

УДК 535.13: 535.326: 535.36: 621.37

МОДЕЛЬ МНОГОСЛОЙНОГО ПЛАВНО-НЕРЕГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНО-ОПТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА В НУЛЕВОМ ВЕКТОРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ: ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

А. А. Егоров ¹, К. П. Ловецкий ², А. Л. Севастьянов ², Л. А. Севастьянов ²¹ Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН² Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Статья поступила в редакцию 20 марта 2019 г.

Аннотация. В настоящей работе проведен анализ волноводных мод и их характеристик в рамках модели адиабатических мод. Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов в рамках матричной модели волноводов сравнения, которая получается из нулевого приближения модели адиабатических мод заменой тангенциальных граничных условий на негоризонтальных участках границ разделов слоев волновода горизонтальными проекциями граничных условий (пренебрегаем вертикальными вкладками в точные граничные условия). Учет реальных граничных условий является основой предлагаемого нами нового метода расчета дисперсионных соотношений и полей плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода. Дано краткое описание алгоритма расчета дисперсионной зависимости в матричной модели волноводов сравнения. Показано, что полученный методом волноводов сравнения профиль толщины дополнительного волноводного слоя тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга в точности совпадает с профилем толщины дополнительного волноводного слоя тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга, полученным Саутвеллом. Описан алгоритм расчета вертикального распределения полей в матричной модели волноводов сравнения. Кроме того, описан алгоритм вычисления вертикального распределения электромагнитного поля направляемых мод в нулевом и первом приближениях метода адиабатических мод. Выполнен расчет дисперсионных зависимостей плавно-нерегулярного четырехслойного интегрально-оптического волновода, то есть

тонкопленочную обобщенную волноводную линзу Люнеберга. Синтезирована тонкопленочная обобщенная волноводная линза Люнеберга. Показано, что между нашими данными в матричной модели метода волноводов сравнения и данными Саутвелла практически нет расхождений. Приведены графики вертикального распределения полей в нулевом векторном приближении в тонкопленочную обобщенную волноводную линзу Люнеберга.

Ключевые слова: электродинамика, волновод, дисперсионное соотношение, моды, волноводная линза Люнеберга, компьютерное моделирование, численное моделирование.

Abstract. In this paper, we analyzed waveguide modes and their characteristics in the framework of the adiabatic mode model and the modified averaging method. The obtained results are compared with the results of other authors in the framework of the matrix model of comparison waveguides, which is obtained from the zero approximation of the adiabatic mode model by replacing tangential boundary conditions on non-horizontal sections of the waveguide layers sections with horizontal projections of the boundary conditions (neglecting the vertical contributions to the exact boundary conditions). Accounting for real boundary conditions is the basis of our proposed new method for calculating the dispersion ratios and fields of a smoothly irregular integrated optical waveguide. A brief description of the algorithm for calculating the dispersion dependence in the matrix model of reference waveguides is given. It is shown that the thickness profile of the additional waveguide layer of a thin-film generalized Luneberg waveguide lens obtained by the comparison waveguide method exactly coincides with the thickness profile of the additional waveguide layer of the thin-film waveguide Luneberg lens obtained by Southwell. An algorithm for calculating the vertical distribution of fields in a matrix model of reference waveguides is described. In addition, an algorithm for calculating the vertical distribution of the electromagnetic field of guided modes in the zero and first approximations of the adiabatic mode method is described. The dispersion dependences of the smooth-irregular four-layer integrated-optical waveguide, that is, a thin-film generalized Luneberg waveguide lens, are calculated.

Synthesized thin-film generalized Luneberg waveguide lens. It is shown that there is practically no discrepancy between our data in the matrix model of the comparison waveguide method and the Southwell data. Graphs of the vertical distribution of fields in the zero vector approximation to the thin-film generalized Luneberg waveguide lens are presented.

Key words: electrodynamics, waveguide, dispersion relation, modes, waveguide Luneberg lens, computer simulation, numerical modeling.

1. Введение

Развитие методов строгого и приближенного анализа плавно-нерегулярных интегрально-оптических волноводов требует разработки новых математических моделей соответствующих объектов, а также привлечения новых методов исследования возникающих при этом задач. С точки зрения математической физики задача о моделировании направляемых волн в плавно-нерегулярном интегрально-оптическом волноводе является задачей на собственные функции и собственные значения и аналогична хорошо известным задачам квантовой механики. С этой точки зрения фундаментальной проблемой электродинамики плавно-нерегулярных структур является разработка методов и алгоритмов нахождения не только собственных значений задачи, которые в общем случае являются комплексными, но и собственных функций, также комплекснозначных.

Основополагающие результаты в теории регулярных волноводов были получены для закрытых (металлических) волноводов А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским, а для открытых (диэлектрических) волноводов В.В. Шевченко (см., например, [1, 2]). Среди нерегулярных волноводов можно выделить поперечно нерегулярные и продольно нерегулярные волноводы. Для поперечно нерегулярных волноводов описывающие их уравнения и соответствующие решения допускают разделение переменных [1].

Для закрытых продольно нерегулярных волноводов в работах Б.З. Каценеленбаума был разработан метод волноводов сравнения, который был

обобщен для открытых продольно нерегулярных волноводов В.В. Шевченко [2]. Перечисленные модели не описывают деполяризацию и гибридизацию направляемых мод на нерегулярных участках волноводов. В работах А.А. Егорова и Л.А. Севастьянова с соавторами была разработана модель плавно-нерегулярных трехмерных диэлектрических и в частности интегрально-оптических волноводов (см., например, [1, 3-10]), описывающая эти явления, эта модель успешно применена для исследования ряда трехмерных интегрально-оптических волноводов и волноведущих устройств, создаваемых на их основе. Асимптотический метод решения граничной задачи для системы дифференциальных соотношений по малому параметру позволяет редуцировать ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений со специальными граничными условиями, метод решения которой известен. Связь двух уравнений второго порядка для мод двух разных поляризаций при решении исходной системы соотношений асимптотическим методом проявляется в первом приближении в качестве слабой (порядка малости δ) связи двух линейных осцилляторов. Она отражает нарушение регулярности структуры, вызванное изменением коэффициента фазового замедления (КФЗ) плавно-нерегулярных диэлектрических волноводов.

В наших предыдущих работах (см., например, [1, 3-10]) с помощью асимптотического метода были получены аналитические выражения для полей деформирующихся мод четырехслойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического 3D-волновода, как в нулевом, так и в первом приближениях теории возмущений. Как показал теоретический анализ, моды плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода являются слабо гибридными квази-ТЕ и квази-ТМ модами. В работе [4] представлен канонический для асимптотического метода вид квазиволновых уравнений, описывающих структуру квази-ТЕ и квази-ТМ мод в плавно-нерегулярном четырехслойном интегрально-оптическом трехмерном (3D) волноводе. В основе использованного нами рассмотрения лежит решение в виде конечного асимптотического ряда, известного как адиабатическое приближение.

Полученные в результате теоретического рассмотрения квазиволновые уравнения в нулевом и первом приближениях решены асимптотическим методом. В обоих случаях получена явная зависимость вкладов первого порядка малости в амплитуды электрического и магнитного полей квазиволноводных мод, а также в явном виде получены сдвиги комплексных постоянных распространения для квази-ТЕ и квази-ТМ мод. В случае действительных диэлектрической и магнитной проницаемостей сред установлено, что эти сдвиги являются чисто мнимыми, причем они различны для различных квази-ТЕ и квази-ТМ мод.

Несмотря на существенный прогресс компьютерной техники, и таких численных методов решения многих электродинамических задач как FDTD-метод (“Finite-Difference Time-Domain” method – метод конечных разностей во временной области) [11] и его различных модификаций, до настоящего времени не удавалось решить как проблему численного моделирования прохождения гибридных мод, например, через тонкопленочную обобщенную волноводную линзу (ТОВЛ) Люнеберга, так и задачу синтеза этой линзы в рамках даже нулевого векторного приближения. Так ряд авторов статей вместо полноценного анализа соответствующей векторной электродинамической задачи, учитывающей также возникновение вытекающих мод на краях линзы Люнеберга, используют модифицированный метод FDTD для решения подобной задачи в рамках формализма ТЕ- и ТМ-мод, т.е. не учитывают векторный характер гибридных мод в линзе.

Решение уравнений Максвелла методом FDTD позволяет достаточно эффективно вычислять электромагнитное поле внутри некоторой ограниченной области пространства, например, в призме, резонаторе, дифракционной решетке и т.д. При этом обратной стороной эффективности и универсальности метода является потребность в значительных вычислительных ресурсах для решения указанных типовых задач. В тех случаях, когда необходим расчет электромагнитных полей на больших расстояниях от исследуемого объекта (например, от линзы), излучающего или рассеивающего электромагнитное поле

использование даже модифицированного метода FDTD приводит к необходимости огромных объемов вычислений и, как следствие, к катастрофическому падению эффективности метода. При использовании метода FDTD существуют и такие проблемы как: «численная дисперсия» (приводящая к ошибкам в определении фазовой скорости), «численная анизотропия», при которой в сеточной модели волновые числа волн, распространяющихся в различных направлениях в изотропной области, различаются [8]. При этом следует подчеркнуть, что нет унифицированных эффективных способов вычисления полей в дальней зоне по результатам вычислений ближнего поля методом FDTD. Это же замечание следует отнести и к вытекающим волнам. Лишь ограниченный класс задач, представляющих в нашей области практический интерес, может быть эффективно решен методом FDTD, причем на больших ЭВМ с объемом ОЗУ в сотни мегабайт и высокопроизводительными процессорами. Кроме того, здесь требуется использование многопроцессорных параллельных вычислительных систем, что является пока препятствием для широкого использования.

Предлагаемая нами модель адиабатических волноводных мод в отличие от метода FDTD при расчетах дисперсионных соотношений и распределения полей плавно-нерегулярных интегрально-оптических 3D-волноводов для достижения равной точности требует на несколько порядков меньше объемов рабочей памяти и времени вычислений. При этом наш метод свободен от проблем типа «численная дисперсия» и «численная анизотропия». В отличие от FDTD-метода мы редуцируем уравнения Максвелла к двум независимым системам дифференциальных уравнений и граничных условий (одна для ТЕ-поляризации, другая для ТМ-поляризации), которая в свою очередь редуцируется к двум независимым однородным системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для амплитудных коэффициентов в случае многослойных волноводов. Каждая однородная система линейных алгебраических уравнений и условие ее разрешимости (дисперсионное соотношение) составляют так называемую «матричную модель» для

соответствующей поляризации.

В настоящей работе анализ волноводных мод и их характеристик проводим в рамках модели адиабатических волноводных мод (в нулевом и первом приближении асимптотического метода) [1].

В задаче описания направляемых (в том числе – гибридных), вытекающих и излучательных мод плавно-нерегулярных многослойных трехмерных оптических волноводов зависимость коэффициентов уравнений Максвелла от быстрой переменной x не является периодической, поэтому непосредственное применение метода осреднения и метода асимптотического разложения по быстрой переменной представляется невозможным. Однако идеи, на которых они базируются, могут быть использованы для построения метода адиабатических мод и алгоритма численно-асимптотического решения задачи описания направляемых, вытекающих и излучательных мод плавно-нерегулярных многослойных оптических 3D-волноводов.

С одной стороны, мы следуем идеологии Каценеленбаума-Шевченко, с другой стороны – вводим новые элементы в метод поперечных сечений. Во-первых, будем моделировать направляемые моды диэлектрического волновода, нерегулярного не только в направлении выбранной оси z , но нерегулярного в двух горизонтальных направлениях y и z сразу. Кроме того, используем те свойства метода поперечных сечений и адиабатического метода Борна-Фока, которые обеспечивают сохранение энергии в первом приближении собственных решений задачи.

Из метода осреднения берется этап осреднения решений \mathbf{E} и \mathbf{H} в области $(-\infty, \infty)$, что легко осуществимо для квадратично интегрируемых по x полей в диэлектрическом волноводе [1]. В регулярных волноводах таким свойством обладают собственные волноводные моды, в которых зависимость от x выделяется в «фактор» по методу разделения переменных. Полученное после осреднения приближенное решение, в отличие от метода поперечных сечений, является решением не регулярного волновода сравнения, а исходного нерегулярного волновода. Именно эти приближенные решения мы используем

в качестве обобщения множителей, используемых в методе поперечных сечений. В качестве функций сечения мы выбираем не решения приближенного оператора $\partial^2/\partial x^2$ с приближенными граничными условиями регулярного волновода сравнения, а решения этого оператора с точными тангенциальными граничными условиями исходного нерегулярного волновода.

В методе коротковолновых асимптотик решение U представляется в виде некоторого асимптотического ряда: $U \sim \sum u_m (k_0)^{-m}$, в котором члены ряда пропорциональны $k_0^{-m} = (2\pi/\lambda_0)^{-m}$, λ_0 – длина волны монохроматического света в вакууме, k_0 – модуль волнового вектора \mathbf{k}_0 . В видимом диапазоне длин волн $\lambda_0 \rightarrow 0$ ($k_0 \rightarrow \infty$), что позволяет использовать решение в виде конечного асимптотического ряда, известного как адиабатическое приближение [1].

Для сравнения полученных нами результатов с результатами других авторов мы используем более грубую матричную модель волноводов сравнения. Данная модель получается из нулевого приближения модели адиабатических мод заменой тангенциальных граничных условий на негоризонтальных участках границ разделов слоев интегрально-оптического волновода приближенными условиями: горизонтальными проекциями граничных условий в пренебрежении вертикальными вкладами в точные граничные условия.

Ранее (см., например, [1, 3-10]) мы показали совпадение данной модели с моделью метода поперечных сечений. Учет реальных граничных условий является основой предлагаемого нами нового метода расчета дисперсионных соотношений и соответствующих мод плавно-нерегулярного диэлектрического волновода.

2. Уравнения Максвелла. Моды плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода

Уравнения Максвелла для не поглощающей неоднородной изотропной среды в системе СИ в отсутствие источников можно записать в виде:

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \varepsilon \partial \tilde{\mathbf{E}} / \partial t, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\mu \partial \tilde{\mathbf{H}} / \partial t.$$

где \mathbf{E}, \mathbf{H} – вектора напряженностей электрического и магнитного полей, символ тильда над векторами полей отражает их комплексный характер; $\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = nk_0$, n – показатель преломления среды (слоя), $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость среды; $\mu = \mu_r\mu_0$ – магнитная проницаемость среды; ε_r, μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; символ тильда наверху у векторов полей отражает их комплексный характер.

Адиабатические моды плавно-нерегулярного волновода, являющиеся решениями уравнений Максвелла, ищутся в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \exp(i\omega t) \frac{\mathbf{E}(x; y, z)}{\sqrt{\beta(y, z)}} \exp\left[-ik_0 \int^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')\right] \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \exp(i\omega t) \frac{\mathbf{H}(x; y, z)}{\sqrt{\beta(y, z)}} \exp\left[-ik_0 \int^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')\right] \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta(y, z) = \sqrt{\beta_y^2(y, z) + \beta_z^2(y, z)}$ длина (норма) двумерного векторного поля $\mathbf{\beta}(y, z) = (\beta_y(y, z), \beta_z(y, z))^t$, составленного из частных производных эйконала $\beta_y(y, z) = \partial\varphi/\partial y$, $\beta_z(y, z) = \partial\varphi/\partial z$, а также $\beta_y = k_y/k_0$, $\beta_z = k_z/k_0$. Эйконал (фаза)

$$\varphi(y, z) = \int^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')$$

вычисляется интегрированием вдоль лучей, после решения дисперсионного соотношения и изолированного вычисления лучей и волновых фронтов в горизонтальной плоскости; здесь $ds = \sqrt{dy^2 + dz^2}$ – элемент длины луча.

Объектом нашего изучения является четырехслойное интегрально-оптическое устройство, созданное на основе трехслойного регулярного планарного волновода (см. рис. 1). На рис. 1 обозначено: 1 – обрамляющая среда или покровный слой (воздух) с показателем преломления n_c ; 2 – первый

волноводный слой (регулярная часть интегрально-оптической структуры) с показателем преломления n_f ; 3 – подложка с показателем преломления n_s ; 4 – тонкопленочная волноводная линза Люнеберга (нерегулярная часть интегрально-оптической 3D-структуры) с показателем преломления n_l (второй волноводный слой); $h(y, z)$ – толщина слоя, образующего линзу Люнеберга; R – радиус апертура линзы; d – толщина регулярной части волноводной интегрально-оптической структуры. Направление распространения TM_0 и TM_1 -мод показано стрелкой в левой части рисунка. В левой части линзы показан профиль поля квази- TM_0 (деформированной TM_0 -моды) и квази- TM_1 -мод (деформированной TM_1 -моды). На один или несколько отдельных участков этого волновода нанесен один или несколько дополнительных волноводных слоев с показателями преломления большими или меньшими, чем показатель преломления основного волноводного слоя. Рассматриваем вначале случай, когда на регулярных участках интегрально-оптической структуры распространяются «идеальные» TE- или TM-моды.

При прохождении через нерегулярный участок они претерпевают деформацию разного рода: масштабное преобразование структуры стоячей волны в вертикальном направлении, обусловленную вертикальным изменением геометрических параметров волноведущей структуры; гибридизацию моды, обусловленную трехмерностью устройства на нерегулярных участках и, как следствие, проявлением векторного характера полей; частичным излучением моды в подложку и покровный слой, обусловленным нерегулярностями интегрально-оптического устройства и др.

Мы ограничимся рассмотрением малых геометрических нерегулярностей дополнительного волноводного слоя: $|\partial h/\partial y| \ll 1$, $|\partial h/\partial z| \ll 1$, в частности на примере тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга (см. рис. 1). Мы также ограничимся рассмотрением деформаций направляемой моды первых двух типов. Вместе с тем мы дадим ниже и оценку потерь мощности вытекающих мод в ТОВЛ Люнеберга.

На регулярном участке волновода вдоль оси Oz могут распространяться направляемые ТЕ- и ТМ-моды. Граница раздела $x = h(y, z) = const$ волноводного слоя и воздуха на регулярном участке горизонтальна, и в любой точке $(h(y, z), y, z)^T$ касательная к ней плоскость совпадает с плоскостью yOz . Тангенциальные граничные условия выполняются по отдельности для ТЕ-моды:

$$H_z|_{h-0} = H_z|_{h+0}, E_y|_{h-0} = E_y|_{h+0}; \quad (2)$$

и для ТМ-моды соответственно:

$$E_z|_{h-0} = E_z|_{h+0}, H_y|_{h-0} = H_y|_{h+0}. \quad (3)$$

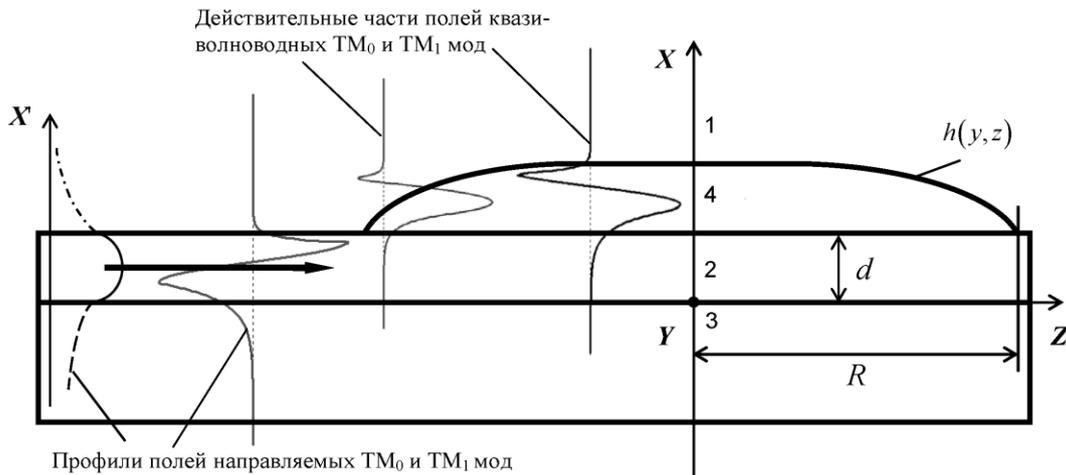


Рис. 1. Поперечное сечение рассматриваемой интегрально-оптической структуры. Интегрально-оптический волновод образован средами 1–3.

На поверхности раздела $x = h(y, z)$ нерегулярного участка волновода в точке $(h(y, z), y, z)^T$ касательная плоскость задается уравнением $dx - (\partial h / \partial y) dy - (\partial h / \partial z) dz = 0$ и, в общем случае, не совпадает с горизонтальной плоскостью yOz , задаваемой уравнением: $1dx - 0dy - 0dz = 0$.

При этом тангенциальные граничные условия

$$\mathbf{E}_\tau|_{h-0} = \mathbf{E}_\tau|_{h+0}, \mathbf{H}_\tau|_{h-0} = \mathbf{H}_\tau|_{h+0} \quad (4)$$

в общем случае не выполняются отдельно для ТМ-мод и ТЕ-мод. Таким образом, именно граничные условия связывают две независимые волноводные моды (так называемые квази-ТЕ и квази-ТМ моды) в одну слабосвязанную гибридную моду. Связь является слабой в силу оценки $|\partial h/\partial y|, |\partial h/\partial z| \ll 1$. При этом у решений в плавно-нерегулярном волноводе, также как и у мод регулярного волновода, присутствуют быстрые осцилляции вдоль оси Ox и их число сохраняется при распространении мод.

Подстановка явного вида решения (1) в уравнения Максвелла с учетом ряда эквивалентных преобразований [1] приводит к выражениям для продольных компонент вертикального распределения электромагнитного поля через его продольные компоненты и их производные:

$$\chi_z^2 H_y = \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} \quad \text{и} \quad \chi_z^2 E_x = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y}$$

для квази-ТМ мод, и:

$$\chi_z^2 H_x = \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial y} \quad \text{и} \quad \chi_z^2 E_y = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x}$$

для квази-ТЕ мод.

Для продольных компонент вертикального распределения электромагнитного поля получаем квазиволновые уравнения для гибридных слабосвязанных мод:

для квази-ТМ мод:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \chi^2 E_z = -p_y \chi_z^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\chi_z^2} \right) E_z - \frac{1}{i\omega\varepsilon} \left(\chi_z^2 p_z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\chi_z^2} \right) \right) \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (5)$$

и для квази-ТЕ мод:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \chi^2 H_z = -p_y \chi_z^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\chi_z^2} \right) H_z + \frac{1}{i\omega\mu} \left(\chi_z^2 p_z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\chi_z^2} \right) \right) \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (6)$$

3. Метод исследования многослойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода

3.1. Асимптотический метод решения квазиволновых уравнений

При анализе распространения поляризованного монохроматического электромагнитного поля в многослойном интегрально-оптическом 3D-волноводе с плавно изменяющимися толщинами слоев используется сочетание асимптотического метода коротковолновых асимптотик [1].

Решения уравнений Максвелла ищем в виде (1). Метод решения возникающих здесь задач является итерационным по параметру малости δ ($\delta = \max |\nabla_{y,z} \beta| (k_0 \beta^2)^{-1}$ – это двухмерный аналог величины $|\nabla \varepsilon / \varepsilon|$) и состоит из следующих этапов:

- решаем в нулевом приближении волновые уравнения для $E_y(x; y, z)$ и $H_y(x; y, z)$ для ТЕ- и ТМ-мод соответственно в подобластях однородности сред, образующих волноводную структуру;
- подставляем решения в граничные условия (нулевого порядка малости по δ) и получаем дисперсионные соотношения для ТЕ- и ТМ- мод нулевого порядка – алгебраические трансцендентные уравнения для β ;
- решаем уравнения лучей в нулевом приближении;
- интегрируем фазы вдоль лучей и выписываем полные решения (в нулевом приближении по δ).

После этого следует повторить все этапы для соответствующих уравнений в первом приближении по δ . Уравнения дисперсионных соотношений для ТЕ- и ТМ- мод в этом цикле являются нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных. Квазиволновые уравнения для $E_y(x; y, z)$ и $H_y(x; y, z)$ в первом приближении оказываются связанными. Все это значительно усложняет цикл вычислений электромагнитных полей в первом приближении. Будем решать уравнения (5),

(6) асимптотическим методом [1] для чего представим поля в виде асимптотического (по δ) ряда:

$$E_z(x) = \sum_{p=0}^{\infty} E_z^p(x) \delta^p; \quad H_z(x) = \sum_{p=0}^{\infty} H_z^p(x) \delta^p,$$

где p , обычно, ограничено сверху: $p \ll \infty$.

3.2. Нулевое приближение асимптотического метода

В нулевом приближении асимптотического метода уравнения (5)-(6) в каждом однородном слое принимают вид уравнений:

$$d^2 E_z^{(0)} / dx^2 + k_0^2 (\varepsilon_j \mu_j - \beta^2) E_z^{(0)} = 0, \quad (7)$$

$$d^2 H_z^{(0)} / dx^2 + k_0^2 (\varepsilon_j \mu_j - \beta^2) H_z^{(0)} = 0. \quad (8)$$

Тангенциальные граничные условия в нулевом приближении имеют вид:

$$\mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{-d-0} = \mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{-d+0}, \quad \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{-d-0} = \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{-d+0}, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{-0} = \mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{+0}, \quad \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{-0} = \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{+0}, \quad (10)$$

$$\mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{h(y,z)-0} = \mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{h(y,z)+0}, \quad \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{h(y,z)-0} = \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{h(y,z)+0}. \quad (11)$$

Кроме того, выполняются граничные условия на бесконечности:

$$\left| \mathbf{E}^{\tau(0)} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \right| < +\infty, \quad \left| \mathbf{H}^{\tau(0)} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \right| < +\infty.$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$E_{zs}^{(0)} = A_s \exp(\gamma_s^{(0)} x), \quad E_{zf}^{(0)} = A_f^+ \cos(\chi_f^{(0)} x) + A_f^- \sin(\chi_f^{(0)} x), \quad \text{если } \beta \leq n_f \leq n_l$$

и

$$E_{zf}^{(0)} = A_f^+ \exp(\gamma_f^{(0)} x) + A_f^- \exp(-\gamma_f^{(0)} x), \quad \text{если } n_f \leq \beta \leq n_l. \quad (12)$$

$$E_{zl}^{(0)} = A_l^+ \cos(\chi_l^{(0)} x) + A_l^- \sin(\chi_l^{(0)} x), \quad E_{zc}^{(0)} = A_c \exp(-\gamma_c^{(0)} x).$$

Соответственно общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$H_{zs}^{(0)} = B_s \exp(\gamma_s^{(0)} x), \quad H_{zf}^{(0)} = B_f^+ \cos(\chi_f^{(0)} x) + B_f^- \sin(\chi_f^{(0)} x), \quad \text{если } \beta \leq n_f \leq n_l \quad \text{и}$$

$$H_{zf}^{(0)} = B_f^+ \exp(\gamma_f^{(0)} x) + B_f^- \exp(-\gamma_f^{(0)} x), \text{ если } n_f \leq \beta \leq n_l. \quad (13)$$

$$H_{zl}^{(0)} = B_l^+ \cos(\chi_l^{(0)} x) + B_l^- \sin(\chi_l^{(0)} x), \quad H_{zc}^{(0)} = B_c \exp(-\gamma_c^{(0)} x).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\chi_s^{(0)})^2 &= k_0^2 (n_s^2 - \beta^2) = -(\gamma_s^{(0)})^2 < 0, (\chi_f^{(0)})^2 = k_0^2 (n_f^2 - \beta^2) > 0, \\ (\chi_l^{(0)})^2 &= k_0^2 (n_l^2 - \beta^2) > 0, (\chi_c^{(0)})^2 = k_0^2 (n_c^2 - \beta^2) = -(\gamma_c^{(0)})^2 < 0. \end{aligned}$$

С помощью соотношений

$$E_y^{(0)} = \left[k_0^2 (\varepsilon \mu - \beta_z^2) \right]^{-1} \left(ik_0 \mu dH_z^{(0)} / dx + k_0^2 \beta_y \beta_z E_z^{(0)} \right), \quad (14)$$

$$E_x^{(0)} = \left[k_0^2 (\varepsilon \mu - \beta_z^2) \right]^{-1} \left(-ik_0 \beta_z dE_z^{(0)} / dx - k_0^2 \mu \beta_y H_z^{(0)} \right), \quad (15)$$

$$H_y^{(0)} = \left[k_0^2 (\varepsilon \mu - \beta_z^2) \right]^{-1} \left(-k_0^2 \beta_y \beta_z H_z^{(0)} - ik_0 \varepsilon dE_z^{(0)} / dx \right), \quad (16)$$

$$H_x^{(0)} = \left[k_0^2 (\varepsilon \mu - \beta_z^2) \right]^{-1} \left(-ik_0 \beta_z dH_z^{(0)} / dx + k_0^2 \varepsilon \beta_y E_z^{(0)} \right) \quad (17)$$

мы получаем явные выражения для нулевых приближений компонент напряженностей поля волноводной моды через неопределенные коэффициенты $\{A_j, B_j\}$.

Тангенциальные граничные условия (4) образуют однородную СЛАУ для амплитудных коэффициентов $\{A_j, B_j\}$ [1]

$$\hat{M}(\beta)(\mathbf{A}, \mathbf{B})^T = \mathbf{0} \quad (18)$$

относительно двенадцатимерного вектора $(\mathbf{A}, \mathbf{B})^T$, которая обладает нетривиальным решением в случае, если определитель матрицы системы равен нулю:

$$\det(\hat{M}(\beta)) = 0. \quad (19)$$

И сама матрица $\hat{M}(\beta)$, и ее определитель $\det(\hat{M}(\beta))$ зависят от вещественного параметра $\beta \in [n_s, n_l]$. Дисперсионное уравнение $\det(M) = 0$

имеет вид нелинейного дифференциального уравнения в частных производных относительно h и алгебраического уравнения относительно векторного поля β :

$$F_{Disp}(\beta, \beta_y, \beta_z; h, \partial h / \partial y, \partial h / \partial z; n_s, n_f, n_l, n_c; d) = 0. \quad (20)$$

Модель адиабатических мод в нулевом приближении асимптотического метода была применена нами к изучению ТОВЛ Люнеберга. ТОВЛ Люнеберга является хорошим примером плавно-нерегулярной (как в продольном, так и в поперечном направлениях) волноведущей 3D-структуры. Не волноводная линза Люнеберга рассматривалась разными авторами с разной степенью успеха [12, 13]. В исследовании ТОВЛ Люнеберга первыми верифицируемыми, на наш взгляд, являются результаты Саутвелла [14, 15]. Для сравнения нашего подхода с подходом Саутвелла мы воспользовались матричной моделью метода волноводов сравнения. При замене тангенциальных условий (11) их горизонтальными приближениями слагаемые, содержащие выражения $(\partial h / \partial y), (\partial h / \partial z)$, обращаются в нуль, и дисперсионное соотношение $\det(\hat{M}(\beta)) = 0$ становится трансцендентным алгебраическим уравнением относительно h и $\beta = \beta_z$.

Итак, мы установили преимущества матричной модели нашего метода перед его традиционной формулировкой. А именно, мы получили дисперсионные зависимости для трехслойных и четырехслойных регулярных волноводов, совпадающие с зависимостями, вычисленными в работах Адамса, Тамира, Когельника и др. для волноводов с совпадающими параметрами (см., например, [1, 16-18]).

При этом матричная модель позволила нам получить плавную непрерывную кривую дисперсионной зависимости при переходе от трехслойного волновода к четырехслойному (см. ниже рис. 2а – рис. 2в), чего не удавалось получить в рамках традиционной формулировки метода волноводов сравнения.

Мы решили задачу синтеза ТОВЛ Люнеберга в рамках матричной модели метода волноводов сравнения (см. рис. 3 ниже). Результат в точности совпал с результатом Саутвелла. Для подтверждения дана ниже таблица, позволяющая сравнить численно результаты расчета профиля толщины ТОВЛ Люнеберга в модели метода волноводов сравнения с результатами работ Саутвелла [14, 15].

Дополнительным преимуществом матричной модели метода волноводов сравнения является возможность вычислить в ее рамках вертикальное распределение волноводной моды, которое численно демонстрирует сохранение структуры стоячей волны при ее масштабной деформации. Следует отметить, что в рамках данной модели не происходит гибридизации волноводных мод. Это естественно, т.к. вместо строгих тангенциальных граничных условий метод волноводов сравнения использует их горизонтальные проекции, т.е. приближенные граничные условия, допускающие раздельное описание ТЕ- и ТМ-мод.

3.3. Первое приближение асимптотического метода

Для вкладов первого порядка малости по δ в амплитуды полей получаем по правилам асимптотического метода систему уравнений с малым параметром в правой части [1].

Амплитуды электрического и магнитного полей в первом приближении имеют асимптотику:

$$E_z(x) = E_z^{(0)}(x) + E_z^{(1)}(x) = E_z^{(0)}(x) + \frac{x}{2} \left\{ \frac{f_2}{\varepsilon} H_z^{(0)}(x) - \frac{f_1}{\chi^2} \frac{dE_z^{(0)}(x)}{dx} \right\} + O(\delta^2),$$

$$H_z(x) = H_z^{(0)}(x) + H_z^{(1)}(x) = H_z^{(0)}(x) - \frac{x}{2} \left\{ \frac{f_2}{\mu} E_z^{(0)}(x) - \frac{f_1}{\chi^2} \frac{dH_z^{(0)}(x)}{dx} \right\} + O(\delta^2),$$

равномерно по всей оси x при произвольных $(y, z) \in yz$, где

$$f_1 = ik_0\beta(\partial^2 s/\partial y^2 + \partial^2 s/\partial z^2), \quad f_2 = k_0/\omega[(\partial\beta/\partial y)(\partial s/\partial z) + (\partial\beta/\partial z)(\partial s/\partial y)].$$

4. Анализ порядка малости вкладов в дисперсионное соотношение плавно-нерегулярного четырехслойного интегрально-оптического волновода

Граничные условия представляет собой систему алгебраических уравнений для \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где вектор неопределенных коэффициентов состоит из двух шестимерных компонент:

$$(\mathbf{a}) = (A_s, A_f^+, A_f^-, A_l^+, A_l^-, A_c) \tag{21}$$

и

$$(\mathbf{b}) = (B_s, B_f^+, B_f^-, B_l^+, B_l^-, B_c). \tag{22}$$

В выражениях (21), (22) переставлены местами неопределенные коэффициенты A и B и уравнения для них, что привело к перестановке строк и столбцов в искомой матрице.

Матрица \mathbf{A} данной системы, размером 12×12 может быть представлена 12-ю столбцами вида:

$$(\mathbf{A}_j) = (\mathbf{A}_j^0) + (\delta \mathbf{A}_j) + (\delta^2 \mathbf{A}_j), j=1, \dots, 12.$$

Здесь вклады нулевого порядка малости по δ имеют вид:

$$(\mathbf{A}_1)^T = (-e^{-\gamma_s d}, e^{-i\chi_f d}, e^{i\chi_f d}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

.....;

$$(\mathbf{A}_{12})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \omega\mu\chi_l e^{i\chi_l h}, -e^{-i\chi_l h} \omega\mu\chi_l, -i\omega\mu\gamma_c e^{-\gamma_c h}).$$

А вклады первого порядка малости по δ имеют следующий вид:

$$(\delta \mathbf{A}_1)^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

.....;

$$\begin{aligned}
 (\delta A_{12})^T &= \left\{ 0, 0, 0, \left\{ k_0^2 \beta^2 \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} \chi_l^2 - k_0 \beta \chi_l \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} \right\} e^{i\chi_l h}, \right. \\
 &\left. \left\{ k_0^2 \beta^2 \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} \chi_l^2 + k_0 \beta \chi_l \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} \right\} e^{-i\chi_l h}, \right. \\
 &\left. \left(\omega \mu k_0 \beta \gamma_c \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial z} + \gamma_c^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} - k_0^2 \beta^2 \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} \right) e^{-\gamma_c h}, 0, 0, 0, \left(\omega \mu k_0 \beta \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \omega \mu \chi_l \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) e^{i\chi_l h}, \right. \\
 &\left. \left(\omega \mu k_0 \beta \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - \omega \mu \chi_l \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) e^{-i\chi_l h}, - \left(i \omega \mu \gamma_c \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \omega \mu k_0 \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right) e^{-\gamma_c h} \right\}.
 \end{aligned}$$

С целью изучения характерных черт и особенностей распределений коэффициентов замедлений $\beta_j(y, z)$ или соответствующих им распределений продольных волновых чисел $k_y^j = k_0 \beta_y^j$ и $k_z^j = k_0 \beta_z^j$ квазиволноводных мод проанализируем зависимость дисперсионных соотношений от параметра малости δ .

Как известно, определитель является линейной функцией любого своего столбца. Следовательно, если имеются матрицы **A**, **B** и **C**, отличающиеся друг от друга только элементами одной из своих столбцов, а соответствующий столбец матрицы **A** является линейной комбинацией этих же столбцов матриц **B** и **C**, то $\det \mathbf{A}$ есть линейная комбинация с теми же коэффициентами определителей $\det \mathbf{B}$ и $\det \mathbf{C}$ (см, например, [1, 19]).

Используя это правило, мы можем показать, как преобразуется выражение полученной матрицы **Matr**, так что в явном виде выделяются вклады как нулевого, так и первого порядков приближения по параметру δ .

Воспользуемся свойством линейности детерминанта по каждому из столбцов матрицы **A**:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j^0 + \delta \mathbf{A}_j + \delta^2 \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}) &= \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j^0, \dots, \mathbf{A}_{12}) + \\
 \det(\mathbf{A}_1, \dots, \delta \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}) &+ \det(\mathbf{A}_1, \dots, \delta^2 \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12})
 \end{aligned} \tag{23}$$

В третьем слагаемом правой части равенства имеется (j -й) столбец с величинами порядка $O(\delta^2)$. Весь третий детерминант является суммой произведений 12-ти матричных элементов из разных столбцов, в каждом из которых присутствует сомножитель порядка $O(\delta^2)$ из (j -го) столбца. Следовательно, третий детерминант является линейной комбинацией малых величин порядка $O(\delta^2)$ или выше по параметру δ . Второй детерминант в силу аналогичных рассуждений является линейной комбинацией величин первого порядка малости по δ и выше, а первый – нулевого порядка малости по δ и выше.

Второй детерминант в силу линейности по другому столбцу можно записать в виде:

$$\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i^0, \dots, \delta \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}) + \det(\mathbf{A}_1, \dots, \delta \mathbf{A}_i, \dots, \delta \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}) + \det(\mathbf{A}_1, \dots, \delta^2 \mathbf{A}_i, \dots, \delta \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}) = \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \delta \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}) \quad (24)$$

В силу вышеприведенных рассуждений второй детерминант в разложении (15) является суммой величин второго порядка малости и выше, а третий – суммой величин третьего порядка малости и выше. Следовательно, для удержания в соотношении (23) величин лишь нулевого и первого порядков малости по δ достаточно в разложении (24) оставить лишь первый детерминант. Повторяя процедуру по оставшимся 10-ти строкам, находим, что вклады первого порядка содержатся лишь в детерминанте вида $\det(\mathbf{A}_1^0, \mathbf{A}_2^0, \dots, \delta \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_{12}^0)$ с нулевыми приближениями 11-ти столбцов и первого приближения одного столбца.

Теперь в первом детерминанте разложения (24) воспользуемся его линейностью по i -тому столбцу $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^0 + \delta \mathbf{A}_i + \delta^2 \mathbf{A}_i$. В таком разложении третий детерминант содержит вклады лишь второго и более высоких порядков малости, второй детерминант содержит вклады лишь первого и более высоких порядков малости. В силу этого третий детерминант отбрасываем, для второго

повторяем процедуру по оставшимся столбцам и оставляем лишь вклад $\det(\mathbf{A}_1^0, \dots, \delta \mathbf{A}_i^0, \dots, \mathbf{A}_j^0, \dots, \mathbf{A}_{12}^0)$.

Повторяя процедуру для первого детерминанта по оставшимся 10-ти столбцам, получим в итоге сумму детерминантов, содержащих лишь величины нулевого и первого порядков малости по δ :

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_1^0, \dots, \mathbf{A}_{12}^0) + \sum_{j=1}^{12} \det(\mathbf{A}_1^0, \dots, \delta \mathbf{A}_j^0, \dots, \mathbf{A}_{12}^0) + O(\delta^2).$$

В дисперсионном соотношении вклад нулевого порядка малости по δ имеет вид:

$$\det(\mathbf{A}_1^0, \dots, \mathbf{A}_{12}^0) = 0.$$

А дополнительные 12 вкладов первого порядка малости по δ в соотношении

$$\det(\mathbf{A}_1^0, \dots, \mathbf{A}_{12}^0) + \sum_{j=1}^{12} \det(\mathbf{A}_1^0, \dots, \delta \mathbf{A}_j^0, \dots, \mathbf{A}_{12}^0) = 0 \quad (25)$$

позволяют учесть (слабую) связь между ТЕ- и ТМ-модами, разрешенными дисперсионным соотношением (25).

5. Дисперсионное соотношение ТОВЛ Люнеберга. Синтез профиля толщины ТОВЛ Люнеберга. Вычисление вертикального распределения электромагнитного поля направляемых мод

5.1. Синтез тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга в приближении матричной модели метода волноводов сравнения

Линза Люнеберга имеет сферическую или цилиндрическую форму и отличается от обычных линз тем, что показатель преломления материала линзы не остаётся постоянным по всей линзе, а зависит от расстояния до её центра (сферическая линза Люнеберга) или оси (цилиндрическая линза Люнеберга) [1, 12-15].

Обычно закон изменения показателя преломления n подбирается таким образом, чтобы при прохождении через классическую линзу Люнеберга

параллельные лучи фокусировались в одной точке на поверхности линзы, а излученные точечным источником на ее поверхности – формировали параллельный пучок вдали от линзы. Следовательно, линза Люнеберга осуществляет совершенное преобразование Фурье, временной масштаб которого определяется скоростью распространения света в материале линзы.

Классическая линза Люнеберга – линза, у которой фокальная сфера совпадает с поверхностью линзы. Этот тип линзы предложен американским учёным Р.К. Люнебергом (Luneburg) в 1944 г. [12]. У этой линзы распределение показателя преломления n в зависимости от расстояния r от центра имеет вид: $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$. Здесь фокальное расстояние равно 1. Величины n и r нормированы к единице на краю линзы.

Обобщенная линза Люнеберга – линза, у которой фокальная поверхность не совпадает с поверхностью линзы, а расположена на расстоянии большем одного радиуса от центра линзы.

Эффективному использованию линз Люнеберга в оптике, а тем более в интегральной оптике препятствуют с одной стороны – серьезные сложности в построении адекватной электродинамической теории и соответствующих алгоритмов и программ расчета таких линз, а с другой – технические сложности изготовления таких линз.

Подставляя известный вид решения полей в каждом слое волновода в граничные условия (без учета наклона поверхности дополнительного волноведущего слоя), получаем однородную СЛАУ относительно амплитудных коэффициентов, определяющих поля в слоях волновода. Условием разрешимости полученной СЛАУ является равенство нулю ее определителя.

Как было отмечено выше, дисперсионное соотношение $\det(\hat{M}(\beta)) = 0$ в данном случае является трансцендентным алгебраическим уравнением при любых значениях горизонтальных координат (y, z) . И при любых (y, z) оно совпадает с дисперсионным соотношением регулярного волновода сравнения. Зная вычисленные значения распределения коэффициента фазового замедления

$\beta(r)$, мы вычисляем при каждом значении нормированного радиуса $r \in [0,1]$ соответствующее значение $h(r)$ профиля толщины дополнительного волноведущего слоя ТОВЛ Люнеберга.

В случае регулярного волновода за счет $\partial s/\partial y = 0$, $\partial s/\partial z = 1$ граничные условия трансформируются в условия, отдельные для коэффициентов $A_s, A_f^\pm, A_l^\pm, A_c$ и $B_s, B_f^\pm, B_l^\pm, B_c$. В регулярном волноводе выполняются также соотношения $\partial h/\partial y = 0$, $\partial h/\partial z = 0$, вследствие чего граничные условия также трансформируются в граничные условия, отдельные для $A_s, A_f^\pm, A_l^\pm, A_c$ и $B_s, B_f^\pm, B_l^\pm, B_c$. При этом часть уравнений содержит только коэффициенты $A_s, A_f^\pm, A_l^\pm, A_c$, а другая часть – только коэффициенты $B_s, B_f^\pm, B_l^\pm, B_c$. Таким образом, система распадается на две независимые системы размером 3×2 , разрешимость которых может быть установлена двумя эквивалентными способами. Первый способ формальный: система разрешима, если детерминант равен нулю. Второй способ традиционный: A_s, A_c выражаются через A_f^\pm, A_l^\pm , после чего оставшиеся уравнения преобразуются в тригонометрическое равенство, известное как дисперсионное соотношение для ТЕ-моды. Аналогично B_s, B_c выражаются через B_f^\pm, B_l^\pm , после чего оставшиеся уравнения преобразуются в тригонометрическое равенство, известное как дисперсионное соотношение для ТЭ-моды.

Если волноводная система состоит из N слоев, то система линейных алгебраических уравнений для неопределенных амплитудных коэффициентов в нерегулярном случае состоит из $(N-1) \times 4$ уравнений для амплитуд $A_s, A_f^\pm, A_l^\pm, A_c$ компонент E_z, H_y и для амплитуд $B_s, B_f^\pm, B_l^\pm, B_c$ компонент H_z, E_y электромагнитного поля, которая в регулярном случае распадается на две независимые системы: систему размерности $(N-1) \times 2$ для амплитуд $B_s, B_f^\pm, B_l^\pm, B_c$ компонент H_z, E_y для ТЕ-мод и систему размерности $(N-1) \times 2$

для амплитуд $A_s, A_f^{\pm}, A_l^{\pm}, A_c$ компонент E_z, H_y для ТМ- мод.

Дадим краткое описание алгоритма расчета дисперсионной зависимости в матричной модели волноводов сравнения.

- Задаются параметры волновода – коэффициенты преломления каждого диэлектрического слоя n_c, n_s, n_f, n_l ; толщину основного диэлектрического слоя d . Вводим сетку в вертикальном распределении, определяющую распределение по радиусу толщины дополнительного волноводящего слоя $h_i(r)$.
- Составляется целевая функция, соответствующая квадрату определителя матрицы.
- В каждой точке сетки $h_i(r)$ методом Нелдера-Мида находится минимум указанной целевой функции. Таким образом, получаем распределение КФЗ по радиусу $\beta_i(r)$.
- Полученный набор данных $\{d, h_i(r), \beta_i(r)\}$ определяет дисперсионную зависимость, которая отображается графически.

В опубликованных работах Саутвелла присутствуют результаты его расчетов распределения $h(r)$ и $\beta(r)$. Для проверки своего алгоритма расчета дисперсионной зависимости сравниваем результат расчета с результатами Саутвелла. Полученный методом волноводов сравнения профиль толщины дополнительного волноводного слоя ТОВЛ Люнеберга в точности совпадает с профилем толщины дополнительного волноводного слоя тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга, полученным Саутвеллом.

5.2. Синтез обобщенной волноводной линзы Люнеберга в нулевом векторном приближении

В нашем случае обобщенная ТОВЛ Люнеберга – трехслойный регулярный волновод (см. рис. 1), на который нанесен дополнительный волноводный слой (пленка) переменной толщины $h(r)$, цилиндрически распределенный в круге радиуса R . При этом дополнительный волноводный слой с показателем

преломления n_l обеспечивает распределение коэффициента фазового замедления $\beta(r)$, равного β вне радиуса R и удовлетворяющего интегральному уравнению [1]:

$$\beta(r)/\beta = \exp[\omega(\rho, F)], \quad (26)$$

где фокусное расстояние $F > 1$,

$$\rho = r \beta(r)/\beta \text{ и } \omega(\rho, F) = \pi^{-1} \int_{\rho}^1 \arcsin(x/F)(x^2 - \rho^2)^{-1/2} dx. \quad (27)$$

Нелинейные соотношения (26), (27) решаются минимизацией невязки:

$$\left(\omega(\rho, F) - \pi^{-1} \int_{\rho}^1 \arcsin(x/F)(x^2 - \rho^2)^{-1/2} dx \right)^2 \rightarrow \min_{\rho, F},$$

методом деформированного многогранника Нелдера-Мида, а интеграл вычисляется с использованием формул Ньютона-Котеса 8-го порядка [1, 7, 20].

Вычисленное распределение коэффициента фазового замедления $\beta(r)$ задает закон эволюции двумерных лучей в плоскости волновода yOz :

$$\frac{d}{ds} \left(\beta(y, z) \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(y, z), \quad \frac{d}{ds} \left(\beta(y, z) \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial z}(y, z). \quad (28)$$

Вследствие того, что решения системы (28) взаимно-однозначно проектируются на ось Oz , в уравнениях (28) можно перейти от естественного параметра эволюции s к параметру эволюции z . При этом система (28) трансформируется в эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dy/dz = V, \quad dV/dz = (1 + V^2)(B - AV), \quad (29)$$

где $A = \beta^{-1} \partial \beta / \partial z$, $B = \beta^{-1} \partial \beta / \partial y$.

Задача Коши для системы (29) задается начальными условиями:

$$y(z_0) = y_0, \quad V(z_0) = V_0.$$

Случай $V_0 = 0$ соответствует начальному направлению пучка двумерных лучей вдоль оси Oz .

Семейство лучей, выходящих из точек (y_j, z_0) , при $y_j = -1, -1 + \Delta y, \dots, -1 + 2n\Delta y = +1$ с начальным наклоном $V_j(z_0) = 0$. Текущее значение $V_j(z_k)$ задает наклон луча с номером j в точках $(y_j(z_k), z_k)$. Текущая производная $V(z)$ задает угол наклона траектории луча dy/dz к оси Oz , так что она также задает векторное поле $(\beta_y, \beta_z)^t$, касательное к лучам, заданным системой (28), а именно, $\beta_y = \beta dy/ds$, $\beta_z = \beta dz/ds$. С учетом $ds^2 = dy^2 + dz^2$ получаем $ds/dz = (1 + V^2)^{1/2}$, $ds/dy = (1 + V^2)^{1/2} V^{-1}$, так что $\beta_y = \beta V (1 + V^2)^{1/2}$, $\beta_z = \beta (1 + V^2)^{1/2}$.

Численное интегрирование системы (29) с начальными данными $y_j(z_0) = y_{j0}$, $V_j(z_0) = 0$, производится методом Рунге-Кутты-Фельберга 6-го порядка с адаптированным выбором шага по точности 10^{-5} [1, 7].

В результате вычисления получены сеточные значения для семейства лучей $y_j(z_k)$ и их наклонов $V_j(z_k)$. Вычисленные значения позволяют восстановить сеточное векторное поле $(\beta_y(y_j(z_k), z_k), \beta_z(y_j(z_k), z_k))^t$. Данное приближенное векторное поле вместе с распределением $\beta(y, z) = \beta((y^2 + z^2)^{1/2})$ формирует вместе со значениями n_s, n_f, n_l, n_c, d входные данные для вычисления выходных данных $h(y, z)$, $\partial h/\partial y(y, z)$, $\partial h/\partial z(y, z)$ из дисперсионного уравнения.

Дисперсионное уравнение $\det(M) = 0$ имеет вид нелинейного дифференциального уравнения в частных производных относительно h и алгебраического уравнения относительно векторного поля β :

$$F_{Disp}(\beta, \beta_y, \beta_z; h, \partial h/\partial y, \partial h/\partial z; n_s, n_f, n_l, n_c; d) = 0. \quad (30)$$

Приближенное решение уравнения (30) предлагается искать в виде конечной комбинации экспоненциальных функций вида:

$$h_N(y, z) = \sum_{i=1}^N K_i \exp \left\{ -\frac{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}{c_i^2} \right\}$$

методом наименьших квадратов по $4N$ параметрам $\{K_i, y_i, z_i, c_i\}_{i=1}^N$:

$$\sum_k \left(F_{Disp}(\beta(y_k, z_k); h_N(y_k, z_k); n_s, n_f, n_l, n_c, d) \right)^2 \rightarrow \min_{K_i, y_i, z_i, c_i}.$$

5.3. Метод и алгоритм вычисления вертикального распределения электромагнитного поля направляемых мод в матричной модели волноводов сравнения

Зная профиль толщины тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга $h(r)$, вычисленный в рамках метода волноводов сравнения, мы можем подставить полученные численные значения в однородную СЛАУ $\hat{M}(\beta(r), d, h(r))(\mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r))^T = 0$. При каждом фиксированном r однородная СЛАУ решается с помощью программного модуля, реализованного для регулярных волноводов по методу Тихоновской регуляризации [21]:

$$\left\| \hat{M}(\beta(r), d, h(r))(\mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r))^T \right\|^2 + \alpha \left\| (\mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r))^T - (\mathbf{A}_0(r), \mathbf{B}_0(r))^T \right\|^2 \xrightarrow{\mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r)} \min.$$

Рассмотрим теперь процедуру вычисления полей направляемой моды ТОВЛ Люнеберга при трансформации направляемой моды вдоль семейства лучей. При перемещении вдоль каждого из лучей $y_j(z)$ мы в разных точках траектории оказываемся при разных значениях r и при разных толщинах $h(r)$ дополнительного волноводного слоя. Здесь следует отметить, что в реальной физической ТОВЛ Люнеберга поле направляемой моды плавно деформируется при движении волнового фронта вдоль семейства траекторий. Это значит, что при переходе от точки $(y_j(z_k^j), z_k^j)$ к точке $(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j)$ для вычисления поля в новой точке с амплитудными коэффициентами $\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1}$ мы должны в

качестве $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ брать амплитудные коэффициенты $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$ поля в предыдущей точке. Таким образом, для вычисления трансформации вертикального распределения поля направляемой моды вдоль траектории $y_j(z_k^j)$ мы должны конкретизировать Тихоновский функционал [21] в виде:

$$\left\| \hat{M}(\beta(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j), d, h(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j)))(\mathbf{A}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j), \mathbf{B}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j))^T \right\|^2 + \alpha \left\| (\mathbf{A}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j), \mathbf{B}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j))^T - (\mathbf{A}(y_j(z_k^j), z_k^j), \mathbf{B}(y_j(z_k^j), z_k^j))^T) \right\|_{\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1}}^2 \rightarrow \min.$$

Алгоритм расчета вертикального распределения полей в матричной модели волноводов сравнения описан ниже.

- Полученный в п.3.7. набор данных $\{d, h_i(r), \beta_i(r)\}$ определяет дисперсионную зависимость, которая используется для вычисления полей направляемых мод.
- Имея набор данных $\{d, h_i(r), \beta_i(r)\}$, вычисляют элементы матрицы (комплексные числа).
- Вычисление полей производится для всей дисперсионной кривой. Для расчета амплитудных коэффициентов полей в первой точке задается начальное приближение.
- Вычисляются на основе набора данных дисперсионной кривой элементы матрицы, описывающей искомую СЛАУ.
- Элементы матрицы представляют собой комплексные числа. Поэтому необходимо модифицировать штрафной функционал. Перевести его область значений из комплексной области в действительную. При этом необходимо минимизировать не только невязку, но и расстояние между амплитудными векторами в текущей и в предыдущей точках дисперсионной кривой. Для первой точки в роли предыдущей точки выступает начальное приближение.
- Методом Нелдера-Мида (деформируемого многогранника) находится для каждой точки минимум штрафной функции. Соответственно получаются значения амплитудных коэффициентов.

- Амплитудные коэффициенты подставляются в вид решения в каждом диэлектрическом слое. Полученные профили выводятся на экран.

5.4. Метод и алгоритм вычисления вертикального распределения электромагнитного поля направляемых мод в нулевом и первом приближениях

Зная профиль толщины ТОВЛ Люнеберга $h(y, z)$, вычисленный в рамках нулевого приближения метода адиабатических мод, мы можем подставить полученные численные значения в однородную СЛАУ:

$$\hat{M}(\beta(y, z), d, h(y, z))(\mathbf{A}(y, z), \mathbf{B}(y, z))^T = 0.$$

Рассмотрим теперь процедуру вычисления полей направляемой моды ТОВЛ Люнеберга при трансформации направляемой моды вдоль семейства лучей. При перемещении вдоль каждого из лучей $y_j(z)$ мы в разных точках траектории оказываемся при разных значениях профиля толщины $h(y, z)$ дополнительного волноводного слоя.

Как и в случае модели волноводов сравнения, для вычисления трансформации вертикального распределения поля направляемой моды вдоль траектории $y_j(z_k^j)$ мы должны конкретизировать Тихоновский функционал [21] в виде:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1}) &\equiv \\ &\equiv \left\| \hat{M}(\beta(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j), d, h(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j))(\mathbf{A}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j), \mathbf{B}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j)))^T \right\|^2 + \\ &+ \alpha \left\| (\mathbf{A}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j), \mathbf{B}(y_j(z_{k+1}^j), z_{k+1}^j)))^T - (\mathbf{A}_0(y_j(z_k^j), z_k^j), \mathbf{B}_0(y_j(z_k^j), z_k^j)))^T \right\|_{\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1}}^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Расчет вертикального распределения полей в нулевом приближении модели адиабатических мод выполняется в соответствии с приведенным ниже алгоритмом.

- Имея набор полученных ранее данных $\{d, h_i(r), \beta_i(r)\}$ (определяет дисперсионную зависимость), вычисляются элементы матрицы (комплексные числа).
- Вычисление полей производится для всей дисперсионной кривой. Для расчета амплитудных коэффициентов полей в первой точке задается начальное приближение.
- На основе набора данных дисперсионной кривой вычисляются элементы матрицы, описывающей искомую СЛАУ.
- Элементы матрицы представляют собой комплексные числа. Поэтому необходимо модифицировать штрафной функционал. Перевести его область значений из комплексной области в действительную. При этом необходимо минимизировать не только невязку, но и расстояние между амплитудными векторами в текущей и в предыдущей точках дисперсионной кривой. Для первой точки в роли предыдущей точки выступает начальное приближение.
- Методом Нелдера-Мида (деформируемого многогранника) находится для каждой точки минимум штрафной функции. Соответственно получают значения амплитудных коэффициентов.
- Амплитудные коэффициенты подставляются в вид решения в каждом диэлектрическом слое. Полученные профили выводятся на экран.

Из выражений для продольных компонент поля E_z, H_z соответствующих мод в нулевом приближении по δ порядке вычисляются решения для E_y, H_x и E_x, H_y в нулевом по δ порядке [1]. Все эти решения содержат амплитудные коэффициенты $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$. Дисперсионное соотношение в нулевом по δ приближении является алгебраическим полиномиальным уравнением относительно распределения коэффициента замедления $\beta^{(0)}(y, z)$, рассматриваемого также в нулевом приближении, так что $\beta(y, z) = \beta^{(0)}(y, z) + O(\delta)$.

Таким образом, все компоненты вертикального распределения квазиволноводных мод $\mathbf{E}(x; y, z)$ и $\mathbf{H}(x; y, z)$ вычислены в нулевом по δ приближении при любых значениях горизонтальных координат (y, z) с заданным распределением (профилем) толщины $h(y, z)$ и любых значениях вертикальной координаты x .

Учет сдвига постоянной распространения позволяет вычислить приближенные значения компоненты вертикального распределения квазиволноводных мод $\mathbf{E}(x; y, z)$ и $\mathbf{H}(x; y, z)$ в первом по δ приближении.

6. Результаты численного моделирования дисперсионных соотношений и полей ТОВЛ Люнеберга

6.1. Расчет дисперсионных зависимостей плавно-нерегулярного четырехслойного интегрально-оптического волновода

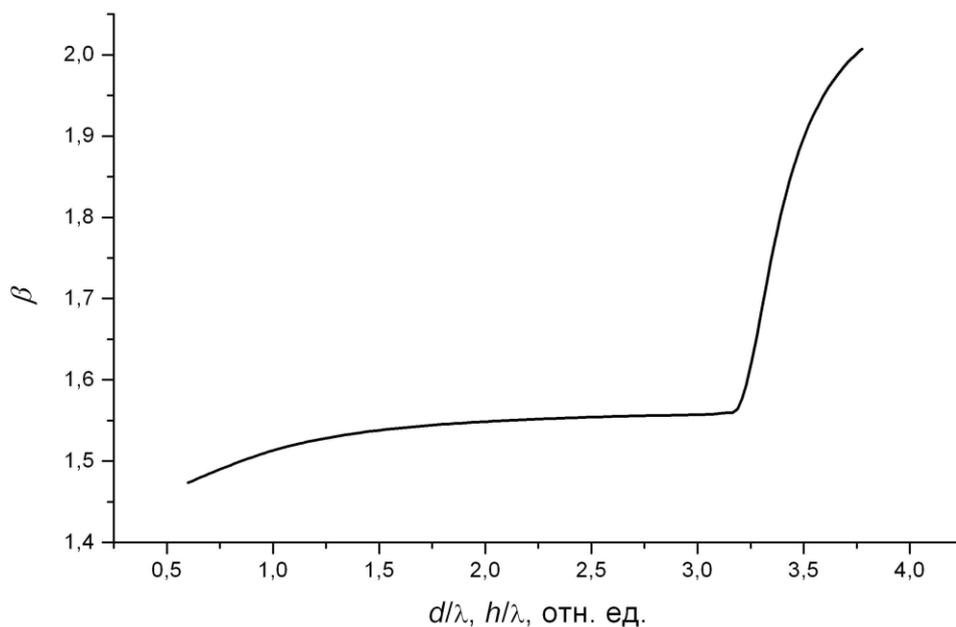
На рис. 2 приведены рассчитанные (в соответствии с матричной моделью метода волноводов сравнения) зависимости коэффициентов фазового замедления β ТМ₀-моды от толщины волноводных слоев четырехслойной интегрально-оптической структуры, состоящей из трехслойного регулярного планарного волновода и четырехслойного плавно-нерегулярного волновода (см. рис. 1) с параметрами: коэффициент преломления подложки (SiO₂) $n_s = 1.470$, коэффициент преломления первого (регулярного) волноводного слоя (стекло марки Corning 7059) $n_f = 1.565$, коэффициент преломления второго волноводного слоя, т.е. ТОВЛ Люнеберга, (Ta₂O₅) $n_l = 2.100$ переменной толщины $h(y, z)$, коэффициент преломления покровного слоя (воздух) $n_c = 1.000$.

На дисперсионных зависимостях $\beta = \beta(d / \lambda; h / \lambda)$ по вертикали отложены значения коэффициента фазового замедления β , а по горизонтали – толщины волноводных слоев в относительных единицах $(d / \lambda$ и $h / \lambda)$, где $\lambda = 0.9$ мкм. Таким образом, левая часть рисунков (примерно от 0.0 до 3.0) является дисперсионной зависимостью трехслойного регулярного волновода, а правая

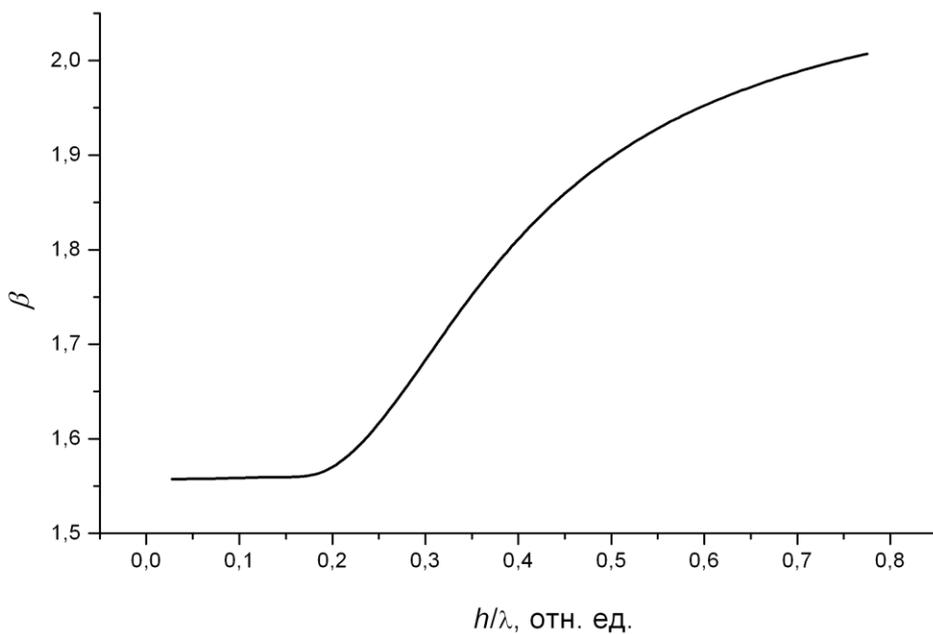
(от 3.0 до 3.8) – дисперсионной зависимостью четырехслойного плавно-нерегулярного волновода, включающего ТОВЛ Люнеберга.

На рис. 2б приведено то же, что и на рис. 2а, но только для толщины второго волноводного слоя. Участки дисперсионной зависимости после 3.0 от $h \approx 0.00$ до $h \approx 0.24$ (в единицах λ) отражают область некоторого переходного режима в ТОВЛ Люнеберга. Эти участки и изображены более подробно на рис. 2б (примерно от 0.0 до 0.2). Аналогичные дисперсионные зависимости были получены авторами и для других типов мод.

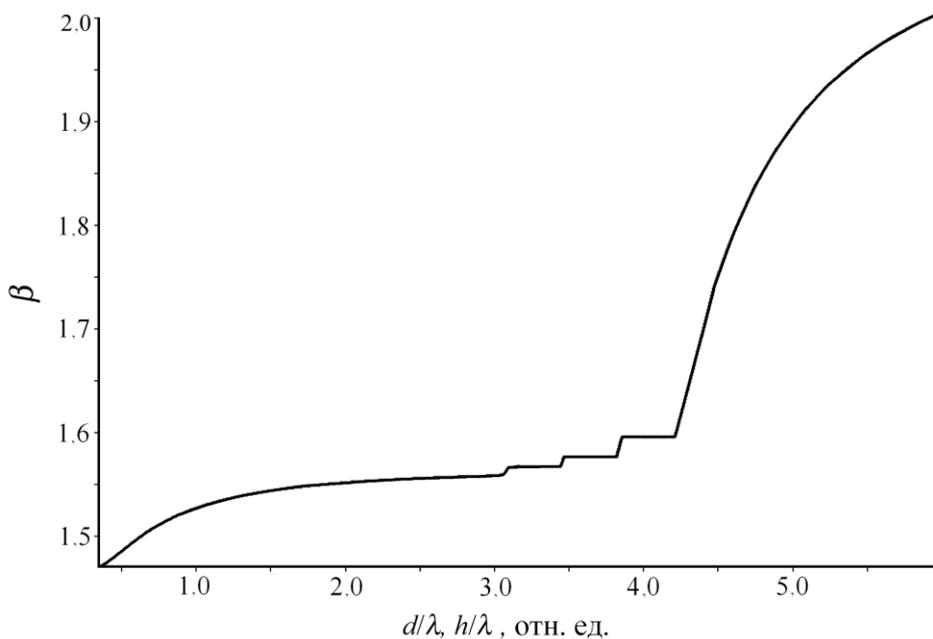
На рис. 2в приведено то же, что и на рис. 2а, но для для TE_3 -моды. Проведенный нами предварительный анализ показал, что наличие ступенек на дисперсионных зависимостях, аналогичных показанным на рис. 2в, можно объяснить парциальным перераспределением мощностей в слоях многослойной волноводной структуры, у которой плавно меняется толщина дополнительного волноводного слоя, т.е. линзы.



(a)



(б)



(е)

Рис. 2. Дисперсионные зависимости для TM_0 -моды: (а) – интегрально-оптической четырехслойной структуры приведенной на рис. 1; (б) – то же, что на рис. 2а, но только для толщины второго волноводного слоя; (е) – то же, но для TE_3 -моды.

Как известно, для определения постоянной распространения и соответственно β необходимо решить дисперсионное или характеристическое уравнение, которое в интегральной форме [1, 16] явно связывает β и распределение мощностей в многослойном непоглощающем волноводе:

$$\beta \approx \int_{S_\infty} n^2 [\mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j^*] \mathbf{z} dS / \int_{S_\infty} n^2 |\mathbf{E}_j|^2 dS, \quad (31)$$

где S_∞ – площадь бесконечного поперечного сечения, $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ – амплитуды электрического и магнитного полей моды, * – знак комплексного сопряжения, \mathbf{z} – единичный орт оси z , $|\mathbf{E}_j|^2 = \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j^*$. Под знаком интеграла в числителе полная мощность моды, а в знаменателе по сути полная усредненная по времени энергия на единицу длины волноводной структуры для j -й вперед-распространяющейся моды.

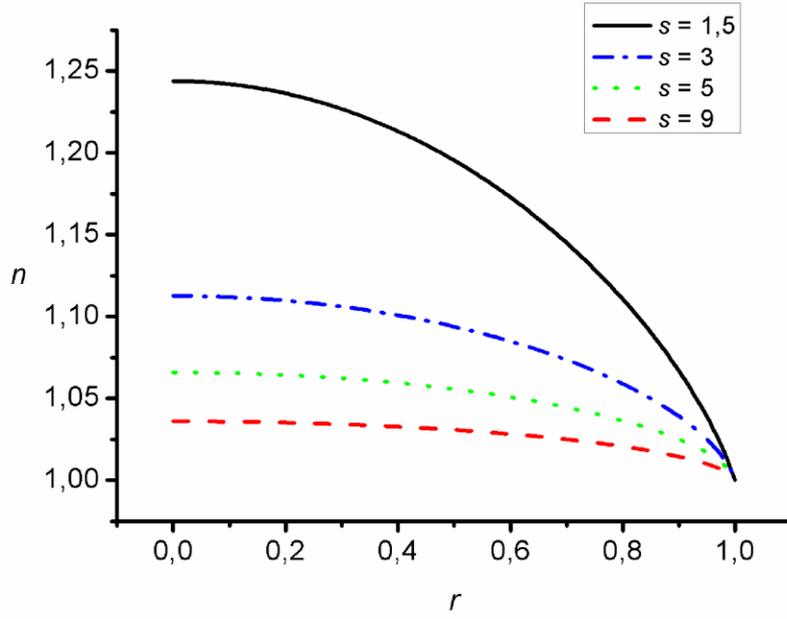
Как хорошо видно из выражения (31) перераспределение потоков энергии в пределах одной моды при ее распространении вдоль оси z будет сказываться на величине β , что и наблюдается на рис. 2в. Действительно, тонкопленочный слой, в котором в основном будет сосредоточено поле, а, следовательно, и переносимая по волноводу мощность и будет оказывать при изменении его параметров основное влияние на дисперсионную зависимость. И, как следствие, на вид полей в данных областях дисперсионных зависимостей. Более детальный анализ этих явлений выходит за рамки данной работы.

Заметим, что есть публикации с графиками похожими на рис. 2в, однако без объяснения математической и физической природы полученных ступенчатых дисперсионных зависимостей для мод более высокого порядка, чем TE_0 или TM_0 .

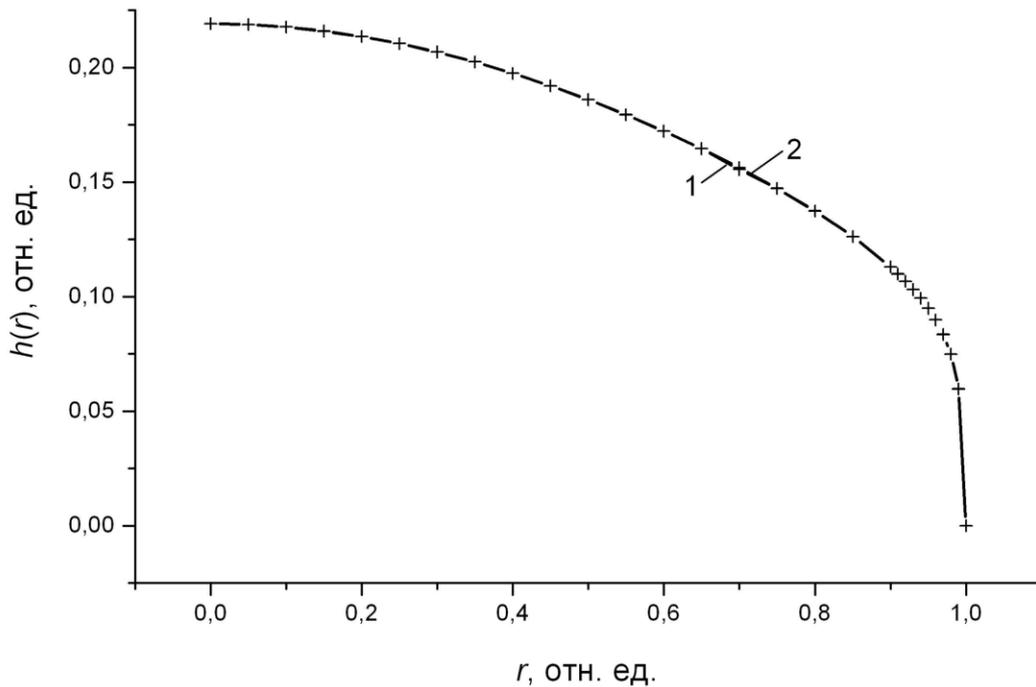
6.2. Синтез тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга

На рис. 3 приведен результат решения (в соответствии с матричной моделью метода волноводов сравнения) задачи синтеза ТОВЛ Люнеберга. Например, на рис. 3б показан найденный вид распределения профиля $h(r)$ для нормированного фокусного расстояния $s = F/R$ (в единицах радиуса R линзы)

при изменении нормированного радиуса r линзы от 0 до 1. Данная линза описывается радиальным распределением фазового замедления $\beta(r, F)$ по $r \in [0, 1]$ в безразмерных единицах (в единицах радиуса R линзы), где R – радиус ТОВЛ с заданным фокусным расстоянием F (в тех же безразмерных единицах).



(a)



(б)

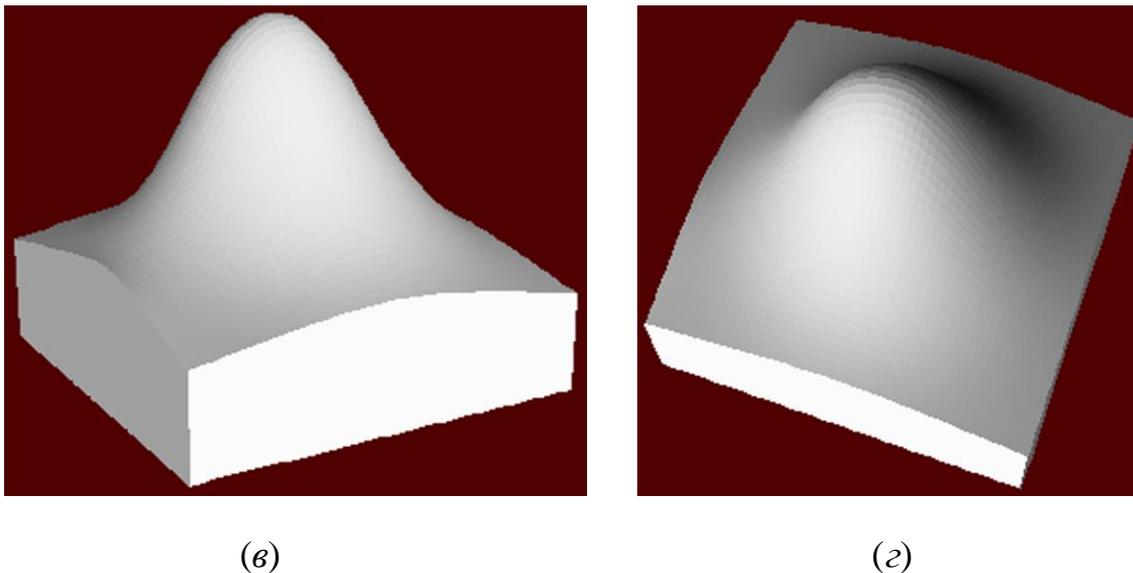


Рис. 3. Решение задачи синтеза ТОВЛ Люнеберга: (а) – распределение показателя преломления для ТОВЛ Люнеберга с различными нормированными фокусными расстояниями s . (б) – профили синтезированных толщин ТОВЛ Люнеберга; фокусное расстояние линзы $s = 2$. На рисунке: 1 – наш расчет, 2 – данные Саутвелла (с символом “+”). Трехмерный синтезированный профиль толщины ТОВЛ Люнеберга: (в) – вид сбоку, (г) – вид сверху.

В Таблице 1. дано сравнение результатов расчетов распределения по радиусу профиля толщины (в единицах λ) нерегулярного волноводного слоя ТОВЛ Люнеберга. В первой колонке – значения радиуса r (при том же R). Во второй – результаты расчетов Саутвелла. В третьей колонке – результаты расчета авторов.

Расчет производился для ТОВЛ Люнеберга со следующими параметрами: фокусное расстояние $s = 2$, радиус линзы $r = 1$, толщина регулярного волноводного слоя $d = 1.0665$. Другие параметры структуры: коэффициент преломления подложки (SiO_2): $n_s = 1.470$; коэффициент преломления первого (регулярного) волноводного слоя (стекло марки Corning 7059): $n_f = 1.565$; коэффициент преломления второго волноводного слоя (Ta_2O_5) – ТОВЛ Люнеберга переменной толщины $h(y, z)$: $n_l = 2.100$; коэффициент преломления покровного слоя (воздух): $n_c = 1.000$.

Таблица 1. Сравнение результатов расчетов распределения по радиусу профиля толщины (в единицах λ) нерегулярного волноводного слоя ТОВЛ Люнеберга.

r	Саутвелл	Матричный метод	r	Саутвелл	Матричный метод
0	0,2191	0,2190925	0,75	0,1472	0,1472494
0,05	0,2187	0,2187388	0,8	0,1374	0,1373618
0,1	0,2177	0,2176908	0,85	0,1262	0,1262288
0,15	0,216	0,2157306	0,9	0,113	0,1130072
0,2	0,2135	0,2135393	0,91	0,1099	0,1099486
0,25	0,2105	0,210465	0,92	0,1067	0,1066803
0,3	0,2068	0,2067517	0,93	0,1031	0,103146
0,35	0,2024	0,2024226	0,94	0,0993	0,0992614
0,4	0,1975	0,1975013	0,95	0,0949	0,0948912
0,45	0,192	0,1920096	0,96	0,0898	0,0897981
0,5	0,186	0,1859653	0,97	0,0835	0,0835078
0,55	0,1794	0,1793785	0,98	0,0749	0,0748699
0,6	0,1722	0,1722483	0,99	0,0597	0,059661
0,65	0,1646	0,1645472	1	0	0
0,7	0,1563	0,1554361			

Как видно из рис. 3б и таблицы, между нашими данными в матричной модели метода волноводов сравнения и данными Саутвелла практически нет расхождений. Однако наше решение обладает существенно более высокой точностью, что особенно важно при синтезе обобщенных линз Люнеберга, требующих учета краевых эффектов, которые оказывают влияние, например, на точность Фурье-преобразования, совершаемого линзой.

6.3. Расчет вертикального распределения полей в ТОВЛ Люнеберга

6.3.1. Расчет вертикального распределения полей в матричной модели волноводов сравнения

Полученный набор данных $\{d, h(r), \beta(r)\}$ определяет дисперсионную зависимость, которую мы используем для вычисления полей направляемых мод. Имея этот набор данных, вычисляем элементы матрицы (комплексные числа).

Вычисление полей производится для всей дисперсионной кривой. Для расчета амплитудных коэффициентов полей в первой точке задаем некоторое начальное приближение. Затем вычисляются на основе набора данных дисперсионной кривой элементы матрицы, описывающей искомую СЛАУ. Для вычисления амплитуд компонент электромагнитного поля направляемой моды приходится решать вырожденную СЛАУ с неточными данными. Поэтому в расчетах необходимо минимизировать не только невязку, но и расстояние между амплитудными векторами в текущей и в предыдущей точках дисперсионной кривой. Для первой точки в роли предыдущей точки выступает начальное приближение «идеальной» моды трехслойного волновода. Методом Нелдера-Мида (деформируемого многогранника) находим для каждой точки минимум штрафной функции. Соответственно получаем значения амплитудных коэффициентов. Подставляем амплитудные коэффициенты в вид решения в каждом слое четырехслойной интегральной оптической структуры.

Анализ полученных профилей полей в близких точках рассматриваемой ТОВЛ Люнеберга показал, что вертикальное распределение электромагнитного поля направляемой моды плавно трансформируется при перемещении фазового фронта направляемой моды вдоль плавно-нерегулярного участка тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга.

6.3.2. Расчет вертикального распределения полей в нулевом векторном приближении

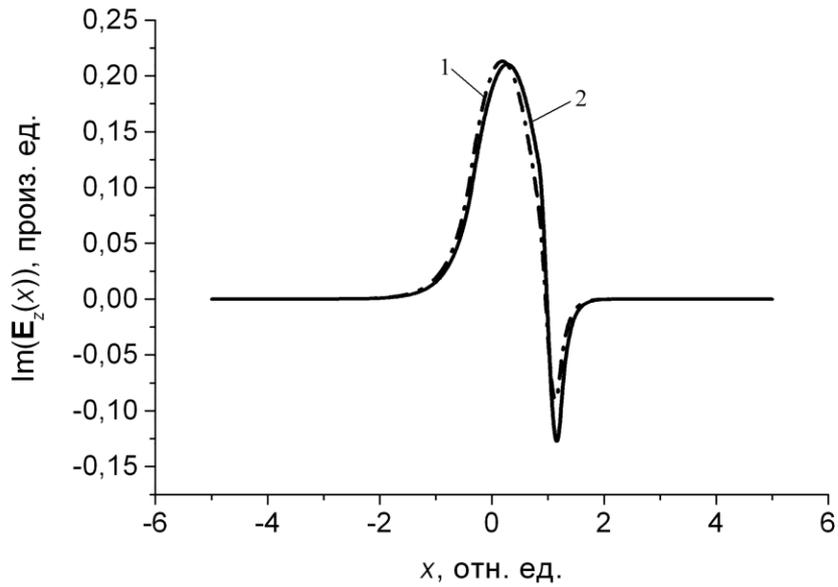
Алгоритм данного расчета аналогичен предыдущему. Зная профиль толщины ТОВЛ Люнеберга $h(y, z)$, вычисленный в рамках нулевого приближения метода адиабатических мод, мы подставляем полученные численные значения в однородную СЛАУ:

$$\hat{M}(\beta(y, z), d, h(y, z))(\mathbf{A}(y, z), \mathbf{B}(y, z))^T = 0.$$

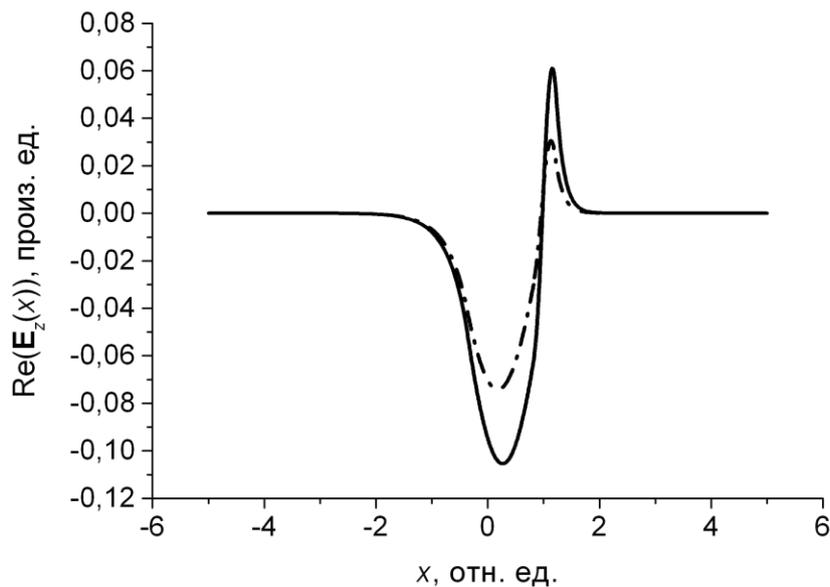
Одно из отличий алгоритма расчета полей направляемой моды ТОВЛ Люнеберга при движении направляемой моды вдоль семейства лучей здесь заключается в том, что при перемещении вдоль каждого из лучей $y_j(z)$ мы в разных точках траектории оказываемся при разных значениях профиля толщины $h[y_j(z), z]$ дополнительного волноводного слоя. Но основное отличие заключается в том, что в расчетах участвуют все амплитудные коэффициенты $\{A_j\}$ и $\{B_j\}$ одновременно, т.е. моды гибридизируются.

На рис. 4 приведены графики амплитуд полей $E_z(x)$ в близких точках на дисперсионной кривой моды TM_1 ТОВЛ Люнеберга. Как видно из этих рисунков вертикальное распределение электромагнитного поля направляемой моды в нулевом (векторном) приближении метода адиабатических мод плавно трансформируется при перемещении из точки в точку фазового фронта направляемой моды вдоль плавно-нерегулярного участка тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга.

Для вычисления первого приближения вертикального распределения электромагнитного поля направляемой моды следует добавить в программные модули расчетов предыдущих двух пунктов процедуры вычисления добавок первого порядка по δ . Результаты этих расчетов будут даны нами в одной из последующих работ.



(а)



(б)

Рис. 4. Графики амплитуд полей $E_z(x)$ в произвольных единицах в близких точках на дисперсионной кривой моды TM_1 ТОВЛ Люнеберга: (а) – мнимая часть полей; (б) – действительная часть полей. Параметры ТОВЛ Люнеберга: 1 – $\beta = 1.5384$, $d = 1.1850$, $h = 0.3706$; 2 – $\beta = 1.5414$; $d = 1.1850$, $h = 0.3973$.

Необходимо отметить, что интерес к развитию теоретических и численных методов исследования трехмерных плавно-нерегулярных переходов в различных волноведущих структурах не ослабевает в последние годы. С одной

стороны он обусловлен необходимостью развития нужного в прикладных исследованиях математического аппарата, а с другой – эффективным развитием субмикронных и нанотехнологий в соответствующих областях интегральной оптики и волноводной оптоэлектроники. Эти исследования, несомненно, актуальны и важны для проектирования перспективных оптимизированных устройств, связывающих как разные части одной волноведущей структуры (волноводные фильтры, дефлекторы, линзы и др.), так и различные диэлектрические и в частности оптические волноведущие структуры, например, с волоконными световодами или металлодиэлектрическими волноводами, поддерживающими поверхностные плазмоны.

7. Заключение

В настоящей статье описаны основы, разработанной авторами новой модели, описывающей волноводное распространение электромагнитного излучения в многослойном плавно-нерегулярном интегрально-оптическом волноводе в нулевом векторном приближении.

Подробно описан алгоритм и выполнен расчет дисперсионного соотношения четырехслойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода с учетом реальных граничных условий. Дан алгоритм и осуществлено численное исследование прохождения собственных (направляемых) и несобственных (квази-волноводных) мод через четырехслойный плавно-нерегулярный интегрально-оптический волновод.

Выполнен синтез ТОВЛ Люнеберга, учитывающий также возникновение вытекающих мод на краях линзы. Предложенный метод может быть обобщен на случай плавно-нерегулярной интегральной 3D-структуры из N слоев, состоящих из диэлектрических, магнитных или нелинейных материалов, а также из метаматериалов, что является его несомненным преимуществом.

Благодарности

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-07-00567, № 18-51-18005 и № 19-01-00645.

Литература

1. Егоров А.А., Ловецкий К.П., Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А. Интегральная оптика: теория и компьютерное моделирование. Монография. М.: Издат. РУДН, 2015.
2. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах (Введение в теорию). М.: Наука, 1969.
3. Севастьянов Л.А., Егоров А.А. Теоретический анализ волноводного распространения электромагнитных волн в диэлектрических плавно-нерегулярных интегральных структурах // Оптика и спектроскопия. 2008, Т. 105, № 4, С. 632-640.
4. Егоров А.А., Севастьянов Л.А. Структура мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического четырехслойного трехмерного волновода // Квантовая Электроника. 2009, Т. 39, № 6, С. 566-574.
5. Egorov A.A., Sevastianov L.A., Sevastyanov A.L., Stavtsev A.V. Propagation of the monochromatic electromagnetic waves in irregular waveguides. A brief introduction to an analysis in the case of smooth or statistic irregularities // Bulletin of PFUR. Series Mathematics. Computer science. Physics. 2010, No. 1, pp. 67-76.
6. Егоров А.А., Ловецкий К.П., Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А. Моделирование направляемых (собственных) мод и синтез тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга в нулевом векторном приближении // Квантовая Электроника. 2010, Т. 40, № 9, С. 830-836.
7. Егоров А.А., Севастьянов А.Л., Айрян Э.А., Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории // Математическое моделирование. 2010, Т. 22, № 8, С. 42-54.
8. Севастьянов Л.А., Егоров А.А., Севастьянов А.Л. Метод адиабатических мод в задачах плавно-нерегулярных открытых волноводящих структур // Ядерная Физика. 2013, Т. 76, № 2, С. 252-268.

9. Егоров А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. Исследование плавно-нерегулярных интегрально-оптических волноводов методом адиабатических мод: нулевое приближение // Квантовая Электроника. 2014, Т. 44, № 2, С. 167-173.
10. Egorov A.A., Andler G., Sevastyanov A.L., Sevastyanov L.A. On some properties of smoothly irregular waveguide structures critical for information optical systems. Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2018. 21st International Conference, DCCN 2018, Moscow, Russia, September 17–21, 2018, Proceedings. Editors Vladimir M. Vishnevskiy, Dmitry V. Kozyrev. Part of the Communications in Computer and Information Science book series. 2018, Vol. 919, pp. 387-398. Springer, Cham. DOI <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99447-5>
11. Taflov A., Hagness S.C. *Computational Electrodynamics. The Finite Difference Time Domain Method*. 2d.ed. Artech, London, 2000.
12. Luneburg R.K. *Mathematical theory of optics*. University of California Press, 1966.
13. Morgan S.P. General solution of the Luneburg lens problem. *J. Appl. Phys.*, 1958, Vol. 29, No. 9, pp. 1358-1368.
14. Southwell W.H. Inhomogeneous optical waveguide lens analysis. *JOSA*. 1977, Vol. 67, No. 8, pp. 1004-1009.
15. Southwell W.H. Index profiles for generalized Luneburg lenses and their use in planar optical waveguides. *JOSA*. 1977, Vol. 67, No. 8, pp. 1010-1014.
16. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.
17. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974.
18. Хансперджер Р. Интегральная оптика: Теория и технология. М.: Мир, 1985.
19. Егоров А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. Исследование электродинамических свойств планарной тонкопленочной линзы Люнеберга // Журнал Радиоэлектроники. 2008, № 6. Available at: <http://jre.cplire.ru/jre/jun08/4/text.pdf>

20. Fehlberg E. Low-order Classical Runge-Kutta formulas with stepsize control. NASA Technical Report R-315.
21. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Для цитирования:

А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов. Модель многослойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода в нулевом векторном приближении: теория и численный анализ. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar19/11/text.pdf>
DOI 10.30898/1684-1719.2019.3.11