

DOI 10.30898/1684-1719.2020.3.5

УДК 621.37

## УСКОРЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ДО ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИИ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

А. А. Кальщиков, В. В. Штыков

НИУ «Московский энергетический институт»,  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

Статья поступила в редакцию 2 марта 2020 г.

**Аннотация.** Рассмотрен метод вычисления функционала для определения расстояния до объекта при наличии дисперсии фазовой скорости. Получено аналитическое выражение целевой функции, характерной для закона дисперсии бесстолкновительной электронно-ионной плазмы, волноведущих структур электромагнитных и упругих волн. Показан способ ускорения предложенного метода за счет уменьшения вычислительной сложности с  $O(N^2)$  до  $O(N \log N)$  операций с помощью использования алгоритма быстрого преобразования Фурье.

**Ключевые слова:** дисперсия, БПФ, широкополосные сигналы.

**Abstract.** A method for calculating the distance to the object in a medium with the presence of frequency dispersion of a phase velocity is considered. An analytical expression is obtained for the probe function characteristic of the dispersion law of collisionless plasma, waveguide structures of electromagnetic and elastic waves. A method for accelerating the proposed method by reducing the computational complexity from  $O(N^2)$  to  $O(N \log N)$  operations using the fast Fourier transform algorithm is proposed.

**Key words:** dispersion, FFT, broadband signals.

### Введение

В [1] рассмотрен алгоритм обработки широкополосных сигналов, распространяющихся в средах с частотной дисперсией фазовой скорости.

Показано, что использование метода вычисления функционала позволяет увеличить энергетические характеристики радиотехнического устройства. Однако можно добиться ускорения процедуры.

### 1. Математическое обоснование

Согласно [1], процедура определения расстояния до объекта сводится к вычислению интеграла

$$W(z) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t, L) s^*(t, z) dt, \quad (1)$$

которое, по сути, представляет собой взаимную энергию. Согласно неравенству Коши-Буняковского,

$$|W(z)|^2 \leq \|r\|^2 \cdot \|s\|^2,$$

где  $\|r\|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} r(t, L) r^*(t, L) dt \right|$  и  $\|s\|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t, z) s^*(t, z) dt \right|$  – энергии сигнала и пробной функции, соответственно.

Равенство выполняется если

$$r(t, L) \equiv s^*(t, z).$$

Таким образом, вариация функционала (1) решает задачу определения  $L$ .

В пространстве частот функционал (1) преобразуется к виду

$$\dot{W}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}(\omega, L) \dot{S}^*(\omega, z) d\omega, \quad (2)$$

где  $\dot{R}(\omega, L)$  и  $\dot{S}^*(\omega, z)$  – спектральные плотности сигнала и пробной функции соответственно.

Если задана постоянная распространения,

$$h(\omega) = h'(\omega) + jh''(\omega),$$

где  $h'(\omega)$  и  $h''(\omega)$  – фазовая постоянная и показатель затухания

Форма переданного сигнала, зондирующего импульса (ЗИ),  $y(t)$  и его спектральная плотность  $\dot{Y}(\omega)$  известны, можно построить пробную функцию через спектральную плотность

$$\dot{S}(\omega, z) = \dot{Y}(\omega) \exp[-jh'(\omega)z]$$

Подставляя это в (2), получаем

$$\dot{W}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}(\omega, L) \dot{Y}^*(\omega) \exp[jh'(\omega)z] d\omega. \quad (3)$$

Интегралу (3) можно придать форму обратного преобразования Фурье (ОБПФ), если провести замену переменной  $h'(\omega) = \xi$ . Новая переменная принадлежит пространству действительных чисел  $\xi \in \mathbb{R}$ . В результате получим

$$\dot{W}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}[\phi(\xi), L] \dot{Y}^*[\phi(\xi)] \exp(j\xi z) \phi'(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где  $\omega = \phi(\xi)$  – обратная функция.

Так же, как в [1], будем полагать, что

$$\begin{aligned} h'(\omega) &= \frac{\omega}{C} \sqrt{1 - (\omega_{cut}/\omega)^2} = 2\pi \frac{f}{C} \sqrt{1 - (f_{cut}/f)^2}, \\ h'(F) &= \frac{2\pi}{\lambda_0} F \sqrt{1 - (F_{cut}/F)^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $F = f/f_0$  и  $F_{cut} = f_{cut}/f_0$  нормировка. Область определения  $F \geq F_{cut}$ .

Такой вид дисперсионной характеристики часто встречается на практике. Например, в бесстолкновительной электронно-ионной плазме [2], волноведущих структурах электромагнитных и упругих волн [3].

Запишем функционал (3) для приведенного закона дисперсии (5)

$$\dot{W}(Z) = 2\pi f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}(F, L) \dot{Y}^*(F) \exp\left[j2\pi F \sqrt{1 - (F_{cut}/F)^2} Z\right] dF, \quad (6)$$

где  $Z = z/\lambda_0$  - нормировка на длину волны центральной частоты колебаний.

Далее приведем выражение (6) к виду ОБПФ (4)

$$\dot{W}(z) = 2\pi f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}(\xi, L) \dot{Y}^*(\xi) \exp[j2\pi\xi z] \left| \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + F_{cut}^2}} \right| d\xi, \quad (7)$$

где  $\xi = \text{sign}(F) \sqrt{F^2 - F_{cut}^2}$ ,  $F(\xi) = \text{sign}(\xi) \sqrt{\xi^2 + F_{cut}^2}$  и  $F'(\xi) = \left| \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + F_{cut}^2}} \right|$ .

Таким образом получено аналитическое выражение для функционала (7), использование которого позволяет обрабатывать сигналы, спектральная структура которых искажается при прохождении в средах с частотной дисперсией фазовой скорости вида (5).

## 2. Численная реализация метода

Выражение (7) может быть записано в дискретной форме

$$\dot{W}(n\Delta z) = 2\pi f_0 \Delta \xi \sum_k^N \dot{R}(k\Delta \xi, L) \dot{Y}_k^*(k\Delta \xi) \exp[j2\pi k\Delta \xi n\Delta z] \left| \frac{k\Delta \xi}{\sqrt{(k\Delta \xi)^2 + F_{cut}^2}} \right|,$$

где  $N$  – число отсчетов в выборке сигнала

Определим шаг  $\Delta \xi$ . Максимальное значение переменной  $\xi$

$$\xi_{max} = \sqrt{F_{max}^2 - F_{cut}^2},$$

Значение нормированной частоты  $F_{max}$  определяется шагом временной выборки  $\Delta t$  (тактовой частотой АЦП  $f_s$ ) в соответствии с теоремой

Котельникова

$$F_{max} = f_s / (2f_0).$$

Шаг  $\Delta \xi = \frac{\xi_{max}}{N} = F_{max} \frac{\sqrt{1 - F_{cut}^2 / F_{max}^2}}{N}$ , в свою очередь шаг нормированного

расстояния равен  $\Delta z = 1 / \xi_{max}$ .

Окончательно запишем

$$\dot{W}(z_n) = 2\pi f_0 \Delta \xi \sum_k^N \dot{R}_k(L) \dot{Y}_k^* \exp\left[ j2\pi \frac{kn}{N} \right] \left| \frac{k\Delta \xi}{\sqrt{(k\Delta \xi)^2 + F_{cut}^2}} \right| \quad (8)$$

Традиционное обратное ДПФ. Здесь расстояние выражено в длинах волн.

## 3. Численное моделирование метода

Для наглядной демонстрации работоспособности метода для обработки сигналов и определения расстояния промоделируем прохождение ЛЧМ-сигнала через среду с частотной дисперсией фазовой скорости вида (5).

Параметры сигнала и среды распространения указаны в табл. 1.

Таблица 1. Параметры сигнала и среды распространения.

Параметр	Значение
$f_{cut}$	$0,5 f_0$
База ЛЧМ-сигнала	8
Полоса ЛЧМ-сигнала	$0,4 f_0$
Дальность до объекта	$100\lambda_0$
Отношение сигнал/шум, дБ	40

На рис. 1 изображен результат вычисления выражения (8) в децибельной шкале. Видно, что пик сигнала приходится на расстояние в 100 длин волн, что соответствует исходным данным в табл. 1.

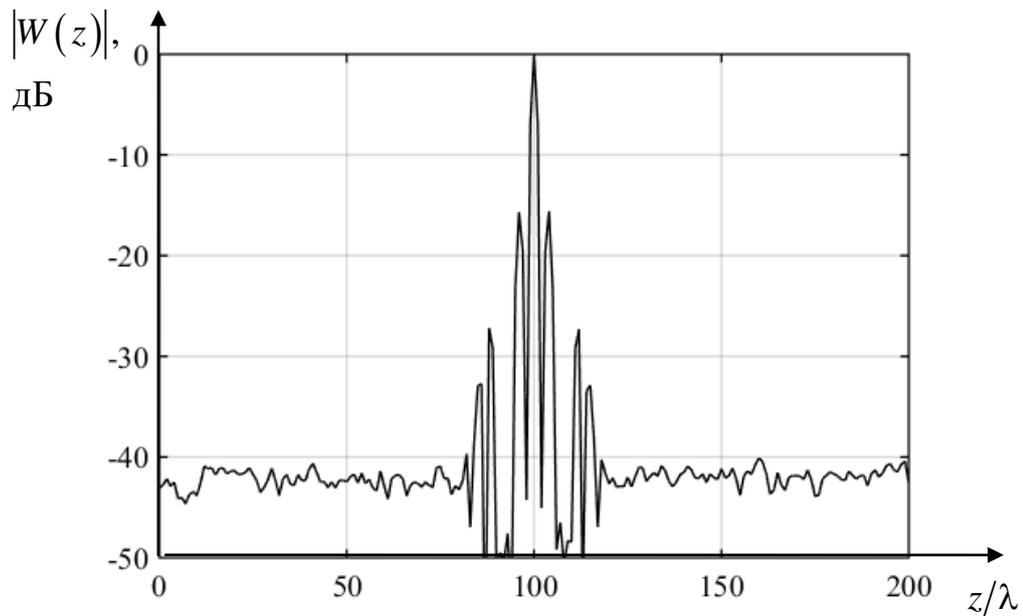


Рис. 1. Модуль обработанного сигнала.

На рис. 2 изображена действительная часть результата вычисления (8). Видно, что в отклике сигнала содержится заполняющая, это вызвано тем, что в исходный ЛЧМ-сигнал моделируется на ненулевой центральной частоте.

Использование метода вычисления функционала позволяет оценивать расстояние до объекта сразу в шкале нормированного расстояния.

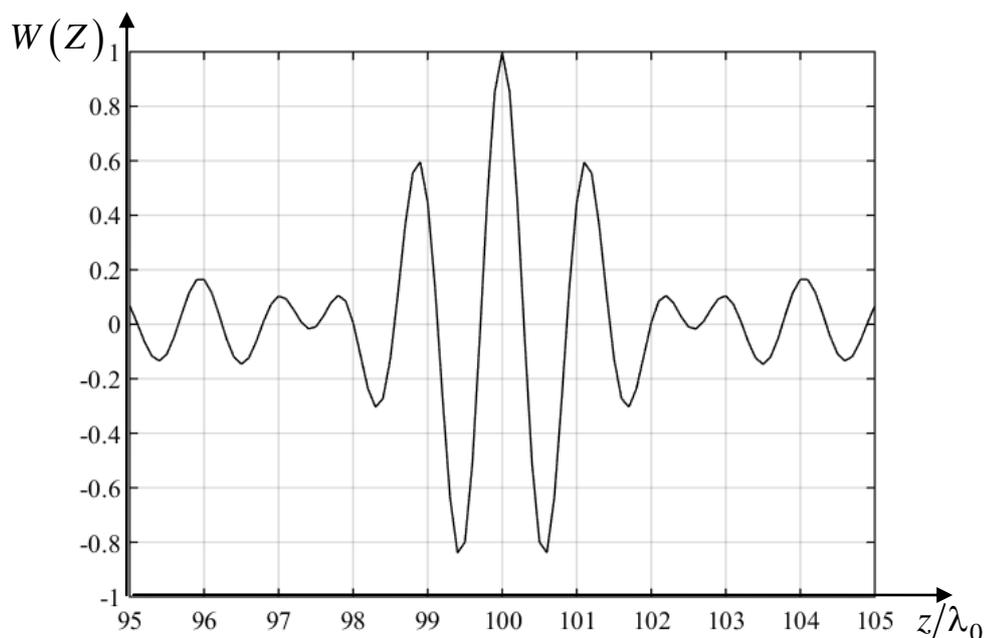


Рис. 2. Действительная часть обработанного сигнала.

## Заключение

Получено аналитическое выражение для закона дисперсии вида, характерного для бесстолкновительной электронно-ионной плазмы, волноведущих структур электромагнитных и упругих волн, которое может быть вычислено с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье за  $O(N \log N)$  операций.

Метод не ограничен полосой сигналов на входе и позволяет производить вычисления сразу на несущей частоте, что позволяет избежать операций гетероденирования и демодуляции принятого сигнала.

## Литература

1. Кальщикова А.А., Штыков В.В. Алгоритм обработки широкополосных сигналов, распространяющихся в средах с частотной дисперсией. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №2. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/9/text.pdf>. DOI: [10.30898/1684-1719.2019.2.9](https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.2.9)
2. Auld B.A. *Acoustic fields and waves in solids*. Vol. 2. London, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons New York London Sydney Toronto, 1973.

3. Volakis J.L., Young J.D. Phase linearization of a broadband antenna response in time domain. *IEEE Antennas and Propagation*. 1982. Vol. 30. № 2. P. 309-313.
4. Kintner P.M., Ledvina B.M. The ionosphere, radio navigation, and global navigation satellite systems. *Advances in Space Research*. 2005. № 35.
5. Корн. Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. – 720 с.
6. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1967. – 552 с.

**Для цитирования:**

Кальщиков А.А., Штыков В.В. Ускоренный метод определения расстояния до объекта при наличии частотной дисперсии фазовой скорости. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar20/5/text.pdf>. DOI 10.30898/1684-1719.2020.3.5