальную" часть возбужденного поля, для которого  $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = \text{div}(\mu \vec{H}) = 0$ :

$$(19) \quad \vec{E} = \sum_S A_S \vec{E}_S, \quad \vec{H} = \sum_S B_S \vec{H}_S,$$

коэффициенты которых  $A_S$ ,  $B_S$  найдем при помощи равенств, полученных из (8) после подстановки в них выражений (19) для  $\vec{E}_1 = \vec{E}$ ,  $\vec{H}_1 = \vec{H}$ , а также  $\vec{E}_2 = \vec{E}_S$ ,  $\vec{H}_2 = \vec{H}_S$ ,  $\vec{J}_1 = \vec{J}$ ,  $\vec{J}_{\mu 1} = \vec{J}_\mu$ ,  $\vec{J}_2 = \vec{J}_{\mu 2} = 0$  и использовании условий ортогональности (17) и (18) и граничных условий  $\vec{E}_\tau = 0$  на поверхности резонатора как для мод, так и для поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ :

$$(20) \quad \begin{aligned} \omega_S A_S - \omega B_S &= -i N_S^{-1} \int_V \vec{J}_\mu \vec{H}_S^* dV, \\ -\omega A_S + \omega_S B_S &= -i N_S^{-1} \int_V \vec{J} \vec{E}_S^* dV, \end{aligned}$$

$$(21) \quad A_S = -\frac{i}{N_S} \frac{1}{\omega_S^2 - \omega^2} \left[ \omega \int_V \vec{J} \vec{E}_S^* dV + \omega_S \int_V \vec{J}_\mu \vec{H}_S^* dV \right],$$

$$B_S = -\frac{i}{N_S} \frac{1}{\omega_S^2 - \omega^2} \left[ \omega_S \int_V \vec{J} \vec{E}_S^* dV + \omega \int_V \vec{J}_\mu \vec{H}_S^* dV \right].$$

Из формул (21) на первый взгляд следует, что при  $\omega \rightarrow \omega_S$  коэффициенты  $A_S, B_S$  неограниченно возрастают. Фактически этого не будет, так как из-за неизбежных потерь в стенках и средне-заполнителе резонатора (не учитываемых в приведенном расчете) свободные моды будут затухающими, т.е. будут иметь временную зависимость вида  $\exp(i\omega_S^0 t) \exp(-\alpha_S t)$  (где  $\alpha_S$  – коэффициенты затухания;  $\omega_S^0$  – собственные частоты), что можно истолковать как "комплексную" резонансную частоту  $\omega_S = \omega_S^0 + i\alpha_S$ . Подставляя это выражение для  $\omega_S$  в формулу (21), видим, что величина  $\omega_S^2 - \omega^2$  не обращается в нуль, так как  $\omega$  – вещественная величина.

### 5. ЛЕММЫ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОДНОИМЕННЫХ ВЕКТОРОВ

В приведенных леммах фигурируют произведения вида  $[\vec{E}_i \vec{H}_k], [\vec{E}_i \vec{H}_k^*]$  разноименных векторов. В работе [6] получены леммы с произведениями вида  $[\vec{E}_1 \vec{E}_2], [\vec{H}_1 \vec{H}_2]$  одноименных векторов. При выводе одной из этих лемм равенства (1а) и (2а) умножаем на  $\vec{H}_2$  и  $\vec{H}_1$ , равенства (1б) и (2б) – на  $\vec{E}_2$  и  $\vec{E}_1$  соответственно; полученные выражения с учетом тождеств  $\vec{H}_2 \operatorname{rot} \vec{H}_1 - \vec{H}_1 \operatorname{rot} \vec{H}_2 = \operatorname{div}[\vec{H}_1 \vec{H}_2]$  и  $E_2 \operatorname{rot} E_1 - E_1 \operatorname{rot} E_2 = \operatorname{div}[\vec{E}_1 \vec{E}_2]$  преобразуем к виду

$$(22a) \quad \operatorname{div}[\vec{H}_1 \vec{H}_2] = i\omega \varepsilon [(\vec{E}_1 \vec{H}_2) - (\vec{E}_2 \vec{H}_1)] + (\vec{J}_1 \vec{H}_2 - \vec{J}_2 \vec{H}_1),$$

$$(22б) \quad \operatorname{div}[\vec{E}_1 \vec{E}_2] = i\omega \mu [(\vec{E}_1 \vec{H}_2) - (\vec{E}_2 \vec{H}_1)] + (\vec{J}_{\mu 1} \vec{E}_1 - \vec{J}_{\mu 2} \vec{E}_2)$$

(принимая, что оба поля имеют одинаковую частоту и возбуждаются в одной и той же среде с параметрами  $\varepsilon, \mu$ ).

Разделив равенство (22а) на  $\varepsilon$ , а равенство (22б) – на  $\mu$  и вычитая затем из второго соотношения первое, получим дифференциальную форму новой леммы:

$$(23) \quad \operatorname{div}[\vec{E}_1 \vec{E}_2] - \rho_0^2 \operatorname{div}[\vec{H}_1 \vec{H}_2] = (\vec{J}_{\mu 2} \vec{E}_1 - \vec{J}_{\mu 1} \vec{E}_2) + \rho_0^2 (\vec{J}_2 \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \vec{H}_2),$$

где  $\rho_0 = \sqrt{\mu / \varepsilon}$  – волновое сопротивление пространства.

Так же, как и обычная лемма Лорентца, эта лемма справедлива и в случае неоднородной среды.

Если  $\rho_0$  – константа (например, если значение  $\varepsilon$  всюду пропорционально  $\mu$ ), то можно перейти и к интегральной форме леммы:

$$(24) \quad \int_S \{[\vec{E}_1 \vec{E}_2] - \rho_0^2 [\vec{H}_1 \vec{H}_2]\} d\vec{s} = \int_V \{(\vec{J}_{\mu 2} \vec{E}_1 - \vec{J}_{\mu 1} \vec{E}_2) + \rho_0^2 (\vec{J}_2 \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \vec{H}_2)\} dV.$$

В частном случае, когда  $V = V_\infty$  – все бесконечное пространство,  $S = S_\infty$  – сфера **с912**

бесконечным радиусом, а токи  $\vec{J}$  и  $\vec{J}_\mu$  расположены на конечном расстоянии, на  $S_\infty$

$$\vec{E}_1 = \rho_0[\vec{H}_1\vec{n}], \quad \vec{E}_2 = \rho_0[\vec{H}_2\vec{n}] \quad \text{и} \quad [\vec{E}_1\vec{E}_2] \vec{ds} = \rho_0^2[\vec{H}_1\vec{H}_2] \vec{ds},$$

интеграл по  $S_\infty$  обращается в нуль и лемма (24) принимает вид

$$(25) \quad \int_{V_\infty} \{(\vec{J}_{\mu 2}\vec{E}_1 - \vec{J}_{\mu 1}\vec{E}_2) + \rho_0^2(\vec{J}_2\vec{H}_1 - \vec{J}_1\vec{H}_2)\} dV = 0.$$

Аналогичный вариант для сопряженной леммы найдем, заменив систему (2) комплексно-сопряженной и повторив преобразования, проведенные при выводе леммы (23). При этом получим

$$(26) \quad \operatorname{div}[\vec{E}_1\vec{E}_2^*] + \rho_0^2 \operatorname{div}[\vec{H}_1\vec{H}_2^*] = \\ = (\vec{J}_{\mu 2}\vec{E}_1 - \vec{J}_{\mu 1}\vec{E}_2^*) + \rho_0^2(\vec{J}_1\vec{H}_2^* - \vec{J}_2^*\vec{H}_1),$$

а при  $\rho_0 = \text{const}$

$$(27) \quad \int_S \{[\vec{E}_1\vec{E}_2^*] + \rho_0^2[\vec{H}_1\vec{H}_2^*]\} \vec{ds} = \\ = \int_V \{(\vec{J}_{\mu 2}^*\vec{E}_1 - \vec{J}_{\mu 1}\vec{E}_2^*) + \rho_0^2(\vec{J}_1\vec{H}_2^* - \vec{J}_2^*\vec{H}_1)\} dV$$

(величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  при этом считаем вещественными). Эти леммы можно обобщить на случаи  $\omega_1 \neq \omega_2$ ,  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ , а также на случай наличия потерь в среде, как это сделано выше. Полученные леммы можно использовать в различных целях; например, для нахождения новых вариантов теорем взаимности, решения краевых задач и задач возбуждения полей заданными токами. Так, новую теорему взаимности для двух электрических диполей длиной  $dl_1$  и  $dl_2$  с токами  $I_1, I_2$  и

моментами  $\vec{p}_1 = \frac{1}{i\omega} I_1 \vec{dl}_1$ ,  $\vec{p}_2 = \frac{1}{i\omega} I_2 \vec{dl}_2$ , расположенными в пространстве  $V_\infty$  с  $\rho_0 = \text{const}$ , найдем при помощи леммы (24) в форме (25):

$$(28) \quad I_2 \vec{H}_1 \vec{dl}_2 = I_1 \vec{H}_2 \vec{dl}_1 \quad \text{или} \quad \vec{p}_2 \vec{H}_1 = \vec{p}_1 \vec{H}_2,$$

где  $\vec{H}_1$  – магнитное поле первого диполя в точке нахождения второго, а  $\vec{H}_2$  – поле второго в точке нахождения первого.

Вводя понятие наведенных магнитодвижущих сил (МДС)

$$(29) \quad \mathcal{E}_{\mu 1} = \vec{H}_2 \vec{dl}_1, \quad \mathcal{E}_{\mu 2} = \vec{H}_1 \vec{dl}_2,$$

перепишем теорему взаимности (28) в виде

$$(30) \quad I_2 \mathcal{E}_{\mu 2} = I_1 \mathcal{E}_{\mu 1}.$$

Здесь токи относятся к соответствующим диполям в режиме передачи, а наведенные МДС – в режиме приема.

Теорема взаимности в форме (30) справедлива также и для любых конечных антенн, если фигурирующие в ней токи и наведенные МДС считать отнесенными к леммам соответствующих антенн.

Аналогично, для двух магнитных диполей с магнитными моментами  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$  из леммы (29) следует

$$(31) \quad \vec{m}_2 \vec{E}_1 = \vec{m}_1 \vec{E}_2.$$

Если же один из диполей, например первый, электрический с моментом  $\vec{p}_1$ , а второй – магнитный с моментом  $\vec{m}_2$ , то из леммы (25) получим

$$(32) \quad \vec{m}_2 \vec{E}_1 = \rho_0^2 \vec{p}_1 \vec{H}_2,$$

где  $\vec{E}_1$  – электрическое поле первого диполя в месте нахождения второго, а  $\vec{H}_2$  – магнитное поле второго диполя в месте нахождения первого.

Формулы (28), (30)–(32) альтернативны формулам (2.28), (2.28a), (2.29a) и (2.30a) из [2], полученным при помощи обычной леммы Лорентца.

Проиллюстрируем применение леммы (24) и для решения краевых задач. Рассмотрим внешнюю краевую задачу нахождения поля  $\vec{E}, \vec{H}$  в бесконечной области  $V^e$ , ограниченной изнутри замкнутой поверхностью  $S$ . Пусть все источники поля  $\vec{E}, \vec{H}$  находятся внутри  $S$ . В области  $V^e$  полагаем  $\rho_0 = \text{const}$ , а внутри  $S$  параметры  $\epsilon, \mu$  среды могут быть любыми функциями координат. Введем вспомогательное поле  $\vec{e}, \vec{h}$ , при расчете которого будем считать  $\rho_0 = \text{const}$  во всем пространстве и равным значению  $\rho_0$ , заданному выше в области  $V^e$ . Источником поля  $\vec{e}, \vec{h}$  будем считать магнитный диполь с моментом  $\vec{m}$ , расположенный в точке наблюдения  $q$  области  $V^e$ . Применяя лемму (25) к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{e}, \vec{h}$  в области  $V^e$ , имеем

$$(33) \quad \vec{m} \vec{E}(q) = \frac{1}{i\omega} \int_S \{ [\vec{E} \vec{e}] - \rho_0^2 [\vec{H} \vec{h}] \} \vec{d} s,$$

$$(I_\mu \vec{d} l = i\omega \vec{m}),$$

где вектор  $\vec{d} s$  направлен внутрь  $S$ . Так как вектор  $\vec{m}$  может иметь любое направление, формула (33) определяет вектор  $\vec{E}$  в любой точке области  $V^e$  через значения тангенциальных составляющих  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на  $S$ . Если при расчете поля  $(\vec{e}, \vec{h})$  поверхность  $S$  считать идеально проводящей, то  $[\vec{e} \vec{n}] = 0$  на  $S$  и формула (33) принимает вид

$$(34) \quad \vec{m} \vec{E}(q) = - \frac{\rho_0^2}{i\omega} \int_S [\vec{H} \vec{h}] \vec{d} s,$$

дающий решение второй краевой задачи электродинамики [2]. Если же при расчете поля  $(\vec{e}, \vec{h})$  поверхность  $S$  считаем идеально магнитопроводящей, т.е. полагая  $[\vec{h} \vec{n}] = 0$  на  $S$ , то формула (33) принимает вид

$$(35) \quad \vec{m} \vec{E}(q) = \frac{1}{i\omega} \int_S [\vec{E} \vec{e}] \vec{d} s,$$

дающий решение первой граничной задачи электродинамики [2]. Для нахождения

внутри  $V^2$  вектора  $\vec{H}$  нужно заменить магнитный диполь с моментом  $\vec{m}$  электрическим диполем с моментом  $\vec{p}$ ; после чего, используя лемму (24), получим аналогичные формулы и для  $\vec{H}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма / Пер. с англ. под. ред. Рытова С.М. М.: Гостехтеориздат, 1948.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны дециметровых и сантиметровых волн. Ч. I. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1955.
3. Фельд Я.Н. // Докл. АН. 1947. Т. 56. № 5. С. 481.
4. Гинзбург В.А. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1960.
5. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957.
6. Фельд Я.Н. // Докл. АН. 1992. Т. 324. № 2. С. 321.

Поступила в редакцию  
5.01.93

## О МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНИКА РАССЕЯНИЯ АПЕРТУРНЫХ АНТЕНН

Выводится формула, связывающая интегральный поперечник рассеяния с эффективной поглощающей поверхностью апертурной приемной антенны, и при помощи этой формулы находятся условия, при которых реализуются минимальные поперечники и их величина.

Любая апертурная антенна типа рупора, зеркала, открытого конца волновода состоит из металлической хорошо проводящей поверхности, которую будем считать идеально проводящей, а ее внешнюю поверхность обозначим  $s_1$ , и апертуры, через которую происходит прием или излучение электромагнитной энергии. Поверхность апертуры обозначим  $s_2$ . Полная (замкнутая) поверхность антенны  $s = s_1 + s_2$ . Путь на антенну падает первичная волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , которую в пределах антенны будем считать плоской.

Полное поле вне  $s$  равно

$$(1) \quad \vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}^0, \quad \vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}^0,$$

где  $\vec{E}', \vec{H}'$  — поле, рассеянное антенной.

Полные рассеянная и принимаемая антенной мощности определяются формулами

$$(2) \quad P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\vec{E}' \vec{H}'^*] \vec{d}s$$

и

$$(3) \quad P_\pi = -\operatorname{Re} \int_{(s_2)} \frac{1}{2} [\vec{E} \vec{H}^*] \vec{d}s.$$

Здесь  $\vec{d}s = \vec{n} ds$ , где  $\vec{n}$  — нормаль, внешняя к  $s$ , а  $(*)$  — знак комплексного сопряжения.

Найдем прежде всего связь между мощностями  $P_r$  и  $P_\pi$ . Для этого, используя формулы (1), перепишем (2) в виде

$$(4) \quad P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [(\vec{E} - \vec{E}^0) (\vec{H} - \vec{H}^0)^*] \vec{d}s = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\vec{E} \vec{H}^*] \vec{d}s - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} \{ [\vec{E} \vec{H}^{0*}] + [\vec{E}^0 \vec{H}^*] \} \vec{d}s$$

или

$$(5) \quad P_r = -P_\pi - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} \{ [\vec{E} \vec{H}^{0*}] + [\vec{E}^0 \vec{H}^*] \} \vec{d}s.$$

При выводе этих формул учтено, что поток мощности первичного поля через замкнутую поверхность  $s$  равен нулю и  $E_t = 0$  на  $s_1$ .

Для вычисления интеграла в формуле (5) используем приближенные краевые условия типа Кирхгофа на  $s$ . Так, на  $s_1$  будем полагать

$$(6) \quad \vec{E}_t = 0 \text{ на } s_1, \quad \vec{H}_t = 2\vec{H}_t^0 \text{ на } s_{\text{loc}}, \quad H_n = 0 \text{ на } s_{\text{треч}}.$$



Здесь  $s_{\text{осв}}$  и  $s_{\text{тен}}$  — соответственно освещенная и теневая части поверхности (916  
 $(s_1 = s_{\text{осв}} + s_{\text{тен}})$ ). На апертуре  $s_2$  будем полагать

$$(7) \quad \vec{E}_t = \vec{E}_t^0 \text{ и } \vec{H}_t = \vec{H}_t^0 \text{ на } s_{2\text{осв}}; \quad \vec{E}_t = \vec{H}_t = 0 \text{ на } s_{2\text{тен}},$$

как на хорошо поглощающей и слабо отражающей («черной») поверхности.

Заменяя  $\vec{E}_t$  и  $\vec{H}_t^*$  в интеграле формулы (5) при помощи этих краевых условий, получим

$$(8) \quad P_r + P_\pi = -\text{Re} \int_{(s_{\text{осв}})} [\vec{E}^0 \vec{H}^{0*}] \vec{d}s = 2s_\perp |\text{Re} \vec{S}^0|.$$

Здесь  $\vec{S}^0$  — вектор Пойнтинга первичной падающей волны,  $s_\perp$  — площадь проекции поверхности  $s$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{S}^0$ .

Таким образом, окончательная формула, связывающая мощности, имеет вид

$$(9) \quad P_r + P_\pi = 2s_\perp |\text{Re} \vec{S}^0|.$$

Левая часть этой формулы вычислена строго, а правая — с использованием приближения Кирхгофа (6), (7).

Разделив равенство (9) на  $|\text{Re} \vec{S}^0|$ , найдем

$$(10) \quad \sigma_\Sigma + \sigma_\pi = 2s_\perp.$$

Здесь  $\sigma_\Sigma = P_r / |\text{Re} \vec{S}^0|$  — интегральный поперечник рассеяния, а  $\sigma_\pi = P_\pi / |\text{Re} \vec{S}^0|$  — эффективная поглощающая поверхность приемной антенны.

Аналогичная формула получена в [1] при помощи других соображений.

Формула (10) приближенная и справедлива при не очень малых  $\sigma_\Sigma$ . Так, при  $\sigma_\Sigma = 0$  из нее следует  $\sigma_\pi = 2s_\perp$ , в то время как истинное значение  $\sigma_\pi$  при этом равно нулю.

Для двух предельных случаев: когда вся поверхность  $s$  идеально проводящая и когда на ней выполнены условия черного тела, формула (10) дает правильные значения для  $\sigma_\Sigma$  (если радиусы кривизны поверхности  $s$  достаточно велики), равные  $2s_\perp$  и  $s_\perp$  соответственно.

Таким образом, из формулы (10) следует, что величина  $\sigma_\Sigma$  (т. е. рассеяние) минимальна, когда значение  $\sigma_\pi$  (т. е. принимаемая антенной мощность) максимально, при фиксированной первичной волне.

Определим максимальное значение  $P_\pi$ , а следовательно, и  $\sigma_{\pi \text{ макс}}$  при заданном первичном поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ .

Если в окружающей антенну среде отсутствуют потери, то, как известно [2], конечные максимумы этих величин не существуют; для их существования необходимо ставить добавочные условия, ограничивающие направленность антенны. Следуя работе [2], потребуем, чтобы геометрическая сфера  $S$  с центром в области расположения антенны находилась в дальней зоне рассматриваемой антенны. Тогда (см. [2])

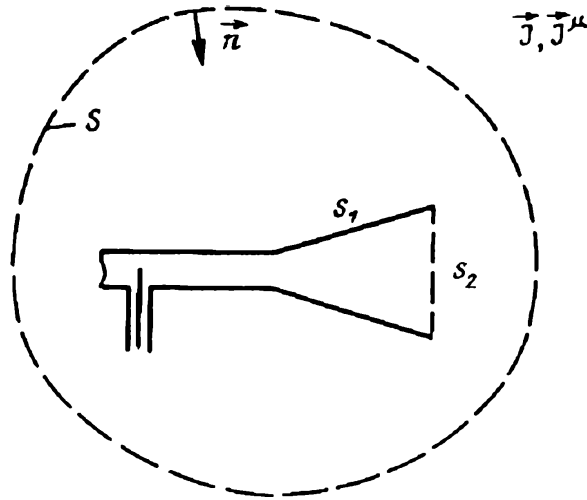
$$(11) \quad P_{\pi \text{ макс}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_{s_{\text{осв}}} |[\vec{n} \vec{H}^0]|^2 ds.$$

Этот максимум реализуется при

$$(12) \quad \vec{E}_t = \begin{cases} \alpha [\vec{n} \vec{H}^{0*}] & \text{на } S_{\text{осв}}, \\ 0 & \text{на } S_{\text{тен}}. \end{cases}$$

Здесь  $S_{\text{осв}}$  — освещенная первичными источниками, создающими поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ ,

часть сферы  $S$ ;  $S_{\text{тен}}$  — затененная часть  $S$ ; предполагаем, что эти источники  $(\vec{J}, \vec{J}^*)$  находятся вне  $S$  (рисунок). Вектор нормали  $\vec{n}$  направлен внутрь  $S$ ;  $\vec{E}, \vec{H}$  — поле антенны в режиме передачи, когда вместо приемника включен генератор, возбуждающий в тракте основную волну, бегущую к антенне;  $\alpha$  — константа, зависящая от мощности генератора. При выводе формул (11), (12) предполагали, что тракт антенны одномодовый (т. е. высшие моды затухающие) и в режиме приема идеально согласован как с приемником, так и с антенной.



Требование, чтобы сфера  $S$  находилась в дальней зоне антенны, ограничивает ее направленность, а следовательно, и КНД. Действительно, при росте КНД дальняя зона удаляется и требование, чтобы сфера  $S$  находилась в дальней зоне, эквивалентно ограничению направленности антенны.

Используя формулу (11), получим

$$(13) \quad \sigma_{\pi \text{ макс}} = \frac{P_{\pi \text{ макс}}}{|\text{Re } \vec{S}^0|} = \frac{1/2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_{S_{\text{осв}}} |[\vec{n}\vec{H}^0]|^2 ds}{|\text{Re } \vec{S}^0|}.$$

Равенства (10) и (13) позволяют записать

$$(14) \quad \sigma_{\Sigma \text{ мин}} = 2s_{\perp} - \frac{1/2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_{S_{\text{осв}}} |[\vec{n}\vec{H}^0]|^2 ds}{|\text{Re } \vec{S}^0|}.$$

Полученная формула определяет минимальный поперечник рассеяния апертурной антенны, реализуемый при выполнении условия (12).

Может представить интерес несколько иной метод расчета  $P_{\pi \text{ макс}}$ , когда поверхность  $S$  совпадает с наружной поверхностью антенны  $s_1$  и ее апертурой  $s_2$  (рисунок). Тогда, пренебрегая токами, затекающими на  $s_1$  в режиме передачи, и полагая тракт идеально согласованным с приемником и антенной, можно записать [2]

$$(15) \quad P_{\pi \text{ макс}} = 1/8 \int_{(s_2)} |[\vec{n}\vec{H}^0] - Y\vec{E}_t^0|^2 \frac{ds}{\text{Re } Y}.$$

Этот максимум реализуется при

$$(16) \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} Y} \{ [\vec{n} \vec{H}^{0*}] - Y^* \vec{E}_i^{0*} \} \text{ на } s_2,$$

где  $\alpha$  — константа.

При выводе формул (15) и (16) предполагали, что касательные составляющие векторов поля на апертуре в режиме передачи связаны соотношением

$$(17) \quad [\vec{n} \vec{\mathcal{H}}] = Y \vec{\mathcal{E}}_i \text{ на } s_2, \quad \operatorname{Re} Y > 0.$$

Здесь  $Y$  — адмитанс, являющийся функцией координат точки на  $s_2$ , который полагаем заданным.

Условия (17), так же как поставленное выше требование о нахождении сферы  $S$  в дальней зоне антенны, ограничивают направленность антенны и устраняют ее влияние на токи, создающие первичную волну  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ . При этом мощность, излучаемая последними, оказывается фиксированной.

Минимальный поперечник рассеяния приемной антенны в рассматриваемом случае, как это следует из (10), равен

$$(18) \quad \sigma_{\Sigma \text{ мин}} = 2s_{\perp} - \frac{1}{8 |\operatorname{Re} \vec{S}^{0i}|} \int_{(s_2)} |[\vec{n} \vec{H}^0] - Y \vec{E}_i^{0i}|^2 \frac{ds}{\operatorname{Re} Y}.$$

Рассмотрим иной подход к определению минимального поперечника рассеяния апертурной антенны, не требующий ограничения ее направленности. Его можно реализовать, если окружающая антенну среда имеет потери; для этого достаточно, чтобы проводимость среды была отлична от нуля. Используя результаты работы [3], выпишем два типа формул, определяющих максимальную принимаемую антенной мощность  $P_{\pi \text{ макс}}$  при падении на нее первичной волны  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ .

Первый тип формул, полученный в [3], имеет вид

$$(19) \quad P_{\pi \text{ макс}} = \frac{1}{8} (\vec{M}, A \vec{M}).$$

Этот максимум реализуется при

$$(20) \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \alpha \vec{M} \equiv \alpha A_i^{-1} ([\vec{n} \vec{H}^{0*}] - A^* \vec{E}^{0*}) \text{ на } S.$$

Здесь и ниже  $(\vec{x}, \vec{y})$  — скалярное произведение в пространстве  $L^2(S)$ , где  $S$  — сфера, окружающая антенну, на которой тангенциальные составляющие поля,  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  (см. выше) связаны соотношением

$$(21) \quad [\vec{n} \vec{\mathcal{H}}] = A \vec{\mathcal{E}}_i \text{ на } S.$$

В этих формулах  $A$  и  $A_i = \frac{A + A^*}{2}$  — линейные операторы;  $A^*$  — оператор, эрмитово-сопряженный с  $A$ ;  $A_i^{-1}$  — оператор, обратный  $A_i$ . Оператор  $A$  может быть найден в результате решения первой краевой задачи электродинамики: определения поля вне  $S$  по заданным на ней значениям  $\vec{\mathcal{E}}_i$ ;  $\alpha$  — константа.

В данном разделе и ниже не требуется, чтобы сфера  $S$  находилась в дальней зоне антенны.

Учитывая формулы (10) и (19), можно записать

$$(22) \quad \sigma_{\Sigma \text{ мин}} = 2s_{\perp} - \frac{1}{8 |\operatorname{Re} \vec{S}^{0i}|} (\vec{M}, A \vec{M}).$$

Второй тип формул. Из работы [3] следует также, что

$$(23) \quad P_{\pi \text{ макс}} = 1/2 (A_r^{-1} [\vec{n} \vec{H}^{0*}], [\vec{n} \vec{H}^{0*}]).$$

Этот максимум реализуется при

$$(24) \quad \vec{\mathcal{E}}_r = 2\alpha A_r^{-1} [\vec{n} \vec{H}^{0*}] \text{ на } S.$$

В формулах (23) и (24), а также в (25) следует полагать  $\vec{H}_r^0 = 0$  на  $S_{\text{тсн}}$ , где  $S_{\text{тсн}}$  — затененная часть  $S$  при ее освещении первичными источниками, находящимися вне  $S$ .

Аналогично формуле (22) для рассматриваемого варианта имеем

$$(25) \quad \sigma_{\Sigma \text{ мин}} = 2s_{\perp} - \frac{1}{2 |\text{Re } \vec{S}^0|} (A_r^{-1} [\vec{n} \vec{H}^{0*}], [\vec{n} \vec{H}^{0*}]).$$

В данном разделе все обозначения те же, что и выше. Как уже отмечали, при вычислении по формулам (19)—(25) следует полагать  $\epsilon_0$  среды, окружающей антенну, а следовательно, и волновое число  $k$  комплексными.

Пример, где приводится определение оператора  $A$ , дан в работе [3].

Отметим, что найденные условия, реализующие минимальный поперечник рассеяния, одновременно обеспечивают прием антенной максимальной мощности. Напомним также, что исходное равенство (10) приближенное и выполняется только для не очень малых  $\sigma_{\Sigma}$  (порядка  $s_{\perp}$  и более). Это же относится и к  $\sigma_{\Sigma \text{ мин}}$ , определяемым полученными выше формулами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бененсон Л. С., Фельд Я. Н. // РЭ. 1988. Т. 33. № 2. С. 225.
2. Фельд Я. Н. // РЭ. 1983. Т. 28. № 12. С. 2313.
3. Фельд Я. Н. // РЭ. 1984. Т. 29. № 9. С. 1668.

Поступила в редакцию  
29.07.93

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА**

УДК 538.56

**О МИНИМИЗАЦИИ РАССЕЯНИЯ ПРИЕМНЫХ АНТЕНН**

© 1994 г. Я. Н. Фельд

Представлено академиком Ю.В. Гуляевым 17.02.94 г.

Поступило 17.02.94 г.

Проблема уменьшения рассеяния весьма актуальна для большинства приемных антенн, особенно самолетных. В настоящей работе рассматривается метод минимизации рассеяния при помощи подбора величины входного сопротивления приемника, подключаемого к антенне. Рассматривается минимизация интегрального рассеяния, хотя предлагаемый прием пригоден также для минимизации рассеяния в определенном секторе углов или для некоторого направления. Метод базируется на предложенном автором в работе [1] приеме представления рассеянного антенной поля в виде суммы двух полей:

1) поля  $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$  – рассеянного рассматриваемой антенной, когда клеммы ее закорочены, т.е. сопротивление приемника равно нулю, и

2) поля, излученного ею, когда на ее клеммы подано напряжение, равное взятому с обратным знаком падению напряжения на сопротивлении приемника в режиме приема.

Для дальнейшего удобно последнее поле представить в виде произведений  $\alpha \mathbf{E}^{(2)}, \alpha \mathbf{H}^{(2)}$ , где  $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$  – поле, излученное, когда на клеммы антенны подано единичное напряжение (1 вольт), а  $\alpha = -Iz$ . Здесь  $I$  – ток, протекающий через клеммы в режиме приема, а  $z$  – входное сопротивление приемника. На основании сказанного, рассеянное антенной в режиме приема поле  $\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$ , когда на нее падает первичная волна  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ , равно

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{E}^1 + \alpha \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{H}^r = \mathbf{H}^1 + \alpha \mathbf{H}^{(2)}. \quad (1)$$

Рассеянная антенной мощность определяется формулой

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}^r \mathbf{H}^{r*}] \, ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [(\mathbf{E}^1 + \alpha \mathbf{E}^{(2)}) (\mathbf{H}^1 + \alpha \mathbf{H}^{(2)})^*] \, ds. \quad (2)$$

Здесь  $s$  – поверхность, окружающая антенну (рис. 1),  $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$ , где  $\mathbf{n}$  – наружная нормаль к  $s$ , а звездочка – знак комплексного сопряжения.

Принимаемая антенной мощность

$$P_\pi = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^r) (\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^r)^*] \, ds. \quad (3)$$

Предполагается, что среда, окружающая антенну, не имеет потерь.

Поскольку при минимизации рассеянного поля до нуля стремится к нулю и принимаемая антенной мощность, имеет смысл рассматривать сформулированную выше задачу в следующей постановке:

найти  $\min P_r$  при заданной  $P_\pi = p$ , где  $p$  – некоторая положительная величина.

Введем обозначение:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re}(-Iz), \quad (4)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im}(-Iz)$$

и составим функцию

$$F = P_r + \lambda P_\pi \quad (5)$$

от трех независимых параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ , где  $\lambda$  – так называемый множитель Лагранжа. Указанные параметры, обеспечивающие решение поставленной задачи, находятся из следующих уравнений [2]:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0, \quad P_\pi = p. \quad (6)$$

Если учесть формулы (1) - (5), то равенства (6) можно записать в виде

$$(1 - \lambda) \operatorname{Re} \int_{(s)} \{ [\mathbf{E}^1 \mathbf{H}^{(2)*}] + [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{1*}] + 2\alpha_1 [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*}] \} \, ds - \lambda \operatorname{Re} \int_{(s)} \{ [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{0*}] + [\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{(2)*}] \} \, ds = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda - 1) \operatorname{Re} \int_{(s)} \{ i [ \mathbf{E}^1 \mathbf{H}^{(2)*} ] - i [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{1*} ] - \\
& - 2\alpha_2 [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] \} ds - \lambda \operatorname{Re} \int_{(s)} i \{ [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{0*} ] - \\
& - [ \mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{(2)*} ] \} ds = 0, \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{(s)} [ (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1 + \alpha \mathbf{E}^{(2)}) \times \\
& \times (\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^1 + \alpha \mathbf{H}^{(2)})^* ] ds = p. \quad (9)
\end{aligned}$$

Из уравнений (7), (8) следует, что  $\lambda$ , так же как и  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , — вещественная величина.

Таким образом, получены три алгебраических уравнения, определяющие  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\lambda$ . Напомним, что векторы  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0; \mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1; \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$  не зависят от величин  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ . Разрешая уравнения (7), (8) относительно постоянных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , найдем

$$\alpha_1 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda (1 - \lambda)^{-1} \operatorname{Re} \int_{(s)} \{ [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{0*} ] + [ \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{H}^{(2)*} ] \} ds}{2 \operatorname{Re} \int_{(s)} [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] ds} - \\
& \frac{\operatorname{Re} \int_{(s)} \{ [ \mathbf{E}^1 \mathbf{H}^{(2)*} ] + [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{1*} ] \} ds}{2 \operatorname{Re} \int_{(s)} [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] ds}, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 = \frac{\operatorname{Re} \int_{(s)} i \{ [ \mathbf{E}^1 \mathbf{H}^{(2)*} ] - [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{1*} ] \} ds}{2 \operatorname{Re} \int_{(s)} [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] ds} + \\
& + \frac{\lambda (1 - \lambda)^{-1} \operatorname{Re} \int_{(s)} i \{ [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{0*} ] - [ \mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{(2)*} ] \} ds}{2 \operatorname{Re} \int_{(s)} [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] ds}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Из формул (10), (11) с учетом (4) следует

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\int_{(s)} \{ [ \mathbf{E}^{(2)*} \mathbf{H}^0 ] + [ \mathbf{E}^0 \mathbf{H}^{(2)*} ] \} ds}{2 \operatorname{Re} \int_{(s)} [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] ds} - \\
\frac{\int_{(s)} \{ [ \mathbf{E}^1 \mathbf{H}^{(2)*} ] + [ \mathbf{E}^{(2)*} \mathbf{H}^1 ] \} ds}{2 \operatorname{Re} \int_{(s)} [ \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*} ] ds}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Все выкладки могут быть существенно упрощены, если в качестве поверхности  $s$  взять сферу с центром в области расположения антенны, находящуюся в дальней зоне полей  $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$  и  $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$ .

Поскольку в этой зоне электрический и магнитный векторы указанных полей связаны соотношением типа

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{i}_R \mathbf{E}],$$

где  $\mathbf{i}_R$  — радиальный орт, то, используя его, найдем, после несложных вычислений

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\int_{(s)} \{ \frac{\mu}{\epsilon} (\mathbf{H}^0 \mathbf{H}^{(2)*}) + (\mathbf{E}^0 \mathbf{E}^{(2)*}) \} ds}{2 \int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds} - \\
\frac{\int_{(s)} \mathbf{E}^1 \mathbf{E}^{(2)*} ds}{\int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds}, \quad (13)
\end{aligned}$$

или, введя обозначения,

$$\begin{aligned}
A = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\int_{(s)} \{ \frac{\mu}{\epsilon} (\mathbf{H}^0 \mathbf{H}^{(2)*}) + (\mathbf{E}^0 \mathbf{E}^{(2)*}) \} ds}{2 \int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds}, \quad (14) \\
B = \frac{\int_{(s)} \mathbf{E}^1 \mathbf{E}^{(2)*} ds}{\int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds},
\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{1-\lambda}A - B. \quad (15)$$

Здесь  $A$  и  $B$  – известные величины, а  $\lambda$  найдем из равенства (9), подставив туда значение  $\alpha$  из формулы (15), после чего получим

$$\lambda_1^2 + c\lambda_1 + D = 0, \quad (16)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left( \lambda = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \right), \quad (16a)$$

$c =$

$$= \text{Re} \left\{ \frac{\int_{(s)} \left\{ \frac{\mu \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*}}{\varepsilon A^*} + \frac{\mathbf{E}^0 \mathbf{E}^{(2)*}}{A} + \frac{2}{A} \mathbf{E}^1 \mathbf{E}^{(2)} \right\} ds}{\int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds} - 2 \left( \frac{B}{A} \right)^* \right\}, \quad (16b)$$

$$D = \text{Re} \int_{(s)} \left\{ \mathbf{E}^1 * (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1) + \frac{\mu}{\varepsilon} \mathbf{H}^0 * (\mathbf{H}^1 - B \mathbf{H}^{(2)}) + B \mathbf{E}^{(2)} (B^* \mathbf{E}^{(2)*} - 2 \mathbf{E}^1 *) \right\} ds \left[ |A|^2 \int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds \right]^{-1} - \frac{\text{Re} \int_{(s)} B^* \mathbf{E}^0 \mathbf{E}^{(2)*} ds - 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} P}{|A|^2 \int_{(s)} |\mathbf{E}^{(2)}|^2 ds}. \quad (16c)$$

Квадратное уравнение (16) имеет два корня, и для выбора одного из них следует убедиться, при каком из них достигается условный минимум  $P$ , при условии  $P_\pi = p$ . Как известно [2], он имеет место при выполнении неравенств

$$F''_{\alpha_1 \alpha_1} F''_{\alpha_2 \alpha_2} - (F''_{\alpha_1 \alpha_2})^2 > 0, \quad F''_{\alpha_1 \alpha_1} > 0 \quad (17)$$

для значений  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ , удовлетворяющих уравнениям (7) - (9). Поскольку левые части равенств (7), (8) равны удвоенному значению производных

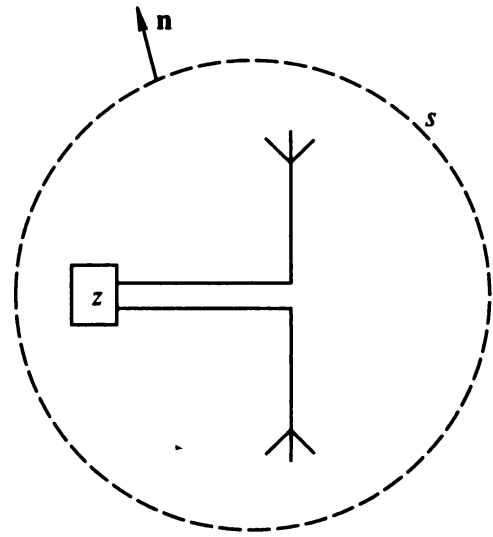


Рис. 1.

$F''_{\alpha_1}$  и  $F''_{\alpha_2}$ , то, дифференцируя их, найдем

$$F''_{\alpha_1 \alpha_1} = (1-\lambda) \text{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*}] ds, \quad (18)$$

$$F''_{\alpha_1 \alpha_2} = F''_{\alpha_2 \alpha_1} = 0,$$

$$F''_{\alpha_2 \alpha_2} = (1-\lambda) \text{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)*}] ds.$$

Отсюда легко видеть, что оба неравенства (17) выполняются, если

$$\lambda < 1, \quad (19)$$

так как выражения, стоящие множителем при  $(1-\lambda)$  в формулах (18), равны удвоенной ваттной мощности, излученной антенной в режиме передачи, когда на ее клеммы подано единичное напряжение, а эта мощность, как известно, положительна.

Из (19) и (16a) следует, что

$$-1 < \lambda_1. \quad (19a)$$

Таким образом, из двух корней уравнения (16) следует выбрать удовлетворяющий неравенству (19a), при этом мощность рассеяния  $P$  будет иметь условный минимум.

Вернемся теперь к определению входного сопротивления приемника  $z$ , обеспечивающего реализацию вышеуказанного условного минимума рассеяния.

Учитывая, что ток  $I$  на клеммах (в режиме приема) определяется формулой [3]

$$I = -\frac{\mathbf{E}^0 \mathbf{F}^0}{I_A (z + z_A)},$$

найдем, учитывая (3),

$$\alpha = -Iz = \frac{z \mathbf{E}^0 \mathbf{F}^0}{I_A (z + z_A)}. \quad (20)$$

В этих формулах  $\mathbf{E}^0$  – электрический вектор локально плоской первичной волны у антенны в центре сферы  $s$ ,

$$\mathbf{F}^0 / I_A = \frac{1}{I_A} \int_{(s)} \mathbf{K} e^{ik\rho \cos\theta} ds$$

есть вектор излучения антенны в режиме передачи, приведенный к единичному току на клеммах; он вычисляется для направления, соответствующего приходу волны  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ ;  $\mathbf{K}$  – плотность поверхностного тока на поверхности антенны  $s_0$ ,  $k$  – волновое число,  $\rho$  – радиус-вектор точки интегрирования, а  $\theta$  – угол между  $\rho$  и радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  точки наблюдения, оба последних вектора отсчитываются от центра сферы  $s$ ;  $z_A$  – входное сопротивление антенны.

Разрешая равенство (20) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\alpha z_A}{(\mathbf{E}^0 \mathbf{F}^0 / I_A) - \alpha}. \quad (21)$$

Здесь  $\alpha$  определяется формулой (15), а вектор  $\mathbf{F}^0 / I_A$  не зависит от  $I_A$  (ток на клеммах в режиме передачи), поскольку  $\mathbf{F}^0$  пропорционален  $I_A$ . Фор-

мула (21) определяет сопротивление приемника  $z$ , обеспечивающего условный минимум рассеянной мощности.

Отметим также, что это значение  $z$  не зависит от амплитуды первичной волны, так как в (21) числитель и знаменатель пропорциональны  $\mathbf{E}^0$ . Действительно,  $\alpha$  пропорционально  $\mathbf{E}^0$ , а  $z_A$  и  $\mathbf{F}^0 / I_A$  от первичной волны не зависят. Однако  $z$  зависит от направления прихода и поляризации последней. Учитывая это, в случае остронаправленных антенн следует определять  $z$  для направления, соответствующего главному максимуму диаграммы антенны. Если требуется минимизировать рассеяние в некотором секторе углов, то в написанных формулах интегралы следует брать не по всей сфере  $s$ , а по интересующему нас сектору. Наконец, величину задаваемой принимаемой мощности  $p$  (см. (6)) следует выбирать не большей, чем максимальные мощности, приведенные в работе [4].

В заключение отметим, что в работе [5] для полуволнового вибратора (путем перебора) найдены принимаемая мощность и поперечник рассеяния для различных  $z$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // ДАН. 1945. Т. 48. № 7. С. 503.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 1.
3. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства. М., 1959. Ч. 2.
4. Фельд Я.Н. // РЭ. 1983. Т. 28. № 12. С. 2313.
5. Попиченко В.А. В сб.: Антенны. М., 1988. № 35. С. 43.

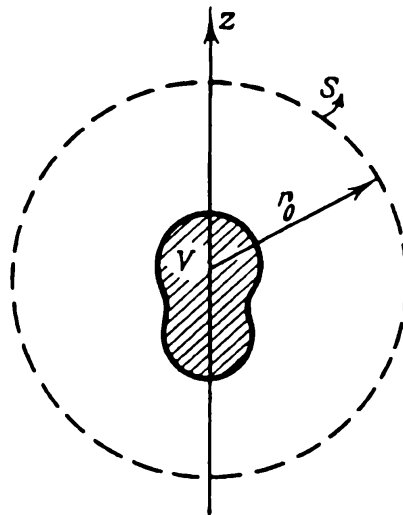


© 1995 г. Я. Н. Фельд

## СИНТЕЗ ТОКОВ В ЗАДАННОМ ОБЪЕМЕ ПО ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

Решена задача синтеза тока в некотором объеме по заданной диаграмме направленности. Получено решение в виде ряда, сходящегося по норме пространства  $L^2(V)$ . Найдено условие реализуемости диаграмм токами плотностью  $\vec{J} \in L^2(V)$ . Приведен пример.

Рассмотрим задачу нахождения распределения плотности электрических токов  $\vec{J}$  в объеме  $V$  по заданной диаграмме направленности  $F(\theta, \varphi)$ , где  $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат с центром в объеме  $V$  и осью  $z$  (рисунок). Поле,



создаваемое токами  $\vec{J}$ , обозначим  $\vec{E}, \vec{H}$ . Поскольку токи  $\vec{J}$  излучают конечную мощность, то  $F(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , где  $\Omega$  — единичная сфера.

Аналогично работе [1] зададим на сфере  $S$  с радиусом  $r_0$ , лежащей в дальней зоне поля  $\vec{E}, \vec{H}$ , семейство вспомогательных поверхностных токов с плотностью  $K_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Поле, возбуждаемое током  $K_n$  в свободном пространстве, обозначим  $\vec{E}^{(n)}, \vec{H}^{(n)}$  и, применив к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}^{(n)}, \vec{H}^{(n)}$  лемму Лоренца, найдем

$$(1) \quad \int_{(V)} \vec{E}^{(n)} \vec{J} dV = \int_{(S)} \vec{E} \vec{K}_n ds.$$

В дальней зоне

$$(2) \quad \vec{E} = \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{F}(\theta, \varphi),$$

где  $k$  — волновое число.

Запишем аналогично вспомогательные токи на  $S$ :

$$(3) \quad \vec{K}_n = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \vec{j}(\theta, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Семейство  $\{\vec{j}_n\}$  будем считать линейно независимым, принадлежащим пространству  $L^2(\Omega)$  и полным в нем. В рассматриваемом случае пространство

$L^2(\Omega)$  состоит из векторных функций, заданных на  $\Omega$ , касательных к ней и интегрируемых с квадратом. Подставляя (3) в (1) и учитывая (2), найдем

$$(4) \quad \int_{(V)} \vec{J} \vec{E}^{(n)} dV = \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Здесь  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Для дальнейшего нам понадобится пространство  $\hat{L}^2(V)$ . Для его определения введем прежде подпространство  $L^{20}(V)$ , состоящее из неизлучающих распределений токов пространства  $L^2(V)$ , т. е. токов, поля которых вне области  $V$  равны нулю. Тогда  $\hat{L}^2(V) = L^2(V) - L^{20}(V)$  состоит из распределений токов в области  $V$ , каждое из которых создает вне  $V$  поле, отличное от нуля.

Будем искать  $\vec{J}$  в пространстве  $\hat{L}^2(V)$  со скалярным произведением

$$(5) \quad (\vec{A}, \vec{B}) = \int_{(V)} \vec{A} \vec{B}^* dV,$$

где  $*$  — знак комплексного сопряжения.

Введем обозначение

$$(6) \quad a_n = \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega$$

и используя (5), перепишем (4) в следующем виде:

$$(7) \quad (\vec{J}, \vec{E}^{(n)*}) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь постоянные  $\{a_n\}$  и вектор-функции  $\vec{E}^{(n)*}$  известны, причем последние принадлежат пространству  $L^2(V)$ . Система уравнений (7) может быть использована для нахождения неизвестного распределения тока  $\vec{J}$  в объеме  $V$ . Для этого прежде всего необходимо доказать, что семейство  $\{\vec{E}^{(n)*}\}$  полно в  $\hat{L}^2(V)$ . Это имеет место, если из условий

$$(8) \quad (\vec{A}, \vec{E}^{(n)*}) = 0 \text{ при } n = 1, 2, \dots,$$

где  $\vec{A} \in \hat{L}^2(V)$ , следует  $\vec{A} = 0$  в объеме  $V$ .

Перепишем (8), учитывая (5), в виде

$$(8') \quad \int_{(V)} \vec{A} \vec{E}^{(n)} dV = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из леммы Лоренца следует равенство

$$(9) \quad \int_{(V)} \vec{A} \vec{E}^{(n)} dV = \int_{(S)} \vec{K}_n \vec{E} \{ \vec{A}; V \} dV.$$

Здесь  $\vec{E} \{ \vec{A}; V \}$  — электрический вектор поля, возбуждаемого электрическим током плотностью  $\vec{A}$ , распределенным в  $V$ . Для этого вектора в дальней зоне справедлива формула, аналогичная (2):

$$(10) \quad \vec{E} \{ \vec{A}; V \} = \frac{e^{-kr}}{r} \vec{F}^1(\theta, \varphi),$$

где  $\vec{F}^1$  — диаграмма направленности тока  $\vec{A}$ .

Используя (10), а также формулу (3), придадим равенству (9) следующий вид:

$$(9') \quad \int_{(V)} \vec{A} \vec{E}^{(n)} dV = \int_{(\Omega)} \vec{F}^1(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega.$$

При этом учтено, что сфера  $S$  лежит в дальней зоне поля, создаваемого током  $\vec{A}$ , распределенным в объеме  $V$ .

Полученная формула (9') позволяет переписать условия (8'), следующим образом: 926

$$(11) \quad \int_{(\Omega)} \vec{F}^1(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega = 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots$$

Ввиду полноты семейства  $\{\vec{j}_n\}$  в пространстве  $L^2(\Omega)$  и того, что  $\vec{F}^1(\theta, \varphi) \in L^2(\Omega)$ , из (11) следует  $\vec{F}^1(\theta, \varphi) = 0$  на  $\Omega$ . Отсюда на основании теоремы Реллиха [2] и принадлежности  $\vec{A}$  пространству  $\hat{L}^2(V)$ , само поле и возбуждающий его ток  $\vec{A}$  равны нулю.

Таким образом, полнота  $\vec{E}^{(n)*}$  в  $\hat{L}^2(V)$  доказана. Покажем еще, что семейство  $\vec{E}^{(n)*}$  линейно независимо, т. е. что из условия

$$(12) \quad \sum_{n=1}^N \alpha_n \vec{E}^{(n)*} = 0 \quad \text{внутри } V,$$

где  $N$  — любое положительное целое число, следует равенство  $\alpha_n = 0$  при  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Переходя от равенства (11) к комплексно-сопряженному, умножая последнее скалярно на  $\vec{A}$  и интегрируя по  $V$ , найдем

$$(12') \quad \sum_{n=1}^N \alpha_n^* \int_{(V)} \vec{A} \vec{E}^{(n)} dV = 0.$$

Здесь под  $\vec{A}$  понимается любой произвольно заданный внутри  $V$  ток.

Используя лемму Лоренца, можно написать

$$\int_{(V)} \vec{A} \vec{E}^{(n)} dV = \int_{(S)} \vec{K}_n \vec{E} \{ \vec{A}; V \} ds = \int_{(\Omega)} \vec{j}_n \vec{F}^1 d\Omega.$$

Последнее в этой цепи равенств получено при использовании (3) и (10), поскольку сфера  $S$  лежит в дальней зоне полей, создаваемых токами, распределенными внутри  $V$ .

Используя последнее равенство, перепишем (12') следующим образом:

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^* \int_{(\Omega)} \vec{j}_n \vec{F}^1 d\Omega = \int_{(\Omega)} \vec{F}^1 \sum_{n=1}^N \alpha_n^* \vec{j}_n dV = 0.$$

Так как распределение тока  $\vec{A}$  внутри  $V$  произвольно, то и его диаграмма  $\vec{F}^1(\theta, \varphi)$  может быть в значительной мере любой, и потому записанное выше равенство выполняется только при условии

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^* \vec{j}_n = 0 \quad \text{на } \Omega.$$

Отсюда вследствие линейной независимости  $\{\vec{j}_n\}$  по определению вытекает  $\alpha_n^* = \alpha_n = 0$  при  $n = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, линейная независимость семейства  $\vec{E}^{(n)*}$  доказана.

Вернемся теперь к основной системе уравнений (7) для искомого распределения тока  $J$  в объеме  $V$ , реализующего заданную диаграмму  $F(\theta, \varphi)$ . Ее решение может быть проведено различными способами [1, 3, 4].

Используем здесь метод ортогонализации. Для этого перейдем от исходной системы функций  $\vec{E}^{(n)*}$  к ортонормированной  $\{\vec{B}_n\}$  при помощи равенств

$$(13) \quad \vec{B}_n = \sum_{m=1}^n a_m^n \vec{E}^{(m)*}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где постоянные  $\alpha_n^m$  находятся из условий  $(\vec{B}_n, \vec{B}_m) = \delta_{nm}$  одним из известных методов. Будем искать решение для тока при помощи ряда

$$(14) \quad \vec{J} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \vec{B}_n,$$

где вследствие ортонормированности семейства  $\vec{B}_n$

$$C_n = (\vec{J}, \vec{B}_n).$$

Постоянные  $C_n$  легко определить. Действительно, заменив в (7) индекс  $n$  на  $m$  и умножив это равенство на  $\alpha_m^n$ , просуммировав его после этого по  $m$  от 1 до  $n$ , найдем

$$(14') \quad (\vec{J}, \vec{B}_n) = \sum_{m=1}^n \alpha_m^n C_m = C_n.$$

Ряд (14) сходится по норме пространства  $\hat{L}^2(V)$ , так как исходное семейство  $\vec{E}^{(n)}$ , а следовательно, и  $\{\vec{B}_n\}$  полны в  $\hat{L}^2(V)$ .

Рассеянное поле при этом определяется стандартными методами, поскольку ток, возбуждающий его, найден. Получающийся для поля ряд сходится равномерно.

Существует только одно решение системы (7), принадлежащее  $\hat{L}^2(V)$ . Если бы их было два, например  $\vec{J}^{(1)}$  и  $\vec{J}^{(2)}$ , то для каждого из них выполнялось бы равенство (14'). Вычитая из одного равенства другое, получим  $(\vec{J}^{(1)} - \vec{J}^{(2)}, \vec{B}_n) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и вследствие полноты  $\{\vec{B}_n\}$  в  $\hat{L}^2(V)$  имеем  $\vec{J}^{(1)} = \vec{J}^{(2)}$ . Определим еще класс функций, которому должна принадлежать диаграмма  $\vec{F}(\theta, \varphi)$ , чтобы создающий ее ток  $\vec{J} \in \hat{L}^2(V)$ . Любая реализуемая диаграмма  $\vec{F} \in L^2(\Omega)$ , так как создающий ее ток излучает конечную мощность. Кроме того, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ , где  $C_n = (\vec{J}, \vec{B}_n)$  — коэффициенты Фурье искомого тока, должен

сходиться вследствие равенства Парсеваля [5]. Поэтому при выполнении условия

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$$

из теоремы Рисса—Фишера [5] следует, что существует функция  $\vec{J} \in \hat{L}^2(V)$  с коэффициентами Фурье  $\{C_n\}$ , определяемая рядом (14).

Таким образом, в качестве реализуемой диаграммы можно использовать любую вектор—функцию из  $L^2(\Omega)$ , удовлетворяющую условию (15).

Учитывая формулы (14') и (6) для  $C_n$  и  $a_n$ , придадим условию (15) следующий вид:

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^n \alpha_m^n \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_m(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2 < \infty,$$

из которого явно видна зависимость от заданной диаграммы  $\vec{F}(\theta, \varphi)$ .

Критерий (16) внешне совпадает с аналогичным критерием для диаграмм, реализуемых поверхностными токами плотностью  $\vec{K}$ , распределенными на конечных замкнутых или разомкнутых поверхностях  $s$  и принадлежащих пространствам  $K \in L_R^2(s)$  [1, 3, 4]. Различие заключается только в том, что при реализации диаграмм токами  $\vec{J} \in \hat{L}^2(V)$  постоянные  $\alpha_m^n$  находятся из условий  $(\vec{B}_n, \vec{B}_m) = \delta_{nm}$  (см. (13)), где скалярное произведение характеризует пространство  $\hat{L}^2(V)$ , а при реализации токами  $\vec{K} \in L_R^2(s)$  — из условий  $(\vec{B}_n, \vec{B}_m) = \delta_{nm}$ , где скалярное произведение определяется для пространства  $L_R^2(s)$  [1, 3]. Как и в

случае синтеза токов на поверхности [1], критерий (16) можно упростить, если семейство  $\{j_n\}$  выбрано так, что множество  $\{\vec{E}^{(n)*}\}$  ортогональное, т. е.

$$(17) \quad (\vec{E}^{(n)*}, \vec{E}^{(m)*}) = 0 \text{ при } n \neq m.$$

При этом  $a_m^n = 0$ , если  $m < n$  и

$$(17') \quad |a_n^n|^2 = (\vec{E}^{(n)*}, \vec{E}^{(n)*})^{-1} \equiv \|\vec{E}^{(n)*}\|^{-2}.$$

Здесь в отличие от [1, 3] интегрирование в скалярном произведении проводится по объему  $V$ , а не по поверхности  $s$ .

Учитывая (17) в (17'), придадим критерию (16) следующий вид:

$$(18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega \right|^2}{\|\vec{E}^{(n)*}\|^2} < \infty.$$

Введя обозначение

$$d_n = \int_{(\Omega)} \vec{F}(\theta, \varphi) \vec{j}_n(\theta, \varphi) d\Omega,$$

перепишем (18) в виде

$$(18') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_n|^2}{\|\vec{E}^{(n)*}\|^2} < \infty.$$

Если семейство  $\{\vec{j}_n\}$  ортонормировано в  $L^2(\Omega)$ , то  $d_n$  является коэффициентами Фурье диаграммы  $\vec{F}(\theta, \varphi)$  по функциям  $\vec{j}_n^*(\theta, \varphi)$ .

При выполнении соотношений (17) решение уравнений (7) можно записать следующим образом:

$$(19) \quad \vec{J} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \vec{E}^{(m)*},$$

где

$$(19') \quad C_m = a_m / \|\vec{E}^{(m)*}\|^2.$$

Рассмотрим пример, когда объем  $V$  представляет собой бесконечный вдоль оси  $z$  круговой цилиндр радиусом  $a$ , внутри которого распределен электрический ток с плотностью  $J = J_z$ , зависящий только от двух цилиндрических координат  $r$  и  $\varphi$  (двухмерная задача). Диаграмма  $F = F_z$  зависит от одной координаты  $\varphi$  и принадлежит пространству  $L^2(0 - 2\pi)$ , а  $d\Omega = d\varphi$ . В рассматриваемом примере роль сферы  $S$  играет цилиндр радиусом  $r_0$ . Зададим на нем семейство вспомогательных токов:

$$(20) \quad K_n = K_{nz} = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} j_n(\varphi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$(20') \quad j_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}.$$

Определим электрический вектор поля, возбуждаемого током (20) внутри объема  $V$  ( $r \leq a$ ). Несложный расчет позволяет получить

$$(21) \quad E^{(n)*} = E_z^{(n)*} = -\frac{\omega\mu}{2\sqrt{k}} e^{-i(\pi n/2 + \pi/4)} J_n(kr) e^{-in\varphi} \text{ при } r < r_0.$$

Здесь  $J_n$  — функция Бесселя.

Приведенные здесь вспомогательные токи  $K_n$  и возбуждаемые ими поля  $\vec{E}$  тождественны используемым при синтезе токов на поверхности цилиндра [1, 6].

Семейство полей  $\{E^{(n)*}\}$  ортогонально, т. е. удовлетворяет условиям (17), где в скалярном произведении (5) интегрирование проводится по площади сечения цилиндра  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $z = \text{const}$ . Учитывая сказанное, в качестве критерия реализуемости можно использовать неравенство (18). В рассматриваемом примере оно имеет вид

$$(22) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi \right|^2}{\int_0^a |J_n(kr)|^2 r dr} < \infty,$$

так как

$$\|E^{(n)*}\|^2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} E^{(n)*} E^{(n)} r d\varphi dr.$$

Используя асимптотическую формулу для  $J_n(kr)$  при  $n \rightarrow \infty$ , найдем

$$\int_0^a |J_n(kr)|^2 r dr = \frac{a^2}{4\pi n(n+1)} \left( \frac{eka}{2n} \right)^{2n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя записанную формулу, убеждаемся, что ряд (22) сходится при выполнении условия

$$(23) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi \right| = O \left( \frac{1}{\sqrt{(|n|+1)|n|^{2+\varepsilon}}} \left[ \frac{eka}{2|n|} \right]^{|n|} \right),$$

где  $\varepsilon > 0$ . Диаграмма  $F(\varphi)$ , имеющая коэффициенты Фурье, убывающие в соответствии с формулой (23), реализуема током  $J \in \hat{L}^2(V)$ , распределенным внутри цилиндра радиусом  $a$ . Сравнивая условие (23) с соответствующим условием (30) из [1], убеждаемся, что в рассматриваемом случае условие реализации диаграмм (23) требует более резкого убывания коэффициентов Фурье, чем в случае поверхностных токов, распределенных на поверхности цилиндра того же радиуса.

Распределение плотности тока  $J = J_z$  внутри цилиндра по заданной диаграмме  $F = F_z$  определяется рядом (19), где суммирование по  $m$  проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $E^{(m)*} = E_z^{(m)*}$  находится по формуле (21), а постоянные  $C_m$  и  $a_m$  — по формулам (19') и (6) соответственно. В последней формуле при этом подынтегральное выражение зависит только от координаты  $\varphi$ ,  $d\Omega = d\varphi$  и интегрирование проводится по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , а «ток»  $j_n$  задается выражением (20').

В случае трехмерной задачи, когда  $V$  — конечный трехмерный объем, а  $S$  — сфера, в качестве вектор-функций  $\{\vec{j}_n^m\}$  используются

$$\begin{aligned} \vec{j}_n^m &= i_0 \frac{e^{im\varphi}}{b_n^m} \frac{d}{d\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) - \\ &- i_\varphi \frac{m e^{im\varphi}}{b_n^m} \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

При этом предполагается, что заданные диаграммы являются при  $r \rightarrow \infty$  асимптотиками полей, состоящих из волн электрического типа. В случае магнитных волн следует использовать функции

$$\vec{j}_n^m = -i_0 \frac{im e^{im\varphi}}{d_n^m \sin\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) + i_\varphi \frac{e^{im\varphi}}{d_n^m} \frac{d}{d\theta} P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

В последних двух формулах постоянные  $\vec{b}_n^m$  и  $\vec{d}_n^m$  выбираем из условия нормировки указанных семейств на сфере  $\Omega$ ;  $i_\theta$  и  $i_\varphi$  — единичные орты. Если диаграммы создаются электрическими и магнитными волнами, то следует использовать оба семейства.

Отметим, что в отличие от рассмотренной выше задачи: синтеза тока в заданном объеме  $V$  и определения класса диаграмм, реализуемых такими токами, представляет значительный интерес задача определения формы и наименьшей величины объема  $V$  по заданной диаграмме.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я. Н./Радиотехника. 1990. № 11. С. 51.
2. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
3. Фельд Я. Н.//РЭ. 1987 Т. 32. № 6. С. 1137.
4. Фельд Я. Н.//РЭ. 1979. Т. 24. № 3. С. 456.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
6. Фельд Я. Н.//Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 3. С. 583.

Поступила в редакцию  
22.04.94

*Антенно-фидерные системы*

УДК 538.56

© 1995 г. Я. Н. Фельд

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАДАНЫМИ ТОКАМИ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КОНУСА,  
РАСПОЛОЖЕННОГО НАД МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТЬЮ**

Методом вариации постоянных решена задача о возбуждении металлического конуса, расположенного над металлической плоскостью, произвольной заданной системой электрических и магнитных токов. Построены две системы парциальных электрических и магнитных волн. Искомое поле представлено рядом по этим волнам с коэффициентами, зависящими от одной сферической координаты  $r$ .

**ВВЕДЕНИЕ**

Рассмотрим хорошо проводящий конус, поверхность которого задается соотношениями

$$(1) \quad \theta = \theta_0 \ (\theta_0 < \pi/2), \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

конус расположен над хорошо проводящей плоскостью:

$$(2) \quad 0 \leq r < \infty, \quad \theta = \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

В (1) и (2)  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — сферическая система координат с осью  $z$ , совпадающей с осью конуса (рисунок).

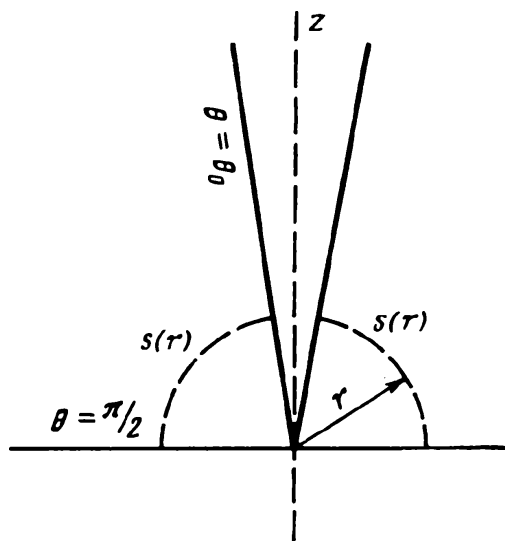
Полное поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , возбуждаемое заданными токами в присутствии рассматриваемых металлических поверхностей, должно удовлетворять на последних краевому условию

$$(3) \quad \vec{E}_t = 0$$

и принципу излучения при  $r \rightarrow \infty$ .

Для решения поставленной задачи применим «метод вариации постоянных» [1—3]. Искомое поле при этом выражается рядом по парциальным волнам с коэффициентами, зависящими от одной «выделенной» координаты. В качестве последней выберем  $r$ . Парциальные волны внутри интервала  $0 < r < \infty$  должны удовлетворять однородным уравнениям Максвелла, краевому условию (3) на металлических поверхностях, и на одном конце интервала должны выполняться для них краевые условия задачи, а на другом конце — находиться источники, возбуждающие эту волну. Следует учитывать волны, источники которых находятся как у одного конца интервала, так и у другого. Ниже используется практическая система единиц и зависимость от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$ .





### 1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА

Составляющие векторов поля для этих волн имеют следующий вид [4]:

$$(4) \quad \begin{cases} E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) V, & E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}, & E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}, \\ H_r = 0, & H_\theta = \frac{-ik}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, & H_\varphi = \frac{ik}{\rho r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \rho = \sqrt{\mu/\varepsilon}, & k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}. \end{cases}$$

Здесь  $V$  — потенциал Дебая, который в соответствии со сказанным во введении, определяется выражением

$$(5) \quad V = \zeta_\nu(kr) [P_\nu^m(-\cos \theta) - P_\nu^m(\cos \theta)] \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где  $\zeta_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{\nu+1/2}^1(x)$ , а числа  $\nu$  — корни уравнения

$$(5') \quad P_\nu^m(-\cos \theta_0) - P_\nu^m(\cos \theta_0) = 0.$$

При этом соответствующие парциальные волны (4) удовлетворяют принципу излучения при  $r \rightarrow \infty$ , краевому условию (3) на всех металлических поверхностях и имеют источники в точке  $r = 0$ . Волны, источники которых находятся на бесконечности  $r = \infty$ , определяются потенциалами

$$(6) \quad V = \psi_\nu(kr) [P_\nu^m(-\cos \theta) - P_\nu^m(\cos \theta)] \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases}$$

Здесь  $\psi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\nu+1/2}(x)$ , а  $\nu$  — корни уравнения (5'). При этом также выполняются условия (3) на всех металлических поверхностях и условия Мейкснера в точке  $r = 0$ . В формулах (5) и (6) используются только корни с  $\text{Re } \nu \geq 0$ .

Составляющие векторов поля для этих волн имеют следующий вид [4]:

$$(7) \quad \begin{cases} E_r = 0, & E_\theta = \frac{ik\rho}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E_\varphi = -\frac{ik\rho}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ H_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) U, & H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, \\ H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}. \end{cases}$$

Потенциалы Дебая определяются формулами

$$(8) \quad U = \zeta_\kappa(kr) [P_\kappa^m(-\cos \theta) + P_\kappa^m(\cos \theta)] \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где  $\kappa$  — корни уравнения

$$(8') \quad [P_\kappa^{m'}(-\cos \theta_0) - P_\kappa^{m'}(\cos \theta_0)] \sin \theta_0 = 0,$$

а также

$$(9) \quad U = \psi_\kappa(kr) [P_\kappa^m(-\cos \theta) + P_\kappa^m(\cos \theta)] \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где  $\kappa$  — корни уравнения (8').

Магнитные волны, определяемые потенциалами (8) и (9), удовлетворяют краевому условию (3) на всех металлических поверхностях; при этом первые из них имеют источники в точке  $r = 0$  и удовлетворяют принципу излучения при  $r \rightarrow \infty$ , а вторые, с потенциалами (9), имеют источники на бесконечности  $r = \infty$  и удовлетворяют условиям Мейкснера при  $r = 0$ . В формулах (8) и (9) используются только корни с  $\text{Re } \kappa \geq 0$ .

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

Поскольку в формулах (5)—(9) индекс  $m$  может принимать только неотрицательные целочисленные значения, а число корней  $\nu$  и  $\kappa$  счетное, введенные выше парциальные волны можно перенумеровать при помощи одного индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения кроме нуля. Сделаем это при условии, что парциальные волны  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  при  $p > 0$  определяются потенциалами типа (5) и (8), а при  $p < 0$  — потенциалами (6) и (9). Одновременно будем полагать, что волны  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и  $\vec{E}^{-p}, \vec{H}^{-p}$  ( $p > 0$ ) однотипны (т. е. обе электрические или обе магнитные) и различаются только заменой  $\zeta_\nu(kr)$  ( $\zeta_\kappa(kr)$ ) на  $\psi_\nu(kr)$  ( $\psi_\kappa(kr)$ ) в выражениях для соответствующих потенциалов. Корни  $\nu$  и  $\kappa$ , фигурирующие в выражениях для потенциалов, определяющих электрические и магнитные парциальные волны, будем также нумеровать при помощи индекса  $p$ . Таким образом, для волн  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и  $\vec{E}^{-p}, \vec{H}^{-p}$ , если они электрические,  $\nu_p = \nu_{-p}$ , а если магнитные, то  $\kappa_p = \kappa_{-p}$ .

Обозначим  $s(r)$  часть поверхности сферы радиусом  $r$ , для которой  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Тогда условие ортогональности для парциальных волн имеет вид

$$(10) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p, \vec{H}^q] d\vec{s} = 0 \quad \text{при } p \neq \pm q.$$

Доказательство проведем, применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и  $\vec{E}^q, \vec{H}^q$  в области, ограниченной поверхностями  $s(r)$  и  $s(r_1)$  ( $r_1 < r$ ), частью конуса  $\theta = \theta_0$  и частью плоскости  $\theta = \pi/2$ .

Учитывая, что эти поля удовлетворяют условию (3) на этих конусе и плоскости, получим

$$(11) \quad \int_{s(r)} \{ [\vec{E}^p, \vec{H}^q] - [\vec{E}^q, \vec{H}^p] \} d\vec{s} = \int_{s(r_1)} \{ [\vec{E}^p, \vec{H}^q] - [\vec{E}^q, \vec{H}^p] \} d\vec{s}.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Индексы  $p$  и  $q$  одного знака и соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам. При этом равенство (11) сводится к следующему:

$$(12) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p, \vec{H}^q] d\vec{s} = \int_{s(r)} [\vec{E}^q, \vec{H}^p] d\vec{s}.$$

Для  $p < 0$  и  $q < 0$  это равенство следует из (11), поскольку при  $r_1 \rightarrow 0$  эти поля удовлетворяют условиям Мейкснера в точке  $r_1 = 0$ . Если  $p > 0$  и  $q > 0$ , то правая часть (11) равна постоянной, не зависящей от  $r$ , а левая, как это следует из формул (4)–(9), равна некоторой функции от  $r$ . Устремляя  $r \rightarrow \infty$ , убеждаемся, что левая часть (11) стремится к нулю, так как оба поля удовлетворяют принципу излучения. Таким образом, доказано, что левая часть равна нулю при любом  $r$ .

В свою очередь, если  $p \neq q$ , то правая и левая части (12) равны различным функциям от  $r$ , умноженным на константы, что возможно, если последние равны нулю. Исключением являются случаи, когда  $p \neq q$ , только потому, что в соответствующих выражениях для потенциалов у волны  $p$  стоит  $\cos m\varphi$ , а у волны  $q$  стоит  $\sin m\varphi$  или наоборот. Однако и в этих случаях левая и правая части (12) равны нулю вследствие ортогональности указанных функций на интервале  $0 - 2\pi$ .

2. Индексы  $p$  и  $q$  различных знаков и соответствуют либо электрическим, либо магнитным волнам. В этом случае, согласно разд. 1,

$$(13) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^{-q}] d\vec{s} = 0 \text{ при } p \neq -q.$$

Если в этом равенстве заменить  $-q$  на  $q$ , то в формуле для соответствующего потенциала изменится только множитель, зависящий от  $r$  (см. (5), (6) и (8), (9)). Следовательно, изменится только множитель, зависящий от  $r$ , содержащийся в левой части (13) вне интеграла, а само равенство не нарушится. Таким образом, и

$$(14) \quad \int_{s(r)} [\vec{E}^p \vec{H}^q] d\vec{s} = 0 \text{ при } p \neq -q.$$

3. Индексу  $p$  соответствует электрическая, а  $q$  — магнитная волна или наоборот. Так, если  $p < 0$  и  $q < 0$  или  $p > 0$  и  $q > 0$ , то доказательство аналогично приведенному в разд. 1, а если  $p < 0$  и  $q > 0$  или наоборот, то доказательство совпадает с приведенным в разд. 2.

#### 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $r$

Это решение тождественно приведенному в разд. 7 работы [4]. Различие заключается только в том, что парциальные волны имеют другой вид, поскольку потенциалы определяются теперь формулами (5), (6) и (8), (9), отличающимися от соответствующих формул [4]. Не повторяя всех выкладок, приведем только окончательные формулы.

Уравнения Максвелла, которым удовлетворяет полное поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , имеют вид

$$(15) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{k}{ip} \vec{E} + \vec{J}, \quad \text{rot } \vec{E} = ikp\vec{H} - \vec{J}^u,$$

где  $\vec{J}, \vec{J}^k$  — заданные плотности электрических и магнитных токов, распределенные в области

$$r_\alpha < r < r_\beta, \quad \theta_0 < \theta < \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Решение уравнений (15) ищем в виде

$$(16) \quad \vec{E} = \sum_p C_p(r) \vec{E}^p + \vec{F},$$

$$\vec{H} = \sum_p C_p(r) \vec{H}^p + \vec{f}.$$

Здесь  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  — парциальные волны, введенные выше, а  $C_p(r), \vec{F}$  и  $\vec{f}$  — искомые величины.

Подставляя решение (16) в уравнения (15) и следуя работе [4], найдем

$$(17) \quad \begin{cases} \vec{F} = \frac{\rho}{ik} J \vec{i}_r, & \vec{f} = \frac{1}{ik\rho} J_r^k \vec{i}_r \\ \pm \int \{ \vec{J} \vec{E}^{-p} - \vec{J}^k \vec{H}^{-p} \} dv \\ C_p(r) = \frac{v^\pm}{\int \{ [\vec{E}^p \vec{H}^{-p}] - [\vec{E}^{-p} \vec{H}^p] \} ds}, \\ p = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Здесь знак «+» соответствует положительным  $p$ , а знак «—» — отрицательным;  $v^+$  — область, ограниченная поверхностями  $s(r_\alpha), s(r)$ , частью конуса  $\theta = \theta_0$  и частью плоскости  $\theta = \pi/2$ , а  $v^-$  — область, ограниченная поверхностями  $s(r), s(r_\beta)$ , частью конуса  $\theta = \theta_0$  и частью плоскости  $\theta = \pi/2$ . При этом  $r$  может принимать любые положительные значения;  $\vec{i}_r$  — радиальные единичные орты.

Как следует из равенства (11), знаменатель в формуле (17) для  $C_p(r)$  постоянен и не зависит от  $r$ . Из определения величин  $v^+$  и  $v^-$  следует при учете также области распределения заданных токов  $\vec{J}, \vec{J}^k$ , что при  $r > r_\beta$  и  $p < 0$ , коэффициенты  $C_p(r) = 0$  и  $C_{-p}(r) = \text{const}$ , а при  $r < r_\alpha$  и  $p > 0$ , коэффициенты  $C_p(r) = 0$  и  $C_{-p}(r) = \text{const}$ . В области  $r_\alpha < r < r_\beta$  коэффициенты  $C_p(r)$  могут быть отличны от нуля как при положительных, так и при отрицательных значениях  $p$  и зависеть от координаты  $r$ .

Полученное решение (16), так же как и величины  $\vec{F}, \vec{f}$  и  $C_p(r)$ , определяемые формулами (17), формально совпадают с аналогичным решением разд. 7 работы [4]. Различие заключается только в существенно ином определении парциальных волн  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и величин  $s(r), v^+$  и  $v^-$ , входящих в найденное выше решение.

*Пример.* Пусть рассматриваемая система возбуждается кольцевым электрическим током  $I$ , ось которого описывается равенствами  $r = r_1, \theta = \theta_1$  ( $\pi/2 > \theta_1 > \theta_0$ ),  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ; величина тока  $I$  остается постоянной вдоль кольца. Искомое поле, определяемое формулами (16), в рассматриваемом примере имеет в области  $r > r_1$ , следующий вид:

$$(18) \quad \vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \vec{E}^p, \quad \vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \vec{H}^p$$

Поскольку возбуждающий ток не зависит от угла  $\varphi$ , то и поле  $\vec{E}, \vec{H}$  не зависит от  $\varphi$ . Поэтому в рассматриваемом примере потенциалы (5) и (8),

определяющие парциальные волны, фигурирующие в решении (18), имеют вид

$$(19) \quad V = \zeta_v(kr)[P_v(-\cos \theta) - P_v(\cos \theta)]; \quad P_v(-\cos \theta_0) - P_v(\cos \theta_0) = 0,$$

$$(20) \quad U = \zeta_x(kr)[P_x(-\cos \theta) + P_x(\cos \theta)]; \quad P'_x(-\cos \theta_0) - P'_x(\cos \theta_0) = 0.$$

Корни  $v$  и  $x$  будем нумеровать в соответствии с возрастанием их модулей. Причем корни  $v$ , как и соответствующие им электрические волны, будем нумеровать при помощи положительных нечетных значений  $p$ , а корни  $x$ , как и соответствующие им магнитные волны, — при помощи положительных четных. Таким образом,

$$|v_p| \leq |v_{p+1}| \text{ и } |x_p| \leq |x_{p+2}|.$$

Для нахождения коэффициентов  $C_p$  в решении (18) нам понадобятся также парциальные волны, определяемые потенциалами (6) и (9), нумеруемыми отрицательными значениями индекса  $p$  (см. разд. 3), которые в рассматриваемом примере принимают вид

$$(21) \quad V = \psi_v(kr)[P_v(-\cos \theta) - P_v(\cos \theta)];$$

$$P_v(-\cos \theta_0) - P_v(\cos \theta_0) = 0,$$

$$(22) \quad U = \psi_x(kr)[P_x(-\cos \theta) + P_x(\cos \theta)];$$

$$P'_x(-\cos \theta_0) - P'_x(\cos \theta_0) = 0.$$

Корни  $v$  в (21) нумеруются отрицательными нечетными значениями индекса  $p$ , а корни  $x$  в (22) — отрицательными четными, хотя, как отмечено выше,  $v_p = v_{-p}$  и  $x_p = x_{-p}$ .

Напомним, что потенциалы (19) и (21) используются для определения электрических волн (4), а потенциалы (20) и (22) — для магнитных (7).

Используя написанные выше выражения (19) — (22), а также формулу (17) для  $C_p$ , учитывая (4) и (7), найдем

$$(23) \quad C_p = 0 \text{ при } p = 1, 3, 5, \dots,$$

$$(24) \quad C_p = \frac{-iI \sin^2 \theta_1 \psi_{x_p}(kr_1)[P'_{x_p}(-\cos \theta_1) - P'_{x_p}(\cos \theta_1)]}{\cos \theta_0 \int_0^k [P'_{x_p}(-x) - P'_{x_p}(x)]^2 (1-x^2) dx}$$

при  $p = 2, 4, 6, \dots$ . При выводе формулы (24) учтено, что  $x_p = x_{-p}$ .

Для области  $r < r_1$  полное поле определяется выражениями

$$\vec{E} = \sum_{p=-1}^{-\infty} C_p \vec{E}^p, \quad \vec{H} = \sum_{p=-1}^{-\infty} C_p \vec{H}^p,$$

где коэффициенты  $C_p$  постоянны и находятся при помощи формулы (17).

Отметим, что полученные в данной работе формулы пригодны также для нахождения поля при возбуждении рассматриваемой системы через отверстия, прорезанные в поверхности конуса  $\theta = \theta_0$  или плоскости  $\theta = \pi/2$ . Для этого следует только задать распределение касательной составляющей электрического вектора  $\vec{E}_t$  в возбуждающих отверстиях и определить затем эквивалентные поверхностные магнитные токи  $\vec{K}^* = [\vec{E}_t, \vec{n}]$  на поверхности отверстий, которые при этом считаются металлизированными [5]. Здесь  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности отверстий.

Заменив затем ток  $\vec{J}^*$  в формуле (17) поверхностным током  $\vec{K}^*$  и объемный интеграл — поверхностным, получим искомое решение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я. Н. // РЭ. 1976. Т. 21. № 12. С. 1615.
2. Фельд Я. Н., Фельд С. Я. // РЭ. 1980. Т. 25. № 12. С. 2481.
3. Фельд Я. Н. // РЭ. 1982. Т. 27. № 12. С. 2323.
4. Фельд Я. Н. // РЭ. 1991. Т. 36. № 6. С. 1114.
5. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. 1. М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955. С. 168.

Поступила в редакцию  
14.07.94

УДК 538.56

## РАССЕЯНИЕ ВОЛН СИСТЕМОЙ ИЗ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СМЕЩЕННЫХ ПЛАСТИН

© 1995 г. Я. Н. Фельд

Представлено академиком А.Л. Микаэляном 14.12.94 г.

Поступило 14.12.94 г.

Рассмотрим систему из двух идеально проводящих бесконечно тонких пластин  $s$  и  $s_1$  шириной  $2b$ , находящихся на расстоянии  $2a$  друг от друга, центры которых смещены на расстояние  $2\delta$  (см. рис. 1). Вдоль оси  $z$  обе пластины бесконечны. Ось  $y$  перпендикулярна плоскости пластин, а ось  $x$  параллельна. Во введенной системе координат положение пластин характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} -b + \delta \leq x \leq b + \delta, \quad y = a & \quad (\text{пластина } s), \\ -b - \delta \leq x \leq b - \delta, \quad y = -a & \quad (\text{пластина } s_1). \end{aligned}$$

Пусть на эту систему падает первичное поле, электрический вектор которого  $E^0 = E_z^0$  не зависит от координаты  $z$ . Тогда вторичное, рассеянное, поле  $E = E_z$  также не зависит от  $z$ , удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, принципу излучения на бесконечности и краевым условиям

$$\begin{aligned} E = -E^0(x, a) & \quad \text{на } s, \\ E = -E^0(x, -a) & \quad \text{на } s_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использовано обозначение  $E^0 = E^0(x, y)$ . Эта задача может быть сведена к решению двух аналогичных задач, отличающихся только краевыми условиями на пластинах  $s$  и  $s_1$ . Так, одна из них решается при краевых условиях

$$\begin{aligned} E = \xi(x) \equiv -\frac{E^0(x, a) + E^0(-x, -a)}{2} & \quad \text{на } s, \\ E = \xi(-x) & \quad \text{на } s_1, \end{aligned} \tag{2}$$

а другая при краевых условиях

$$\begin{aligned} E = \eta(x) \equiv \frac{-E^0(x, a) + E^0(-x, -a)}{2} & \quad \text{на } s, \\ E = -\eta(-x) & \quad \text{на } s_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Сумма решений этих двух задач является решением исходной, так как сумма соответствующих условий (2) и (3) совпадает с условиями (1). Обозначая суммарное (двухстороннее) распределение поверхностной плотности тока буквами  $J(x)$  на  $s$  и  $J_1(x)$  на  $s_1$ , легко сообразить, что в задаче

с условиями (2) имеет место равенство

$$J(x) = J_1(-x) \quad \text{при } -b + \delta \leq x \leq b + \delta, \tag{4}$$

а в задаче с условиями (3)

$$J(x) = -J_1(-x) \quad \text{при } -b + \delta \leq x \leq b + \delta. \tag{5}$$

Очевидно, плотности токов имеют одну  $z$ -ю компоненту

$$J = J_z, \quad J_1 = J_{1z}.$$

Решение последних двух задач проведем методом, предложенным нами в [1]. Для этого дополним пластину  $s$  до полной плоскости  $y = a$  при помощи геометрической поверхности  $\Sigma$  (рис. 1) и выведем функциональное уравнение для плотности тока  $J(x)$  на  $s$  и электрической напряженности  $E(x)$  на  $\Sigma$ . Искомое вторичное поле можно записать в полупространстве  $y > a$  при помощи следующих двух очевидных выражений:

$$\begin{aligned} E = \int_{(s_0)} E \frac{\partial G}{\partial y} dx, \quad s_0 = s + \Sigma, \\ E = \alpha \int_{(s)} J H_0^{(2)}(kr) dx + \alpha \int_{(s_1)} J_1 H_0^{(2)}(kr) dx. \end{aligned} \tag{6}$$

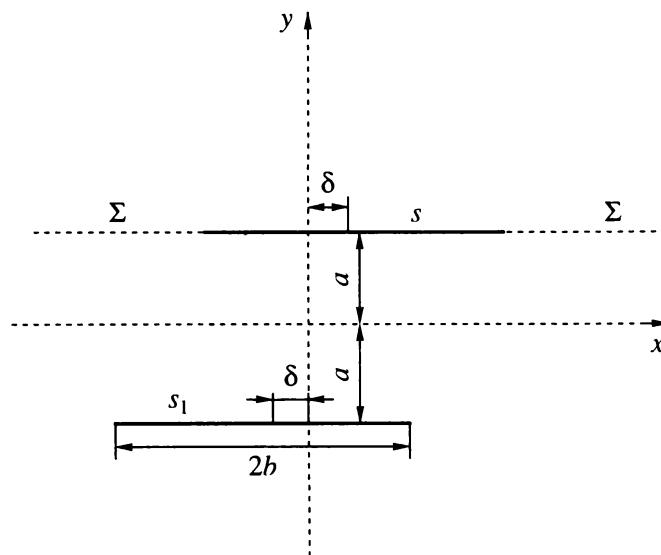


Рис. 1.

Здесь  $k$  – волновое число, а

$$G(p, q) = \frac{1}{4i} \{ H_0^{(2)}(kr) - H_0^{(2)}(kr^*) \}, \quad (7)$$

где  $r(r^*)$  – расстояние между точками  $p$  и  $q$  ( $p$  и  $q^*$ ),  $q$  и  $q^*$  – точки, зеркальные относительно плоскости  $y = a$  (это функция Грина для области  $y > a$ , обращающаяся в нуль при  $y = a$ ); в формулах (6)  $p(x, y)$  – точка интегрирования, а  $q(x', y')$  ( $y' > a$ ) – точка наблюдения;

$$\alpha = -\omega\mu/4. \quad (8)$$

Приравнявая два выражения (6), найдем

$$\begin{aligned} \int_{(s_0)} E \frac{\partial G}{\partial y} dx = \\ = \alpha \int_{(s)} JH_0^{(2)}(kr) dx + \alpha \int_{(s_1)} J_1H_0^{(2)}(kr) dx \end{aligned} \quad (9)$$

при  $-\infty < x' < \infty, y' > a$ .

Равенство (9) обеспечивает выполнение краевого условия на  $s$ , а вследствие равенств (2) – (5) и на  $s_1$  (если, как это будет сделано в дальнейшем, в левом интеграле по  $s_0$  на его части  $s$  используется краевое условие (2) или (3) для соответствующих задач), а также требования, чтобы источниками поля были только поверхностные токи, текущие вдоль лент  $s$  и  $s_1$ .

Таким образом, выполняются все условия, обеспечивающие единственность решения рассматриваемых задач (см. также [1]).

Подставляя (7) в (9), получим

$$\begin{aligned} \int_{(s_0)} EH_1^{(2)}(kr) \sin \beta dx = \\ = \frac{2i\alpha}{k} \int_{(s)} JH_0^{(2)}(kr) dx + \frac{2i\alpha}{k} \int_{(s_1)} J_1H_0^{(2)}(kr) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\beta$  – угол между  $r$  и осью  $x$ . Помещая точку наблюдения  $q(x', y')$  в дальнюю зону и заменяя  $H_0^{(2)}$ ,  $H_1^{(2)}$ ,  $r$  и  $\beta$  их асимптотическими выражениями, превратим (10) в искомое функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \sin \gamma \int_{(s_0)} E(x) e^{ikx \cos \gamma} dx = \frac{2\alpha}{k} \int_{(s)} J(x) e^{ikx \cos \gamma} dx + \\ + \frac{2\alpha}{k} e^{-i \cdot 2ka \sin \gamma} \int_{(s_1)} J_1(x) e^{ikx \cos \gamma} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\gamma$  – угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку наблюдения  $q$ , и осью  $x$ . Отметим, что использование

асимптотических формул в интеграле по  $\Sigma$  в (10) допустимо, так как поле  $E(x)$  резко убывает при  $|x| \rightarrow \infty$  и можно ввести некоторый конечный эффективный размер системы вдоль оси  $x$ , для которого и определяется дальняя зона. Введем обозначение  $u = k \cos \gamma$  и преобразуем интеграл по  $s_1$  в формуле (11) с учетом соотношений (4) и (5). После элементарных преобразований получим

$$\int_{(s_1)} J_1(x) e^{iux} dx = \pm \int_{(s)} J(x) e^{-iux} dx.$$

Здесь и ниже верхний знак соответствует соотношению (4), т.е. задаче с краевыми условиями (2), а нижний знак – соотношению (5), т.е. условиям (3).

Используя это равенство, придадим соотношению (11) следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{g}{2\alpha a} \int_{(s_0)} E(x) e^{iux} dx = \\ = \int_s J(x) e^{iux} dx \pm e^{-i \cdot 2g} \int_{(s)} J(x) e^{-iux} dx, \\ g = a \sqrt{k^2 - u^2}, \end{aligned}$$

или, складывая интегралы в правой части, деля на  $g/2\alpha a$  и учитывая условия (2) и (3) на  $s$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} E(x) e^{iux} dx = \\ = \frac{4\alpha a e^{-ig}}{g} \int_{(s)} \left. \begin{matrix} \cos(ux + g) \\ i \sin(ux + g) \end{matrix} \right\} J(x) dx - \int_{(s)} \left. \begin{matrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{matrix} \right\} e^{iux} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь, как и выше, верхние строчки относятся к задаче с условиями (2), а нижние – с условиями (3). Это функциональное равенство определяет  $E$  на  $\Sigma$  и  $J$  на  $s$ , величины  $\xi$  и  $\eta$  известны (см. (2) и (3)). Придадим равенству (12) несколько другой вид. Для этого прежде всего разобьем его на два уравнения, в одно из которых входят только четные относительно  $u$  функции, а в другое – нечетные. Такое разбиение, очевидно, единственно и имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} E(x) \cos(ux) dx = \frac{4\alpha a e^{-ig}}{g} \left\{ \begin{matrix} \cos g \\ i \sin g \end{matrix} \right\} \int_{(s)} \cos ux J(x) dx - \\ - \int_{(s)} \left. \begin{matrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{matrix} \right\} \cos ux dx, \end{aligned}$$



$$\int_{(\Sigma)} E(x) \sin ux \, dx = -\frac{4\alpha i a e^{-ig}}{g} \left\{ \begin{array}{l} -\sin g \\ i \cos g \end{array} \right\} \int_{(s)} J(x) \sin ux \, dx - \int_{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \xi(x) \\ \eta(x) \end{array} \right\} \sin ux \, dx.$$

Разрешая первое из этих равенств относительно  $\int_{(s)} J(x) \cos ux \, dx$ , а второе относительно  $i \int_{(s)} J(x) \sin ux \, dx$  и складывая результаты, найдем

$$\begin{aligned} & \int_{(s)} J(x) e^{iux} \, dx = \\ & = \frac{g e^{ig}}{2\alpha a \sin(2g)} \left[ \int_{(\Sigma)} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ux + g) \\ -i \cos(ux + g) \end{array} \right\} E(x) \, dx + \right. \\ & \left. + \int_{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \xi(x) \sin(ux + g) \\ -i\eta(x) \cos(ux + g) \end{array} \right\} dx \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Равенства (12) и (13) полностью равнозначны. Первое из них удобно для выражения, в явном виде,  $E(x)$  через  $J(x)$ , а второе —  $J(x)$  через  $E(x)$ . Хотя эти равенства получены для  $u = k \cos \gamma$ , когда  $\gamma$  изменяется в интервале  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , однако они выполняются на всей вещественной оси переменного  $u$ , поскольку все члены, фигурирующие в них являются аналитическими функциями переменного  $u$ .

Применив к (12) преобразование Фурье

$$\mathcal{F}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-iux},$$

найдем

$$E(x) = 4\alpha \mathcal{F}_x \left[ \frac{a e^{-ig}}{g} \int_{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \cos(ux' + g) \\ i \sin(ux' + g) \end{array} \right\} J(x') \, dx' \right], \quad (14)$$

$x \in \Sigma.$

Преобразование Фурье от последнего члена (12) обращается в нуль на  $\Sigma$  на основании теоремы Винера-Пэйли, поскольку  $\xi, \eta \in L^2(s)$ .

Правая часть (14) имеет смысл при любом  $J(x) \in L(s)$ . Разрешая (13) относительно  $J(x)$  и учитывая, что  $J(x) \in L(s)$  (но не в  $L^2(s)$ ), найдем

$$J(x) = \mathcal{F}_x F(u), \quad -b + \delta < x < b + \delta, \quad (15)$$

где  $F(u)$  — правая часть (13), т.е.

$$\begin{aligned} F(u) = & \frac{g e^{ig}}{2\alpha a \sin(2g)} \left[ \int_{(\Sigma)} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ux + g) \\ -i \cos(ux + g) \end{array} \right\} E(x) \, dx + \right. \\ & \left. + \int_{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \xi(x) \sin(ux + g) \\ -i\eta(x) \cos(ux + g) \end{array} \right\} dx \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Равенства (14) и (15) могут быть использованы для нахождения напряженности  $E(x)$  на поверхности  $\Sigma$  и плотности тока  $J(x)$  на ленте  $s$  для обеих задач с краевыми условиями (2) и (3), а вследствие соответствующих им равенств (4) и (5) также и для токов  $J_1(x)$  на ленте  $s_1$ . Для этого следует применить метод последовательных приближений. Так, нумеруя последовательные приближения токов четными индексами  $J^{(2n)}$ , а напряженностей — нечетными  $E^{(2n+1)}$ , запишем равенства (14) и (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} E^{(2n+1)}(x) = & \\ = -\omega \mu \mathcal{F}_x \left[ \frac{a e^{-ig}}{g} \int_{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \cos(ux' + g) \\ i \sin(ux' + g) \end{array} \right\} J^{(2n)}(x') \, dx' \right], \quad (17) \end{aligned}$$

$x \in \Sigma,$

$$\begin{aligned} J^{(2n+2)}(x) = & \\ = \mathcal{F}_x F^{(2n+1)}(u), \quad -b + \delta < x < b + \delta. \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь  $F^{(2n+1)}$  определяется формулой (16), в правой части которой вместо  $E(x)$  стоит  $E^{(2n+1)}(x)$ . Очевидно, если процесс сходится, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} E(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E^{(2n+1)}(x), \\ J(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} J^{(2n)}(x). \end{aligned} \quad (19)$$

В качестве нулевого приближения  $J^{(0)}(x)$  можно взять приближение Кирхгофа (физическая оптика). Напомним, что, как уже отмечалось выше, верхние строчки в формулах (16) - (18) относятся к задаче с краевыми условиями (2), а нижние — с условиями (3). Найдя таким способом токи на лентах и напряженности  $E$  на поверхности  $\Sigma$  для обеих вспомогательных задач с краевыми условиями (2) и (3), найдем эти же величины для исходной интересующей нас задачи с краевыми условиями (1), складывая соответствующие величины (как это отмечалось в начале статьи), найденные для указанных выше двух вспомогательных задач.

Зная токи на лентах, создаваемое ими рассеянное поле  $E, H$  найдем по известным формулам [2]. В частности, можно использовать вторую из формул (6), которая справедлива для всего пространства; при этом в ней под токами  $J(x)$  и  $J_1$  следует понимать плотности токов исходной задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // ДАН. 1970. Т. 192. № 5. С. 1007.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. М.: Изд-во ВВИА им. Жуковского, 1955. Ч. 1.

УДК 621.306:621.371

## РАССЕЯНИЕ ВОЛН КОНЕЧНЫМ РУПОРОМ (ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА)

© 1995 г. Я. Н. Фельд

Представлено академиком А.Л. Микаэляном 10.02.95 г.

Поступило 20.02.95 г.

Рассмотрим хорошо проводящий рупор, бесконечный вдоль оси  $z$ , пересечение которого с плоскостью  $z = 0$  изображено на рис. 1. Одна из его сторон  $l_1$  образует угол  $\varphi_0$  с осью  $x$  и описывается (в цилиндрической системе координат  $R, \varphi$ ) соотношениями  $0 \leq R \leq l, \varphi = \varphi_0$ , а вторая  $l_{-1} - 0 \leq R \leq l, \varphi = -\varphi_0$ . Пусть на этот рупор падает первичная волна с электрическим вектором  $E^0 = E_z^0$ , не зависящая от координаты  $z$ . Вторичное рассеянное поле  $E = E_z$  также не будет зависеть от  $z$ . Таким образом, мы приходим к двумерной задаче, где напряженность  $E$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} E &= -E^0(R, \varphi_0) \text{ на } l_1, \\ E &= -E^0(R, -\varphi_0) \text{ на } l_{-1}; \end{aligned} \quad (2)$$

$k$  – волновое число. На бесконечности вторичное поле должно удовлетворять “условию излучения”.

Сведем эту задачу к двум вспомогательным следующим краевыми условиями:

$$E = -\frac{1}{2} [E^0(R, \varphi_0) + E^0(R, -\varphi_0)] \equiv \tau(R) \text{ на } l_1, \quad (3)$$

$$E = \tau(R) \text{ на } l_{-1} \quad (3a)$$

для первой вспомогательной задачи и

$$E = -\frac{1}{2} [E^0(R, \varphi_0) - E^0(R, -\varphi_0)] \equiv p(R) \text{ на } l_1, \quad (4)$$

$$E = -p(R) \text{ на } l_{-1} \quad (4a)$$

для второй.

Решив последние две вспомогательные задачи и сложив их результаты, найдем решение исходной задачи с краевыми условиями (2). Таким образом, можно ограничиться рассмотрением задач с синфазными и противофазными условиями на сторонах рупора.

Обозначим поверхностную двухстороннюю плотность тока на сторонах рупора как  $J = J_z$ , тогда для задачи с краевыми условиями (3), (3a) будет справедливо равенство

$$J(R, \varphi_0) = J(R, -\varphi_0) \text{ при } 0 \leq R \leq l, \quad (5)$$

а для задачи с условиями (4), (4a) равенство

$$J(R, \varphi_0) = -J(R, -\varphi_0) \text{ при } 0 \leq R \leq l. \quad (6)$$

Прежде всего сформулируем два условия, однозначно определяющие рассеянное поле  $E$  для обеих задач.

1)  $E$  – поле, создаваемое токами, распределенными на сторонах рупора и удовлетворяющими условию (5) или (6) для соответствующих задач.

2)  $E$  – поле, удовлетворяющее на стороне  $l_1$  краевому условию (3) или (4).

При одновременном выполнении этих двух условий рассеянное поле автоматически будет удовлетворять краевым условиям как на  $l_1$ , так и на  $l_{-1}$  для обеих вспомогательных задач.

Продлим сторону  $l_1$  до бесконечной линии с помощью отрезков  $l \leq R < \infty, \varphi = \varphi_0$  и  $0 \leq R < \infty, \varphi = \varphi_0 + \pi$ , которые обозначим буквой  $\Sigma$  (рис. 1). Определим теперь поле  $E$  в области  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \pi, R > 0$  при помощи следующих двух выражений (в соответствии с вышеприведенными условиями):

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\omega\mu}{4} \int_{l_1} J(R, \varphi_0) H_0^{(2)}(kr) dR - \\ &- \frac{\omega\mu}{4} \int_{l_{-1}} J(R, -\varphi_0) H_0^{(2)}(kr) dR, \end{aligned} \quad (7)$$

$$E = \int_{l_1 + \Sigma} E \frac{\partial G}{\partial n} d\xi.$$

Здесь и ниже  $\xi$  – переменная, определенная на линии  $l_1 + \Sigma$  следующим образом:

$$\xi = R \text{ при } \varphi = \varphi_0, \quad \xi = -R \text{ при } \varphi = \varphi_0 + \pi, \quad (7a)$$

а  $G$  – функция Грина, равная

$$G = \frac{1}{4i} \{ H_0^{(2)}(kr) - H_0^{(2)}(kr^*) \}, \quad (8)$$

где  $r$  – расстояние между точками  $g$  и  $q$ , а  $r^*$  – между точками  $g$  и  $q^*$ ; точки  $q$  и  $q^*$  – зеркальные относительно линии  $l_1 + \Sigma$  (см. рис. 1). В формулах (7)  $q$  – точка наблюдения, а  $g$  – точка интегрирования, поэтому  $G = 0$ , когда  $g$  лежит на  $l_1 + \Sigma$ ;  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по нормали к  $l_1 + \Sigma$  в точке  $g$ . Приравнявая два выражения (7) для  $E$ , найдем

$$\int_{l_1 + \Sigma} E \frac{\partial G}{\partial n} d\xi = -\frac{\omega\mu}{4} \int_{l_1} J(R, \varphi_0) H_0^{(2)}(kr) dR - \frac{\omega\mu}{4} \int_{l_{-1}} J(R, -\varphi_0) H_0^{(2)}(kr) dR \quad (9)$$

при  $q(R, \varphi)$ , где  $R > 0$ ,  $\varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0$ .

Равенство (9) обеспечивает выполнение краевого условия на  $l_1$ , а вследствие соотношений (3) - (6) и на  $l_{-1}$  (если, как это будет сделано в дальнейшем, в левом интеграле по  $l_1 + \Sigma$  на его части  $l_1$  используются краевые условия (3), (3а) или (4), (4а) для соответствующих задач), а также требование, чтобы источниками вторичного поля были только поверхностные токи, текущие вдоль сторон рупора  $l_1$  и  $l_{-1}$ .

Таким образом, выполняются все условия, обеспечивающие единственность решения рассматриваемых задач (см. также [1]).

Подставляя (8) в равенство (9), получим

$$\begin{aligned} \int_{l_1 + \Sigma} E H_1^{(2)}(kr) \sin \beta d\xi &= \\ &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{l_1} J(R, \varphi_0) H_0^{(2)}(kr) dR + \\ &+ \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{l_{-1}} J(R, -\varphi_0) H_0^{(2)}(kr) dR. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\beta$  – угол между направлением  $\mathbf{n}$  и линией  $l_1 + \Sigma$ . Помещая точку наблюдения  $q$  в дальнюю зону и заменяя  $H_0^{(2)}$ ,  $H_1^{(2)}$ ,  $r$  и  $\beta$  их асимптотическими выражениями, превратим равенство (10) в искомое функциональное уравнение, определяющее токи на  $l_1$  и  $l_{-1}$  и напряженность  $E$  на  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \sin \gamma \int_{l_1 + \Sigma} E(\xi) e^{ik\xi \cos \gamma} d\xi &= \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{l_1} J(R, \varphi_0) e^{ikR \cos \gamma} dR - \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{l_{-1}} J(R, -\varphi_0) e^{ikR \cos(\gamma + 2\varphi_0)} dR, \end{aligned} \quad (11)$$

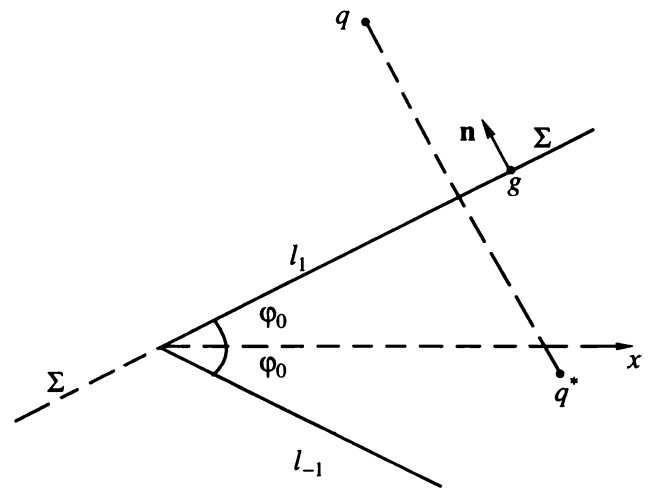


Рис. 1.

где  $\gamma$  – угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку наблюдения  $q$ , и линией  $l_1 + \Sigma$ .

Отметим, что использование асимптотических формул в интеграле по  $\Sigma$  в формуле (10) допустимо, поскольку поле  $E(\xi)$  резко убывает\* при  $|\xi| \rightarrow \infty$  и можно ввести некоторый конечный эффективный размер системы вдоль линии  $\xi$ , для которого и определяется дальняя зона. Преобразовав интеграл по  $l_{-1}$  в формуле (11) с учетом равенств (5), (6), найдем

$$\begin{aligned} \int_{l_{-1}} J(R, -\varphi_0) e^{ikR \cos(\gamma + 2\varphi_0)} dR &= \\ &= \pm \int_{l_1} J(R, \varphi_0) e^{ikR \cos(\gamma + 2\varphi_0)} dR. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и ниже верхний знак соответствует соотношению (5), т.е. задаче с краевыми условиями (3), (3а), а нижний знак – соотношению (6), т.е. задаче с условиями (4), (4а).

Используя соотношение (12), придадим равенству (11) следующий вид:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \int_{l_1 + \Sigma} E(\xi) e^{ik\xi \cos \gamma} d\xi &= \\ &= -\frac{1}{2} \int_{l_1} J(R, \varphi_0) \{ e^{ikR \cos \gamma} \pm e^{ikR \cos(\gamma + 2\varphi_0)} \} dR. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя обозначения

$$u = k \cos \gamma, \quad v = \sqrt{k^2 - u^2} \quad (14)$$

\* Для этого достаточно предположить, что среда обладает некоторыми потерями.

и используя краевые условия (3), (4), придадим равенству (13) путем элементарных преобразований следующий вид:

$$\int_{\Sigma} E(\xi') e^{iu\xi'} d\xi' = -\frac{k}{2v} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_{l_1} J(R', \varphi_0) \times \times \{ e^{iuR'} \pm e^{iR'(u \cos 2\varphi_0 - v \sin 2\varphi_0)} \} dR' - \int_{l_1} \left\{ \frac{\tau(R')}{p(R')} \right\} e^{iuR'} dR', \quad (15)$$

где в интеграле по  $\Sigma$  переменная интегрирования  $\xi$  заменена  $\xi'$ , а в интегралах по  $l_1$  переменная интегрирования  $R$  заменена  $R'$ , что удобно для дальнейшего изложения. Здесь, как и выше, верхние строчки относятся к задаче с краевыми условиями (3), (3а), а нижние – к задаче с условиями (4), (4а). При этом мы учли также определение (7а). Полученное функциональное уравнение (15) определяет  $E$  на  $\Sigma$  и  $J$  на  $l_1$ , величины  $\tau(R')$  и  $p(R')$  известны (см. (3), (4)).

Перепишем равенство (15), придав ему следующий вид:

$$\int_{l_1} J(R', \varphi_0) e^{iuR'} dR' = -\frac{2v}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_{\Sigma} E(\xi') e^{iu\xi'} d\xi' \mp \int_{l_1} J(R', \varphi_0) e^{iR'(u \cos 2\varphi_0 - v \sin 2\varphi_0)} dR' - \frac{2v}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_{l_1} \left\{ \frac{\tau(R')}{p(R')} \right\} e^{iuR'} dR'. \quad (16)$$

Хотя равенства (15), (16) получены для  $u = k \cos \gamma$ , когда  $\gamma$  изменяется в интервале  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , однако они выполняются на всей вещественной оси переменного  $u$ , поскольку все члены, фигурирующие в них, являются аналитическими функциями переменного  $u$ .

Применив к равенствам (15), (16) преобразования Фурье

$$F_{\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-iu\xi},$$

найдем

$$E(\xi) = -\frac{k}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} F_{\xi} \left\{ \frac{1}{v} \int_{l_1} J(R', \varphi_0) \times \times [ e^{iuR'} \pm e^{iR'(u \cos 2\varphi_0 - v \sin 2\varphi_0)} ] dR' \right\} \quad (17)$$

при  $\xi \in \Sigma$  и

$$J(R, \varphi_0) = -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_{\xi} \left[ v \int_{\Sigma} E(\xi') e^{iu\xi'} d\xi' \mp \mp F_{\xi} \int_{l_1} J(R', \varphi_0) e^{iR'(u \cos 2\varphi_0 - v \sin 2\varphi_0)} dR' - -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_{\xi} \left[ v \int_{l_1} \left\{ \frac{\tau(R')}{p(R')} \right\} e^{iuR'} dR' \right] \right] \quad (18)$$

при  $\xi = R \in l_1$ .

Преобразование  $F_{\xi}$  от последнего члена (15) обращается в нуль на  $\Sigma$  вследствие теоремы Винера–Пэйли, поскольку  $\tau(R'), p(R') \in L^2(l_1)$ . Равенства (17), (18) могут быть использованы для нахождения напряженности  $E$  на  $\Sigma$  и плотности тока  $J(R, \varphi_0)$  на стороне рупора  $l_1$  для обеих задач с краевыми условиями (3), (3а) и (4), (4а), а вследствие соответствующих им равенств (5), (6) также и для плотности тока  $J(R, -\varphi_0)$  на стороне  $l_{-1}$ .

Для этого можно применить метод последовательных приближений. Так, нумеруя последовательные приближения токов и напряженностей индексами  $J^{(n)}, E^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$ , запишем равенства (17) и (18) следующим образом:

$$E^{(n)}(\xi) = -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} F_{\xi} \left\{ \frac{1}{v} \int_{l_1} J^{(n)}(R', \varphi_0) \times \times [ e^{iuR'} \pm e^{iR'(u \cos 2\varphi_0 - v \sin 2\varphi_0)} ] dR' \right\} \quad (19)$$

при  $\xi \in \Sigma$  и

$$J^{(n+1)}(R, \varphi_0) = -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_{\xi} \left\{ v \int_{\Sigma} E^{(n)}(\xi') e^{iu\xi'} d\xi' \right\} \mp \mp F_{\xi} \int_{l_1} J^{(n)}(R', \varphi_0) e^{iR'(u \cos 2\varphi_0 - v \sin 2\varphi_0)} dR' - -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_{\xi} \left[ v \int_{l_1} \left\{ \frac{\tau(R')}{p(R')} \right\} e^{iuR'} dR' \right] \quad (20)$$

при  $R \in l_1$ .

Эти два уравнения используются для нахождения последовательных приближений. Подставляя в правую часть уравнения (19)  $n$ -е приближение для тока  $J^{(n)}$ , находим из этого же уравнения  $n$ -е приближение для напряженности  $E^{(n)}$ ; после чего, подставляя эти значения  $J^{(n)}$  и  $E^{(n)}$  в правую часть уравнения (20), находим при помощи этого уравнения следующее приближение для тока –  $J^{(n+1)}$ . Подставляя  $J^{(n+1)}$  в правую часть уравнения (19) и

продолжая этот процесс, определяем последующие приближения.

Очевидно, если этот процесс сходится, то имеют место равенства

$$E(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} E^{(n)}(\xi),$$

$$J(R, \varphi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^{(n)}(R, \varphi_0), \quad (21)$$

после чего токи  $J(R, -\varphi_0)$  для обеих вспомогательных задач находятся при помощи соотношений (5) и (6).

В качестве нулевого приближения  $J^0(R, \varphi_0)$  можно взять приближение Кирхгофа (физическая оптика). Так, например, если первичная волна  $E^0, H^0$  – плоская и движется в направлении  $\mathbf{k}$ , т.е.

$$\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{i}_z A e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}, \quad H^{(0)} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ \frac{\mathbf{k}}{k} E^{(0)} \right],$$

где  $A$  – постоянное число (рис. 2), то

$$J^{(0)}(R, \varphi_0) = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{n} [\boldsymbol{\tau}\mathbf{k}]]. \quad (22)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{i}_z \tau$ , величина  $\tau$  определяется формулой (3) для первой вспомогательной задачи.

Для второй вспомогательной задачи

$$J^{(0)}(R, \varphi_0) = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{n} [\mathbf{p}\mathbf{k}]], \quad \mathbf{p} = -\mathbf{i}_z p, \quad (23)$$

а  $p$  определяется формулой (4).

В обеих формулах (22) и (23)  $\mathbf{n}$  – наружная нормаль к  $l_1$  (см. рис. 2), а  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ .

Напомним, что верхние строчки (знаки) в формулах (15) - (20) относятся к задаче с краевыми условиями (3), (3а), а нижние – к задаче с условиями (4), (4а). Найдя при помощи соотношений (19) - (21) токи на сторонах рупора  $l_1$  и  $l_{-1}$  (на  $l_{-1}$ , используя равенства (5), (6) и напряженности  $E(\xi)$  при  $\xi \in \Sigma$

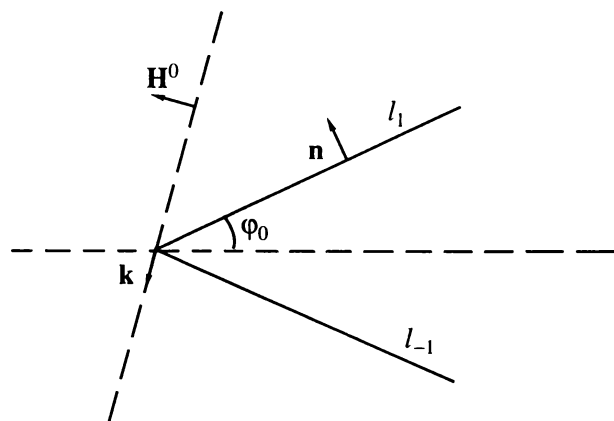


Рис. 2.

для обеих вспомогательных задач, найдем эти же величины для исходной интересующей нас задачи с краевыми условиями (2). Для этого сложим соответствующие величины (как это указывалось в начале статьи), найденные для указанных выше двух вспомогательных задач.

Зная токи на сторонах рупора, найдем рассеянное поле  $E, H$ , создаваемое ими, по известным формулам [2]. В частности, можно использовать первую из формул (7), которая справедлива для всего пространства; при этом в ней под плотностями токов  $J(R, \varphi_0)$  и  $J(R, -\varphi_0)$  следует понимать токи исходной задачи.

Работа поддержана грантом № J4Z100 Международного научного фонда и Правительства России.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // ДАН. 1970. Т. 182. № 5. С. 1007 - 1010.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. М., 1955. Ч. 1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 538.56

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЛЕММЕ  
ДЛЯ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 1997 г. Я. Н. Фельд

Представлено академиком А.Л. Микаэляном 31.03.95 г.

Поступило 31.03.95 г.

Эта лемма может быть получена в результате обобщения соответствующей леммы, данной в работе [1] для чисто монохроматических процессов:

$$\int_{(S)} \{ [\mathbf{E}_1(\omega)\mathbf{E}_2(\omega)] - \rho_0^2 [\mathbf{H}_1(\omega)\mathbf{H}_2(\omega)] \} \mathbf{ds} =$$

$$= \int_{(V)} \{ \mathbf{E}_1(\omega)\mathbf{j}_2^\mu(\omega) - \mathbf{E}_2(\omega)\mathbf{j}_1^\mu(\omega) +$$

$$+ \rho_0^2 (\mathbf{H}_1(\omega)\mathbf{j}_2(\omega) - \mathbf{H}_2(\omega)\mathbf{j}_1(\omega)) \} dV. \quad (1)$$

Здесь  $V$  – некоторая область, ограниченная снаружи или изнутри поверхностью  $S$ ,  $\mathbf{ds} = \mathbf{n}ds$ , где  $\mathbf{n}$  – внешняя по отношению к  $V$  нормаль к  $S$ ;  $\rho_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = \text{const}$  – волновое сопротивление среды, заполняющей область  $V$ . Векторы  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  – поля, возбуждаемые электрическими и магнитными токами, распределенными с плотностями  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_1^\mu$  и  $\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_2^\mu$  соответственно. Все эти токи и поля колеблются с одной и той же частотой  $\omega$ .

В рассматриваемом в настоящей работе общем случае токи и поля зависят от времени  $t$  произвольным образом и могут быть представлены в виде суммы монохроматических гармоник. Так, например:

$$\mathbf{E}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_1(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\mathbf{j}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_1(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

(2)

аналогичные разложения могут быть написаны и для остальных рассматриваемых векторов.

Если предположить, как это делается ниже, что все токи и поля равны нулю при  $t \leq 0$ , то обратные преобразования Фурье позволяют написать

$$\mathbf{E}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_1(t)e^{-i\omega t} dt;$$

$$\mathbf{j}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{j}_1(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

и т.д.

Поскольку уравнения Максвелла линейные и справедлив принцип суперпозиции, выполняется лемма (1) для каждой гармоники  $\omega$  в отдельности.

Перейдем от равенства (1), справедливого для преобразованных по Фурье величин (3), к соответствующему равенству для мгновенных значений векторов поля и токов. Для этого умножим равенство (1) на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по  $d\omega$  от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{(S)} \{ [\mathbf{E}_1(\omega)\mathbf{E}_2(\omega)] - \rho_0^2 [\mathbf{H}_1(\omega)\mathbf{H}_2(\omega)] \} \mathbf{ds} e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(V)} \{ \mathbf{E}_1(\omega)\mathbf{j}_2^\mu(\omega) - \mathbf{E}_2(\omega)\mathbf{j}_1^\mu(\omega) +$$

$$+ \rho_0^2 (\mathbf{H}_1(\omega)\mathbf{j}_2(\omega) - \mathbf{H}_2(\omega)\mathbf{j}_1(\omega)) \} dV e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Заменив в каждом члене полученного равенства один из сомножителей соответствующим ему “мгновенным” вектором при помощи формулы типа (3), меняя при этом в последней переменной интегрирования  $t$  на  $\tau$ , а для второго сомножителя используя формулу типа (2), найдем после

элементарных выкладок с изменением порядка интегрирования [2]

$$\int\int_{0(S)} \{[\mathbf{E}_1(\tau)\mathbf{E}_2(t-\tau)] - \rho_0^2[\mathbf{H}_1(\tau)\mathbf{H}_2(t-\tau)]\} d\mathbf{s} d\tau =$$

$$= \int\int_{0(V)} \{ \mathbf{E}_1(\tau)\mathbf{j}_2^\mu(t-\tau) - \mathbf{E}_2(\tau)\mathbf{j}_1^\mu(t-\tau) +$$

$$+ \rho_0^2(\mathbf{H}_1(\tau)\mathbf{j}_2(t-\tau) - \mathbf{H}_2(\tau)\mathbf{j}_1(t-\tau)) \} dV d\tau. \quad (5)$$

При этом мы учли, что все векторы равны нулю при  $t \leq 0$ . Отметим также, что все фигурирующие в формулах векторы зависят еще от пространственных координат, что явно не отмечается. Как следует из вывода, полученная лемма (5) справедлива для неоднородных изотропных сред с временной дисперсией при единственном условии, чтобы волновое сопротивление  $\rho_0$  не зависело от пространственных координат и частоты  $\omega$ .

Представляет интерес частный случай леммы (5), когда областью  $V$  является все бесконечное пространство  $V_\infty$ , а ограничивающая ее поверхность  $S$  совпадает со сферой бесконечного радиуса. При этом, если все токи находятся на конечном расстоянии, в лемме (1) обращается в нуль интеграл по поверхности  $S$  (см. [1], формула (8)), а следовательно (учитывая приведенный выше вывод), исчезает поверхностный интеграл в полученной лемме (5), она приобретает вид

$$\int\int_{0(V_\infty)} \{ \mathbf{E}_1(\tau)\mathbf{j}_2^\mu(t-\tau) - \mathbf{E}_2(\tau)\mathbf{j}_1^\mu(t-\tau) +$$

$$+ \rho_0^2(\mathbf{H}_1(\tau)\mathbf{j}_2(t-\tau) - \mathbf{H}_2(\tau)\mathbf{j}_1(t-\tau)) \} dV d\tau = 0. \quad (6)$$

В леммах (5) и (6) можно поменять местами аргументы в каждом из входящих туда членов. Используем лемму (6) для получения теорем взаимности для диполей и конечных антенн.

Так, для двух электрических диполей с моментами  $\mathbf{p}_1(t)$  и  $\mathbf{p}_2(t)$ , удовлетворяющими условиям

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{p}_2(t) \text{ при } t \leq 0, \quad (7)$$

любым образом расположенных в пространстве и возбуждающих поля  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  соответственно, лемма (6) принимает вид

$$\int_0^t \{ \mathbf{H}_1(\tau)I_2(t-\tau)d\mathbf{l}_2 - \mathbf{H}_2(\tau)I_1(t-\tau)d\mathbf{l}_1 \} d\tau = 0. \quad (8)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  – полные токи диполей в режиме передачи, а  $d\mathbf{l}_1$  и  $d\mathbf{l}_2$  – их длины. Если учесть очевидные соотношения

$$I_1 d\mathbf{l}_1 = \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t}, \quad I_2 d\mathbf{l}_2 = \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t},$$

то равенству (8) можно придать следующий вид:

$$\int_0^t \mathbf{H}_1(\tau) \frac{\partial \mathbf{p}_2(t-\tau)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \mathbf{H}_2(\tau) \frac{\partial \mathbf{p}_1(t-\tau)}{\partial t} d\tau.$$

Учитывая начальные условия типа (7), можно записать его следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{H}_1(\tau)\mathbf{p}_2(t-\tau)d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{H}_2(\tau)\mathbf{p}_1(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда сразу получаем равенство

$$\int_0^t \mathbf{H}_1(\tau)\mathbf{p}_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{H}_2(\tau)\mathbf{p}_1(t-\tau)d\tau, \quad (9)$$

где  $\mathbf{H}_1(\mathbf{H}_2)$  следует брать в точке нахождения второго (первого) диполя. Это и есть искомая теорема взаимности для электрических диполей при любых законах изменения их моментов во времени, удовлетворяющих начальным условиям (7).

Придадим теореме взаимности еще один вид. Для этого введем понятия наведенных магнитодвижущих сил при помощи формул

$$\mathcal{E}_1^\mu = \mathbf{H}_2 d\mathbf{l}_1, \quad \mathcal{E}_2^\mu = \mathbf{H}_1 d\mathbf{l}_2, \quad (10)$$

после чего лемма (8) примет вид

$$\int_0^t \mathcal{E}_2^\mu(\tau)I_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t \mathcal{E}_1^\mu(\tau)I_1(t-\tau)d\tau. \quad (11)$$

Подчеркнем, что токи здесь относятся к соответствующим диполям в режиме передачи, а наведенные магнитодвижущие силы в режиме приема. Теорема (11) справедлива как для электрических диполей, так и для любых конечных антенн. В последнем случае фигурирующие в ней токи и наведенные магнитодвижущие силы измеряются на клеммах соответствующих антенн, причем первые в режиме передачи, а вторые в режиме приема. Эта теорема справедлива при любых сопротивлениях приемников и генераторов, подключаемых к антеннам в соответствующих режимах.

Теорема взаимности для двух магнитных диполей с моментами  $\mathbf{m}_1(t)$  и  $\mathbf{m}_2(t)$ , удовлетворяющими условиям

$$\mathbf{m}_1(t) = \mathbf{m}_2(t) = 0 \text{ при } t \leq 0, \quad (12)$$

может быть получена при помощи леммы (6) аналогичным методом; в результате найдем

$$\int_0^t \mathbf{E}_1(\tau) \mathbf{m}_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{E}_2(\tau) \mathbf{m}_1(t-\tau) d\tau \quad (13)$$

или

$$\int_0^t \mathcal{E}_2(\tau) I_2^\mu(t-\tau) d\tau = \int_0^t \mathcal{E}_1(\tau) I_1^\mu(t-\tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$\mathcal{E}_2 = \mathbf{E}_1 d\mathbf{l}_2, \quad \mathcal{E}_1 = \mathbf{E}_2 d\mathbf{l}_1 \quad (15)$$

– наведенные электродвижущие силы в соответствующих диполях в режиме приема, а  $I_2^\mu$  и  $I_1^\mu$  – полные магнитные токи диполей в режиме передачи. Если поле  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  возбуждается электрическим диполем с моментом  $\mathbf{p}_1$ , а поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  – магнитным с моментом  $\mathbf{m}_2$ , то из леммы (6) следует

$$\int_0^t \mathbf{E}_1(\tau) \mathbf{m}_2(t-\tau) d\tau = \rho_0^2 \int_0^t \mathbf{H}_2(\tau) \mathbf{p}_1(t-\tau) d\tau \quad (16)$$

или

$$\int_0^t \mathcal{E}_2(\tau) I_2^\mu(t-\tau) d\tau = \rho_0^2 \int_0^t \mathcal{E}_1^\mu(\tau) I_1(t-\tau) d\tau. \quad (17)$$

В равенствах (13) и (16)  $\mathbf{E}_1$  – напряженность, создаваемая первым диполем в месте нахождения второго, а  $\mathbf{E}_2(\tau)$  и  $\mathbf{H}_2(\tau)$  – напряженности, создаваемые вторым диполем в месте нахождения первого.

Теоремы взаимности (14) и (17) справедливы также для конечных антенн с магнитными токами (теорема (14)) и электрическими и магнитными (теорема (17)). При этом входящие в них величины относятся к клеммам соответствующих антенн, токи в режиме передачи, а электро- и магнитодвижущие силы в режиме приема.

Напомним, что все полученные теоремы справедливы при  $\rho_0 = \text{const}$  для рассматриваемых сред. Лемму (5) можно также использовать для решения гранично-начальных задач электродинамики. Рассмотрим внешнюю задачу нахождения поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в бесконечной области  $V^e$ , ограниченной изнутри замкнутой поверхностью  $S$ , внутри которой находятся все источники (токи) поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ . В области  $V^e$  будем полагать  $\rho_0 = \text{const}$ , а внутри  $S$  среда может иметь параметры  $\epsilon, \mu$ , являющиеся любыми функциями пространственных координат. Ограничимся нулевыми начальными условиями для искомого поля внутри  $V^e$  типа

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{H}(t) = 0 \quad \text{при } t \leq 0. \quad (18)$$

Введем еще вспомогательное поле  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$ , при расчете которого будем считать  $\rho_0 = \text{const}$  во всем пространстве и равным  $\rho_0$ , заданному выше в области  $V^e$  для рассматриваемой задачи. Источником поля  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  будем считать магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}(t)$ , расположенный в точке наблюдения  $q$  в области  $V^e$  и удовлетворяющий начальным условиям вида

$$\mathbf{m}(t) = \begin{cases} \mathbf{i}_q & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad \mathbf{m}'(t) = \delta(t+0)\mathbf{i}_q, \quad (19)$$

где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака, а  $\mathbf{i}_q$  – единичный вектор, не зависящий от  $t$ .

Применим лемму (5) к полям  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  в области  $V^e$ . Так как в последней имеется единственный источник – диполь, то из нее сразу следует

$$\int_0^t \mathbf{E}(\tau) I^\mu(t-\tau) d\mathbf{l} d\tau = \int_0^t \int_{0(S)} \{ [\mathbf{E}(\tau)\mathbf{e}(t-\tau)] - \rho_0^2 [\mathbf{H}(\tau)\mathbf{h}(t-\tau)] \} d\mathbf{s} d\tau. \quad (20)$$

Здесь  $I^\mu$  – полный ток вспомогательного магнитного диполя, а  $d\mathbf{l}$  – его длина. Используя известное соотношение

$$I^\mu d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m}(t)$$

и условия (19), придадим равенству (20) окончательный вид

$$\mathbf{E}(t)\mathbf{i}_q = \int_0^t \int_{0(S)} \{ [\mathbf{E}(\tau)\mathbf{e}(t-\tau)] - \rho_0^2 [\mathbf{H}(\tau)\mathbf{h}(t-\tau)] \} d\mathbf{s} d\tau, \quad (21)$$

где  $d\mathbf{s}$  направлено внутрь поверхности  $S$ . Поскольку направление единичного вектора  $\mathbf{i}_q$  может быть любым, то формула (21) определяет вектор  $\mathbf{E}(t)$  в любой точке  $q$  области  $V^e$  через значения тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на  $S$ . Если при расчете поля  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  поверхность  $S$  полагать идеально магнитопроводящей, на которой  $[\mathbf{h}\mathbf{n}] = 0$ , то формула (21) сведется к следующей:

$$\mathbf{i}_q \mathbf{E}(t) = \int_0^t \int_{0(S)} [\mathbf{E}(\tau)\mathbf{e}(t-\tau)] d\mathbf{s} d\tau, \quad (22)$$



дающей решение первой гранично-начальной задачи. Если при расчете поля  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  считать поверхность  $S$  идеально электрически проводящей, на которой  $[\mathbf{en}] = 0$ , то формула (21) принимает вид

$$\mathbf{i}_q \mathbf{E}(t) = -\rho_0^2 \int_0^t \int_{(S)} [\mathbf{H}(\tau) \mathbf{h}(t - \tau)] \mathbf{ds} d\tau \quad (23)$$

и дает решение второй гранично-начальной задачи. Для нахождения вектора  $\mathbf{H}(t)$  нужно заменить магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}(t)$  вспомогательным электрическим диполем с моментом  $\mathbf{p}(t)$ , после чего получим, используя лемму (5), аналогичные формулы для  $\mathbf{H}(t)$ .

Для вывода формул, аналогичных полученным выше, в случае полей с ненулевыми начальными условиями следует заменить преобразование Фурье преобразованием Лапласа для перехода от леммы (1) к соответствующей ей лемме для мгновенных негармонических полей и токов так, как это сделано в работе [2].

Данная работа была поддержана Международным научным фондом и правительством России (грант J4Z100).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // ДАН. 1992. Т. 324. № 2. С. 321–323.
2. Фельд Я.Н. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 1. С. 38.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.371.332.4

### ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ О РАССЕЙЯНИИ ВОЛН

© 1996 г. **Я. Н. Фельд**, Н. Г. Пономарев

Поступила в редакцию 30.05.95 г.

При использовании обобщенного вариационного принципа получены стационарные формулы для диаграмм рассеяния металлических тел, вариация которых обращается в нуль для точных значений поверхностных токов, возбуждаемых на теле первичной падающей волной.

Рассеяние электромагнитных волн хорошо проводящими (металлическими) телами определяется поверхностными электрическими токами, наведенными падающей первичной волной  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$ , на их поверхность  $s$ . Последняя может быть замкнутой или разомкнутой (зеркало), а также многосвязной (группа тел). Плотность  $\vec{K}$  поверхностного тока удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{E}\vec{K} = -\vec{E}_t^0 \text{ на } s, \quad (1)$$

где  $\mathcal{E}$  – интегродифференциальный оператор:

$$\mathcal{E} = (\text{grad div} + k^2)_t \int_{(s)} ds' \frac{\exp(-ikr)}{4\pi i \omega \epsilon r}. \quad (1')$$

Здесь индекс  $t$  указывает, что после операции  $(\text{grad div} + k^2)$  результат следует спроектировать на плоскость, касательную к  $s$  в точке наблюдения  $q$ ;  $q'$  – точка интегрирования;  $r$  – расстояние между точками  $q$  и  $q'$ ; обе они лежат на  $s$ .

Компоненты векторной диаграммы рассеяния  $\vec{F}$  определяются известными формулами

$$F_{\vec{\theta}} = \vec{i}_{\vec{\theta}} \int_{(s)} \vec{K} \exp(ikr \cos \gamma) ds; \quad (2)$$

$$F_{\vec{\varphi}} = \vec{i}_{\vec{\varphi}} \int_{(s)} \vec{K} \exp(ikr \cos \gamma) ds,$$

где  $\vec{i}_{\vec{\theta}}$  и  $\vec{i}_{\vec{\varphi}}$  – единичные орты сферической системы координат  $\vec{R}, \vec{\theta}, \vec{\varphi}$  в точке наблюдения  $g(\vec{R}, \vec{\theta}, \vec{\varphi})$ , лежащей в дальней зоне;  $\rho$  – расстояние между началом этой системы координат и точкой интегрирования  $q(R, \theta, \varphi)$ ;  $\gamma$  – угол между направлениями на точки  $g$  и  $q$ , проведенными из начала координат (рисунок).

Таким образом,  $F_{\vec{\theta}}, F_{\vec{\varphi}}, \vec{i}_{\vec{\theta}}$  и  $\vec{i}_{\vec{\varphi}}$  являются функциями углов  $\vec{\theta}, \vec{\varphi}$  точки  $g$ , которые будем считать заданными параметрами. Орты  $\vec{i}_{\vec{\theta}}$  и  $\vec{i}_{\vec{\varphi}}$  в любой точке  $q$  поверхности  $s$  можно разложить на касательную и нормальную к  $s$  составляющие, после чего их можно представить в виде следующих сумм:

$$\vec{i}_{\vec{\theta}} = \vec{i}_{\vec{\theta}t}(q) + \vec{i}_{\vec{\theta}n}(q), \quad \vec{i}_{\vec{\varphi}} = \vec{i}_{\vec{\varphi}t}(q) + \vec{i}_{\vec{\varphi}n}(q). \quad (3)$$

С учетом этих выражений, формулы (2) можно переписать в виде

$$F_{\vec{\theta}} = \int_{(s)} \vec{K} \vec{i}_{\vec{\theta}t} \exp(ikr \cos \gamma) ds, \quad (4)$$

$$F_{\vec{\varphi}} = \int_{(s)} \vec{K} \vec{i}_{\vec{\varphi}t} \exp(ikr \cos \gamma) ds.$$

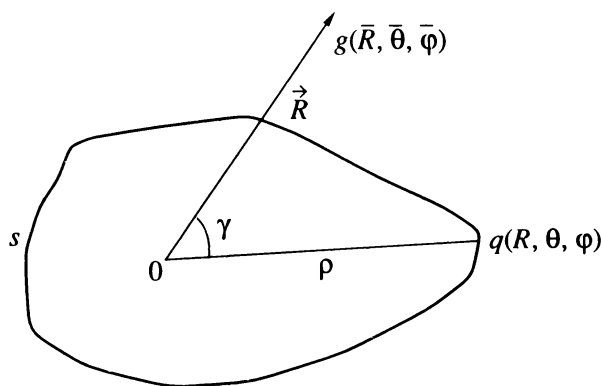
Введем псевдоскалярное произведение

$$(\vec{A}, \vec{B}) = \int_{(s)} \vec{A} \vec{B} ds, \quad (5)$$

для которого оператор  $\mathcal{E}$  симметричен, т.е.

$$(\mathcal{E}\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \mathcal{E}\vec{B}) \quad (5')$$

– лемма Лоренца,  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  – векторы, касательные к  $s$ .



Система координат.

Тогда формулы (4) можно записать следующим образом:

$$F_{\vec{\theta}} = (\vec{K} \vec{i}_{\vec{\theta}}, \exp(ik\rho \cos\gamma)), \quad (6)$$

$$F_{\vec{\varphi}} = (\vec{K} \vec{i}_{\vec{\varphi}}, \exp(ik\rho \cos\gamma)). \quad (7)$$

Для расчета этих компонент диаграммы рассеяния можно использовать функционалы [1, 2]

$$F_{\vec{\theta}} = \frac{(\vec{K} \vec{i}_{\vec{\theta}}, \exp(ik\rho \cos\gamma)) (-\vec{E}^0 \vec{I}^{\theta})}{(\mathcal{E} \vec{K}, \vec{I}^{\theta})}, \quad (8)$$

$$F_{\vec{\varphi}} = \frac{(\vec{K} \vec{i}_{\vec{\varphi}}, \exp(ik\rho \cos\gamma)) (-\vec{E}^0 \vec{I}^{\varphi})}{(\mathcal{E} \vec{K}, \vec{I}^{\varphi})}. \quad (9)$$

Эти функционалы стационарны при значении  $\vec{K}$ , удовлетворяющем уравнению (1), и  $\vec{I}^{\theta}$  и  $\vec{I}^{\varphi}$ , являющихся решениями уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \vec{I}^{\theta} &= \vec{i}_{\vec{\theta}}, \exp(ik\rho \cos\gamma) \text{ и} \\ \mathcal{E} \vec{I}^{\varphi} &= \vec{i}_{\vec{\varphi}}, \exp(ik\rho \cos\gamma) \text{ на } s. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом, как легко видеть, выражения (8) и (9) совпадают соответственно с (6) и (7).

При подстановке в (8) и (9) приближенных значений  $\vec{K}$ ,  $\vec{I}^{\theta}$  и  $\vec{I}^{\varphi}$  получаются более точные значения для  $F_{\vec{\theta}}$  и  $F_{\vec{\varphi}}$ , чем при непосредственном использовании формул (2).

Найдем приближенные значения для  $\vec{K}$ ,  $\vec{I}^{\theta}$  и  $\vec{I}^{\varphi}$  на  $s$ . Для этого используем приближение Кирхгофа, справедливое для поверхностей, радиусы кривизны которых велики по сравнению с длиной волны:

$$\vec{K} = \begin{cases} 2 \left[ \vec{n} \vec{H}^0 \right] \text{ на освещенной стороне } s, \\ 0 \text{ в области тени,} \end{cases} \quad (11)$$

$$\vec{I}^{\theta} = \begin{cases} (2/\rho_0) \exp(ik\rho \cos\gamma) [\vec{n} \vec{i}_{\vec{\theta}}] \\ \text{на освещенной стороне } s, \\ 0 \text{ в области тени.} \end{cases} \quad (12)$$

Формула (12) получена в результате следующих соображений. Величину  $\vec{i}_{\vec{\theta}} \exp(ik\rho \cos\gamma)$  можно трактовать как электрический вектор первичной плоской волны, распространяющейся в направлении  $\vec{i}_{\vec{R}}$ . В этом случае первое равенство (10) определяет плотность тока  $\vec{I}^{\theta}$ , возбуждаемого ею на идеально проводящей поверхности  $s$ .

Вследствие сказанного выше приближение Кирхгофа для  $\vec{I}^{\theta}$  на  $s$  определяется формулой типа (11). При этом необходимо учитывать, что освещенная часть  $s$  определяется из направления распространения первичной волны, совпадающего с ортом  $-\vec{i}_{\vec{R}}$ . С учетом выражения для электрического вектора первичной волны, приведенного выше, в результате элементарных вычислений получаем формулу (12).

Аналогичные вычисления приводят к следующей формуле для  $\vec{I}^{\varphi}$ :

$$\vec{I}^{\varphi} = \begin{cases} (2/\rho_0) \exp(ik\rho \cos\gamma) [\vec{i}_{\vec{\theta}} \vec{n}] \\ \text{на освещенной стороне } s, \\ 0 \text{ в области тени.} \end{cases} \quad (13)$$

В формулах (12), (13)  $\rho_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ;  $\vec{n}$  – вектор наружной нормали к  $s$  в точке, для которой находятся плотности токов. Последнее относится также к величинам  $\rho$  и  $\gamma$ . Однако орты  $\vec{i}_{\vec{R}}$ ,  $\vec{i}_{\vec{\theta}}$ ,  $\vec{i}_{\vec{\varphi}}$  относятся к точке  $g$ , находящейся в дальней зоне, для которой определяется диаграмма рассеяния.

Рассмотрим частные случаи решения задачи.

**Двухмерные задачи.** В случае, когда тело представляет собой бесконечный вдоль оси  $z$  цилиндр произвольного сечения или бесконечную вдоль оси  $z$  металлическую разомкнутую поверхность, сечение которой плоскостью  $z = \text{const}$  не зависит от выбора  $z$ , все приведенные формулы существенно упрощаются.

Если первичное поле  $\vec{E}^0$ ,  $\vec{H}^0$  не зависит от координаты  $z$ , то и рассеянное поле и ток на поверхности тела также не зависят от  $z$ , и мы приходим к двумерной задаче. При рассмотрении последней используется цилиндрическая система координат  $R, \varphi, z$  и диаграмма рассеяния зависит только от одной координаты  $\varphi$ .

*E-поляризация.* Если вектор  $\vec{E}^0$  поляризован параллельно оси  $z$ , т.е.  $E^0 = E_z^0$ , то и вектор  $\vec{E}^r$  рассеянного поля, а следовательно, и диаграмма  $\vec{F}$ , и плотность тока  $\vec{K}$  имеют одну  $z$ -компоненту ( $F = F_z, K = K_z$ ). Формулы (4) при этом сводятся к следующей:

$$F = \int_{(s)} K \exp(ik\rho \cos\gamma) ds. \quad (14)$$

Здесь  $s$  – контур, образованный пересечением поверхности тела с плоскостью  $z = 0$ ;  $\rho$  – расстояние между осью  $z$  и точкой интегрирования  $q'$ , лежащей на этом контуре;  $\gamma$  – угол между направлениями на точку наблюдения  $g$  (лежащую в плоскости  $z = 0$ ) и точку  $q'$ , проведенными из начала координат (ось  $z$ ) и также лежащими в плоскости  $z = 0$ . Интегрирование по  $ds'$  проводится вдоль контура  $s$ . Если в определении (5) под  $s$  понимать указанный выше контур, то вместо (6) и (7) получим

$$F = K \exp(ik\rho \cos\gamma), \quad (15)$$

а стационарные функционалы (8), (9) сведем к одному:

$$F = \frac{(K \exp(ik\rho \cos\gamma))(-E^0 I)}{(\mathcal{E}K, I)}, \quad (16)$$

где  $K$  и  $I$  – решения уравнений

$$\mathcal{E}K = -E^0; \quad \mathcal{E}I = \exp(ik\rho \cos\gamma) \text{ на } s, \quad (17)$$

$$\mathcal{E} \equiv -\frac{\omega\mu}{4} \int_{(s)} ds' H_0^{(2)}(kr). \quad (17')$$

Приближенные (по Кирхгофу) значения  $K$  и  $I$ , как это следует из формул (11), (12), имеют следующий вид:

$$K = \begin{cases} 2 \left[ \vec{n} \vec{H}^0 \right] i_z & \text{на освещенной стороне } s, \\ 0 & \text{в области тени,} \end{cases} \quad (18)$$

$$I = \begin{cases} (2/\rho_0) \exp(ik\rho \cos\gamma) [\vec{i}_{\varphi} \vec{n}] i_z & \\ \text{на освещенной стороне } s, & \\ 0 & \text{в области тени.} \end{cases} \quad (19)$$

Здесь  $\vec{i}_{\varphi}$  – единичный орт цилиндрической системы координат в точке  $g$ , а  $\vec{n}$  – нормаль к контуру  $s$ ,

лежащая в плоскости  $z = 0$  в точке  $s$ , для которой определяются плотности токов.

*H-поляризация.* При этой поляризации вектор  $\vec{H}^0$  первичного поля имеет одну  $z$ -компоненту  $H^0 = H_z^0$ , а электрические векторы первичного и рассеянного полей ее не имеют. Очевидно также, что  $K_z = 0$  на  $s$  и

$$F \equiv F_{\varphi}(\varphi) = \int_{(s)} \vec{K} \vec{i}_{\varphi} \exp(ik\rho \cos\gamma) ds'. \quad (20)$$

Здесь интегрирование проводится по контуру  $s$ , лежащему в плоскости  $z = 0$ ,  $\vec{i}_{\varphi}$  – векторная составляющая орта  $\vec{i}_{\varphi}$  (взятого в точке наблюдения  $g$ ), касательная к контуру  $s$  в точке интегрирования  $q'$ .

Формулы (15) и (16) принимают теперь вид

$$F = \vec{K} \vec{i}_{\varphi} \exp(ik\rho \cos\gamma), \quad (21)$$

$$F = \frac{\vec{K} \vec{i}_{\varphi} \exp(ik\rho \cos\gamma) (-\vec{E}^0 I)}{(\mathcal{E} \vec{K}, \vec{I})}. \quad (22)$$

Здесь  $\vec{K}$  и  $\vec{I}$  удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{E} \vec{K} = -\vec{E}^0, \quad \mathcal{E} \vec{I} = \vec{i}_{\varphi} \exp(ik\rho \cos\gamma) \text{ на } s, \quad (23)$$

где

$$\mathcal{E} \equiv -\frac{1}{\epsilon 4\omega} (\text{grad div} + k^2)_t \int_{(s)} ds' H^{(2)}(kr). \quad (23')$$

Индекс  $t$  показывает, что после операции  $(\text{grad div} + k^2)$  результат следует спроектировать на линию, касательную к контуру в точке наблюдения  $q \in s$ .

Плотности токов  $K$  и  $I$  определяются (в приближении Кирхгофа) формулами

$$\vec{K} = \begin{cases} 2 \left[ \vec{n} \vec{H}^0 \right] & \text{на освещенной стороне } s, \\ 0 & \text{в области тени,} \end{cases} \quad (24)$$

$$\vec{I} = \begin{cases} (2/\rho_0) \exp(ik\rho \cos\gamma) [\vec{n} i_z] & \\ \text{на освещенной стороне } s, & \\ 0 & \text{в области тени.} \end{cases} \quad (25)$$

*Рассеяние волн круговым цилиндром. E-поляризация.* Поскольку имеется точное решение для вычисления диаграммы рассеяния плоской волны круговым цилиндром, эта задача наиболее пригодна для проверки эффективности изложенных выше методов.

Пусть на такой цилиндр радиусом  $a$  падает плоская волна

$$E^0 = E_z^0 = \exp(-ikR \cos \varphi), \quad (26)$$

т.е. она распространяется в направлении  $\varphi = 0$  перпендикулярно оси  $z$ .

Компоненты магнитного вектора при этом равны

$$\begin{aligned} H_R^0 &= -(1/\rho_0)E_z^0 \sin \varphi, \\ H_\varphi^0 &= -(1/\rho_0)E_z^0 \cos \varphi, \quad H_z^0 = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

а формулы (18), (19) сводятся к следующим:

$$K = K_z = \begin{cases} -(2/\rho_0)E_z^0 \cos \varphi & \text{на освещенной стороне } s, \\ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi, \\ 0 & \text{в области тени, } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (28)$$

$$I = I_z = \begin{cases} -(2/\rho_0) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) \exp(ika \cos(\varphi - \bar{\varphi})), & \bar{\varphi} - \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \bar{\varphi}, \\ 0, & \bar{\varphi} + \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi + \bar{\varphi}. \end{cases} \quad (29)$$

Стационарный функционал (16) для диаграммы рассеяния при учете (17') имеет вид

$$F(\varphi) = \frac{\int_{\bar{\varphi} - \pi/2}^{\bar{\varphi} + \pi/2} \cos \varphi \exp[ika[\cos(\varphi - \bar{\varphi}) - \cos \varphi]] d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) \exp[ika[\cos(\varphi - \bar{\varphi}) - \cos \varphi]] d\varphi}{\frac{\omega\mu}{4} \int_{\bar{\varphi} - \pi/2}^{\bar{\varphi} + \pi/2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} H_0^{(2)}\left(2ka \sin \frac{|\varphi - \varphi'|}{2}\right) \cos \varphi' \exp(ika \cos \varphi') \cos(\varphi - \bar{\varphi}) \exp(ika \cos(\varphi - \bar{\varphi})) d\varphi' d\varphi}$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н. // РЭ. 1962. Т. 7. № 1. С. 53.

2. Фельд Я.Н. // Радиотехника. 1989. № 11. С. 61.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 538.56

### ИЗЛУЧЕНИЕ БИКОНУСА, ВОЗБУЖДАЕМОГО ВКЛЮЧЕННОЙ МЕЖДУ КОНУСАМИ СТОРОННЕЙ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛОЙ

© 1996 г. **Я. Н. Фельд**

Поступила в редакцию 05.09.95 г.

Методом вариации постоянных решена задача об излучении металлического хорошо проводящего биконуса, возбуждаемого генератором с заданной электродвижущей силой, включенным между конусами. Решение для излученного поля дано в виде рядов по парциальным волнам с коэффициентами, зависящими от одной выделенной переменной. В качестве последней использованы сферические координаты:  $\theta$  или  $r$ .

#### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим хорошо проводящий биконус, состоящий из верхнего конуса, поверхность которого задается соотношениями

$$\theta = \theta_0 \quad (\theta_0 < \pi/2), \quad a \leq r < \infty \quad (a > 0), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1)$$

а также

$$r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1')$$

и нижнего конуса:

$$\theta = \pi - \theta_0, \quad a \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2)$$

и

$$r = a, \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2')$$

(рис. 1). Здесь  $r, \theta, \varphi$  – сферическая система координат с осью  $z$ , совпадающей с осью биконуса.

Будем полагать, что генератор, возбуждающий биконус, имеет внутреннее сопротивление, равное нулю, и электродвижущую силу (ЭДС)  $\mathcal{E}$  (рис. 1).

Прежде всего перейдем от схемы, описанной выше (рис. 1), к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 2, где поверхности (1') и (2') вместе с генератором заменены идеально проводящей поверхностью  $s$ , описываемой соотношениями

$$r = a, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3)$$

на которой распределены заданные магнитные токи с поверхностной плотностью, равной

$$\vec{K}^\mu = \begin{bmatrix} \vec{E}^{\text{ст}} \\ i_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь

$$\vec{E}^{\text{ст}} = \frac{\mathcal{E}}{a(\pi - 2\theta_0)} \vec{i}_\theta, \quad \vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi \quad (4')$$

– единичные орты, направленные вдоль соответствующих координатных линий сферической системы координат. Доказать справедливость такой

замены, т.е. перехода от схемы, изображенной на рис. 1, к схеме на рис. 2, очень просто.

Действительно, нарисовав картину силовых электрических линий, создаваемых генератором на геометрической поверхности (3) для схемы на рис. 1, при использовании теоремы 1 для первой граничной задачи электродинамики [1, с. 167] приходим к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 2. Последней схемой и будем пользоваться для расчета поля, излучаемого биконусом, возбуждаемым генератором с ЭДС  $\mathcal{E}$ .

Поле, возбуждаемое токами (4), распределенными на поверхности (3), в присутствии биконуса, обозначим  $\vec{E}, \vec{H}$ . Поскольку ток (4) кольцевой и по величине (но не по направлению) не зависят от

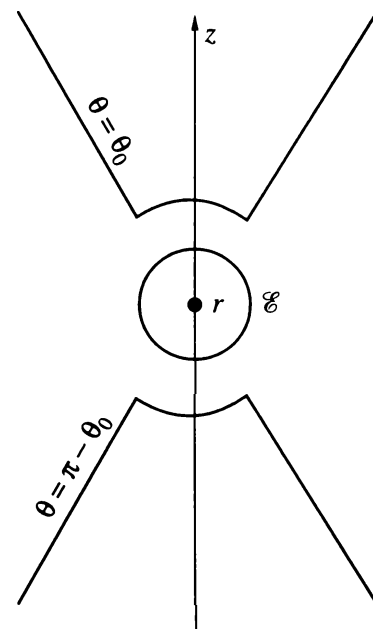


Рис. 1.

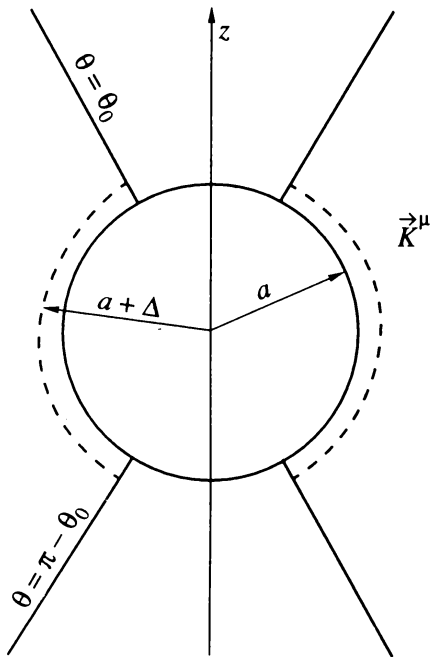


Рис. 2.

угла  $\varphi$ , сферические компоненты поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  также не зависят от  $\varphi$ . Для нахождения этого поля используем “метод вариации постоянных” [2–4]. При этом решение строится в виде ряда по парциальным волнам с коэффициентами, зависящими от одной “выделенной” переменной. В качестве последней следует использовать  $\theta$  при  $|ka| \gg 1$  ( $k$  – волновое число) и  $r$  при  $|ka| \sim 1$  или меньше. Парциальные волны должны удовлетворять однородным условиям Максвелла внутри интервала изменения выделенной переменной, краевому условию задачи на проводящих поверхностях и на одном конце интервала, а на другом конце или за ним должны находиться источники, возбуждающие эту волну. Следует учитывать волны, источники которых находятся как у одного конца интервала, так и у другого. Ниже используются практическая система единиц и зависимость от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

### 1. РЕШЕНИЕ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $\theta$

Парциальные волны электрического типа в учетом независимости от угла  $\varphi$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)V, & E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}, & E_\varphi = 0, \\ H_r = 0, & H_\theta = 0, & H_\varphi = \frac{ik}{\rho r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, & k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}. \end{cases} \quad (5)$$

В соответствии со сказанным во Введении потенциалы Дебая определяются выражениями

$$V = \zeta_\nu(kr)[P_\nu(-\cos\theta) + A_\nu P_\nu(\cos\theta)],$$

$$\zeta_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{\nu+1/2}^1(x), \quad (6)$$

где  $\nu$  и  $A_\nu$  – корни уравнений

$$\zeta'_\nu(ka) = 0 \text{ и } P_\nu(-\cos(\pi - \theta_0)) + A_\nu P_\nu(\cos(\pi - \theta_0)) = 0. \quad (7)$$

Учитываются только корни  $\nu$ , расположенные в первом квадранте комплексной плоскости. При этом соответствующие парциальные волны имеют источники, находящиеся на полуоси  $\theta = 0$ , и удовлетворяют краевым условиям  $E_\theta = 0$  на шаре  $r = a$  и  $E_r = 0$  на конусе  $\theta = \pi - \theta_0$ .

Волны, источники которых расположены на полуоси  $\theta = \pi$ , определяются потенциалами

$$V = \zeta_\kappa(kr)[P_\kappa(\cos\theta) + B_\kappa P_\kappa(-\cos\theta)], \quad (8)$$

где  $\kappa$  и  $B_\kappa$  – корни уравнений

$$\zeta'_\kappa(ka) = 0, \quad P_\kappa(\cos\theta_0) + B_\kappa P_\kappa(-\cos\theta_0) = 0 \quad (9)$$

и учитываются только корни  $\kappa$ , лежащие в первом квадранте. При этом выполняются краевые условия  $E_\theta = 0$  на шаре  $r = a$  и  $E_r = 0$  на конусе  $\theta = \theta_0$ .

Парциальные волны магнитного типа определяются формулами

$$\begin{cases} E_r = 0, & E_\theta = 0, & E_\varphi = -\frac{ik\rho}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ H_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)U, & H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, & H_\varphi = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку магнитный вектор не имеет  $\varphi$ -й составляющей, а возбуждающий магнитный ток (4) имеет только одну  $\varphi$ -ю составляющую, волны магнитного типа не могут им возбуждаться и биполь, изображенный на рис. 2, излучает только волны электрического типа (5).

Существует счетное множество подобных парциальных волн. Поэтому их можно перенумеровать при помощи индекса  $p$ , пробегающего все целочисленные значения кроме нуля. Сделаем это

при условии, что парциальные волны  $\vec{E}^{(p)}$ ,  $\vec{H}^{(p)}$  при  $p > 0$  определяются потенциалами типа (6), а при  $p < 0$  – потенциалами (8). Одновременно будем полагать, что волны  $\vec{E}^{(p)}$ ,  $\vec{H}^{(p)}$  и  $\vec{E}^{(-p)}$ ,  $\vec{H}^{(-p)}$  ( $p > 0$ ) различаются только заменой  $[P_\nu(-\cos\theta) + A_\nu P_\nu(\cos\theta)]$  на  $[P_\kappa(\cos\theta) + B_\kappa P_\kappa(-\cos\theta)]$  в выражениях для соответствующих потенциалов.

Обозначим  $s(\theta)$  поверхность усеченного конуса  $\theta = \text{const}$ ,  $r \geq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Для введенных парциальных волн электрического типа справедливы следующие условия ортогональности:

$$\int_{s(\theta)} [E^{(p)} H^{(q)}] \vec{ds} = 0 \text{ при } p \neq \pm q \quad (11)$$

$$(\theta_0 < \theta \leq \pi - \theta_0).$$

Доказательство практически не отличается от приведенных в [2, 3]. Применяя лемму Лоренца к области, ограниченной поверхностями  $s(\theta_1)$ ,  $s(\theta_2)$  ( $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi - \theta_0$ ) и частью сферы  $r = a$ , получим

$$\int_{s(\theta_1)} \left\{ \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] - \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(p)} \right] \right\} \vec{ds} =$$

$$= \int_{s(\theta_2)} \left\{ \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] - \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(p)} \right] \right\} \vec{ds}. \quad (12)$$

При этом учтено, что оба поля удовлетворяют условию  $E_t^{(p)} = E_t^{(q)} = 0$  на сфере  $r = a$ .

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Индексы  $p$  и  $q$  имеют один знак. В этом случае, устремляя  $\theta_1 \rightarrow \theta_0$  (при  $p, q < 0$ ) или  $\theta_2 \rightarrow \pi - \theta_0$  (при  $p, q > 0$ ), приведем (12) к виду

$$\int_{s(\theta)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] \vec{ds} = \int_{s(\theta)} \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(p)} \right] \vec{ds}, \quad (13)$$

где индекс у  $\theta$  опущен. Если  $p \neq q$ , то, как следует из (5)–(8), левая и правая части (13) имеют в качестве множителей различные функции от  $\theta$  и, следовательно, должны быть равны нулю.

2. Индексы  $p$  и  $q$  имеют различные знаки. В этом случае согласно п. 1

$$\int_{s(\theta)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(-q)} \right] \vec{ds} = 0 \text{ при } p \neq -q. \quad (14)$$

Если теперь в этом равенстве заменить  $-q$  на  $q$ , то изменится только множитель, зависящий от  $\theta$ , содержащийся в левой части (14) (см. (5), (6)), а само равенство не нарушится. Таким образом, и

$$\int_{s(\theta)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] \vec{ds} = 0 \text{ при } p \neq -q.$$

Доказательство справедливости (11) закончено.

Искомое поле, создаваемое биполем, возбуждаемым стороной ЭДС, может быть представлено в виде следующих рядов:

$$\vec{E} = \sum_p C_p(\theta) \vec{E}^{(p)}, \quad \vec{H} = \sum_p C_p(\theta) \vec{H}^{(p)}. \quad (15)$$

Здесь  $\vec{E}^{(p)}$ ,  $\vec{H}^{(p)}$  – введенные выше парциальные волны электрического типа, а  $C_p(\theta)$  – искомые неизвестные функции  $\theta$ ; суммирование проводится по индексу  $p$ , пробегающему значения  $\pm 1, \pm 2, \dots$

Поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в области  $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ ,  $r > a$  должно удовлетворять уравнениям Максвелла вида

$$\text{rot} \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} - \vec{J}^\mu, \quad (16)$$

где

$$\vec{J}^\mu = \vec{K}^\mu \delta(r - a - \Delta) = \frac{\mathcal{E} i_\varphi}{a(\pi - 2\theta_0)} \delta(r - a - \Delta) \quad (16')$$

– объемная плотность магнитного заданного возбуждающего тока (согласно эквивалентной схеме, изображенной на рис. 2), распределенного у поверхности  $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ ,  $r = a + \Delta$ ;  $\delta$  – дельта-функция Дирака.

Решение системы (16) должно удовлетворять также краевым условиям

$$E_r = 0 \text{ на поверхностях } \theta = \theta_0, \quad r > a$$

$$\text{и } \theta = \pi - \theta_0, \quad r > a, \quad (17)$$

$$E_\theta = 0 \text{ на поверхности } r = a,$$

$$\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$$

и условию излучения при  $r \rightarrow \infty$ . После построения решения величину  $\Delta$  следует устремить к нулю.

Следуя работе [2], подставим выражения (15) в уравнения (16) и найдем

$$\sum_p \left[ \nabla C_p, \vec{H}^{(p)} \right] = 0, \quad \sum_p \left[ \nabla C_p, \vec{E}^{(p)} \right] = -\vec{J}^\mu. \quad (18)$$

При этом учтено, что парциальные волны удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла. Умножим первое равенство (18) скалярно на  $r \vec{E}^{(-q)}$ , второе – на  $r \vec{H}^{(-q)}$ , и результаты проинтегрируем по поверхности  $s(\theta)$  ( $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ ).



Учитывая условия ортогональности (11), получим

$$\frac{dC_{-q}}{d\theta} \int_{s(\theta)} [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(-q)}] \vec{ds} + \frac{dC_q}{d\theta} \int_{s(\theta)} [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)}] \vec{ds} = 0,$$

$$\frac{dC_{-q}}{d\theta} \int_{s(\theta)} [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(-q)}] \vec{ds} + \frac{dC_q}{d\theta} \int_{s(\theta)} [\vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)}] \vec{ds} =$$

$$= - \int_{s(\theta)} \vec{H}^{(-q)} \vec{J} r ds.$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных  $dC_q/d\theta$  и  $dC_{-q}/d\theta$ , найдем

$$\frac{dC_q}{d\theta} = \frac{\int_{s(\theta)} \vec{H}^{(-q)} \vec{J} r ds}{\int_{s(\theta)} \left\{ [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)}] - [\vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)}] \right\} \vec{ds}}. \quad (19)$$

Выражение для  $dC_{-q}/d\theta$  не выписываем, так как оно получается из (19) при замене  $q$  на  $-q$ .

Как следует из равенства (12), знаменатель в (19) – величина постоянная, не зависящая от  $\theta$ . Со-

гласно формулам (3), (4) и (16'), ток  $\vec{J}$  распределен в области  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ . Поэтому при  $q > 0$ , интегрируя (19) от  $\theta_0$  до  $\theta$ , где  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ , получим

$$C_q(\theta) - C_q(\theta_0) = \frac{\int_{\theta_0, s(\theta)}^{\theta} \int \vec{H}^{(-q)} \vec{J} r ds d\theta}{\int_{s(\theta)} \left\{ [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)}] - [\vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)}] \right\} \vec{ds}}. \quad (20)$$

Здесь  $C_q(\theta_0) = 0$  ( $q > 0$ ). Если бы эти величины были отличны от нуля, то, как следует из (15), комплексная мощность поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , проходящая через поверхность усеченного конуса  $\theta = \theta_0$ ,  $r \geq a$ , была бы конечна и направлена в сторону возрастания  $\theta$ , что абсурдно.

Учитывая сказанное, а также дельтообразный характер плотности магнитного тока  $\vec{J}$  (см. (16')),

перепишем (20) в следующем виде:

$$C_q(\theta) = \frac{\int_{s^+} \vec{H}^{(-q)} \vec{K}^\mu ds}{\int_{s(\theta)} \left\{ [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)}] - [\vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)}] \right\} \vec{ds}}, \quad (21)$$

$q > 0.$

Здесь  $s^+$  – часть поверхности сферы  $r = a$ , лежащая между параллелями  $\theta = \theta_0$  и  $\theta$ . При выводе (21) величина  $\Delta$  в формуле (19) устремлена к нулю.

При  $q < 0$ , интегрируя (19) от  $\theta$  до  $\pi - \theta_0$  ( $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ ) и учитывая, что  $C_q(\pi - \theta_0) = 0$ , найдем

$$C_q(\theta) = - \frac{\int_{s^-} \vec{H}^{(-q)} \vec{K}^\mu ds}{\int_{s(\theta)} \left\{ [\vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)}] - [\vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)}] \right\} \vec{ds}}, \quad (22)$$

$q < 0,$

где  $s^-$  – часть поверхности сферы  $r = a$ , лежащей между параллелями  $\theta$  и  $\theta = \pi - \theta_0$ . Формулы (15), (21), (22) и (4), (4') определяют поле, создаваемое биконусом, возбуждаемым генератором с ЭДС  $\mathcal{E}$ .

## 2. РЕШЕНИЕ С ВЫДЕЛЕННОЙ КООРДИНАТОЙ $r$

Это решение имеет вид

$$\vec{E} = \sum_p C_p(r) \vec{E}^{(p)}, \quad \vec{H} = \sum_p C_p(r) \vec{H}^{(p)}. \quad (23)$$

Здесь  $\vec{E}^{(p)}$ ,  $\vec{H}^{(p)}$  – парциальные волны электрического типа, отличающиеся от использованных выше. Они определяются следующим образом. Общие формулы (5) сохраняются, однако потенциалы  $V$  теперь задаются выражением

$$V = \zeta_\nu(kr) [P_\nu(\cos \theta) + A_\nu P_\nu(-\cos \theta)], \quad (24)$$

где  $\nu$  и  $A_\nu$  – корни уравнений

$$\begin{cases} P_\nu(\cos \theta_0) + A_\nu P_\nu(-\cos \theta_0) = 0, \\ P_\nu(\cos(\pi - \theta_0)) + A_\nu P_\nu(-\cos(\pi - \theta_0)) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Учитываются только корни  $\nu$ , лежащие в правой полуплоскости.

Потенциалы (24) определяют электрические волны. Эти волны удовлетворяют принципу излу-

<sup>1</sup> Это доказывается методом, аналогичным приведенному выше для  $q > 0$ .

чения при  $r \rightarrow \infty$  и краевому условию на поверхности биконуса. Источники этих волн находятся в точке  $r = 0$ . Рассмотренные волны нумеруются при помощи индекса  $p$ , пробегающего целочисленные положительные значения. Следует ввести еще парциальные волны электрического типа, источники которых находятся на бесконечности при  $r = \infty$ . Эти волны определяются потенциалами

$$V = \left[ \begin{array}{c} \psi_v(kr) - \frac{\psi'_v(ka)}{\zeta'_v(ka)} \zeta_v(kr) \\ \zeta'_v(ka) \end{array} \right] \times \quad (26)$$

$$\times [P_v(\cos \theta) + A_v P_v(-\cos \theta)],$$

где  $\psi_v(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{v+1/2}(x)$ , а  $v$  и  $A_v$  являются корнями уравнений (25), причем  $\text{Re } v \geq 0$ . Для волн, определяемых потенциалами (24) и (25), выполняется краевое условие на всей поверхности рассматриваемого тела. Эти волны нумеруются при помощи индекса  $p$ , пробегающего целочисленные отрицательные значения. Одновременно будем полагать, что волны  $\vec{E}^{(p)}$ ,  $\vec{H}^{(p)}$  и  $\vec{E}^{(-p)}$ ,  $\vec{H}^{(-p)}$  различаются только заменой  $\zeta_v(kr)$  на  $\psi_v(kr) - \frac{\psi'_v(ka)}{\zeta'_v(ka)} \zeta_v(kr)$  в выражениях для соответствующих потенциалов.

Обозначим  $s(r)$  часть поверхности сферы радиусом  $r$ , для которой  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$  ( $r \geq a$ ). При этом условие ортогональности для введенных парциальных волн имеет вид

$$\int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] ds = 0 \quad \text{при } p \neq \pm q. \quad (27)$$

Доказательство проведем, как и выше, применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{E}^{(p)}$ ,  $\vec{H}^{(p)}$  и  $\vec{E}^{(q)}$ ,  $\vec{H}^{(q)}$  в области, ограниченной поверхностями  $s(r)$ ,  $s(a)$  и частью конусов  $\theta = \theta_0$  и  $\theta = \pi - \theta_0$ . Учитывая, что эти поля удовлетворяют на конусах краевому условию  $\vec{E}_t^{(p)} = \vec{E}_t^{(q)} = 0$ , получим

$$\int_{s(r)} \left\{ \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] - \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(p)} \right] \right\} ds = \quad (28)$$

$$= \int_{s(a)} \left\{ \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] - \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(p)} \right] \right\} ds.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Индексы  $p$  и  $q$  имеют один знак. При этом (28) сводится к следующему выражению:

$$\int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] ds = \int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(p)} \right] ds. \quad (29)$$

Для  $p < 0$  и  $q < 0$  это равенство следует из выполнения приведенного выше краевого условия также на  $s(a)$ . Если  $p > 0$  и  $q > 0$ , то правая часть (28) – константа, а левая – равна некой функции от  $r$ , умноженной на константу, что возможно, если эти константы равны нулю. В свою очередь, если  $p \neq q$ , то левая и правая части (29) также равны различным функциям от  $r$ , умноженным на константы, что возможно, если последние равны нулю.

2. Индексы  $p$  и  $q$  имеют различные знаки. В этом случае согласно доказанному в п. 1

$$\int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(-q)} \right] ds = 0 \quad \text{при } p \neq -q. \quad (30)$$

Если теперь в этом равенстве заменить  $-q$  на  $q$ , то в выражении для соответствующего потенциала изменится только множитель, зависящий от  $r$  (см. (24), (26)). Следовательно, изменится только множитель, зависящий от  $r$ , содержащийся в левой части (30), а само равенство не нарушится. Таким образом, и

$$\int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(p)} \vec{H}^{(q)} \right] ds = 0 \quad \text{при } p \neq -q.$$

Следовательно, справедливость равенства (27) установлена для всех интересующих нас парциальных волн электрического типа. Определим коэффициенты  $C_p(r)$  в решении (23). Для этого подставим (23) в уравнение Максвелла (16), где магнитный ток  $\vec{J}^\mu$  определяется выражением (16'), после чего получим равенства типа (18). Умножим первое из них скалярно на  $\vec{E}^{(-q)}$ , а второе – на  $\vec{H}^{(-q)}$ , результаты проинтегрируем по поверхности  $s(r)$  ( $r > a$ ). Учитывая условие ортогональности (27), найдем

$$\frac{dC_{-q}}{dr} \int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(-q)} \right] ds + \frac{dC_q}{dr} \int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)} \right] ds = 0,$$

$$\frac{dC_{-q}}{dr} \int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(-q)} \right] ds + \frac{dC_q}{dr} \int_{s(r)} \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)} \right] ds =$$

$$= - \int_{s(r)} \vec{H}^{(-q)} \vec{J}^\mu ds.$$

Разрешая эти равенства относительно  $C_q'(r)$ , получим

$$\frac{dC_q}{dr} = \frac{\int_{s(r)} \vec{H}^{(-q)} \vec{J}^\mu ds}{\int_{s(r)} \left\{ \left[ \vec{E}^{(-q)} \vec{H}^{(q)} \right] - \left[ \vec{E}^{(q)} \vec{H}^{(-q)} \right] \right\} ds}. \quad (31)$$

Как следует из (28), знаменатель в этой формуле – величина постоянная, не зависящая от  $r$ .

Учитывая закон распределения плотности магнитного тока (16'), проинтегрируем равенство (31) по  $dr$  от  $r = a$  до  $r (r \geq a + \Delta)$ , после чего найдем

$$C_q(r) - C_q(a) = \frac{\int_a^r \int_{s(r)} \vec{H}^{(-q)} \vec{J}^\mu ds dr}{a s(r)} = \int_{s(r)} \left\{ \left[ E^{(-q)} H^{(q)} \right] - \left[ E^{(q)} H^{(-q)} \right] \right\} ds \quad (32)$$

Полагая вначале  $\Delta > 0$ , получим для  $q > 0$  следующее равенство:  $C_q(a) = 0$ . Доказательство аналогично приведенному выше для  $C_q(\theta_0)$ . Учитывая сказанное и переходя затем в (31) к пределу, устремляя  $\Delta \rightarrow 0$ , получим для  $C_q(r)$  следующее выражение:

$$C_q(r) = \frac{\int_{s^*} \vec{H}^{(-q)} \vec{K}^\mu ds}{\int_{s(r)} \left\{ \left[ E^{(-q)} H^{(q)} \right] - \left[ E^{(q)} H^{(-q)} \right] \right\} ds}, \quad (33)$$

$q > 0.$

Здесь  $s^*$  – часть поверхности сферы  $r = a$ , лежащая между параллелями  $\theta = \theta_0$  и  $\theta = \pi - \theta_0$ . При выводе последней формулы использовано выражение (16') для  $\vec{J}^\mu$ .

Коэффициенты  $C_q(r)$ , определяемые формулой (33) постоянны при  $r > a$ , т.е.

$$C_q(r) = \text{const при } r > a \text{ и } q > 0. \quad (34)$$

Коэффициенты  $C_q(r)$  при  $q < 0$  все равны нулю, т.е.

$$C_q(r) = 0 \text{ при } r > a \text{ и } q < 0, \quad (35)$$

что следует из принципа излучения, который не выполнялся бы, если хотя бы один из коэффициентов  $C_q(r) \neq 0$  при  $q < 0$ . Действительно, при этом в решение (23) входили бы волны, имеющие источники на бесконечности ( $r = \infty$ ).

В формуле (33), так же как и в (21), (22), поверхностная плотность магнитного тока  $\vec{K}^\mu$  выражается через заданную ЭДС  $\mathcal{E}$  генератора (рис. 1) при помощи соотношений (4) и (4').

Решение (15) хорошо сходится при  $ka \gg 1$ . При  $ka \sim 1$  и меньше следует пользоваться решением (23).

Данная работа поддержана грантом J4Z100 Международного научного фонда.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Ч. 1. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1955.
2. Фельд Я.Н., Фельд С.Я. // РЭ. 1977. Т. 22. № 9. С. 1829.
3. Фельд Я.Н. // РЭ. 1991. Т. 36. № 6. С. 1114.
4. Фельд Я.Н. // РЭ. 1995. Т. 40. № 1. С. 28.

# Лекции

*Прочитано на 1-й Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн, 1965, Паланга,*

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(2 лекции)

Я. Н. ФЕЛЬД

### § 1. Основные уравнения электромагнитного поля

Ограничимся рассмотрением электромагнитных процессов, гармонически изменяющихся во времени. Зависимость от времени  $t$  примем в виде  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  — угловая частота. Будем пользоваться практической рационализированной системой единиц (МКС).

Основные уравнения электродинамики — уравнения Максвелла — имеют при этом следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь

$\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрический и магнитный векторы поля;

$\epsilon$ ,  $\mu$  — комплексные в общем случае диэлектрическая и магнитная проницаемости:

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'', \quad \mu = \mu' - i\mu''; \quad \epsilon'' \geq 0, \quad \mu'' \geq 0. \quad (1a)$$

Последние неравенства вытекают из энергетических соображений\*.

Появление мнимых частей  $\epsilon''$ ,  $\mu''$  обусловлено наличием джоулевых или диэлектрических и магнитных потерь в среде. При отсутствии последних

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}, \quad \mu'' = 0. \quad (16)$$

где  $\sigma$  — объемная проводимость среды, а  $\epsilon'$ ,  $\mu'$  совпадают с обычными диэлектрической и магнитной проницаемостями среды. В этом случае член  $i\omega\epsilon\mathbf{E}$  в первом уравнении (1) равен сумме токов смещения  $i\omega\epsilon'\mathbf{E}$  и проводимости  $\sigma\mathbf{E}$ . Что касается вектора  $\mathbf{J}$ , фигурирующего в (1), то он представляет собой плотность сторонних внесен-

\* Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. «Сов. радио», 1957, стр. 40.

ных в среду токов, являющихся источниками, возбуждающими поле. Такое выделение токов  $\mathbf{J}$  является несколько искусственным, так как они по своей физической сущности не отличаются от токов проводимости  $\sigma \mathbf{E}$ . Этим только подчеркивается, что в рассматриваемой задаче токи  $\mathbf{J}$  являются заданными, в отличие от токов  $\sigma \mathbf{E}$ , для определения которых необходимо прежде найти  $\mathbf{E}$ .

На границе раздела двух сред, обладающих различными параметрами, уравнения (1) теряют смысл\* и должны быть дополнены граничными условиями, определяющими поведение тангенциальных составляющих векторов поля при переходе через поверхность раздела.

Если две области  $V_e$  и  $V_i$  с различными электромагнитными параметрами граничат вдоль некоторой поверхности  $s$ , то указанные граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n}(\mathbf{H}^i - \mathbf{H}^e)] &= \mathbf{K}, \\ [\mathbf{n}(\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^e)] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  — поверхностная плотность электрического тока, текущего по поверхности  $s$ ;  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к  $s$ , направленная внутрь области  $V_i$ ; индексы « $e$ » и « $i$ » означают, что  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{H}^e$  и  $\mathbf{E}^i$ ,  $\mathbf{H}^i$  являются предельными значениями векторов поля на поверхности  $s$  при стремлении к ней со стороны  $V_e$  и  $V_i$  соответственно.

Ток  $\mathbf{K}$  может появиться на  $s$  в двух случаях:

1) если он привнесен извне и распределен на геометрической поверхности  $s$ . В этом случае он также является сторонним источником и должен быть задан;

2) если  $s$  или часть ее является идеально проводящей, бесконечно тонкой металлической поверхностью. При этом  $\mathbf{K}$  возбуждается на  $s$  полем.

Если поверхностных токов на  $s$  нет, то тангенциальные составляющие векторов поля непрерывны при переходе через  $s$  и условия (2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n}(\mathbf{H}^i - \mathbf{H}^e)] &= 0, \\ [\mathbf{n}(\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^e)] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (2a)$$

Пусть одна из сред, например  $V_i$ , обладает бесконечной проводимостью ( $\sigma = \infty$ ), тогда поле внутри  $V_i$  тождественно равно нулю (в противном случае там текли бы бесконечные токи и выделялась бесконечная мощность) и условия (2a) заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{H}^e \mathbf{n}] &= \mathbf{K}, \\ [\mathbf{E}^e \mathbf{n}] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (2б)$$

Эти условия сохраняются и в случае, когда не вся область  $V_i$ , а только часть ее, примыкающая к  $s$ , обладает бесконечной проводимостью.

\* Так как теряют смысл операции дифференцирования, входящие в (1).

мостью. Очевидно, условия (2) тем более справедливы в случае, когда  $\varepsilon, \mu$  остаются непрерывными при переходе от  $V_i$  к  $V_e$ . 962

Таким образом, граничные условия (2) выполняются на любой геометрической поверхности  $s$ , проведенной внутри произвольной среды, если на ней распределены поверхностные токи  $\mathbf{K}$ . При  $\mathbf{K} = 0$  (2) переходит в (2а).

Из уравнений (I) легко получить закон сохранения энергии для электромагнитного поля — комплексную теорему Пойнтинга. Для этого следует перейти от первого уравнения (I) к комплексно сопряженному; умножить последнее скалярно на  $\mathbf{E}$ , а второе уравнение (I) — скалярно на  $\mathbf{H}^*$  и вычесть одно из другого, после чего найдем

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = -\mathbf{E}\mathbf{J}^* + i\omega(\varepsilon^* \mathbf{E}\mathbf{E}^* - \mu \mathbf{H}\mathbf{H}^*) \quad (3)$$

или в интегральной форме

$$-\int_{(s)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = -\int_{(V)} \mathbf{E}\mathbf{J}^* dV + i\omega \int_{(V)} (\varepsilon^* |\mathbf{E}|^2 - \mu |\mathbf{H}|^2) dV, \quad (3a)$$

где  $s$  — поверхность, ограничивающая некоторый объем  $V$ . Четкий физический смысл закона сохранения ваттной (средней за период) мощности имеет вещественная часть этих равенств.

Не останавливаясь на истолковании физического смысла отдельных членов, выпишем уравнение, получаемое приравнованием вещественных частей выражений, стоящих слева и справа в (3а):

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = \operatorname{Re} \int_{(V)} \mathbf{E}\mathbf{J}^* dV + \omega \int_{(V)} (\varepsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2) dV. \quad (4)$$

Здесь, как и в (3а),  $ds$  направлено в сторону внутренней к  $V$  нормали.

Уравнение (4) понадобится ниже при доказательстве теоремы единственности.

Основные уравнения (I) иногда бывает удобно записать в следующем, более симметричном виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{J}_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Добавленную здесь величину  $\mathbf{J}_\mu$  можно истолковать как вектор плотности магнитного тока.

Магнитный ток, рассматриваемый как движение магнитных зарядов, не существует, ибо в природе отсутствуют магнитные заряды. Однако несмотря на это его формальное введение иногда оказывается весьма полезным и ему можно придать вполне конкретный смысл. Так, например, хорошо известно, что элементарную рамку с электрическим током можно заменить эквивалентным магнитным током (диполем), направленным вдоль оси рамки. Можно также

ных в среду токов, являющихся источниками, возбуждающими поле. Такое выделение токов  $\mathbf{J}$  является несколько искусственным, так как они по своей физической сущности не отличаются от токов проводимости  $\sigma \mathbf{E}$ . Этим только подчеркивается, что в рассматриваемой задаче токи  $\mathbf{J}$  являются заданными, в отличие от токов  $\sigma \mathbf{E}$ , для определения которых необходимо прежде найти  $\mathbf{E}$ .

На границе раздела двух сред, обладающих различными параметрами, уравнения (1) теряют смысл\* и должны быть дополнены граничными условиями, определяющими поведение тангенциальных составляющих векторов поля при переходе через поверхность раздела.

Если две области  $V_e$  и  $V_i$  с различными электромагнитными параметрами граничат вдоль некоторой поверхности  $s$ , то указанные граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n}(\mathbf{H}^i - \mathbf{H}^e)] &= \mathbf{K}, \\ [\mathbf{n}(\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^e)] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  — поверхностная плотность электрического тока, текущего по поверхности  $s$ ;  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к  $s$ , направленная внутрь области  $V_i$ ; индексы « $e$ » и « $i$ » означают, что  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{H}^e$  и  $\mathbf{E}^i$ ,  $\mathbf{H}^i$  являются предельными значениями векторов поля на поверхности  $s$  при стремлении к ней со стороны  $V_e$  и  $V_i$  соответственно.

Ток  $\mathbf{K}$  может появиться на  $s$  в двух случаях:

- 1) если он привнесен извне и распределен на геометрической поверхности  $s$ . В этом случае он также является сторонним источником и должен быть задан;
- 2) если  $s$  или часть ее является идеально проводящей, бесконечно тонкой металлической поверхностью. При этом  $\mathbf{K}$  возбуждается на  $s$  полем.

Если поверхностных токов на  $s$  нет, то тангенциальные составляющие векторов поля непрерывны при переходе через  $s$  и условия (2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n}(\mathbf{H}^i - \mathbf{H}^e)] &= 0, \\ [\mathbf{n}(\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^e)] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (2a)$$

Пусть одна из сред, например  $V_i$ , обладает бесконечной проводимостью ( $\sigma = \infty$ ), тогда поле внутри  $V_i$  тождественно равно нулю (в противном случае там текли бы бесконечные токи и выделялась бесконечная мощность) и условия (2a) заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{H}^e \mathbf{n}] &= \mathbf{K}, \\ [\mathbf{E}^e \mathbf{n}] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (2б)$$

Эти условия сохраняются и в случае, когда не вся область  $V_i$ , а только часть ее, примыкающая к  $s$ , обладает бесконечной проводимостью.

\* Так как теряют смысл операции дифференцирования, входящие в (1).



мостью. Очевидно, условия (2) тем более справедливы в случае, когда  $\varepsilon, \mu$  остаются непрерывными при переходе от  $V_i$  к  $V_e$ . 964

Таким образом, граничные условия (2) выполняются на любой геометрической поверхности  $s$ , проведенной внутри произвольной среды, если на ней распределены поверхностные токи  $\mathbf{K}$ . При  $\mathbf{K} = 0$  (2) переходит в (2а).

Из уравнений (I) легко получить закон сохранения энергии для электромагнитного поля — комплексную теорему Пойнтинга. Для этого следует перейти от первого уравнения (I) к комплексно сопряженному; умножить последнее скалярно на  $\mathbf{E}$ , а второе уравнение (I) — скалярно на  $\mathbf{H}^*$  и вычесть одно из другого, после чего найдем

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = -\mathbf{E}\mathbf{J}^* + i\omega(\varepsilon^* \mathbf{E}\mathbf{E}^* - \mu \mathbf{H}\mathbf{H}^*) \quad (3)$$

или в интегральной форме

$$-\int_{(s)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = -\int_{(V)} \mathbf{E}\mathbf{J}^* dV + i\omega \int_{(V)} (\varepsilon^* |\mathbf{E}|^2 - \mu |\mathbf{H}|^2) dV, \quad (3a)$$

где  $s$  — поверхность, ограничивающая некоторый объем  $V$ . Четкий физический смысл закона сохранения ваттной (средней за период) мощности имеет вещественная часть этих равенств.

Не останавливаясь на истолковании физического смысла отдельных членов, выпишем уравнение, получаемое приравнованием вещественных частей выражений, стоящих слева и справа в (3а):

$$\operatorname{Re} \int_{(s)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = \operatorname{Re} \int_{(V)} \mathbf{E}\mathbf{J}^* dV + \omega \int_{(V)} (\varepsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2) dV. \quad (4)$$

Здесь, как и в (3а),  $ds$  направлено в сторону внутренней к  $V$  нормали.

Уравнение (4) понадобится ниже при доказательстве теоремы единственности.

Основные уравнения (I) иногда бывает удобно записать в следующем, более симметричном виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{J}_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Добавленную здесь величину  $\mathbf{J}_\mu$  можно истолковать как вектор плотности магнитного тока.

Магнитный ток, рассматриваемый как движение магнитных зарядов, не существует, ибо в природе отсутствуют магнитные заряды. Однако несмотря на это его формальное введение иногда оказывается весьма полезным и ему можно придать вполне конкретный смысл. Так, например, хорошо известно, что элементарную рамку с электрическим током можно заменить эквивалентным магнитным током (диполем), направленным вдоль оси рамки. Можно также

показать, что любую систему электрических токов можно заменить эквивалентными магнитными токами. Эквивалентными в том смысле, что поля этих токов, рассчитываемые при помощи уравнений типа (5), будут одинаковыми.

К уравнениям (5) необходимо также добавить условия непрерывности (2а) на поверхности раздела двух различных сред.

Если на указанной поверхности или на любой геометрической поверхности  $s$  распределены поверхностные электрические и магнитные токи  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}_\mu$ , то при переходе через  $s$  тангенциальные составляющие терпят скачок, определяемый формулами (сравни с (2))

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n}(\mathbf{H}^i - \mathbf{H}^e)] &= \mathbf{K}, \\ [\mathbf{n}(\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^e)] &= -\mathbf{K}_\mu \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (6)$$

На поверхности  $s$  проводника, обладающего бесконечной электрической проводимостью, сохраняются граничные условия (2б), если мы принудительно не наносим магнитные токи  $\mathbf{K}_\mu$  на  $s$ .

В ряде случаев полезно вводить понятие магнитного проводника, обладающего магнитной проводимостью среды  $\sigma_\mu$ . При этом можно связать магнитный ток с  $\mathbf{H}$  при помощи «магнитного» закона Ома  $\mathbf{J}_\mu = \sigma_\mu \mathbf{H}$ .

По аналогии с обычными проводниками можно рассматривать идеальные магнитные проводники, для которых  $\sigma_\mu = \infty$ . Поле внутри такого проводника будет тождественно равно нулю, так как в противном случае  $\mathbf{J}_\mu = \infty$  и выделялась бы бесконечная мощность. На поверхности  $s$  идеального магнитного проводника текут поверхностные магнитные токи  $\mathbf{K}_\mu$ , возбуждаемые полем, и выполняются условия типа (2б)

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{H}^e \mathbf{n}] &= 0, \\ [\mathbf{E}^e \mathbf{n}] &= -\mathbf{K}_\mu \end{aligned} \right\} \text{ на } s. \quad (6a)$$

Область, занимаемая магнитным проводником,  $V_i$ . Вторая из этих формул определяет ток  $\mathbf{K}_\mu$  на  $s$ , а первая является граничным условием, которое нужно учитывать при интегрировании уравнений (5).

Может представить интерес следующий результат, вытекающий из сказанного выше.

Если при переходе через некоторую поверхность  $s$  тангенциальная составляющая электрического (магнитного) вектора терпит разрыв непрерывности, то это означает, что на  $s$  распределены поверхностные магнитные (электрические) токи, определяемые второй (первой) формулой (6).

Возвращаясь к основным уравнениям (5), легко заметить, что одно из них переходит в другое при перестановке

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{H}, \quad \epsilon \rightarrow \mu, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_\mu, \\ \mathbf{H} &\rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mu \rightarrow \epsilon, \quad \mathbf{J}_\mu \rightarrow -\mathbf{J}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Это свойство системы (5) сохранять свой вид при перестановке (7) называется перестановочной инвариантностью. Оно позволяет сократить выкладки при решении уравнений (5). Так, например, в силу линейности этих уравнений, можно записать решение в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2, \quad (8a)$$

где  $\vec{\mathbf{E}}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_1 - i\omega\epsilon\mathbf{E}_1 &= \mathbf{J}, \\ \text{rot } \mathbf{E}_1 + i\omega\mu\mathbf{H}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_2 - i\omega\epsilon\mathbf{E}_2 &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 + i\omega\mu\mathbf{H}_2 &= -\mathbf{J}_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (8б)$$

Перестановка (7) преобразует систему (8a) в (8б), и наоборот. Таким образом, достаточно проинтегрировать (8a), чтобы одновременно получить также решение системы (8б), производя перестановку типа (7) в найденных интегралах уравнений (8a).

Следует при этом помнить, что подстановка (7) должна также преобразовывать граничные условия при уравнениях (8a) в граничные условия при (8б). Это будет выполняться, например, при условиях типа (2a) или условиях на бесконечности, о которых будет сказано ниже. Последние условия всегда должны учитываться при интегрировании уравнений Максвелла в областях, простирающихся на бесконечность.

## § 2. Теорема единственности решений уравнений Максвелла для монохроматических колебаний (среда с потерями)\*

Теорема единственности имеет большое принципиальное и практическое значение. Она показывает, как следует сформулировать ту или иную задачу электродинамики, т. е. какие условия должны быть заданы для того, чтобы задача имела единственное решение. Нельзя быть уверенным в корректности какой-либо теории, пока для нее не доказана соответствующая теорема единственности.

Неоднородные уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_\mu, \quad (9)$$

в которых сторонние токи  $\mathbf{J}, \mathbf{J}_\mu$  заданы и распределены на конечном расстоянии, не могут иметь более одного решения, удовлетворяющего следующим условиям:

а)  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  непрерывны при переходе через поверхности  $s_1$ , на которых  $\epsilon$  или  $\mu$  имеют разрыв непрерывности;

\* Я. Н. Фельд. ЖЭТФ, 1938.

б) на граничных поверхностях  $s_2$ , ограничивающих пространство снаружи или изнутри, заданы  $E_t$  или  $H_t$  или импедансные граничные условия типа  $E_t = \hat{Z}[\mathbf{nH}]$ , где

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}, \quad z_{ik} = R_{ik} + iX_{ik}, \quad R_{11} \geq 0, \\ R_{22} \geq 0, \quad 4R_1R_2 \geq |z_{12} + z_{21}^*|^2;$$

в) если область, для которой ищется решение уравнений (9), простирается на бесконечность, то поле должно убывать там так, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\mathbf{H} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r\mathbf{E} = 0 \quad (\sigma \neq 0).$$

Выясним физический смысл некоторых из перечисленных условий. Если в пункте «б» имеют место импедансные граничные условия, то неравенства

$$R_{11} \geq 0, \quad R_{22} \geq 0, \quad 4R_{11}R_{22} \geq |z_{12} + z_{21}^*|^2 \quad (10)$$

обеспечивают отсутствие на «импедансной» поверхности источников энергии, точнее, потоков энергии через  $s_2$  внутрь рассматриваемой области, для которой ищется решение уравнений (9). Действительно, плотность потока мощности, проходящего через  $s_2$  внутрь рассматриваемой области, равна

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n$$

( $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный внутрь области).

Введя на  $s_2$  ортогональную систему координат  $x_1$  и  $x_2$ , образующую с  $\mathbf{n}$  правую тройку, запишем импедансное граничное условие пункта «б» в виде

$$E_i = \sum_{k=1}^2 z_{ik}[\mathbf{nH}]_k, \quad i=1,2.$$

Подставляя эти выражения в формулу для  $P$ , найдем

$$-2P = R_{11}|H_1|^2 + R_{22}|H_2|^2 + \frac{z_{12} + z_{21}^*}{2} H_1 H_2^* + \frac{z_{12}^* + z_{21}}{2} H_1^* H_2. \quad (11)$$

Правая часть полученного равенства есть квадратичная эрмитова форма с матрицей

$$\begin{vmatrix} R_{11} & \frac{z_{12} + z_{21}^*}{2} \\ \frac{z_{12}^* + z_{21}}{2} & R_{22} \end{vmatrix}.$$

Она будет неотрицательна, если неотрицательны все главные миноры ее матрицы. Таким образом, неравенства (10) обеспечивают неотрицательность правой части (11) и, следовательно,

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n \leq 0, \tag{12}$$

т. е. энергия может только вытекать через  $s_2$  из рассматриваемой области.

Условие «в» имеет также простой физический смысл. Оно означает, что, благодаря наличию потерь, поле на бесконечности должно убывать быстрее, чем это обуславливается геометрией трехмерного пространства. При отсутствии потерь поле убывает как  $\frac{1}{r}$ .

Смысл остальных условий не нуждается в пояснении.

Доказательство теоремы «единственности» базируется на следующей лемме.

Однородные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \tag{13}$$

не имеют, отличного от нулевого, решения, удовлетворяющего условиям:

- 1)  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  непрерывны при переходе через поверхности  $s_1$ , на которых  $\epsilon$  или  $\mu$  имеют разрыв непрерывности;
- 2) на граничных поверхностях  $s_2$ , ограничивающих пространство снаружи или изнутри,  $\mathbf{E}_t = 0$  или  $\mathbf{H}_t = 0$ , или выполнены импедансные условия типа, указанного в пункте «б» предыдущей теоремы;
- 3) на бесконечности выполнены условия пункта «в».

Эта лемма следует из комплексной теоремы Пойнтинга (4), которая для уравнений (13) принимает вид

$$\operatorname{Re} \int_{(s'_1 + s_2 + s_\infty)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = \omega \int_{(V)} (\epsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2) dV. \tag{14}$$

Здесь  $V$  — область, для которой ищется решение, а  $(s'_1 + s_2 + s_\infty)$  поверхности, ограничивающие ее. В общем случае они состоят из  $s'_1$ , охватывающих, как перчатка, поверхности разрыва  $s_1$  (см. пункт 1),  $s_2$ , фигурирующих в пункте 2, и бесконечно удаленной сферы  $s_\infty$ , если  $V$  простирается на бесконечность.

Далее необходимо различать два случая.

Если на  $s_2$   $\mathbf{E}_t = 0$  или  $\mathbf{H}_t = 0$  (см. пункт 2), то, благодаря условиям 1 и 3, интеграл в левой части равенства (14) исчезает и оно сводится к следующему:

$$\int_{(V)} (\epsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2) dV = 0. \tag{15}$$

Поскольку  $\epsilon''$  и  $\mu''$  неотрицательны (см. (1a)), то, если  $\epsilon'' \neq 0$  и  $\mu'' \neq 0$ , из (15) сразу следует, что

$$\mathbf{E} = 0 \text{ и } \mathbf{H} = 0 \quad (16)$$

всюду в области  $V$ . Если одна из величин  $\epsilon''$  или  $\mu''$  равна нулю, то равенства (16) следуют из (15) с учетом уравнений (13). Обе величины  $\epsilon''$  и  $\mu''$  не могут равняться нулю, так как среда имеет потери.

Второй случай имеет место, когда на  $s_2$  выполняются импедансные граничные условия. При этом исчезают интегралы только по поверхностям  $s'_1$  и  $s_\infty$  и (14) переходит в

$$\operatorname{Re} \int_{s_2} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] ds = \omega \int_{(V)} (\epsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2) dV.$$

Однако, поскольку интеграл, стоящий слева, неположителен (см. (12)), а справа неотрицателен, то они порознь равны нулю. И мы опять приходим к равенству (15) и как следствию из него соотношениям (16), доказывающим лемму.

Из нее непосредственно следует теорема единственности для уравнений (9).

Действительно, рассуждая от обратного, предположим, что существуют два решения уравнений (9), удовлетворяющие всем условиям «а», «б», «в». Тогда разность этих решений должна удовлетворять однородным уравнениям (13) и условиям 1, 2, 3. Поэтому на основании леммы эта разность тождественно равна нулю, и оба решения уравнения (9) совпадают.

Доказательство этой теоремы для сред без потерь несколько сложнее, и мы на нем останавливаться не будем, так как оно имеет скорее принципиальный, нежели практический интерес. Действительно, при решении конкретных задач можно всегда вначале предположить, что в среде имеются некоторые потери, например  $\sigma \neq 0$ , и воспользоваться доказанной теоремой, а в окончательном решении перейти к пределу, когда  $\sigma \rightarrow 0$ . Такой прием в ряде случаев позволяет также упростить ход решения. Отметим только, что для сред без потерь формулировка теоремы единственности сохраняется прежней, за исключением условий на бесконечности (пункт «в»), которые заменяются условием изучения Зоммерфельда, состоящим в том, что на бесконечности поле должно иметь характер уходящей локально плоской волны с точностью до членов порядка  $o(r^{-1})$  и, кроме того,  $\mathbf{E} = O(r^{-1})$  и  $\mathbf{H} = O(r^{-1})$ .

Отметим еще, что при  $\sigma = 0$  теорема единственности может нарушаться для внутренних граничных задач, если заданная частота  $\omega$  совпадает с одной из резонансных частот рассматриваемой области. Более того, в ряде случаев для этих частот конечное решение может быть получено только тогда, когда источники (сторонние токи) «ортогональны» к собственным колебаниям, соответствующим рассматриваемой резонансной частоте.

Следует обратить внимание еще на одно обстоятельство, которое нужно иметь в виду при интегрировании уравнений Максвелла в областях, где находятся металлические кромки и острия. Поскольку последние не имеют касательной плоскости, то для них теряют смысл понятия тангенциальных составляющих векторов поля и пункт «б» теоремы «единственности» не определяет граничные условия на них. При этом может нарушаться теорема «единственности». Для ее сохранения необходимо к условиям «а», «б», «в» добавить еще одно условие. Его можно сформулировать так:

г) на острых металлических кромках и остриях должны отсутствовать сторонние источники (стоки) энергии. Это условие ограничивает допустимый порядок стремления к бесконечности отдельных компонент поля при приближении к остриям и кромкам. Для его выполнения достаточно обращения в нуль потока энергии через поверхность части сферы или цилиндра, охватывающих острие или кромку, при стремлении их радиусов к нулю.

Условие «г» можно было бы добавить к условиям «а», «б», «в» теоремы единственности. Ее доказательство, как легко видеть, осталось бы при этом почти без изменений. Однако мы не сделали этого для того, чтобы не перегружать изложения, а главное потому, что условие «г» неявно содержится в формулировке теоремы единственности. Действительно, там сказано, что все сторонние источники—токи заданы, входят в сами уравнения Максвелла и, следовательно, других источников нигде и в том числе на остриях и на кромках не должно быть.

Доказанная теорема единственности показывает, какие условия должны быть приняты во внимание для существования единственного решения уравнений Максвелла. Однако этого недостаточно. Необходимо еще показать, что эти условия не противоречивы и что всегда существует (одно) решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее им, т. е. необходимо доказать еще теорему существования. Такая теорема доказана. Доказательство ее довольно сложно. Мы его здесь не приводим, отсылая интересующихся к соответствующей литературе\*.

### § 3. Первая граничная задача электродинамики (1-я ГЗЭ)

*Внешняя задача* сводится к определению поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  во внешнем пространстве  $V_e$ , ограниченном изнутри замкнутой геометрической поверхностью  $s$ , по заданным на ней значениям  $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}$ . Не ограничивая общности, будем полагать, что в области  $V_e$  источников поля нет\*\*. Из теоремы «единственности» следует, что эта задача может иметь только одно решение.

\* C. Müller. Grundprobleme der Mathematischen theorie Electromagnetischer schwingungen. Springer-verlag, 1957.

\*\* Наличие таких источников приведет только к переопределению граничного условия для  $\mathbf{E}_t$  на  $s$ .

**Т е о р е м а I.** Поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в области  $V_e$  тождественно совпадает с полем  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ , возбуждаемым поверхностными магнитными токами

$$\mathbf{K}_\mu = -[\mathbf{en}]$$

( $\mathbf{n}$  — внешняя к  $V_e$  нормаль), распределенными на внешней стороне  $s$ , которая при этом считается идеально проводящей.

**Доказательство.** Поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  не имеют источников в  $V_e$ . Поэтому для того чтобы они совпадали в  $V_e$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{1,t}$  на  $s$ . Последнее следует из того, что  $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}$  на  $s$  по условию задачи, а условие „скачка“ для  $\mathbf{E}_{1,t}$  при переходе через  $s$  дает  $\mathbf{E}_{1,t} = [\mathbf{K}_\mu \mathbf{n}]$  на  $s$ , так как  $\mathbf{E}_1 \equiv 0$  внутри  $s$  (источники  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  находятся снаружи идеально проводящей поверхности  $s$ ). Подставляя значение  $\mathbf{K}_\mu$ , найдем  $\mathbf{E}_{1,t} = [\mathbf{n}[\mathbf{en}]] = \mathbf{e}$  на  $s$ , и теорема доказана.

Первая ГЗЭ об определении поля по заданной  $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}$  на  $s$  сведена, таким образом, к задаче о возбуждении идеально проводящей поверхности  $s$  заданными на ней магнитными токами  $\mathbf{K}_\mu = -[\mathbf{en}]$ . Аналогичные результаты имеют место и для внутренней 1-й ГЗЭ с учетом замечаний о нарушении однозначности, сделанных в конце § 2.

**Л е м м а 1.** Если на замкнутой геометрической поверхности  $s$  распределен магнитный ток  $\mathbf{K}_\mu$ , то можно\* распределить на  $s$  такой электрический ток  $\mathbf{K}$ , чтобы поле, создаваемое обоими токами, тождественно равнялось нулю снаружи (внутри)  $s$ .

**Доказательство.** Для нахождения тока  $\mathbf{K}$  будем временно считать геометрическую поверхность  $s$  идеально проводящей\*\*, а заданный ток  $\mathbf{K}_\mu$  распределенным на ее внутренней (внешней) стороне. Таким образом, мы приходим к задаче о возбуждении замкнутой идеально проводящей поверхности  $s$  током  $\mathbf{K}_\mu$ , находящимся внутри (снаружи) ее. Задача эта имеет единственное решение\*.

Полагая  $\mathbf{K}$  равным поверхностному току, индуцированному на внутренней (внешней) стороне  $s$  током  $\mathbf{K}_\mu$ , получим систему из двух поверхностных токов  $\mathbf{K}_\mu$  и  $\mathbf{K}$ , распределенных на  $s$ , поле которых тождественно равно нулю снаружи (внутри)  $s$ .

Таким образом, любому распределению\*  $\mathbf{K}_\mu$  на  $s$  соответствует  $\mathbf{K} = L^0\{\mathbf{K}_\mu\}$  на  $s$ , полное поле которых равно нулю вне (внутри)  $s$ .

Линейный оператор  $L^0$  находится из решения внутренней (внешней) задачи о возбуждении резонатора  $s$ .

\* За исключением случая, когда среда внутри  $s$  не имеет потерь и частота совпадает с одной из резонансных (см. конец § 2).

\*\* То есть будем предполагать, что на  $s$  выполняются нулевые граничные условия для тангенциальной составляющей электрического вектора.



**Лемма 2.** Лемма I остается справедливой, если в ней поменять местами магнитный  $K_p$  и электрический  $K$  поверхностные токи.

Доказательство следует из принципа „перестановочной двойственности“ и из леммы I.

Для нахождения  $K_p$  по заданному  $K$  достаточно решить задачу о возбуждении поверхности  $s$  током  $K$ , распределенным на ее внутренней (внешней) стороне.

с при этом считается обладающей идеальной магнитной проводимостью. Ток  $K_p = \mathcal{E}^0\{K\}$  равен магнитному току, индуцированному на внутренней (внешней) стороне резонатора  $s$ .

#### § 4. Сведение 1-й ГЗЭ к интегро-дифференциальным уравнениям для токов на $s$

В этом разделе мы будем предполагать, что среда является однородной,  $\sigma \neq 0$ . Для определенности рассмотрим внешнюю задачу.

Из теоремы 1 следует, что поле 1-й внешней ГЗЭ может быть выражено через магнитный ток  $K_p = -[en]$ , заданный на  $s$  и индуцированный им на  $s$  электрический ток\*  $K = L_e^0\{K_p\}$  по хорошо известным формулам.

На основании леммы I к этим токам можно добавить систему токов  $K'_p$  и  $K' = L_i^0\{K'_p\}$ , не изменив поле вне  $s$ . Взяв  $K'_p$  равным  $-K_p$ , получим возможность определить поле только при помощи электрических токов.

Аналогично, добавляя на основании леммы 2 к токам  $K_p$  и  $K$  систему токов  $K''$  и  $K'' = \mathcal{E}_i^0\{K''\}$  и выбирая  $K'' = -K$ , получим возможность определить поле вне  $s$  только при помощи магнитных токов.

Из предыдущего следует, что поле при решении 1-й ГЗЭ может быть выражено также через совокупность электрических и магнитных поверхностных токов, распределенных на  $s$ .

Таким образом, имеет место

**Т е о р е м а 2.** При решении 1-й ГЗЭ искомое поле может быть выражено через следующие фиктивные (в общем случае) источники, распределенные на рассматриваемой поверхности:

- 1) электрические поверхностные токи;
- 2) магнитные поверхностные токи;
- 3) те и другие.

Распределение этих источников может быть найдено из решения следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$1) \mathcal{E}\{K\} = e; \quad 2) \mathcal{E}_p\{K_p\} = -e; \quad 3) \mathcal{E}\{K\} + \mathcal{E}_p\{K_p\} = e \text{ на } s.$$

\* с при этом считается идеально проводящей. Здесь и ниже у линейных операторов  $L^0$  и  $\mathcal{E}^0$  снизу ставится индекс «e» или «i», в зависимости от того, из внешней или внутренней, относительно  $s$  задачи: они вычисляются.

Здесь  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_\mu$  — линейные операторы, которые, действуя на соответствующие токи, определяют касательные составляющие электрических векторов, возбуждаемых последними на  $s$ . Эти операторы легко написать для любых  $s$  при помощи электрического и магнитного векторов Герца.

Так как в уравнение 3 входят два неизвестных  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}_\mu$ , то остается значительный произвол в их определении; им можно воспользоваться для упрощения решения. Так, можно добавить к 3-му любое уравнение, не противоречащее ему, например:

$$\mathbf{K}_\mu = G\{\mathbf{K}\} + \mathbf{b},$$

после чего токи  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}_\mu$  определятся однозначно. Здесь  $G$  — некоторый оператор;  $\mathbf{b}$  — вектор-функция, касательная к  $s$ .

Все результаты последнего раздела сохраняются, как это легко видеть, и для внутренней 1-й ГЗЭ.

### Среда без потерь. Замечания к решению 1-й ГЗЭ

При решении 1-й внешней ГЗЭ с помощью электрических токов  $\mathbf{K}$  последние нельзя определить однозначно, если  $\omega$  совпадает с одной из собственных частот\* идеально проводящего резонатора  $s$ , хотя поле, как это следует из теоремы единственности, определяется 1-й внешней ГЗЭ однозначно. Действительно к решению уравнения для тока  $\mathbf{K}$  можно добавить выраже-

ние типа  $\sum_{n=1}^N a_n \mathbf{K}_n$ , где  $a_n$  — постоянные, а  $\mathbf{K}_n$  — распределение то-

ка, соответствующего  $n$ -му собственному  $N$ -вырожденному колебанию, удовлетворяющее уравнению  $\mathcal{E}\{\mathbf{K}_n\} = 0$ . Более того, при произвольном заданном  $\mathbf{E}_t (= \mathbf{e})$  на  $s$  внутренняя задача о возбуждении резонатора током  $\mathbf{K}_\mu = -[\mathbf{e}\mathbf{n}]$  не имеет конечного решения, а значит, на основании сказанного выше не имеет решения и уравнение  $\mathcal{E}\{\mathbf{K}\} = \mathbf{e}$ , т. е. поле 1-й внешней ГЗЭ, не может быть выражено при помощи только электрического тока, распределенного на  $s$ .

Для того чтобы существовало конечное решение внутренней задачи о возбуждении резонатора, на собственной частоте, магнитными токами  $\mathbf{K}_\mu$ , а значит, и внешней ГЗЭ при помощи электрических токов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_s \mathbf{K}_\mu \mathbf{H}_n^* ds = 0, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Здесь  $\mathbf{H}_n$  — магнитный вектор  $n$ -го собственного  $N$ -вырожденного колебания резонатора  $s$ . Необходимость этих условий вытекает из следующего.

\* Имеются в виду частоты внутренних колебаний резонатора.

Если существует решение  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  внутренней задачи о возбуждении резонатора с заданным током  $\mathbf{K}_p$ , то, применяя к нему и к собственному колебанию  $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$  сопряженную лемму типа Лоренца, найдем

$$\int_s [\mathbf{E}_n^* \mathbf{H}] ds + \int_s \mathbf{K}_p \mathbf{H}_n^* ds = 0.$$

Так как  $E_{n,t} = 0$  на  $s$ , то отсюда сразу получаются написанные выше условия. Физический смысл их состоит в том, что они обеспечивают «ортогональность» возбуждающих токов и собственных колебаний, вследствие чего внешние силы не совершают работу и колебания остаются конечными. Последнее можно рассматривать так же, как доказательство достаточности.

В случае, наиболее интересном для нас, когда  $\mathbf{K}_p = -[\mathbf{en}]$ , эти условия принимают вид

$$\int_s [\mathbf{e} \mathbf{H}_n^*] ds = 0, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Покажем, что если  $\mathbf{e}$  — электрический вектор падающего на  $s$  снаружи поля, то эти условия всегда выполняются.

Пусть  $\mathbf{h}$  — магнитный вектор этого поля; тогда, на основании «сопряженной леммы», примененной к области, находящейся внутри  $s$ , и полям  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  и  $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$ , получим

$$\int_s [\mathbf{e} \mathbf{H}_n^*] ds = - \int_s [\mathbf{E}_n^* \mathbf{h}] ds,$$

а так как  $E_{n,t} = 0$  на  $s$ , то наше утверждение доказано.

Из сказанного следует, что задача о дифракции падающей волны на идеально проводящем теле *всегда* может быть сведена к решению уравнения  $\mathcal{E}\{\mathbf{K}\} = -\mathbf{e}_t$ , а вторичное поле выражено через электрический ток, распределенный на поверхности тела. Это соответствует физике процесса, при котором  $\mathbf{K}$  является не фиктивным источником, а реально существующим током.

• Все замечания, сделанные здесь о сведении внешней 1-й ГЗЭ к нахождению электрического тока  $\mathbf{K}$  на  $s$ , могут быть распространены с соответствующими изменениями и на случай сведения ее к нахождению чисто магнитного тока на  $s$ .

На внутренней 1-й ГЗЭ при отсутствии потерь мы отдельно не останавливаемся, так как все исключения, которые здесь могут иметь место, очевидны из предыдущего.

## § 5. 2-я ГЗЭ и смешанная ГЗЭ

2-я ГЗЭ сводится к определению поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  во внешнем (внутреннем) пространстве  $V_o(V_i)$ , ограниченном изнутри (снаружи)

замкнутой геометрической поверхностью  $s$  по заданным на ней значениям  $\mathbf{H}_t = \mathbf{h}$ . Для этой задачи справедлива 975

**Теорема 3.** Поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в области  $V_e(V_i)$  тождественно совпадает с полем  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ , возбуждаемым поверхностными электрическими токами  $\mathbf{K} = [\mathbf{h}\mathbf{n}]$  ( $\mathbf{n}$  — внешняя к  $V$  нормаль), распределенными на внешней (внутренней) стороне  $s$ , которая при этом считается обладающей идеальной магнитной проводимостью.

Введенные электрические токи  $\mathbf{K}$  возбуждают магнитные токи на магнитно-проводящей поверхности  $s$ , совместным действием которых и определяется поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ .

Полезно заметить, что поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  так же, как и поле  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ , введенное в теореме 1, тождественно равно нулю в области, где расположены источники, т. е. в области, внешней по отношению к рассматриваемой. Это следует сразу же из самого определения этих полей.

**Смешанная ГЗЭ.** Она сводится к нахождению поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в области  $V$ , ограниченной  $s$ , по заданным на ней составляющим

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{e} \text{ на } s_1 \text{ и } \mathbf{H}_t = \mathbf{h} \text{ на } s_2, \quad s_1 + s_2 = s.$$

Эта задача может быть сведена к 1-й или 2-й ГЗЭ путем решения некоторого интегродифференциального уравнения. Для нее может быть сформулирована теорема, аналогичная теоремам 1 и 2.

## § 6. Теорема эквивалентности

Из рассмотрения ГЗЭ и теоремы единственности следует, что поле в области  $V$  однозначно определяется заданием  $\mathbf{E}_t$  или  $\mathbf{H}_t$  на  $s$ , ограничивающей  $V$ . Более того, одновременное задание  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  на  $s$  не может быть произвольным, так как одна из этих величин однозначно определяет другую. Несогласованное задание этих величин может привести к противоречию в том смысле, что не существует поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла и принимающего на  $s$  заданные значения  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$ .

Однако на практике нахождение поля в результате решения 1-й или 2-й ГЗЭ является весьма затруднительным для более или менее сложной области  $V$ . Задача резко упрощается и могут быть легко написаны общие формулы для поля в произвольной области, ограниченной  $s$ , если задать на  $s$  обе составляющие  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  одновременно. Проще всего к таким формулам приводит

**Теорема эквивалентности.** Пусть геометрическая поверхность разбивает пространство на две области  $V_1$  и  $V_2$  и все источники, возбуждающие поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , сосредоточены в области  $V_1$ . Если  $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}$  и  $\mathbf{H}_t = \mathbf{h}$  на  $s$ , то поле  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ , возбуждаемое распределенными на геометрической поверхности  $s$  токами  $\mathbf{K} = [\mathbf{h}\mathbf{n}]$  и  $\mathbf{K}_m = -[\mathbf{e}\mathbf{n}]$  ( $\mathbf{n}$  — направлено внутрь  $V_1$ ) совпадает с полем  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в области  $V_2$  и тождественно равно нулю в области  $V_1$ . В частности, области  $V_1$  и  $V_2$  могут быть бесконечными. Среда в общем случае неоднородна.

Доказательство легко провести, исходя из 1-й или 2-й ГЗЭ.

Полезно отметить, что если среда в области  $V_2$  однородна, то при расчете  $E_1, H_1$  по токам  $K, K_\mu$  можно считать все пространство  $V_1+V_2$  однородным с параметрами среды  $V_2$ . Фактическое наличие неоднородности в среде  $V_1$  не скажется, так как поле  $E_1, H_1$  там равно нулю.

### § 7. Формулы типа Гюйгенса—Кирхгофа для электромагнитного поля

Определим поле  $E, H$  в области  $V$ , ограниченной (снаружи или изнутри) геометрической поверхностью  $s$ . Пусть это поле возбуждается источниками, расположенными как в области  $V$ , так и вне ее. Область  $V$  считается заполненной однородной средой с комплексными параметрами  $\varepsilon, \mu$ ; вне  $V$  среда может быть неоднородной.

Источники—электрические и магнитные токи  $J$  и  $J_\mu$  внутри  $V$  и  $E_t, H_t$  на  $s$  считаются известными.

Поле  $E, H$  в области  $V$  будем искать в виде суммы  $E=E^0+E^1, H=H^0+H^1$ , где  $E^0, H^0$ —первичное поле токов, расположенных внутри  $V$ , которое определим при помощи электрического и магнитного векторов Герца:

$$P^0 = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon} \int_V J \frac{e^{-ikr}}{r} dv, \quad P_\mu^0 = \frac{1}{4\pi i \omega \mu} \int_V J_\mu \frac{e^{-ikr}}{r} dv.$$

Подчеркнем, что при расчете  $E^0, H^0$  все пространство считается однородным (с  $\varepsilon$  и  $\mu$  такими же, как и в  $V$ ).

Вторичное поле  $E^1, H^1$  не имеет источников в области  $V$ , и его касательные составляющие на  $s$  равны

$$E_t^1 = E_t - E_t^0, \quad H_t^1 = H_t - H_t^0.$$

Введем обозначения

$$K^1 = K - K^0, \quad K_\mu^1 = K_\mu - K_\mu^0,$$

где

$$K = [Hn], \quad K^0 = [H^0n],$$

$$K_\mu = -[En], \quad K_\mu^0 = -[E^0n].$$

Тогда на основании „теоремы эквивалентности“ поле  $E^1, H^1$  в области  $V$  определяется токами  $K^1, K_\mu^1$  или, что то же самое, токами  $K, K_\mu$ , так как поле токов  $K^0, K_\mu^0$  равно нулю в области  $V$ . Последнее замечание § 6 позволяет определить поле  $E^1, H^1$  при помощи векторов Герца

$$P^1 = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon} \int_s K \frac{e^{-ikr}}{r} ds, \quad P_\mu^1 = \frac{1}{4\pi i \omega \mu} \int_s K_\mu \frac{e^{-ikr}}{r} ds.$$

Полное поле в области  $V$  запишется так:

$$\mathbf{E} = -(\text{grad div} + \kappa^2)\mathbf{\Pi} - i\omega\mu \text{rot } \mathbf{\Pi}_\mu,$$

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon \text{rot } \mathbf{\Pi} + (\text{grad div} + \kappa^2)\mathbf{\Pi}_\mu,$$

где

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^0 + \mathbf{\Pi}^1, \quad \mathbf{\Pi}_\mu = \mathbf{\Pi}_\mu^0 + \mathbf{\Pi}_\mu^1.$$

Это и есть искомые формулы типа Гюйгенса—Кирхгофа.

Если область  $V$  внешняя по отношению к  $s$ , то в дальней зоне справедливы асимптотические формулы

$$\mathbf{E} = \frac{\kappa}{4\pi i} \frac{e^{-i\kappa R}}{R} \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{i}_R [\mathbf{F} \mathbf{i}_R]] + [\mathbf{F}_\mu \mathbf{i}_R] \right\}.$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{i}_R \mathbf{E}].$$

Здесь

$$\mathbf{F} = \int_s [\mathbf{Hn}] e^{i\kappa \vec{\rho} \vec{l}_R} ds, \quad \mathbf{F}_\mu = - \int_s [\mathbf{En}] e^{i\kappa \vec{\rho} \vec{l}_R} ds,$$

где

- $\vec{\rho}$  — радиус-вектор точки интегрирования;
- $\mathbf{R}$  — радиус-вектор точки наблюдения;
- $\mathbf{n}$  — внешняя (по отношению к  $V$ ) нормаль к  $s$ .

При написании последних формул токи  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}_\mu$  в области  $V$  положены равными нулю.

Большинство приведенных выше результатов может быть получено непосредственно из леммы Лоренца без использования понятий металлизации и «магнетизации» геометрической поверхности  $s$ . Правда, изложение при этом стало бы менее наглядным. Покажем это на примере вывода формул типа Гюйгенса—Кирхгофа.

По-прежнему будем считать среду однородной внутри  $V$ , но источники поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — находящимися вне  $V$ .

Введем в рассмотрение в области  $V$ , кроме искомого поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , еще два вспомогательных поля:

- 1)  $\mathbf{e}'$ ,  $\mathbf{h}'$  — поле электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}$ , расположенного в точке наблюдения  $q$ ;
- 2)  $\mathbf{e}''$ ,  $\mathbf{h}''$  — поле магнитного диполя с моментом  $\mathbf{m}$ , расположенного в точке наблюдения  $q$ .

При расчете вспомогательных полей среда вне  $V$  может быть взята любой, в том числе отличной от реально существующей в рассматриваемой задаче.

Лемма Лоренца играет роль теоремы Грина для электромагнитных полей. Поэтому последовательно применяя ее к области  $V$  и полям  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}'$ ,  $\mathbf{h}'$  или  $\mathbf{e}''$ ,  $\mathbf{h}''$  получим после несложных преобразований

$$\frac{i}{\omega} \int_s \{[\mathbf{E}\mathbf{h}'] - [\mathbf{e}'\mathbf{H}]\} ds = \begin{cases} \mathbf{p}\mathbf{E}(q) & \text{при } q \in V, \\ 0 & \text{при } q \in \bar{V}; \end{cases}$$

$$\frac{1}{i\omega} \int_s \{[\mathbf{E}\mathbf{h}''] - [\mathbf{e}''\mathbf{H}]\} ds = \begin{cases} \mathbf{m}\mathbf{H}(q) & \text{при } q \in V, \\ 0 & \text{при } q \in \bar{V}. \end{cases}$$

Ввиду произвольности векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{m}$ , эти формулы полностью определяют  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  внутри  $V$ . Они являются наиболее общими формулами, определяющими поле внутри  $V$  через  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$ , заданные на  $s$ . Общность эта обусловлена значительным произволом, допускаемым при определении вспомогательных полей.

Если при расчете последних считать что все пространство заполнено однородной средой с параметрами теми же, что и у  $V$ , то написанные формулы совпадут с формулами типа Гюйгенса—Кирхгофа, выписанными ранее.

Полагая при расчете вспомогательных полей, что  $e'_t = e''_t = 0$  на  $s$ , получим решение 1-й ГЗЭ. Вспомогательные поля при этом играют роль векторных функций Грина.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

ПРЕПРИНТ № 37(409)

Я. Н. Фельд

**О МОЩНОСТИ, ИЗВЛЕКАЕМОЙ ПРИЕМНОЙ  
АНТЕННОЙ ИЗ ПАДАЮЩЕЙ НА НЕЕ ВОЛНЫ**

*Прочитано на VIII Всесоюзной школе по дифракции  
и распространению волн, Волоколамск, 1984*

МОСКВА — 1984



Классические результаты здесь принадлежат М.С. Нейману [1], который для линейной поляризации и локально плоского характера падающей волны дал полное решение задачи. Случай любой поляризации рассмотрен в [2]. При произвольной конфигурации падающей волны соответствующую формулу получил Э.Л. Бурштейн [3] и позднее Б.Е. Кинбер [4]. При выводе они пользовались различными допущениями, хотя пришли к одному и тому же результату. В настоящей работе мы выясним при каких условиях справедлива формула Бурштейна – Кинбера, учтем влияние рассогласования тракта с антенной и приемником, а также дадим другие, более простые, варианты формул для мощности, поступающей в приемник. При заданном падающем поле и некоторых добавочных условиях, обеспечивающих существование решения задачи о максимуме принимаемой мощности, найдем оптимальное распределение поля в апертуре антенны (в режиме передачи), обеспечивающее реализацию указанного максимума. Изложение ведется на примере зеркальной антенны.

Рассмотрим зеркальную приемную антенну с облучателем в виде рупора, соединенного с приемником одноименным волноводным трактом (рис.1). Пусть на антенну падает первичная волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  произвольной конфигурации, возбуждаемая электрическими и магнитными токами, распределенными с плотностью  $\vec{j}$  и  $\vec{j}^m$  в объеме  $V_0$ , расположенном вне антенной системы.

Обозначим полное поле, создаваемое токами  $\vec{j}$  и  $\vec{j}^m$  при наличии антенны буквами  $E, H$ . Введем еще в рассмотрение так же вспомогательное поле  $\vec{E}, \vec{H}$ , возбуждаемое этой же антенной в режиме передачи, когда вместо приемника включен генератор, возбуждающий в тракте волну  $\vec{E}^1, \vec{H}^1$ , бегущую в направлении к рупору. Применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{E}, \vec{H}$  в бесконечном пространстве, ограниченном изнутри поверхностью  $S_1$  (совпадающей с поверхностью антенно-фидерной системы) и сечением  $S$  внутри тракта (рис.1), найдем

$$\int_S \{[\vec{E}, \vec{H}] - [\vec{E}^1, \vec{H}^1]\} d\vec{s} = \int_{V_0} (\vec{j} \vec{E} - \vec{j}^m \vec{H}) dV \quad (1)$$

При выводе этой формулы предположено, что поверхности зеркала, облучателя и тракта идеально проводящие. Поскольку тракт одноименный, поля в его сечении  $S$  можно записать в виде суммы 2-х трактовых волн, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}, \vec{H} &= (\vec{E}', \vec{H}') + R_{-1} (\vec{E}^{-1}, \vec{H}^{-1}) \\ \vec{E}, \vec{H} &= C_{-1} (\vec{E}^{-1}, \vec{H}^{-1}) + R_1 C_{-1} (\vec{E}', \vec{H}') \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $\vec{E}', \vec{H}'$  и  $\vec{E}^{-1}, \vec{H}^{-1}$  поля распространяющейся в тракте основной моды, бегущие соответственно к рупору и обратно. Амплитуды их нормированы любым фиксированным образом и они связаны соотношением

$$\vec{E}^{-1} = \vec{E}' \quad \vec{H}^{-1} = -\vec{H}' \quad , \quad (2')$$

где черта - знак комплексного сопряжения;  $C_{-1}$  - амплитуда возбуждения волны  $\vec{E}^{-1}, \vec{H}^{-1}$ , а  $R_1$  - коэффициент отражения ее от приемника в режиме приема;  $R_{-1}$  - коэффициент отражения волны  $\vec{E}', \vec{H}'$  от рупора. Подставляя (2) и (2') в левую часть (1), получим

$$C_{-1} (1 - R_1 R_{-1}) \int_3 \{ [\vec{E}^{-1} \vec{H}^{-1}] + [\vec{E}' \vec{H}'] \} d\vec{s} = \int_{V_0} (\vec{J} \vec{E} - \vec{J}^M \vec{H}) dV,$$

или, разрешая это равенство относительно  $C_{-1}$ ,

$$C_{-1} = \frac{1}{1 - R_1 R_{-1}} \frac{\int_{V_0} (\vec{J} \vec{E} - \vec{J}^M \vec{H}) dV}{2 \operatorname{Re} \int_3 [\vec{E}' \vec{H}'] d\vec{s}} \quad (3)$$

Определим теперь ваттную мощность, поглощаемую в режиме приема, т.е. поступающую в приемник (потери пренебрегаем). Она, очевидно, равна

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_3 [\vec{E} \vec{H}] d\vec{s}$$

Подставляя сюда поле из второй формулы (2), найдем после элементарных выкладок

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{2} |C_{-1}|^2 \operatorname{Re} \int_3 [\vec{E}' \vec{H}'] d\vec{s}$$

Используя формулу (3), получим выражение для искомой мощности

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{8 |1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{|\int_{V_0} (\vec{J} \vec{E} - \vec{J}^M \vec{H}) dV|^2}{\operatorname{Re} \int_3 [\vec{E}' \vec{H}'] d\vec{s}} \quad (4)$$

Формуле (4) можно придать несколько иной вид. Для этого окружим антенно-фидерную систему произвольной<sup>1)</sup> геометрической поверхностью  $S$  (рис.1) и применим к области, находящейся снаружи ее лемму Лоренца для полей  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{\psi}, \vec{\varphi}$ . Очевидно, будем иметь

$$\int_{V_0} (\vec{j} \vec{\psi} - \vec{j}^M \vec{\varphi}) dV = \int_S \{ [\vec{E}^0 \vec{\psi}] - [\vec{\psi} \vec{H}^0] \} d\vec{s} \quad (5)$$

где  $d\vec{s} = \vec{n} ds$  направлено внутрь  $S$  (рис.1).

Лемма Лоренца для полей  $\vec{E}, \vec{H}$  и  $\vec{\psi}, \vec{\varphi}$  в области вне  $S$  дает

$$\int_{V_0} (\vec{j} \vec{\psi} - \vec{j}^M \vec{\varphi}) dV = \int_S \{ [\vec{E} \vec{\psi}] - [\vec{\psi} \vec{H}] \} d\vec{s}$$

Если положить  $\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^z$ ,  $\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^z$ , где  $\vec{E}^z, \vec{H}^z$  - рассеянное антенной поле, то сравнивая два предыдущих равенства получим интересное тождество

$$\int_S \{ [\vec{E}^z \vec{\psi}] - [\vec{\psi} \vec{H}^z] \} d\vec{s} = 0 \quad (5')$$

Подставляя выражение (5) в (4), найдем

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{8|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{|\int_S \{ [\vec{E}^0 \vec{\psi}] - [\vec{\psi} \vec{H}^0] \} d\vec{s}|^2}{\operatorname{Re} \int_S [\vec{E}^1 \vec{H}^1] d\vec{s}}$$

или

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{8|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{|\int_S \{ \vec{\psi} [\vec{n} \vec{H}^0] + \vec{\varphi} [\vec{n} \vec{E}^0] \} d\vec{s}|^2}{\operatorname{Re} \int_S [\vec{E}^1 \vec{H}^1] d\vec{s}} \quad (6)$$

В частном случае, когда  $R_1 = 0$ , т.е. приемник полностью согласован с трактом, эта формула переходит в формулу, аналогичную впервые полученной в [3] при предположении, что доля рассеиваемой антенной мощности много меньше принятой. Последнее пришлось сделать, поскольку автор [3], по-видимому, не обратил внимания на существование тождества (5'). В работе [4] это ограничение снято, но предполагается, что антенна согласована с трактом.

<sup>1)</sup> Область  $V_0$  находится вне  $S$ .

Из общей формулы (6) следует, что единственным требованием, при котором справедливы формулы, полученные в [3] и [4], является согласование тракта не с антенной, а с приемником.

Формулу (6) можно несколько упростить. Действительно, поле  $\vec{E}^{\circ}, \vec{H}^{\circ}$  можно представить вне поверхности  $S$  в виде суммы двух полей:

$$\vec{E}^{\circ} = \vec{e} + \vec{e}' \quad \vec{H}^{\circ} = \vec{h} + \vec{h}'$$

где  $\vec{e}, \vec{h}$  - поле, создаваемое теми же источниками, что и  $\vec{E}^{\circ}, \vec{H}^{\circ}$ , но удовлетворяющее краевому условию  $e_t = 0$  на  $S$ , а  $e', h'$  - поле, не имеющее источников вне  $S$  и удовлетворяющее краевому условию  $e'_t = E_t^{\circ}$  на  $S$ .

Используя (7), найдем

$$\int_S \{ \vec{\psi} [\vec{n} \vec{H}^{\circ}] + \vec{\gamma} [\vec{n} \vec{E}^{\circ}] \} d\Omega = \int_S \{ \vec{\psi} [\vec{n} \vec{h}] + \vec{\psi} [\vec{n} \vec{h}'] + \vec{\gamma} [\vec{n} \vec{e}'] \} d\Omega$$

Применяя лемму Лоренца к полям  $\vec{\psi}, \vec{\gamma}$  и  $\vec{e}', \vec{h}'$  в пространстве вне  $S$ , убеждаемся, что два последних члена взаимно сокращаются и

$$\int_S \{ \vec{\psi} [\vec{n} \vec{H}^{\circ}] + \vec{\gamma} [\vec{n} \vec{E}^{\circ}] \} d\Omega = \int_S \vec{\psi} [\vec{n} \vec{h}] d\Omega \quad (8)$$

Подставляя это выражение в (6), получим следующую упрощенную формулу

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{8|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{|\int_S \vec{\psi} [\vec{n} \vec{h}] d\Omega|^2}{\operatorname{Re} \int_3 [\vec{E}' \vec{H}'] d\Omega} \quad (9)$$

Здесь вместо  $\vec{E}^{\circ}$  и  $\vec{H}^{\circ}$  стоит всего один вектор  $\vec{h}$ . Правда, определение его в ряде случаев может оказаться сложнее. Однако, если поверхность  $S$  выбрана гладкой и ее радиусы кривизны велики по сравнению с волной, то в приближении Кирхгофа  $h_t = 2H_t^{\circ}$  на освещенной части  $S$  и нулю в области тени. В этом случае

$$P = \frac{|R_1|^2 - 1}{2|1 - R_1 R_{-1}|^2} \frac{|\int_{S_{\text{осл}}} \vec{\psi} [\vec{n} \vec{H}^{\circ}] d\Omega|^2}{\operatorname{Re} \int_3 [\vec{E}' \vec{H}'] d\Omega}, \quad (9')$$

где  $S_{\text{осл}}$  - освещенная часть  $S$ .

Используем полученные формулы для нахождения максимальной мощности, которую приемная антенна может извлечь из падающего на

нее поля. При этом внешнюю геометрию приемной антенны и ее ориентировку, относительно падающего поля, будем считать заданными. Сказанное означает в частности, что излучающий раскрыв  $\Sigma$  антенны фиксирован как по форме, так и по расположению в пространстве. Перестройке подлежат только элементы, расположенные внутри антенны, что приводит к изменению закона распределения поля в раскрыве  $\Sigma$  при работе (приемной) антенны в режиме передачи.

При заданных первичных источниках - токах  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{J}^M$ , возбуждающих падающую волну  $E^\circ, H^\circ$ , поставленная задача о максимуме принимаемой мощности не имеет вообще говоря, решения. Действительно, фиксируя не мощность, излучаемую первичными источниками  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{J}^M$ , а сами эти токи (или первичное падающее поле  $E^\circ, H^\circ$ , что тоже самое) можно получить от них любую мощность. В самом деле, пользуясь терминологией теории цепей, мы имеем задачу с заданным генератором тока, где ток фиксирован, а отдаваемая им мощность может быть любой в зависимости от нагрузки. В нашем случае генератором являются заданные токи  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{J}^M$ , распределенные в области  $V_0$ , а нагрузкой - приемная антенна. Перестраивая последнюю, т.е. меняя ее направленность, можно отобрать у источников любую мощность. Поэтому, для существования конечного максимума у принимаемой мощности необходимо, при нашей постановке задачи, ввести добавочное условие, ограничивающее направленность приемной антенны и устраняющее ее влияние на передающую (токи  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{J}^M$ ). При этом мощность, излучаемая последней окажется фиксированной и равной

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} \int_{S_0} \operatorname{Re} [\vec{E}^\circ \vec{H}^\circ] d\mathcal{J}$$

где  $S_0$  - поверхность, ограничивающая область  $V_0$ .

Различные типы таких добавочных условий будут использованы ниже. Возвращаясь к решению поставленной задачи, применим прежде всего неравенство Коши-Буняковского к интегралу, стоящему в числителе форм. (9)<sup>2)</sup>

$$\left| \int_S \vec{\psi} [\vec{h} \vec{h}] d\mathcal{J} \right|^2 \leq \int_S |[\vec{h} \vec{h}]|^2 \frac{d\mathcal{J}}{\alpha} \int_S |\psi|^2 \alpha d\mathcal{J} \quad (10)$$

Здесь  $\alpha$  произвольная, достаточно гладкая положительная функция, заданная на  $S$ . Целесообразность ее введения будет видна из даль-

<sup>2)</sup> Это неравенство можно усилить, заменив справа  $\vec{\psi}$  на  $\vec{\psi}_t$

нейшего. Это неравенство позволяет написать, учитывая (9) и полагая  $R_1 = 0$ ,

$$P \leq \frac{\int_S |\vec{h} \vec{h}|^2 \frac{d\Omega}{\alpha}}{8 \left| \operatorname{Re} \int_S [\vec{E}^1 \vec{H}^1] d\Omega \right|} \int_S |\vec{\mathcal{E}}|^2 d\Omega \quad (\text{II})$$

Если поверхность  $S$  целиком находится в дальней зоне антенны, то на ней

$$\vec{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[ \vec{l}_R \vec{\mathcal{E}} \right] \quad \text{и} \quad \vec{l}_R \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (\text{I2})$$

где  $\vec{l}_R$  - орт, совпадающий по направлению с радиусом-вектором точки наблюдения; начало координат выбирается в области расположения антенны. На основании закона сохранения энергии можно написать, учитывая (I2) и условие  $R_1 = 0$  (тракт согласован с рупором)

$$-\operatorname{Re} \int_S [\vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{H}}] d\Omega \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_S |\vec{\mathcal{E}}|^2 \cos \psi d\Omega = -\operatorname{Re} \int_S [\vec{E}^1 \vec{H}^1] d\Omega \quad (\text{I3})$$

Здесь  $\psi$  - угол между  $\vec{l}_R$  и  $-\vec{n}$  на  $S$ .

Используя (I3) и полагая  $\alpha \equiv \cos \psi$ , придадим неравенству (II) следующий вид

$$P \leq \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_S |\vec{h} \vec{h}|^2 \frac{d\Omega}{\cos \psi} \quad (0 < \cos \psi \leq 1) \quad (\text{I4})$$

Очевидно  $\cos \psi \equiv 1$ , если  $S$  сфера с центром в начале координат. Правая часть (I4) не зависит от конструкции антенны и при выбранном  $S$  целиком определяется заданными источниками первичного падающего поля  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ . Подчеркнем, что последние должны находиться вне  $S$ . Таким образом доказано, что поступающая в приемник мощность ограничена сверху (при условии, что  $S$  находится в дальней зоне антенны) правой частью (I4), которая конечна. Предположение, что  $S$  находится в дальней зоне антенны, по существу эквивалентно ограничению ее направленности, а значит и КНД антенны. Действительно, при росте КНД дальняя зона удаляется и чтобы фиксированная поверхность  $S$  не вышла из нее необходимо ограничить направленность.

Легко видеть, что равенство в (I4) реализуется при

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{\beta}{\cos \psi} [\vec{h} \vec{h}] \quad \text{на} \quad S \quad (\text{I5})$$

где  $\beta$  - константа.

В этом можно убедиться, подставляя (15) в (9) с учетом (13) и помня, что  $R_1 = R_{-1} = 0$ . Таким образом, приемная антенна будет извлекать из падающего поля  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  наибольшую мощность, если она, в режиме передачи, создает на  $S$  поле с касательной составляющей электрического вектора равной выражению (15). Нормальная компонента  $\vec{E}$ , не входит в (9).

В приближении Кирхгофа формула (15) принимает вид

$$\vec{E}_t = \begin{cases} 2\beta/\cos\psi [\vec{n} \vec{H}^0] & \text{на освещ. части } S, \\ 0 & \text{на затененной части } S. \end{cases} \quad (15')$$

В этом же приближении  $P_{max}$ , равное правой части (14), сводится

$$P_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_{S_{осв}} |[\vec{n} \vec{H}^0]|^2 \frac{dS}{\cos\psi} \quad (16)$$

Обратим внимание на то, что, хотя формулы (14-16) получены в предположении, что  $S$ , а значит и область  $V_0$ , находятся в дальней зоне рассматриваемой зеркальной антенны (т.е. поля  $\vec{E}, \vec{H}$ ), падающее на нее первичное поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  может быть любой конфигурации, не обязательно плоской. Последнее имеет место если область  $V_0$  достаточно велика или токи  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^A$ , в ней распределенные, обладают достаточной направленностью, так что рассматриваемая антенна лежит в ближней зоне поля  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ .

Могут представить интерес другие варианты формул типа (6) и (9). Они получаются путем специального выбора поверхности  $S$ . Так, например в качестве  $S$  можно выбрать поверхность, совпадающую с внешней поверхностью зеркала и его раскрывом  $\Sigma$  (рис.2). Тогда, пренебрегая токами, замыкающими на внешнюю поверхность зеркала в режиме передачи, придадим формуле (6) вид

$$P = \frac{|\int_{\Sigma} \{ \vec{E} [\vec{n} \vec{H}^0] + \vec{H} [\vec{n} \vec{E}^0] \} dS|^2}{8 |\operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\vec{E} \vec{H}^0] dS|} \quad (17)$$

При этом мы учли, что  $\vec{E}_t = 0$  на зеркале, положили  $R_1 = R_{-1} = 0$  и использовали закон сохранения энергии типа (13) для преобразования знаменателя формулы (6). Для большего упрощения (17), будем считать, что касательные составляющие поля в раскрыве  $\Sigma$

(в режиме передачи) связаны соотношением, аналогичным имеющему место в локально плоской волне

$$[\vec{n} \vec{Y}] = Y \vec{\mathcal{E}}_t, \quad \operatorname{Re} Y > 0 \quad \text{на } \Sigma \quad (18)$$

где  $Y$  - адмиттанс, являющийся заданной функцией точки на  $\Sigma$ . Тогда формулу (17) можно переписать следующим образом

$$P = \frac{\left| \int_{\Sigma} \vec{\mathcal{E}}_t \{ [\vec{n} \vec{H}^0] - Y \vec{E}_t^0 \} d\Omega \right|^2}{8 \int_{\Sigma} |\vec{\mathcal{E}}_t|^2 \operatorname{Re} Y d\Omega} \quad (19)$$

Применив к числителю неравенство Коши-Буняковского, получим оценку сверху

$$P \leq \frac{1}{8} \int_{\Sigma} |[\vec{n} \vec{H}^0] - Y \vec{E}_t^0|^2 \frac{d\Omega}{\operatorname{Re} Y} \quad (20)$$

Очевидно, равенство здесь имеет место при

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{\beta}{\operatorname{Re} Y} \{ [\vec{n} \vec{H}^0] - \bar{Y} \vec{E}_t^0 \} \quad \text{на } \Sigma \quad (21)$$

где  $\beta$  - константа.

Таким образом, в приемник поступает максимальная мощность  $P_{\max}$ , равная правой части (20), если в раскрыве  $\Sigma$  создается (в режиме передачи) оптимальное распределение (21). Если  $Y$  константа и касательные составляющие  $\vec{E}^0$  и  $\vec{H}^0$  связаны на  $\Sigma$  соотношением  $Y \vec{E}_t^0 = [\vec{n} \vec{H}^0]$ , то оптимальное распределение (21) принимает вид  $\vec{\mathcal{E}}_t = \mathcal{A} \vec{E}_t^0$ , полученный еще в работе [3]. Формулы (19-21) найдены при пренебрежении токами, затекающими на наружную поверхность зеркала в режиме передачи, согласовании тракта -

$R_1 = R_{-1} = 0$  и при выполнении условий (18). Остановимся на последних подробнее. Второе из них равносильно требованию, чтобы ваттный поток плотности мощности в любой точке  $\Sigma$  был направлен наружу в режиме передачи. Что касается первого условия (18), то оно требует только, чтобы  $\vec{\mathcal{E}}_t$  и  $\vec{Y}_t$  были ортогональны в раскрыве  $\Sigma$ . Более существенно то, что функция  $Y$  может зависеть от распределения  $\vec{\mathcal{E}}_t$  на  $\Sigma$  чего мы не учитываем, полагая  $Y$  - заданным.

Учитывая сказанное, заменим (18) более общим условием

$$[\vec{n} \vec{Y}] = B \vec{\mathcal{E}}_t \quad \text{на } \Sigma \quad (22)$$

10 (3) От этого требования легко избавиться



где  $B$  - линейный оператор. Подчеркнем, что оператор  $B$  зависит только от формы поверхности зеркала и раскрыва  $\Sigma$  и не зависит от конкретного распределения  $\vec{\psi}_t$  на  $\Sigma$ . Очевидно, вещественная часть потока комплексного вектора Пойнтинга  $\operatorname{Re} \frac{1}{2} [\vec{\psi} \vec{y}]$  через  $\Sigma$ , направленная наружу, должна быть неотрицательной, т.к.  $\vec{\psi}, \vec{y}$  - поле в режиме передачи. Сказанное можно записать так

$$\operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\vec{\psi} \vec{y}] \vec{d}s \leq 0. \quad (23)$$

Здесь  $\vec{d}s = \vec{n} ds$  направлено внутрь (рис.2).

Поскольку, учитывая (22),

$$[\vec{\psi} \vec{y}] \vec{d}s = \vec{\psi}_t [\vec{y} \vec{n}] ds = -\vec{\psi}_t B \overline{\vec{\psi}_t} ds \quad (24)$$

неравенство (23) переписывается в виде

$$+ \operatorname{Re} \int_{\Sigma} \vec{\psi}_t B \overline{\vec{\psi}_t} ds \equiv \operatorname{Re} (\vec{\psi}_t, B \overline{\vec{\psi}_t}) \geq 0 \quad (24')$$

Здесь  $(\vec{x}, \vec{y})$  - скалярное произведение в  $L^2(\Sigma)$

Линейный оператор можно представить следующим образом

$$B = B_1 + i B_2 \equiv \frac{B + B^*}{2} + i \frac{B - B^*}{2i},$$

где  $B^*$  - сопряженный с  $B$  (по Эрмиту) оператор,  $B_1$  и  $B_2$  - самосопряженные операторы. Используя эту запись можно придать неравенству (24') вид

$$(\vec{\psi}_t, B_1 \overline{\vec{\psi}_t}) \geq 0 \quad (25)$$

Таким образом, оператор  $B_1 \equiv \operatorname{Re} B$  должен быть неотрицательным. Это есть следствие того, что  $B$  связывает  $\vec{\psi}_t$  и  $\vec{y}_t$  (см.(22)) в режиме передачи. Вернемся теперь к формуле (17) и выразим интегралы, входящие в нее, используя (22), (24), (24') и (25)

$$\int_{\Sigma} \{ \vec{\psi} [\vec{n} \vec{H}^0] + \vec{y} [\vec{n} \vec{E}^0] \} ds = (\vec{\psi}_t, [\vec{n} \vec{H}^0]) - (\vec{\psi}_t, B^* \vec{E}_t^0) = (\vec{\psi}_t, B_1 \vec{M}),$$

$$\operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\vec{\psi} \vec{y}] \vec{d}s = - (\vec{\psi}_t, B_1 \overline{\vec{\psi}_t})$$

Здесь

$$\vec{M} \equiv B_1^{-1} ([\vec{n}\vec{H}^0] - B^* \vec{E}_t) \quad (26)$$

$B_1^{-1}$  - оператор, обратный  $B_1$

Используя полученные выражения, перепишем (17) так

$$P = \frac{|(\vec{\psi}_t, B_1 \vec{M})|^2}{8(\vec{\psi}_t, B_1 \vec{\psi}_t)} \quad (27)$$

Поскольку  $B_1 \geq 0$  (неотрицательный оператор), то выполняется обобщенное неравенство Коши-Буняковского

$$|(\vec{\psi}_t, B_1 \vec{M})|^2 \leq (\vec{\psi}_t, B_1 \vec{\psi}_t) (\vec{M}, B_1 \vec{M}) \quad ($$

Применяя это неравенство к числителю (27), найдем

$$P \leq \frac{1}{8} (\vec{M}, B_1 \vec{M}) \quad (28)$$

Знак равенства здесь реализуется при

$$\vec{\psi}_t = \beta \vec{M} \quad \text{на } \Sigma \quad (\beta - \text{константа}) \quad (29)$$

Максимум  $P$ , равный правой части (28), имеет место при оптимальном распределении  $\vec{\psi}_t$  на  $\Sigma$ , равном (29). Чтобы этот максимум был конечен достаточно выполнение условия

$$\vec{M} \equiv B_1^{-1} ([\vec{n}\vec{H}^0] - B^* \vec{E}_t) \in L(\Sigma), \quad (30)$$

накладываемое, по существу, на фигурирующий в (22) оператор  $B$ . Соотношении (22) можно также использовать для преобразования формулы (9) при  $R_1 = R_{-1} = 0$ . Для этого возьмем в качестве  $S$  как и выше, поверхность, совпадающую с зеркалом и раскрывом  $\Sigma$  (рис.2). Тогда (9) можно записать в виде

$$P = \frac{1}{8} \frac{|\int_{\Sigma} \vec{\psi} [\vec{n}\vec{h}] ds|^2}{-\text{Re} \int_{\Sigma} [\vec{\psi} \vec{y}] ds} \quad (31)$$

Очевидно

$$\int_{\Sigma} \vec{\psi} [\vec{n}\vec{h}] ds = (\vec{\psi}_t, [\vec{n}\vec{h}]) = (\vec{\psi}_t, B_1 B_1^{-1} [\vec{n}\vec{h}])$$

$$\text{Re} \int_{\Sigma} [\vec{\psi}, \vec{y}] ds = -(\vec{\psi}_t, B_1 \vec{\psi}_t)$$

Учитывая последние равенства, перепишем (31) так

$$P = \frac{1}{8} \frac{|(\vec{y}_t, B_1 B_1^{-1} [\vec{n} \vec{h}])|^2}{(\vec{y}_t, B_1 \vec{y}_t)} \quad (32)$$

Отсюда, как и выше, следует

$$\left. \begin{aligned} P &\leq \frac{1}{8} (B_1^{-1} [\vec{n} \vec{h}], [\vec{n} \vec{h}]), \\ \vec{y}_{t \text{ опт.}} &= \beta B_1^{-1} [\vec{n} \vec{h}] \quad \text{на } \Sigma \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Для конечности  $P_{\max}$  равному правой части первой формулы (33), достаточно выполнение условия

$$B_1^{-1} [\vec{n} \vec{h}] \in L(\Sigma) \quad (34)$$

В приближении Кирхгофа, в формулах (33,34) следует заменить  $\vec{h}_t$  на  $2\vec{H}_t^0$ .

Выше, при определении максимальной мощности, поступающей в приемник, ставились добавочные условия типа (I2) на  $S$ ; (I8) на  $\Sigma$  или (30), либо (34). Как уже указывалось, эти условия должны ограничивать направленность приемной антенны и таким образом устранять ее влияние на передающую. В справедливости этого легко убедиться.

Начнем с условия (I2), которое требует, чтобы фиксированная поверхность  $S$  целиком находилась в дальней зоне приемной антенны. Это требование, по существу, ограничивает направленность приемной антенны; так-как с ростом направленности дальняя зона безгранично удаляется и, чтобы поверхность  $S$  не вышла из нее, направленность должна быть ограничена.

Аналогичный смысл имеют и остальные добавочные условия. Так, например, из (I8) следует, что ваттная часть комплексного вектора Пойнтинга не меняет знака на всей поверхности раскрыва  $\Sigma$  (при работе приемной антенны в режиме передачи) и направлена наружу. Действительно, учитывая (I8), получим

$$-\operatorname{Re} \frac{1}{2} [\vec{y} \vec{y}]_n = \frac{1}{2} |y_t|^2 \operatorname{Re} Y \geq 0 \quad \text{на } \Sigma$$

Напомним, что  $\vec{n}$  направлен внутрь антенны. Таким образом, исключены резко переменнофазные распределения поля в раскрыве  $\Sigma$ , а значит и сверхнаправленность. Можно также показать, что подобный же смысл имеют условия (30) и (34).

Интересно отметить, что условие (34) автоматически выполняется при наличии потерь в среде, окружающей антенну. Таким образом, максимум  $P$  существует при наличии потерь в среде без всяких ограничивающих добавочных условий [5].

#### Л и т е р а т у р а .

1. М.С.Нейман, Изв. электропромышленности слабого тока, 1935, № 8.
2. Я.Н.Фельд, Д.С.Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч.2, М: ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1959.
3. Э.Д.Бурштейн, Радиотехника и электроника, 1958, т.3, № 2, с. 186.
4. Б.Е.Кинбер, Радиотехника и электроника, 1961, т.6, № 4, с.654.
5. С.Я.Фельд, Радиотехника и электроника, 1984, т.29, № 8

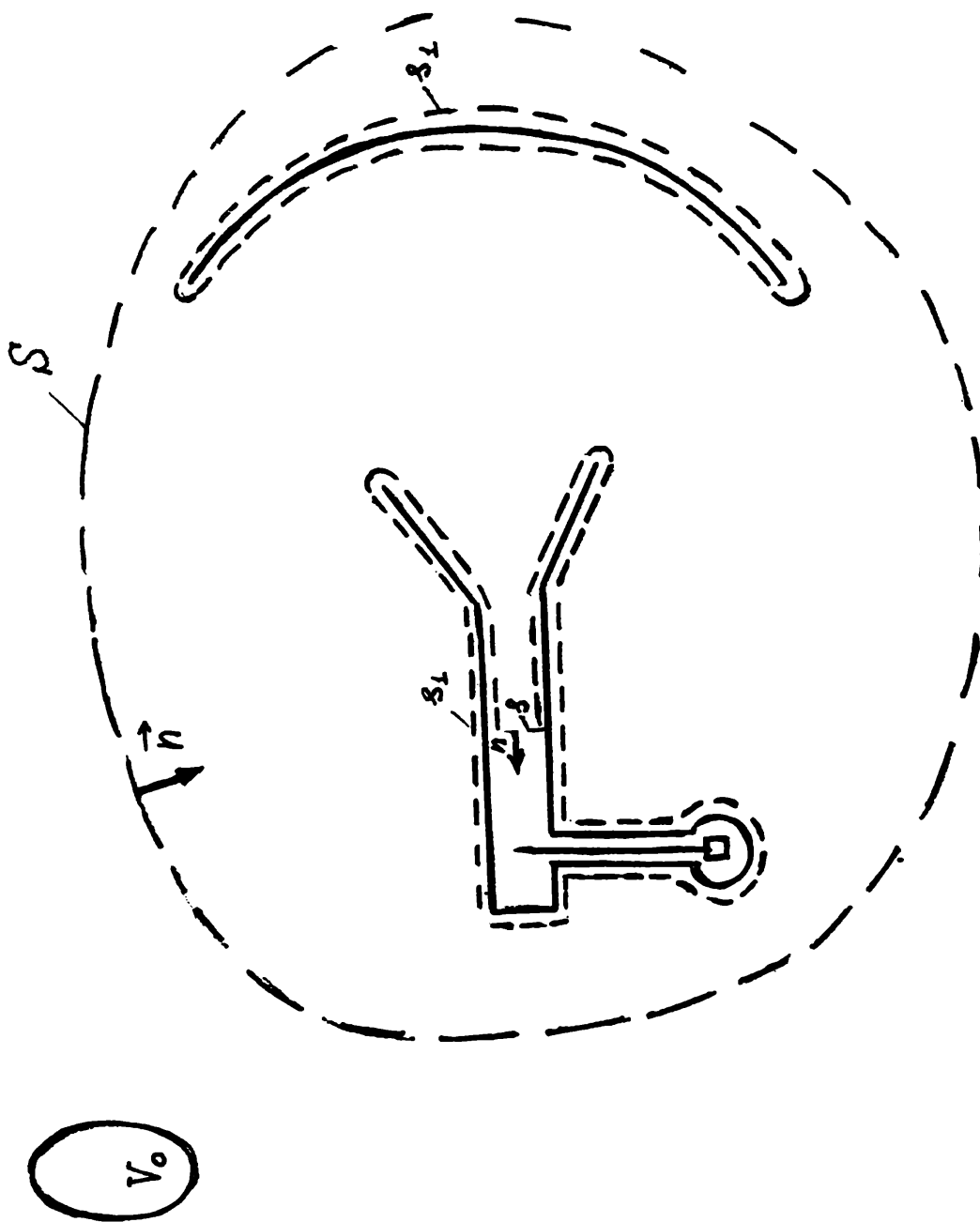


рис. 1

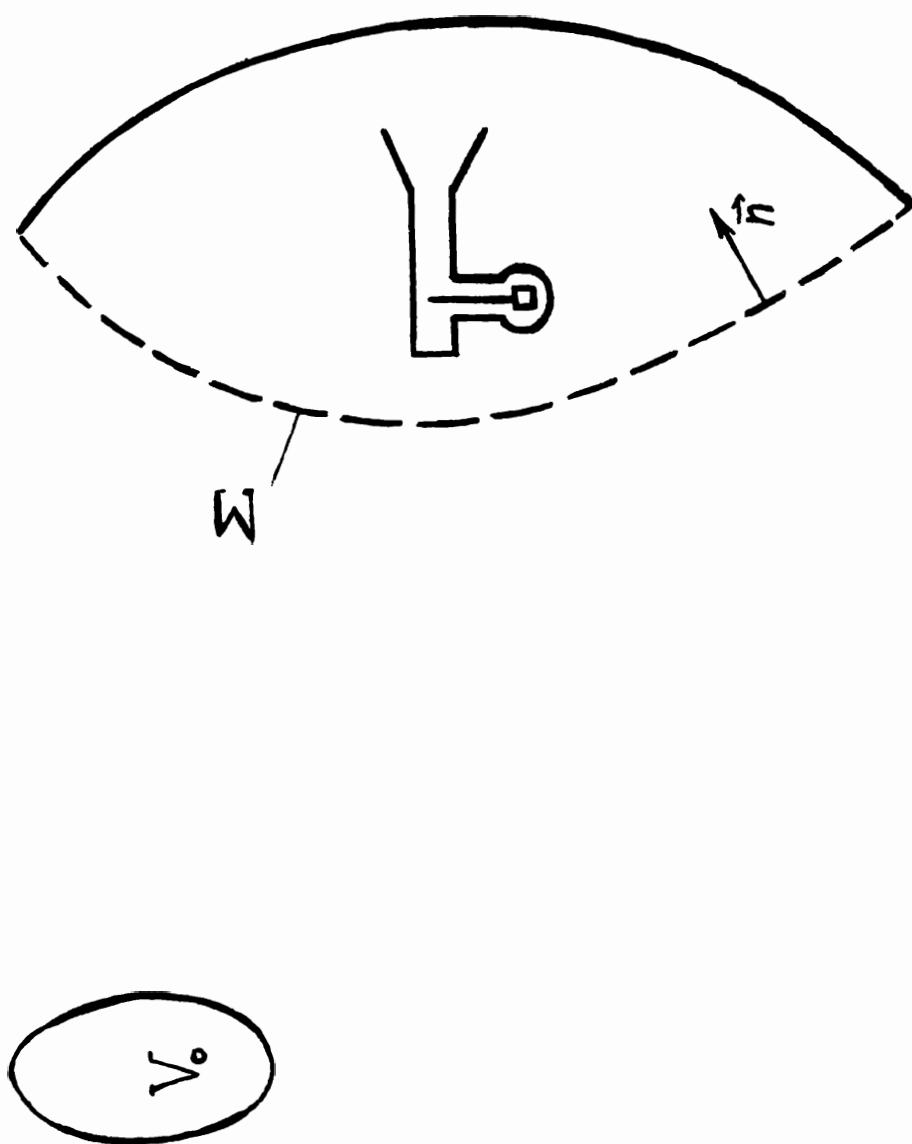


рис 2

## **Библиография**

1. Я.Н.Фельд, Декремент, энергия и мощность колебательного контура, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1934, №4-5, стр.96-99
2. В.В.Татаринов, И.М.Рушук, Я.Н.Фельд, Экспериментальная проверка расчетов направленных антенн, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1934, №6, стр.60-71
3. Я.Н.Фельд, Распространение электромагнитных волн вдоль эллиптического цилиндра, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1934, №17, стр.38-45
4. Я.Н.Фельд, О некотором дифференциальном уравнении, встречающемся в теории диффракции электромагнитных волн, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1936, №12, стр.31-41
5. Я.Н.Фельд, Распространение электромагнитных волн вдоль бесконечного вертикального провода, одним концом зарытого в землю, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1936, №13, стр.17-24
6. Я.Н.Фельд, Излучение электромагнитной энергии. Глава в кн. Гоноровский И.С. Длинноволновые радиосети, 2 изд. М.: Связьтехиздат, 1936.
7. Я.Н.Фельд, Телеграфные уравнения и вариационный принцип, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1937, №16, стр.44-46
8. Я.Н.Фельд, Однотактные и двухтактные волны вдоль двухпроводной линии, Научно-технический сборник ЛЭИС, 1937, №18, стр.21-36
9. Я.Н.Фельд, Теория фидеров с прямоугольными экранами, Электросвязь, 1938, №4, стр.61-71
10. Я.Н.Фельд, О теореме единственности решений уравнений Максвелла для вынужденных гармонических колебаний, ЖЭТФ, 1938, т.8, №6, стр.754-758
11. Я.Н.Фельд, Конденсатор как система с распределенными параметрами, ЖЭТФ, 1938, т.8, №7, стр.874-882
12. Я.Н.Фельд, Распространение электромагнитных волн в линиях с прямоугольными экранами, ЖТФ, 1939, т.9, №7, стр.587-600
13. Я.Н.Фельд, Потери в фидерных устройствах, ЖТФ, 1940, т.10, №9, стр.706-714
14. Я.Н.Фельд, Излучение и возбуждение электромагнитных колебаний через отверстия, ЖЭТФ, 1943, т.13, №3-4, стр.110-115
15. Я.Н.Фельд, О расчете статической ёмкости антенн, ЖТФ, 1943, т.13, №11-12, стр.698-702
16. Я.Н.Фельд, Теорема взаимности в электродинамике для неустановившихся процессов, ДАН СССР, 1943, т.41, №7, стр.294-297
17. Я.Н.Фельд, Граничная задача электродинамики и интегральные уравнения некоторых задач диффракции, ЖЭТФ, 1944, т.14, №9, стр.330-341
18. Я.Н.Фельд, Гранично-начальные задачи электродинамики, ДАН СССР, 1945, т.48, №3, стр.181-184



19. Я.Н.Фельд, Общая теорема взаимности в теории приемно-передающих антенн, ДАН СССР, 1945, т.48, №7, стр.503-505
20. Я.Н.Фельд, Дифракционные антенны с осевой симметрией, ДАН СССР, 1946, т.51, №2, стр.111-114
21. Я.Н.Фельд, Поверхностные излучающие системы, ДАН СССР, 1946, т.51, №3, стр.199-202
22. Я.Н.Фельд, Дифракционные антенны, Радиотехника, 1946, т.1, №6, стр.3-21
23. Я.Н.Фельд, Щелевые излучающие системы, ДАН СССР, 1946, т.53, №7, стр.619-622
24. Я.Н.Фельд, Законы распределения напряжения вдоль щелей, ДАН СССР, 1947, т.60, №5, стр.411-414
25. Я.Н.Фельд, Излучающие щели в настроенных эндовибраторах, ДАН СССР, 1947, т.56, №4, стр.371-374
26. Я.Н.Фельд, Мощность излучения и комплексное сопротивление излучения дифракционных антенн, ДАН СССР, 1947, т.56, №5, стр.481-484
27. Я.Н.Фельд, Излучающие щели в круглых волноводах, Радиотехника, 1947, т.2, №5, стр.42-54
28. Я.Н.Фельд, Щелевые антенны, ЖТФ, 1947, т.17, №9, стр.1051-1065
29. Я.Н.Фельд, Об одном методе расчета возбуждения волноводов, экзо- и эндо-вибраторов, ЖТФ, 1947, т.17, №12, стр.1471-1482
30. Я.Н.Фельд, Щелевые антенны. II, ЖТФ, 1947, т.17, №12, стр.1457-1470
31. Я.Н.Фельд, Многощелевые антенны, ЖТФ, 1948, т.18, №10, стр.1265-1272
32. Я.Н.Фельд, О принципе двойственности в теории дифракции электромагнитных волн у плоских экранов, ДАН СССР, 1948, т.60, №7, стр.1165-1167
33. Я.Н.Фельд, Основы теории щелевых антенн, М. Сов. радио, 1948.
34. Я.Н.Фельд, Наведение токов движущимися зарядами, ДАН СССР, 1953, т.93, №3, стр.447-450
35. Я.Н.Фельд, О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах, ДАН СССР, 1955, т.102, №2, стр.257-260
36. Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн ч.1 М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1955.
37. Я.Н.Фельд, Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами, ДАН СССР, 1956, т.106, №2, стр.215-218
38. Я.Н.Фельд, Падение электромагнитных волн на двойные бесконечные решетки, ДАН СССР, 1956, т.107, №1, стр.71-74
39. А.А.Пистолькорс, Я.Н.Фельд, Основные этапы развития антенных и фидерных устройств в СССР, РиЭ, 1957, т.2, №11, стр.1390-1412

40. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Расчет фазовых скоростей волн в искусственном металлодиэлектрике, РиЭ, 1959, т.4, №3, стр.417-427
41. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитной волны на полубесконечной решетке, РиЭ, 1958, т.3, №7, стр.882-889
42. Я.Н.Фельд, Об одном методе решения граничных задач электродинамики, РиЭ, 1959, т.4, №12, стр.2004-2015
43. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Антенно-фидерные устройства ч.2, М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1959.
44. Я.Н.Фельд, О вариационных методах расчета параметров, являющихся линейными функционалами интегралов уравнений электродинамики, РиЭ, 1962, т.7, №1, стр.53-60
45. Я.Н.Фельд, Л.Д.Бахрах, Современное состояние теории синтеза антенн, РиЭ, 1963, т.8, №2, стр.187-205
46. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитной волны на двойных полубесконечных несимметричных решетках, РиЭ, 1964, т.9, №6, стр.950-959
47. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Расчет фазовой скорости волн в цепочках связанных резонаторов, РиЭ, 1966, т.11, №10, стр.1759-1770
48. Я.Н.Фельд, И.В.Сухаревский О сведении задач дифракции на незамкнутых поверхностях к интегральным уравнениям второго рода, РиЭ.–1966.– Т. 11, №7.– С.1159-1168
49. Я.Н.Фельд, Об оптимальных амплитудно-фазовых распределений в плоских перископических системах, РиЭ.– 1967.– Т.12,№2.– С.229-236
50. Я.Н.Фельд, О единственности решения интегральных уравнений (второго рода) задач дифракции на незамкнутых экранах, ДАН СССР, 1967, т.177, №4, стр.820-823
51. Л.Д.Бахрах, А.А.Пистолькорс, Я.Н.Фельд Развитие техники антенных устройств, РиЭ.– 1967.– Т.12, №11.– С.1911-1946
52. Я.Н.Фельд, И.В.Сухаревский Об интегральных уравнениях задач дифракции на незамкнутых экранах, РиЭ.– 1967.– Т.12,№10.– С. 1713-1720
53. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Современное состояние и проблемы теории антенн, в кн. Современные проблемы антенно-волноводной техники, М. Наука, 1967, стр.5-21
54. Я.Н.Фельд, О сведении одного класса решения интегральных уравнений первого рода к уравнениям второго рода, ДАН СССР, 1968, т.187, №4, стр.761-764
55. Я.Н.Фельд, Основные уравнения, теорем единственности и граничные задачи электродинамики, в сб. 1-я Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Москва-Харьков: 1968, с. 93-109.
56. Я.Н.Фельд, И.В.Сухаревский Применение нерезонансных функций Грина к построению интегральных уравнений задач дифракции на незамкнутых экранах, РиЭ.– 1969.– Т.14, №8.– С.1362-1368

57. Я.Н.Фельд, Об одном методе решения задач математической физики, ДАН СССР, 1970, т.192, №5, стр.1006-1010
58. Я.Н.Фельд, Г.А.Свистунов, Синтез линейных антенн с абсолютно инте-грируемыми токами, РиЭ.– 1971.– Т.16, №5.– С.708-717
59. Я.Н.Фельд, Дифракция скалярной волны на незамкнутой поверхности с краевым условием Дирихле, ДАН СССР, 1972, т.206, №6, стр.1321-1324
60. Я.Н.Фельд, Г.А.Свистунов, А.Г.Кюркчан, А.С.Леонтьев, Дифракция электромагнитной волны на системе плоскопараллельных волноводов конечной длины, РиЭ.– 1973.– Т.18, №5.– С.898-908
61. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых экранах, ДАН СССР, 1973, т.112, №1, стр.79-82
62. Я.Н.Фельд, Дифракция скалярных волн на незамкнутых поверхностях, РиЭ.– 1973.– Т.18, №9.– С.1786-1793
63. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на различных телах, РиЭ.– 1974.– Т.19, №5.– С.927-935
64. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых металлических поверхностях, РиЭ, 1975, т.20, №1, стр.28-38
65. Я.Н.Фельд, Метод вариации произвольных постоянных в задаче о возбуждении волноводов, РиЭ.– 1976.– Т.21, №12.– С.2615-2617
66. Я.Н.Фельд, А.К.Ансрян, Дифракция скалярной волны на параболическом зеркале, РиЭ.– 1977.– Т.22, №1.– С.1-9
67. Я.Н.Фельд, С.Я.Фельд, Метод вариации произвольных постоянных в задаче о возбуждении шара электрическими и магнитными токами, РиЭ.–1977.– Т.22, №9.– С.1829-1837
68. Я.Н.Фельд, Диафрагма в волноводе произвольного сечения, РиЭ.– 1978.– Т.23, №12.– С.1-6
69. Я.Н.Фельд, С.Я.Фельд, Возбуждение импедансного цилиндра произвольной системой токов, РиЭ.– 1978.– Т.23, №10.– С.2212-2215
70. Я.Н.Фельд, А.К.Ансрян, Токи и диаграммы параболического зеркала, РиЭ.– 1978.– Т.23, №4.– С.673-681
71. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на поверхностях с неоднородным адмитансом, РиЭ, 1979, т.24, №3, стр.456-464
72. Я.Н.Фельд, К интегрированию уравнений Максвелла в слоистых средах, ДАН СССР, 1979, т.147, №6, стр.1359-1362
73. И.Б.Абрамов, Н.С.Бахвалов, М.Г.Белкина, Я.М.Жилейкин, Я.Н.Фельд Диаграммы направленности антенны переменного профиля, РиЭ.– 1980.– Т.25, №9.– С.1829-1843
74. Я.Н.Фельд, С.Я.Фельд, Возбуждение радиально-неоднородного шара электрическими и магнитными токами, РиЭ.– 1980.– Т.25, №12.– С.2481-2490
75. Я.Н.Фельд, К задаче о дифракции волн на поверхностях с неоднородным адмитансом, РиЭ.– 1981.– Т.26, №1.– С.170-172

76. Я.Н.Фельд, К расчету поля апертурных антенн, РиЭ.– 1981.– Т.26, №1.–С.178-179
77. Я.Н.Фельд, Смешанная краевая задача электродинамики, ДАН СССР, 1981, т.26, №6, стр.1351-1355.
78. Я.Н.Фельд, Смешанная обратная задача теории антенн, РиЭ.– 1981.– Т.26, №6.– С.1154-1160
79. Я.Н.Фельд, Синтез антенн по максимуму коэффициента направленного действия, РиЭ.– 1982.– Т.27, №11.– С.2094-2100
80. Я.Н.Фельд, Метод вариации произвольных постоянных для уравнения Гельмгольца на примере задачи о дифракции на неоднородном шаре, РиЭ.– 1982.– Т.27, №12.– С.2323-2332
81. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на поверхностях с адмитансным операторным краевым условием, РиЭ.– 1983.– Т.28, №4.– С.642-646
82. Я.Н.Фельд, О мощности, извлекаемой антенной из падающего на нее поля, РиЭ.– 1983.– Т.28, №12.– С.2313-2319
83. Я.Н.Фельд, О максимуме мощности, принимаемой антенной в среде с потерями, РиЭ.– 1984.– Т.29, №9.– С.1668-1676
84. Я.Н.Фельд, О мощности, извлекаемой приемной антенной из падающей на нее волны. Препринт ИРЭ АН СССР №37(409), М.: 1984.
85. Я.Н.Фельд Предельное значение коэффициента направленного действия антенны, расположенной в среде с потерями, РиЭ.– 1985.– Т.30, №3.–С.427-433
86. Я.Н.Фельд, Рассеяние волн на идеально проводящих и импедансных телах, РиЭ.– 1986.– Т.31, №7.– С.1265-1275
87. Я.Н.Фельд, Принцип дополнителности в теории плоских экранов, ДАН СССР, 1986, т.288, №3, стр.602-604
88. Я.Н.Фельд, Синтез тока на незамкнутых поверхностях по заданной диа-грамме направленности, РиЭ.– 1987.– Т.32, №6.– С.1137-1143
89. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Рассеяние электромагнитных волн антеннами (Обзор), РиЭ.– 1988.– Т.33, №2.– С.225-246
90. Я.Н.Фельд, Синтез токов облучателя по заданному распределению тока на зеркале, РиЭ.– 1988.– Т.33, №11.– С.2234-2239
91. Я.Н.Фельд, О критерии реализуемости диаграмм направленности токами, распределенными на криволинейных поверхностях, ДАН СССР, 1988, т.300, №3, стр.583-587
92. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на «нерэлеевских» телах с нулевыми и импедансными краевыми условиями, РиЭ.– 1989.– Т.34, №8.– С.1569-1575
93. Я.Н.Фельд, Прямые методы в теории антенн, Радиотехника, 1989, №11, стр.61-68

94. Я.Н.Фельд, Краевые задачи и дифракции волн у поверхностей с переменным адмитансом, РиЭ.– 1990.– Т.35, №5.– С.913-921
95. Я.Н.Фельд, Рассеяние электромагнитных волн зеркальными антеннами, РиЭ.– 1990.– Т.35, №8.– С.1596-1603
96. Я.Н.Фельд, Обратные задачи теории антенн и критерии реализуемости диаграмм, Радиотехника, 1990, №11, стр.52-60
97. Я.Н.Фельд, Общая теорема взаимности для немонохроматических процессов в теории антенн, ДАН СССР, 1991, т.318, №2, стр.325-327
98. Я.Н.Фельд, Возбуждение заданными токами металлического конуса, оканчивающегося шаром, РиЭ.– 1991.– Т.36, №6.– С.1114-1123
99. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Дифракционно-щелевые антенны (Обзор теории и методов расчета), РиЭ.– 1991.– Т.36, №12.– С.2257-2280
100. Я.Н.Фельд, Н.Г.Пономарев, Электрическая прочность импедансных ребристых и штырьковых структур, РиЭ.– 1992.– Т.37, №2.– С.211-222
101. Я.Н.Фельд, Н.Г.Пономарев, Синтез распределения импеданса на замкнутой поверхности по заданной диаграмме рассеяния, РиЭ.– 1992.– Т.37, №7.– С.1194-1202
102. Я.Н.Фельд, Плоские двумерные щелевые решетки, Радиотехника, 1992, №9, стр.70-81
103. Я.Н.Фельд, Дифракция электромагнитных волн на магнитоэлектрических телах, ДАН СССР, 1992, т.323, №6, стр.1092-1096
104. Я.Н.Фельд, Об одной квадратичной лемме электродинамики, ДАН СССР, 1992, т.324, №2, стр.321-324
105. Я.Н.Фельд, Теоремы и задачи нестационарных процессов электродинамики, РиЭ.– 1993.– Т.38, №1.– С.38-48
106. Л.С.Бененсон, Я.Н.Фельд, Некоторые новые квадратичные леммы для электромагнитных полей, РиЭ.– 1993.– Т.38, №7.– С.1179-1187
107. Я.Н.Фельд, О минимизации интегрального поперечника рассеяния апертурных антенн, РиЭ.– 1994.– Т.39, №3.– С.390-394
108. Я.Н.Фельд, О минимизации рассеяния приемных антенн, ДАН СССР, 1994, т.339, №5, стр.605-608
109. Я.Н.Фельд, Синтез токов в заданном объеме по диаграмме направленности, РиЭ.– 1995.– Т.40, №3.– С.415-421
110. Я.Н.Фельд, Возбуждение заданными токами металлического конуса, расположенного над металлической плоскостью, РиЭ.– 1995.– Т.40, №1.– С.28-34
111. Я.Н.Фельд, Рассеяние волн системой из двух параллельных смещенных пластин, ДАН СССР, 1995, т.343, №5, стр.618-620
112. Я.Н.Фельд, Рассеяние волн конечным рупором, ДАН СССР, 1995, т.345, №2, стр.182-185

113. Я.Н.Фельд, Об одной новой квадратичной лемме для немонохроматических процессов электродинамики, ДАН СССР, 1997, т.353, №3, стр.316-319
114. Я.Н.Фельд, Н.Г.Пономарев, Вариационные методы в задачах о рассеянии волн, РиЭ, 1996, т.41, №6, стр.651-654
115. Я.Н.Фельд, Излучение биконуса, возбуждаемого включенной между конусами сторонней электродвижущей силой, РиЭ, 1996, т.41, №6, стр.645-650
116. Справочник по антенной технике т.1 под ред. Я.Н.Фельда, М.: ИПРЖР, 1997.
117. Я.Н.Фельд, Л.С.Бененсон, Основы теории антенн. М.: Дрофа, 2007.