САМОПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В СИСТЕМАХ ТИПА ГАМИЛЬТОНОВЫХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

С. Л. Зиглин

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, 125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 13 мая 2019 г.

Аннотация. В работе исследуются достаточные условия бесконечнократного трансверсального на поверхности уровня известных первых интегралов самопересечения комплексных асимптотических многообразий гиперболического положения равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа гамильтоновой с двумя степенями свободы (число известных первых интегралов на три меньше размерности системы) и отсутствия у нее дополнительного аналитического первого интеграла. Полученные результаты применимы к задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки, задаче Суслова о движении твердого тела около неподвижной точки с неголономной связью, системе Хенона-Хейлеса, системе, описывающей стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости, называемое ABC-течением.

Ключевые слова: самопересечение комплексных асимптотических многообразий гиперболического положения равновесия, несуществование первых интегралов.

Abstract. We investigate the sufficient conditions of infinite to one transversal on the level surface of known first integrals self-intersection of complex asymptotic manifolds of hyperbolic equilibrium position of the system of ordinary differential equations of the type of Hamiltonian with two degrees of freedom (the number of known first integrals is three less than the dimension of the system). The obtained results are applicable to the problem on motion of dynamically symmetric rigid heavy

body around a fixed point, Suslov's problem on the motion of a rigid body around a fixed point with non-holonomic constraint, to the Henon-Heiles system, to the system, describing the stationary flow of ideal non-compressive liquid, called ABC-dynamo.

Keywords: self-intersection of complex asymptotic manifolds of hyperbolic equilibrium position, nonexistence of first integrals.

1. Формулировка результатов

Пусть M^m, $m>2$ – комплексное многообразие, v – аналитическое векторное поле на M. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x),\ x \in M \tag{1}$$

Пусть x_0 – особая точка поля v. Предположим, что существует прямая на комплексной плоскости, проходящая через нуль, такая, что два из собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ оператора $L(v): T_{x_0}M \to T_{x_0}M$ линейной части поля v в точке x_0 [1] лежат по одну сторону от этой прямой, а остальные – по другую. Не ограничивая общность, будем считать, что $Re\,\lambda_{1,2}>0$, $Re\,\lambda i<0$ при $i>2$. (Этого можно добиться умножением времени в уравнении (1) на комплексное число).

По теореме Адамара-Перрона [2], уравнение (1) имеет двумерное аналитическое инвариантное (т.е. касающееся в каждой своей точке поля v) многообразие W^u, проходящее через точку x_0 и касающееся в ней двумерной инвариантной плоскости оператора $L(v)$, соответствующей собственным значениям λ_1, λ_2. Решения с начальными условиями на многообразии W^u экспоненциально стремятся к x_0 при $t \to -\infty\ (t \in \mathbf{R})$.

Из нормальной формы Пуанкаре-Дюляка [2] уравнения (1) на многообразии W^u в окрестности точки x_0 следует, что оно имеет решение

$$x = \varphi(t) = \psi(\mathbf{exp}\,\lambda_i t),\ \mathrm{Re}\,t < t_0,\ t_0 \in \mathbf{R} \tag{2}$$

где ψ- аналитическое отображение окрестности нуля на комплексной плоскости в многообразие W^u, $\psi(0)=x_0$, i=1 или 2. Для определенности будем считать, что i=1. Обозначим через Г фазовую кривую полного аналитического продолжения решения (2).

Пусть $H=(H_1,\dots,H_l)$, $l=m-3$, – аналититические первые интегралы уравнения (1) такие, что их дифференциалы $dH=(dH_1,\dots,dH_l)$ линейно независимы на фазовой кривой Г.

Обозначим через N^2 объединение комплексных фазоых кривввых уравнения (1), проходящих через точки многообразия W^u, в которых дифференциалы dH линейно независимы. Очевидно, N^2 является инвариантным аналитическим погруженным подмногообразием [3] многообразия $M_0^3=\left\{x\in M \middle| H(x)=H(x_0),\quad dH(x)\text{линейно независимы}\right\}$.

Введем следующее обозначение. Пусть f - аналитическая функция на многообразии M, постоянная на фазовой кривой Г. Будем обозначать через f' функцию на нормальном расслоении $N\Gamma=T_\Gamma M/T\,\Gamma$ кривой Г в M, порожденную функцией df на $T_\Gamma M$. Очевидно, функция f' линейна в слоях расслоения $N\Gamma$.

Будем называть приведенным фазовым пространством системы в нормальных вариациях (ср. [4]) нулевую поверхность уровня $N_0\,\Gamma=\left\{\xi\in N\,\Gamma \middle| H'(\xi)=0\right\}$ ее первых интегралов H', а приведенной системой в вариациях – ограничение этой системы на эту поверхность.

Группой монодромии линейного дифференциального уравнения в голоморфном векторном расслоении над римановой поверхностью будем называть образ естественного антипредставления фундаментальной группы этой поверхности в какой-либо точке в группу линейных преобразований слоя над этой точкой.

Т.к. решение (2) имеет период $T = 2\pi i/\lambda_1$, то при $t_1 < t_0$ на фазовой кривой Г существует петля $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ с отмеченной точкой $x_1 = \varphi(t_1)$ и изменением времени вдоль прямолинейного пути $\beta : [0,1] \to \mathbf{C}$, $\beta(1) - \beta(0) = T$. Обозначим через g преобразование группы монодромии приведенной системы в вариациях вдоль фазовой кривой Г в точке x_1, соответствующей петле γ.

Из нормальной формы Пуанкаре-Дюляка уравнения (1) на многообразии W^u в окрестности точки x_0 следует, что проекция касательного пространства $T_{x_1}W^u$ на слой приведенного фазового пространства $N_0\Gamma$ над точкой x_1 является собственной прямой преобразования g с собственным значением $\mu = \mathbf{exp}(2\pi i\lambda_2/\lambda_1)$. Отсюда вытекает

Т е о р е м а 1. *Если образ каждого собственного направления преобразования g с собственным значением μ под действием группы монодромии бесконечен, то погруженное подмногообразие $N^2 \subset M_0^3$ имеет вдоль фазовой кривой* Г *бесконечнократное трансверсальное самопересечение.*

Пусть уравнение (1), его первые интегралы H, фазовая кривая Г и точка x_0 инвариантны относительно инволютивного диффеоморфизма $J : M \to M$, $J|_\Gamma \neq id$. Тогда на фактор-многообразии $\hat{M} = M'/J$, где $M' = \{x \in M \mid J(x) \neq x\}$, определено дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \hat{v}(x),\ x \in \hat{M}, \tag{3}$$

где $\hat{v} = \pi_* v$, $\pi : M' \to \hat{M}$ – проекция. Это уравнение имеет однозначные аналитические первые интегралы $\hat{H}$, порожденные первыми интегралами H уравнения (1).

Т.к. решение $x = \hat{\varphi}(t) = \pi(\varphi(t))$, $\mathrm{Re}\, t < t_0$ этого уравнения имеет период $\hat{T} = \pi i/\lambda_1$, то при $t_1 < t_0$ на фазовой кривой $\hat{\Gamma} = \pi(\Gamma)$ уравнения (3) определена петля $\hat{\gamma} : [0,1] \to \hat{\Gamma}$ с отмеченной точкой $\hat{x}_1 = \pi(x_1)$ и изменением времени вдоль прямолинейного пути $\hat{\beta}:[0,1]\to\mathbf{C}$, $\hat{\beta}(1)-\hat{\beta}(0)=\hat{T}$. Обозначим через $\hat{g}$ соответствующее преобразование группы монодромии приведенной системы в вариациях в токе $\hat{x}_1$.

Из вышеупомянутой нормальной формы Пуанкаре-Дюляка уравнения (1) на многообразии W^u в окрестности точки x_0 следует, что проекция касательного пространства $T_{x_1}W^u$ на слой приведенного фазового пространства $N_0\hat{\Gamma}$ над точкой $\hat{x}_1$ является собственной прямой преобразования $\hat{g}$ с собственным значением $\hat{\mu}=\mathbf{exp}(\pi i\lambda_2/\lambda_1)$. Отсюда вытекает

Т е о р е м а 2. *Если образ каждого собственного направления преобразования $\hat{g}$ с собственным значением $\hat{\mu}$ под действием группы монодромии бесконечен, то справедливо утверждение теоремы 1.*

Пусть многообразие M связно и m=3 или 4. В последнем случае точка x_0 – критическая для функции $H=H_1$. Предположим, что она невырождена.

Т е о р е м а 3. *Если выполнены условия теоремы 1 или 2, то уравнение* (1) *не имеет дополнительного (т.е. функционально независимого от H) аналитического первого интеграла.*

2. Доказательство теоремы 3

При m=3 доказательство очевидно. При m=4 его можно провестит следующим образом.

Пусть $U \supset \Sigma=\Gamma\bigcup x_0$ – область, не содержащая критических точек функции H, кроме точки x_0, такая, что многообразие $U_0 = U\bigcap M_0$ связно. (Ее существование можно доказать следующим образом. Для любой точки $x\in\Sigma$ существует область U_xэ x, не содержащая других критических точек функции H, кроме точки x_0, такая, что многообразие $U_ч = U\bigcap M_0$ связно. (Для $x\in\Gamma$ это очевидно, а для $x=x_0$ следует из леммы Морса для голоморфных функций [5] и связности конуса с выброшенной вершиной в $\mathbf{C}^n$ при $n \neq 2$). Остается положить $U = \bigcup_{x \in \Sigma} U_x$.

Покажем, что уравнение (1) не имеет в области U дополнительного аналитического первого интеграла, чем и будет доказана теорема 3. Действительно, пусть F – аналитический первый интеграл уравнения (1) в области U. Очевидно, $F\big|_{U_0} = F(x_0)$. Рассмотрим в области U вместо первого интеграла F уравнения (1) первый интеграл $\tilde{F} = \left(F - F(x_0)\right) / \left(H - H(x_0)\right)$. Очевидно, он аналитичен всюду, кроме, может быть, точки x_0. Но т.к. аналитическая функция более чем одной комплексной переменной не имеет изолированных особых точек [6], то он аналитичен и в точке x_0. Продолжая этот процесс, получаем, что функции F и H функционально зависимы, ч.т.д.

3. Примеры

1. Пусть матрица одного из преобразований группы монодромии является жордановой клеткой. Тогда условия теорем 1, 2 выполняются, если ни одно из собственных направлений преобразования g (для теоремы 2 – $\hat{g}$) с собственным значением μ (для теоремы 2 – $\hat{\mu}$) не является общим собственным направлением для всех преобразований группы монодромии.

2. Пусть уравнение (1) имеет аналитическую инвариантную меру. Тогда группа монодромии является подгруппой специальной линейной группы второго порядка $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$. Пусть одно из преобразований g' группы монодромии является нерезонансным [4], т.е. его собственные значения не равны корням из единицы. Тогда условия теорем 1, 2 выполняются, если ни одно из собственных направлений преобразования g (для теоремы 2 – $\hat{g}$) с собственным значением μ (для теоремы 2 – $\hat{\mu}$) не является общим собственным направлением для всех преобразований группы монодромии и либо преобразования g (для теоремы 2 – $\hat{g}$) и g' не коммутируют, либо объединение

собственных направлений преобразования g' не инвариантно относительно действия группы монодромии.

З а м е ч а н и е. В приведенных примерах группа монодромии может иметь полиномиальный первый интеграл (ср. [4]).

4. Приложения

Теоремы 1, 3 применимы к известной системе [7, 8], описывающей стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости с периодическими граничными условиями, называемое ABC-течением [9], в случае равенства двух из трех параметров, входящих в систему, и неравенства между ними и третьим, указанном в [10], или в случае равенства всех трех параметров [11, 12]. В этом случае, как следует из [10-12], имеет место ситуация, описанная в примере 1.

Они применимы также к известной теореме Хенона-Хейлеса [13] и к задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки с нулевой постоянной площадей в случае, когда центр тяжести не лежит ни в экваториальной плоскости, ни на ортогональной ей оси инерции. Для обеих этих систем, как следует из [14], имеет место ситуация, описанная в примере 2.

Теоремы 2, 3 применимы к задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки с нулевой постоянной площадей в случае, когда центр тяжести лежит в экваториальной плоскости, за исключением известных случаев интегрируемости Эйлера, Ковалевской и Горячева-Чаплыгинаи, к задаче Суслова о движении твердого тела около неподвижной точки с неголономной связью – проекция угловой скорости на направление, неподвижное в системе координат, связанной с телом, равна нулю – в случае [16], когда это направление является направлением одной из главных осей инерции в точке подвеса, тело находится в однородном поле тяжести и центр тяжести лежит на указанной оси – также при некоторых ограничениях на параметры. В обеих этих задачах, как следует из [14, 17, 18], имеет место ситуация, описанная в примере 2.

Во всех указанных задачах (в задаче об ABC-течении – при выполнении дополнительного неравенства $A^2 < 2C^2$ [19]) фундаментальная группа фазовой кривой Γ представима петлями, лежащими в сколь угодно малой комплексной окрестности замыкания Ω объединения связных компонент вещественной части фазовой кривой Γ, являющихся вещественными фазовыми кривыми решений, стремящихся к точке x_0 при $t \to \pm\infty$, и из теоремы 3 следует отсутствие в этих задачах дополнительного аналитического первого интеграла в любой комплексной, а значит и в вещественной, области, содержащей множество Ω (ср. [19, 20]).

Автор благодарен В. И. Арнольду и А. И. Нейштадту за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1974.
2. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В кн. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 1. ВИНИТИ. М., 1985, с. 7-49.
3. Кобаяши Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, М., Наука, 1981.
4. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I. Функциональный анализ и его приложения, 1982, Т. 16, № 3, с. 30-41.
5. Постников М.М., Рудак Ю.Б. Морса лемма. В кн. Математическая энциклопедия, Т.3. М., Советская энциклопедия, 1982, с. 824-825.
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1969.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Наука, 1974.
8. Henon M. Sur la topologie de lignes de courant dans un cas particulier. C.R. Acad. Sci. Paris, 1966, Vol. 262, pp. 312-314.

9. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков У.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М., Наука, 1991.
10. Зиглин С.Л. О неинтегрируемости ABC-течения при A=B. Функциональный анализ и его приложения, 1996, Т. 30, № 2, с. 80-81.
11. Зиглин С.Л., Черепенин В.А. О неинтегрируемости ABC-течения при A=B=C. Доклады РАН, 1999, Т. 369, № 2, с. 173-174.
12. Зиглин С.Л. Аналитическое доказательство неинтегрируемости ABC-течения при A=B=C. Функциональный анализ и его приложения., 2003, Т. 37, № 3, с. 77-80.
13. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments. Astron J., 1964, Vol. 69, pp. 73-79.
14. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах. II. Функциональный анализ и его приложения, 1983, Т. 17, № 1, с. 8-23.
15. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Гостехиздат, М.-Л., 1946.
16. Козлов В.В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики, 1985, Т. 8, № 3, с. 85-107.
17. Зиглин С.Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в частном случае задачи Г.К.Суслова. Успехи математических наук, 1997, Т. 52, № 2, с. 167-168.
18. Зиглин С.Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в одной задаче динамики твердого тела. ДАН СССР, 1987, Т. 292, № 4, с. 804-807.
19. Ziglin S.L. On the absence of a real-analytic first integral for ABC flow when A=B. Chaos, 1998, Vol. 8, No. 1, pp. 272-273.
20. Зиглин С.Л. Об отсутствии вещественно-аналитического первого интеграла в некоторых задачах динамики. Функциональный анализ и его приложения, 1997, Т. 31, № 1, с. 3-11.

Для цитирования:
С. Л. Зиглин. Самопересечение комплексных асимптотических многообразий гиперболического положения равновесия и несуществование первых интегралов в системах типа гамильтоновых с двумя степенями свободы. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 5. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/may19/5/text.pdf
DOI 10.30898/1684-1719.2019.5.5