

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.5.7>

УДК 621.396.677

## СРЕДНЯЯ ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ И СПОСОБ СНИЖЕНИЯ СРЕДНЕГО УРОВНЯ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ ЦИФРОВОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Е. Н. Мищенко <sup>1</sup>, С. Е. Мищенко <sup>2</sup>, Н. В. Шацкий <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ростовский государственный университет путей сообщения  
344027, Ростов-на-Дону, пл. Народного ополчения, д.2

<sup>2</sup> Ростовский научно-исследовательский институт радиосвязи,  
344010, Ростов-на-Дону, ул. Нансена, 130,

<sup>3</sup> Радиотехнический институт имени академика Минца А.Л.,  
127083, Москва, ул. 8 Марта, 10, стр. 1

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2021 г.

**Аннотация.** Получены аналитические выражения для средней диаграммы направленности цифровой антенной решетки при обычном весовом суммировании сигналов и при реализации цифровой обработки данных в скользящем окне. Показано, что в отличие от выражений для средней диаграммы направленности по мощности аналоговой фазированной антенной решетки полученные выражения содержат дополнительные слагаемые, обусловленные шумом джиттера (неодновременностью дискретизации сигналов по времени). Установлено, что уровень боковых лепестков средней диаграммы направленности цифровой антенной решетки зависит от ошибок, которые учитывают не столько ошибки округления, но также неидентичность и внутренние шумы приемных каналов. Показано, что цифровая обработка сигналов в скользящем окне позволяет уменьшить уровень шумов в приемных каналах ЦАР, что обеспечивает снижение среднего уровня боковых лепестков средней ДН.

**Ключевые слова:** средняя диаграмма направленности, mean power, цифровая антенная решетка, аналого-цифровой преобразователь, случайные ошибки в диаграммообразующей схеме, цифровая обработка сигналов в скользящем окне.

**Abstract.** In the development of the existing statistical theory of antennas, new analytical relations are obtained for estimating the average radiation pattern of a digital antenna array. These ratios take into account the variance of rounding errors of the weight coefficients, errors in the amplitude and phase calibration of the antenna, jitter noise and rounding errors of the signal at the output of the analog-to-digital converter. It is shown that most of the factors affect the average level of the side lobes, as in analog antenna arrays. However, the variances of the phase calibration errors and the jitter noise determine the contribution of the new term, which has symmetry in the angular coordinate and has an extremums in the direction of the main beam of the antenna array and in the direction that is mirrored relative to the main beam. It is established that the variances of rounding errors depend on the signal-to-noise ratio and, when performing numerical studies, should be estimated based on the results of experimental studies. It is shown that digital processing in a sliding window reduces the average level of the side lobes by separating the spectral components of the signal and noise.

**Key words:** average radiation pattern, mean power, digital array antenna, analog-digital converter, random errors in pattern forming scheme, digital processing in sliding window.

## Введение

Переход к цифровым диаграммообразующим схемам позволяет существенно ослабить мощность внутренних шумов в выходном сигнале цифровой антенной решетке (ЦАР). Это обусловлено тем, что из цифровой диаграммообразующей схемы антенны исключены многочисленные делители и управляющие элементы СВЧ тракта, сокращена длина фидерного тракта [1]. При этом на процесс формирования диаграммы направленности (ДН) оказывают влияние несколько иные дестабилизирующие факторы, которые, например, перечислены в монографии [2]. Результаты экспериментальных исследований, приведенные в [2], устанавливают взаимосвязь между различными факторами, оказывающими влияние на диаграммообразование

ЦАР, и статистическими характеристиками распределений ошибок. Однако связь между ошибками и формой ДН ЦАР не установлена. В теории антенн известны соотношения, позволяющие оценивать среднюю ДН по мощности аналоговой фазированной антенной решетки (ФАР) и исследовать основные искажения средней ДН относительно идеальной ДН [3, 4]. Однако переход на новую элементную базу делает актуальной задачу обоснования аналогичных выражений для ЦАР с различными способами диаграммообразования. В настоящее время известны различные способы диаграммообразования, в которых с целью повышения отношения сигнал/шум применяют преобразование Фурье, скользящее окно и т.д. [5].

Цель данной работы состоит в обосновании выражений для оценки средней ДН по мощности ЦАР с классическим весовым суммированием сигналов и с фильтрацией составляющих сигналов каналов ЦАР в скользящем окне.

## **1. Обоснование выражений для средней диаграммы направленности цифровой антенной решетки**

Рассмотрим ЦАР, состоящую из  $M$  антенных элементов, положения фазовых центров которых определяют векторы  $\mathbf{q}_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ).

Пусть с направления в пространстве, заданного единичным вектором  $\mathbf{p}$  на раскрыв ЦАР падает плоская электромагнитная волна, которую можно характеризовать амплитудой  $u_0$ , фазой  $\psi_0$  и несущей частотой  $f_0$  (круговой частотой  $\omega = 2\pi f_0$ ).

Сигналы, принятые каждым антенным элементом ЦАР, усиливают в малошумящих усилителях (МШУ), преобразуют по частоте, пропускают через полосовые фильтры, формируют квадратурные составляющие и при помощи аналого-цифровых преобразователей (АЦП) преобразуют квадратурные составляющие сигнала в последовательности дискретных отсчетов квадратурных составляющих, из которых формируют последовательности комплексных отсчетов. Для формирования ДН последовательности

комплексных отсчетов каналов ЦАР суммируют с комплексными весами.

В соответствии с [2], могут быть выделены следующие дестабилизирующие факторы, приводящие к искажениям выходного сигнала ЦАР:

- внутренние шумы в каналах, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и с дисперсией  $\sigma_{\xi}^2$ ;
- неидентичность усилителей ЦАР в каналах;
- уходы центральной частоты при настройках каналов и неравномерность частотной характеристики полосовых фильтров в каналах;
- разброс моментов дискретизации по времени в квадратурных составляющих (шумы джиттера);
- ошибки квантования по уровню сигналов;
- ошибки квантования по уровню комплексных весовых коэффициентов.

В этом случае на выходе  $m$ -го АЦП ЦАР можно рассматривать синфазную и квадратурную составляющие гармонического сигнала, представив их в виде:

$$I_{m,n} = (1 + \delta I_{m,n}) (u_0 (1 + \delta u_m) F_0(\mathbf{p}) \times \cos(\psi_0 - \omega(1 + \delta f)(t_n + \delta t_{I_n}) + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\varphi_m) + \text{Re} \dot{\xi}_m(t_n)); \quad (1)$$

$$Q_{m,n} = (1 + \delta Q_{m,n}) (u_0 (1 + \delta u_m) F_0(\mathbf{p}) \times \sin(\psi_0 - \omega(1 + \delta f)(t_n + \delta t_{Q_n}) + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\varphi_m) + \text{Im} \dot{\xi}_m(t_n)). \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) введены следующие обозначения:  $F_0(\mathbf{p})$  – ДН одиночного антенного элемента ЦАР;  $\delta I_{m,n}, \delta Q_{m,n}$  – ошибки округления в синфазной и квадратурной составляющих;  $\delta u_m, \Delta\varphi_m$  – ошибки, обусловленные неидентичностью амплитудного и фазового коэффициента передачи МШУ  $m$ -го канала;  $\delta f$  – уход частоты сигнала относительно несущей, который, например, обусловлен движением источника волны относительно приемной ЦАР;  $t_n$  – дискретный момент времени;  $\delta t_{I_n}, \delta t_{Q_n}$  – ошибки, обусловленные

разбросом моментов дискретизации сигналов в АЦП (будем считать, что благодаря общей синхронизации всех элементов ЦАР данная ошибка содержит только флуктуации по времени, а в разных каналах дискретизацию выполняют одновременно);  $k$  – волновое число;  $\xi_m(t_n)$  – комплексная огибающая шума в дискретные моменты времени.

Для формирования заданной ДН в диаграммообразующей схеме ЦАР используют комплексные весовые коэффициенты  $\dot{A}_m = A_m \exp(i\Phi_m)$ . В монографии [1] вводились ошибки округления при формировании заданной ДН. При этом ошибка округления комплексных весовых коэффициентов связывалась с разрядностью АЦП. Однако такое утверждение не вполне согласуется с технологиями, используемыми в современных ЦАР, в которых ограничения разрядности относятся только к квантованию отсчетов входных сигналов по уровню, а далее используют арифметику с плавающей точкой. В связи с этим погрешностями округления весовых коэффициентов в большинстве практических задач можно пренебречь. В данной работе рассмотрим самый общий случай, при котором введем погрешности  $\delta a_m$  и  $\Delta\psi_m$  реализации весовых коэффициентов.

Из анализа выражений (1) и (2) также следует, что

$$\omega(1 + \delta f)(t_n + \delta t_{I(Q)n}) = \omega t_n + \omega(\delta t_{I(Q)n} + \delta f t_n + \delta f \delta t_{I(Q)n}) \quad (3)$$

Это позволяет считать, что разброс моментов дискретизации в АЦП (шумы джиттера) и уходы частоты несущей приводят к аналогичным последствиям. В связи с этим обозначим

$$\omega(\delta t_{I(Q)n} + \delta f t_n + \delta f \delta t_{I(Q)n}) = \Delta\gamma_{I(Q)n} \quad (4)$$

С учетом выполненных рассуждений и введенных обозначений на выходе ЦАР будет присутствовать комплексный сигнал, который можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{p}, t_n) = & \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (I_{m,n} + jQ_{m,n}) = \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (1 + \delta a_m) \exp(j\Delta\psi_m) \times \\ & \times \left( (u_0(1 + \delta u_m) F_0(\mathbf{p}) \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\gamma_{I_n} + \Delta\varphi_m) + \operatorname{Re} \dot{\xi}_m(t_n)) (1 + \delta I_{n,m}) + \right. \\ & \left. + j(u_0(1 + \delta u_m) F_0(\mathbf{p}) \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\gamma_{Q_n} + \Delta\varphi_m) + \operatorname{Im} \dot{\xi}_m(t_n)) (1 + \delta Q_{n,m}) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для малых флуктуаций  $\Delta\psi_m, \Delta\varphi_m, \Delta\gamma_{I_n}$  и  $\Delta\gamma_{Q_n}$ , используя известные тригонометрические формулы синуса и косинуса суммы, а также аппроксимации тригонометрических функций линейными, представим выражение (5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{p}, t_n) = & \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (1 + \delta a_m) (1 + j\Delta\psi_m) \times \\ & \times \left( (u_0(1 + \delta u_m) F_0(\mathbf{p}) \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) - (\Delta\gamma_{I_n} + \Delta\varphi_m) u_0(1 + \delta u_m) \times \right. \\ & \times F_0(\mathbf{p}) \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + \operatorname{Re} \dot{\xi}_m(t_n)) (1 + \delta I_{n,m}) + \\ & \left. + j(u_0(1 + \delta u_m) F_0(\mathbf{p}) \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + (\Delta\gamma_{Q_n} + \Delta\varphi_m) u_0(1 + \delta u_m) \times \right. \\ & \left. \times F_0(\mathbf{p}) \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + \operatorname{Im} \dot{\xi}_m(t_n)) (1 + \delta Q_{n,m}) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, выходной сигнал ЦАР представляет собой функцию случайных параметров:

$$\delta a_m, \Delta\psi_m, \delta u_m, \Delta\varphi_m, \Delta\gamma_{I_n}, \Delta\gamma_{Q_n}, \delta I_{n,m}, \delta Q_{n,m}, \operatorname{Re} \dot{\xi}_m(t_n) \text{ и } \operatorname{Im} \dot{\xi}_m(t_n).$$

Все эти параметры имеют нулевые математические ожидания, дисперсии  $\sigma_\psi^2, \sigma_\varphi^2, \sigma_{\gamma_I}^2, \sigma_{\gamma_Q}^2$  параметров  $\Delta\psi_m, \Delta\varphi_m, \Delta\gamma_{I_n}, \Delta\gamma_{Q_n}$  должны быть достаточно малы. Кроме того, будем считать, что дисперсии  $\sigma_{\gamma_I}^2, \sigma_{\gamma_Q}^2$  и  $\sigma_I^2, \sigma_Q^2$  случайных величин  $\Delta\gamma_{I_n}, \Delta\gamma_{Q_n}$  и  $\delta I, \delta Q$  равны, т.е.  $\sigma_{\gamma_I}^2 = \sigma_{\gamma_Q}^2 = \sigma_\gamma^2$  и  $\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = \sigma_{IQ}^2$ . В статистической теории антенн полагают, что распределения собственных шумов  $\dot{\xi}_m(t_n)$  в разных каналах антенны статистически независимы. Исходя из физического смысла флуктуаций рассматриваемых параметров, будем также использовать гипотезу о статистической независимости всех случайных распределений в выражении (6).

При вычислении мощности сигнала на выходе ЦАР выражение будет содержать большое число слагаемых, которые для удобства анализа разделим на несколько групп.

Во-первых, несложно заметить, что выражение  $|\dot{s}(\mathbf{p}, t_n)|^2$  будет содержать произведение идеальной ДН ЦАР по мощности и мощности принимаемого сигнала источника.

Во-вторых, появятся слагаемые, которые содержат квадрат  $u_0^2$ . Эти слагаемые не будут связаны с составляющей собственных и внешних шумов антенны  $\dot{\xi}_m(t_n)$ .

Третья группа слагаемых будет содержать перекрестные произведения, в которые амплитуда  $u_0$  будет входить в первой степени.

Четвертая группа слагаемых будет содержать элементы  $\text{Re} \dot{\xi}_m(t_n) \text{Im} \dot{\xi}_m(t_n)$ ,  $(\text{Re} \dot{\xi}_m(t_n))^2$  и  $(\text{Im} \dot{\xi}_m(t_n))^2$ .

Первая и вторая группа слагаемых представляют интерес для оценки средней ДН по мощности ЦАР, а третья и четвертая группа слагаемых относятся к составляющей шума на ее выходе.

Остановимся на оценке средней ДН по мощности ЦАР. При этом сначала запишем выражение для мгновенной ДН по мощности, получаемое из выражения (6) путем исключения составляющей шумов и мощности сигнала.

$$\begin{aligned}
 |\dot{F}(\mathbf{p}, t_n)|^2 &= F_0^2(\mathbf{p}) \left( \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (1 + \Delta a_m) (1 + j \Delta \psi_m) \times \right. \\
 &\times \left( \left( \cos(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) - (\Delta \gamma_{I_n} + \Delta \varphi_m) \sin(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \right) (1 + \delta u_m) (1 + \delta I_{n,m}) + \right. \\
 &+ \left. j \left( \sin(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + (\Delta \gamma_{Q_n} + \Delta \varphi_m) \cos(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \right) (1 + \delta u_m) (1 + \delta Q_{n,m}) \right) \times \quad (7) \\
 &\times \left( \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* (1 + \Delta a_{m'}) (1 - j \Delta \psi_{m'}) \times \right. \\
 &\times \left( \left( \cos(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) - (\Delta \gamma_{I_n} + \Delta \varphi_{m'}) \sin(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) \right) (1 + \delta u_{m'}) (1 + \delta I_{n,m'}) - \right. \\
 &- \left. j \left( \sin(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + (\Delta \gamma_{I_n} + \Delta \varphi_{m'}) \cos(\psi_0 - \omega t_n + k \mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) \right) (1 + \delta u_{m'}) (1 + \delta Q_{n,m'}) \right) \left. \right).
 \end{aligned}$$

Если в выражении (7) раскрыть все скобки, то получится большое число слагаемых, которое затруднит процесс упрощения выражения. Чтобы избежать этого, рассмотрим мгновенную ДН по мощности как сумму слагаемых, в первом из которых отсутствуют случайные ошибки, во втором присутствует только один случайный параметр, в следующем – два и т.д. Как следует из анализа выражения (7), подобных слагаемых всего пять

$$|\dot{F}(\mathbf{p}, t_n)|^2 = |\dot{F}^{(0)}(\mathbf{p}, t_n)|^2 + |\dot{F}^{(1)}(\mathbf{p}, t_n)|^2 + |\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2 + |\dot{F}^{(3)}(\mathbf{p}, t_n)|^2 + |\dot{F}^{(4)}(\mathbf{p}, t_n)|^2. \quad (8)$$

Здесь и далее верхний индекс в круглых скобках обозначает число случайных параметров в слагаемом.

Аналитические выражения для составляющих мгновенной ДН по мощности необходимы для того, чтобы затем выполнить операцию усреднения. При усреднении многие слагаемые обращаются в ноль. В связи с этим часть слагаемых в выражении (8) может быть сразу отброшена. При этом необходимо использовать теоремы теории вероятностей о математических ожиданиях линейной функции и произведений независимых случайных величин [6].

С учетом сделанных допущений о статистических характеристиках случайных параметров, входящих в выражение (7), запишем

$$\overline{|\dot{F}(\mathbf{p}, t_n)|^2} = \overline{|\dot{F}^{(0)}(\mathbf{p}, t_n)|^2} + \overline{|\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2}. \quad (9)$$

На основании теоремы о математическом ожидании константы получим

$$\begin{aligned} \overline{|\dot{F}^{(0)}(\mathbf{p}, t_n)|^2} &= F_0^2(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \left( \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + j \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \right) \times \\ &\times \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \left( \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) - j \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) \right) = \\ &= F_0^2(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \exp(jk(\mathbf{q}_m^T - \mathbf{q}_{m'}^T) \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (10)$$

При вычислении  $\overline{|\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2}$  на основании теоремы о математическом ожидании произведений независимых случайных величин будут отброшены слагаемые, в которых присутствуют произведения разноименных случайных

параметров. В связи с этим выражение для  $|\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2$  запишем в несколько усеченном виде

Остановимся на оценке средней ДН по мощности ЦАР. При этом сначала запишем выражение для мгновенной ДН по мощности, получаемое из выражения (6) путем исключения составляющей шумов и мощности сигнала.

$$\begin{aligned}
 |\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2 &= F_0^2(\mathbf{p}) \times \\
 &\times \left( \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* (\delta a_m \delta a_{m'} + \Delta \psi_m \Delta \psi_{m'} + \delta u_m \delta u_{m'}) \exp(jk(\mathbf{q}_m^T - \mathbf{q}_{m'}^T)\mathbf{p}) + \right. \\
 &+ (\Delta \gamma_{I_n})^2 \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ (\Delta \gamma_{Q_n})^2 \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \Delta \varphi_m \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \Delta \varphi_{m'} \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \Delta \varphi_m \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \Delta \varphi_{m'} \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \delta I_{n,m} \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \delta I_{n,m'} \cos(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &\left. + \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \delta Q_{n,m} \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \delta Q_{n,m'} \sin(\psi_0 - \omega t_n + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) \right) + \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

В результате выполнения операции усреднения выражения (11) получим

$$\begin{aligned}
 \overline{|\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2} &= F_0^2(\mathbf{p}) \left( \sigma_a^2 \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 + \sigma_\psi^2 \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 + \right. \\
 &+ (\sigma_{\gamma_I}^2 + \sigma_\varphi^2) \sin^2 \left( \psi_0 - \omega \frac{T}{2} \right) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \cos(k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \cos(k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ (\sigma_{\gamma_I}^2 + \sigma_\varphi^2) \cos^2 \left( \psi_0 - \omega \frac{T}{2} \right) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \sin(k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sin(k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ (\sigma_{\gamma_Q}^2 + \sigma_\varphi^2) \cos^2 \left( \psi_0 - \omega \frac{T}{2} \right) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \cos(k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \cos(k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &+ (\sigma_{\gamma_Q}^2 + \sigma_\varphi^2) \sin^2 \left( \psi_0 - \omega \frac{T}{2} \right) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \sin(k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sin(k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) + \\
 &\left. + \sigma_I^2 \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 + \sigma_Q^2 \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

С учетом равенства дисперсий, обусловленных неодновременностью моментов дискретизации отсчетов и ошибок округления отсчетов, выражение (12) примет окончательный и более простой вид

$$\begin{aligned} \overline{|\dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2} = F_0^2(\mathbf{p}) & \left( \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 (\sigma_a^2 + \sigma_\psi^2 + \sigma_u^2 + 2\sigma_{IQ}^2) + \right. \\ & \left. + (\sigma_\gamma^2 + \sigma_\varphi^2) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \cos(k(\mathbf{q}_m^T - \mathbf{q}_{m'}^T)\mathbf{p}) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Сопоставление выражений (9), (10) и (13) с известным выражением для средней ДН по мощности ФАР с флуктуациями амплитудно-фазового распределения позволяет заключить, что при формировании средней ДН ЦАР часть факторов оказывает влияние на средний уровень ДН, а часть отвечает за вклад в среднюю ДН нового слагаемого. Это дополнительное слагаемое имеет более сложную угловую зависимость. Так, ошибки  $\delta I, \delta Q$  приводят к росту среднего уровня боковых лепестков и «заплыванию» нулей ДН. Вклад ошибок  $\delta I, \delta Q$  будет изменяться в зависимости от уровня шумов ЦАР и уровня сигнала. В связи с этим оценить суммарную дисперсию  $\sigma_a^2 + \sigma_\psi^2 + \sigma_u^2 + 2\sigma_{IQ}^2$  теоретически достаточно сложно.

Дисперсии  $\sigma_\gamma^2$  и  $\sigma_\varphi^2$  определяют влияние на результирующую среднюю ДН квадратичной формы, элементы действительной симметрической матрицы которой обеспечивают симметрию соответствующего слагаемого при формировании ДН. Если элементы ЦАР сфазированы в направлении  $\mathbf{p}_0$ , то соответствующее слагаемое будет иметь также экстремум в направлении  $-\mathbf{p}_0$ . Данное слагаемое обусловлено наличием шумов джиттера, уходами частоты принимаемого сигнала ЦАР и качеством фазовой калибровки ЦАР.

Теперь вернемся к оценке влияния собственных шумов на среднюю мощность сигнала на выходе ЦАР. Основываясь на теоремах о математическом ожидании перекрестных произведений независимых случайных величин, можно утверждать, что при вычислении средней мощности сигнала на выходе ЦАР для случайных параметров, входящих в выражение (6), слагаемые, в которых присутствует множитель  $u_0$ , в первой степени обратятся в ноль. В

результате, как и для ФАР, оценка средней мощности сигнала ЦАР с учетом внутренних шумов производится по формуле

$$\overline{|\dot{s}(\mathbf{p}, t_n)|^2} = u_0^2 \overline{|\dot{F}(\mathbf{p}, t_n)|^2} + \sigma_\xi^2 \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 \quad (14)$$

## 2. Способ снижения среднего уровня боковых лепестков в цифровой антенной решетке

Рассмотрим, что изменится, если в ЦАР дополнительно ввести обработку сигналов в скользящем окне, которая уменьшит уровень шумов. Пусть в процессе приема сигналов осуществляют преобразование Фурье последовательностей из  $L$  отсчетов в скользящем окне длиной  $L$  [7]. В этом случае с учетом обозначений, принятых в выражении (13), спектральные составляющие сигнала на выходе ЦАР примут вид

$$\begin{aligned} \dot{g}(\mathbf{p}, i) = & F_0(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (1 + \delta a_m) (1 + j\Delta\psi_m) \times \\ & \times \frac{1}{L} \sum_{n'=0}^{L-1} \left( (u_0 (1 + \delta u_m) \cos(\psi_0 - \omega t_{n-L+n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\gamma_{I_{n-L+n'}}) + \operatorname{Re} \dot{\xi}_m(t_{n-L+n'})) (1 + \delta I_{n-L+n',m}) + \right. \\ & \left. + j(u_0 (1 + \delta u_m) \sin(\psi_0 - \omega t_{n-L+n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\gamma_{Q_{n-L+n'}}) + \operatorname{Im} \dot{\xi}_m(t_{n-L+n'})) (1 + \delta Q_{n-L+n',m}) \right) \times \\ & \times \exp\left(j \frac{2\pi}{L} n' i\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Примем, что длина  $L$  последовательности отсчетов в скользящем окне кратна периоду дискретизации и периоду сигнальной несущей, т.е.

$$L = k_D \Delta t \text{ и } L = k_\omega \frac{2\pi}{\omega}, \quad (16)$$

где  $k_D$  и  $k_\omega$  – целые;  $\Delta t$  – шаг (период) дискретизации.

Спектр (15) будет носить линейчатый характер с ярко выраженными максимумами модулей спектральных составляющих, так как числовые последовательности синфазной и квадратурной составляющих в скользящем окне получены путем оцифровки периодического сигнала. Максимальные значения по модулю этих спектральных составляющих характеризуют энергию несущей сигнала. Эти спектральные составляющие являются комплексно сопряженными числами, расположенными в положительной и отрицательной частотных областях. Остальные обусловлены шумовой компонентой и могут

быть исключены из рассмотрения. Сумма оставшихся является действительным числом и равна квадратурной компоненте на данный момент времени.

При заданном значении  $L$ , удовлетворяющем выражениям (16), искомая сумма отфильтрованных спектральных составляющих, содержащая энергию сигнала, будет описываться выражением

$$\begin{aligned} \dot{s}_{DP}(\mathbf{p}, t_n) = & F_0(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (1 + \delta a_m) (1 + j\Delta\psi_m) \frac{2}{L} \times \\ & \times \sum_{n'=0}^{0.5L-1} (-1)^{n'} \left( (u_0 (1 + \delta u_m) \cos(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\gamma_{I_{n-L+2n'}} + \Delta\varphi_m) + \operatorname{Re} \dot{\xi}_m(t_{n-L+2n'})) \right) \times \\ & \times (1 + \delta I_{n-L+2n',m}) + j(1 + \delta Q_{n-L+2n',m}) \times \\ & \times (u_0 (1 + \delta u_m) \sin(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p} + \Delta\gamma_{Q_{n-L+2n'}} + \Delta\varphi_m) + \operatorname{Im} \dot{\xi}_m(t_{n-L+2n'})) \end{aligned} \quad (17)$$

В соответствии с теоремой Парсеваля сумма энергии гармоник спектра должна стремиться к энергии сигнала. Поскольку в выражении для восстановления сигнала используется энергия наиболее значимых гармоник Фурье, то потери энергии сигнала возможны, однако эти потери должны компенсироваться существенным снижением энергии шумов в выходном сигнале.

Аналогично выражению (14) выражение (17) несложно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{s}_{DP}(\mathbf{p}, t_n) = & F_0(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^M \dot{A}_m (1 + \delta a_m) (1 + j\Delta\psi_m) \times \\ & \times \frac{2}{L} \sum_{n'=0}^{0.5L-1} (-1)^{n'} \left( (u_0 (1 + \delta u_m) \cos(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) - \right. \\ & \left. - (\Delta\gamma_{I_{n-L+2n'}} + \Delta\varphi_{m'}) u_0 (1 + \delta u_m) \sin(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + \right. \\ & \left. + \operatorname{Re} \dot{\xi}_m(t_{n-L+2n'}) \right) (1 + \delta I_{n-L+2n',m}) + j(u_0 (1 + \delta u_m) \sin(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + \\ & \left. + (\Delta\gamma_{Q_{n-L+2n'}} + \Delta\varphi_{m'}) u_0 (1 + \delta u_m) \times \right. \\ & \left. \times \cos(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + \operatorname{Im} \dot{\xi}_m(t_{n-L+2n'}) \right) (1 + \delta Q_{n-L+2n',m}) \end{aligned} \quad (18)$$

На основании выражения (18) и, учитывая полученные ранее результаты для ЦАР, можно заключить, что

$$\overline{|\dot{F}_{DP}(\mathbf{p}, t_n)|^2} = \overline{|\dot{F}_{DP}^{(0)}(\mathbf{p}, t_n)|^2} + \overline{|\dot{F}_{DP}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n)|^2}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 \overline{\left| \dot{F}_{DP}^{(0)}(\mathbf{p}, t_n) \right|^2} &= (F_0(\mathbf{p}))^2 \frac{4}{L^2} \sum_{n'=0}^{0.5L-1} (-1)^{n'} \sum_{n''=0}^{0.5L-1} (-1)^{n''} \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \times \\
 &\times \left( \cos(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) + j \sin(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n'} + k\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \right) \times \\
 &\times \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \left( \cos(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n''} + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) - j \sin(\psi_0 - \omega t_{n-L+2n''} + k\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) \right) = \quad (20) \\
 &= (F_0(\mathbf{p}))^2 \frac{4}{L^2} \sum_{n'=0}^{0.5L-1} (-1)^{n'} \sum_{n''=0}^{0.5L-1} (-1)^{n''} \exp(j2\omega \cdot \delta t \cdot (n' - n'')) \times \\
 &\times \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \exp(jk\mathbf{q}_m^T \mathbf{p}) \sum_{m'=1}^M \dot{A}_{m'}^* \exp(-jk\mathbf{q}_{m'}^T \mathbf{p}) = \overline{\left| \dot{F}^{(0)}(\mathbf{p}, t_n) \right|^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\left| \dot{F}_{DP}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n) \right|^2} &= F_0^2(\mathbf{p}) \frac{4}{L^2} \sum_{n'=0}^{0.5L-1} (-1)^{n'} \sum_{n''=0}^{0.5L-1} (-1)^{n''} \times \\
 &\times \exp(j2\omega \cdot \delta t \cdot (n' - n'')) \left( \sum_{m=1}^M |\dot{A}_m|^2 (\sigma_a^2 + \sigma_\psi^2 + \sigma_u^2 + 2\sigma_{IQ}^2) + \right. \\
 &\left. + (\sigma_\gamma^2 + \sigma_\varphi^2) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \dot{A}_m \dot{A}_{m'}^* \cos(k(\mathbf{q}_m^T - \mathbf{q}_{m'}^T) \mathbf{p}) \right) = \overline{\left| \dot{F}^{(2)}(\mathbf{p}, t_n) \right|^2}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что формально ДН ЦАР без цифровой обработки сигналов (ЦОС) и ДН ЦАР с предлагаемым вариантом ЦОС не отличаются. В то же время, как было показано выше, часть дисперсий, входящих в выражение (21), зависят от уровня шумов и уменьшаются при уменьшении энергии шума в сигнале. Если допустить, что при выполнении Фурье-преобразования отсчетов в скользящем окне вся энергия шума равномерно распределена только между полученными гармониками спектра, а при цифровой фильтрации часть этих гармоник отбрасывается, то средняя мощность шума должна уменьшиться. В этом случае при построении средней ДН следует уменьшить значения дисперсий в (21) таким образом, чтобы получить соответствие между ДН, получаемой при усреднении различных реализаций ДН, и средней ДН ЦАР.

### 3. Результаты численных исследований

В качестве примера рассмотрим формирование средней ДН линейной  $M = 64$ -ми элементной ЦАР с отклоненным лучом при межэлементном расстоянии, равном  $d = 0.55\lambda$ .

При формировании ДН в раскрыве использовалось амплитудно-фазовое распределение, которое рассчитывалось по формуле

$$A_m = \left( 0.1 + 0.9 \cos^2 \left( \frac{\pi d (m - 0.5(M + 1))}{(M - 1)d} \right) \right) \exp(-jkd(m - 0.5(M + 1)) \sin \theta_0), \quad (22)$$

где  $\theta_0$  – направление максимума ДН.

При проведении численных исследований несущая частота была выбрана равной 3 ГГц, промежуточная частота –  $f_{np} = 75$  МГц, а период дискретизации  $\delta t = (32 f_{np})^{-1}$ . Луч был отклонен в направлении  $\theta_0 = 40^\circ$ .

На рис. 1-3 представлены результаты численного расчета средней ДН по мощности ЦАР на основании выражения (13) при следующих значениях дисперсий ошибок:

$$\sigma_a^2 = 3.76 \cdot 10^{-6}, \sigma_\psi^2 = 2.37 \cdot 10^{-6}, \sigma_\gamma^2 + \sigma_\phi^2 = 4.46 \cdot 10^{-22}.$$

Амплитуда сигнала в 20 раз превышала амплитуду внутренних шумов. Рис. 1 получен при том, что частота принимаемого сигнала была равна 3 ГГц, а результатам на рис. 2 и 3 соответствуют отклонения частоты принимаемого сигнала на  $\pm 20$  кГц соответственно. Штриховая кривая на рис. 1-3 получена при идеальном формировании ДН при отсутствии ошибок и шумов и соответствует  $|F^{(0)}(\theta)|^2$ , штрих-пунктирная кривая соответствует  $\overline{|F(\theta)|^2}$ , сплошная кривая –  $\overline{|F_{DP}(\theta)|^2}$ . Все кривые получены при одинаковой реализации шумов.

На рис. 4 приведены средние ДН, первая из которых получена в ходе численного эксперимента и представлена также на рис. 3 (штрих-пунктирная кривая), а вторая – на основании выражения (21) (сплошная кривая). Сплошная кривая получена при  $\sigma_\gamma^2 = 8.6 \cdot 10^{-5}$  и  $\sigma_i^2 = \sigma_Q^2 = 3.9 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 5 приведена средняя ДН по мощности ЦАР с цифровой обработкой сигналов. Обозначения кривых соответствуют введенным выше на рис. 5. При этом для формирования средней ДН по мощности ЦАР использовались меньшие значения дисперсии  $\sigma_i^2 = \sigma_Q^2 = 1.95 \cdot 10^{-4}$  и  $\sigma_\gamma^2 = 2.15 \cdot 10^{-5}$ .

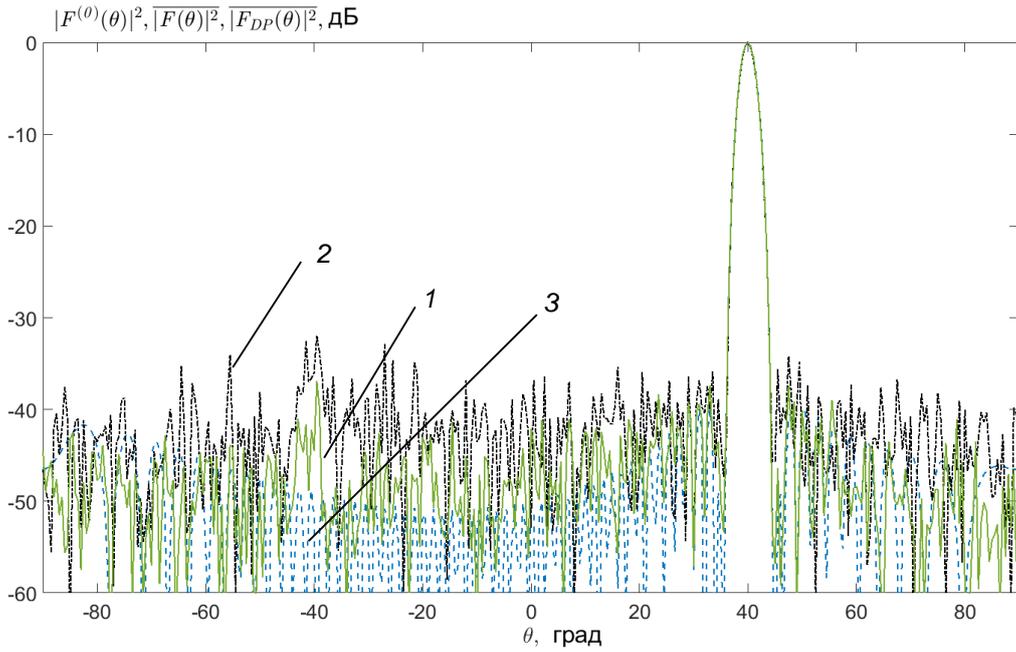


Рис. 1. Средние ДН ЦАР с цифровой обработкой сигналов (кривая 1) и без обработки (кривая 2), идеальная ДН ЦАР (кривая 3) при приеме сигнала на частоте  $f_0$

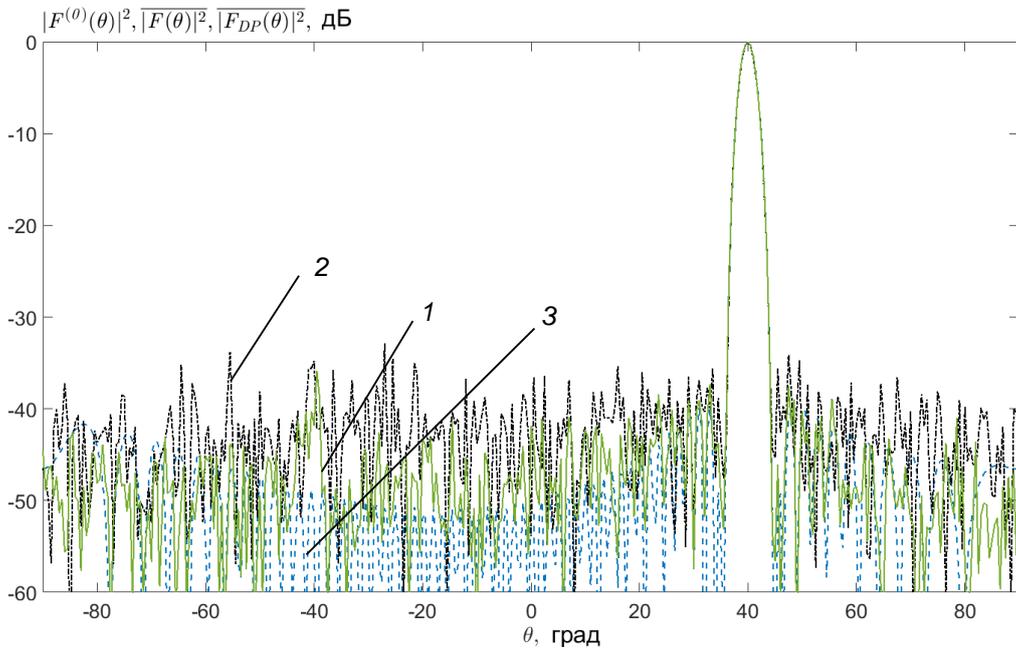


Рис. 2. Средние ДН ЦАР с цифровой обработкой сигналов (кривая 1) и без обработки (кривая 2), идеальная ДН ЦАР (кривая 3) при приеме сигнала на частоте  $f_0 + 20$  кГц

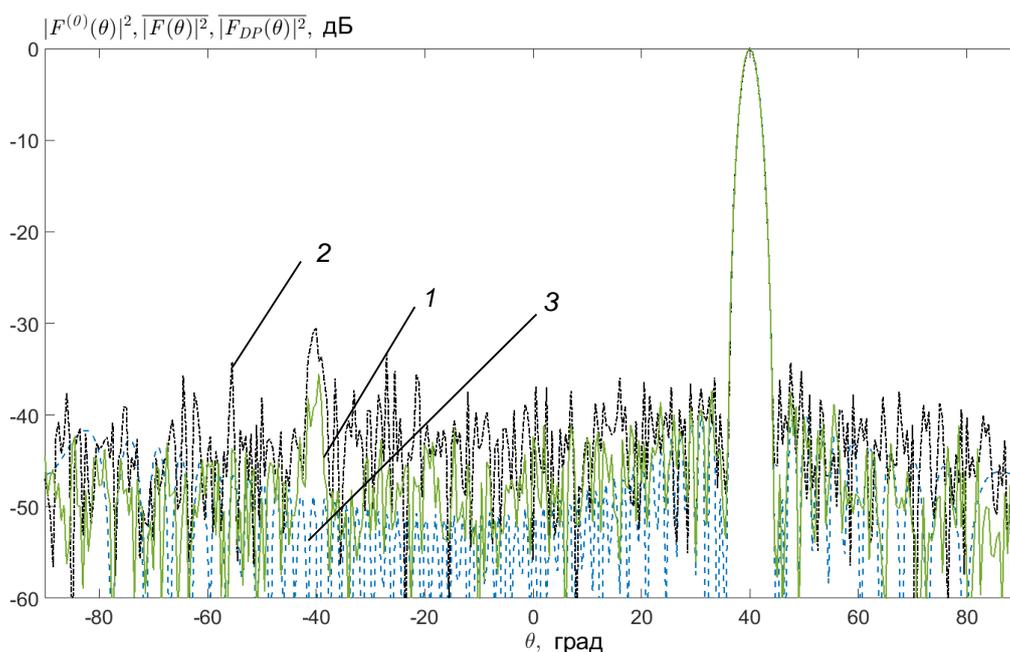


Рис. 3. Средние ДН ЦАР с цифровой обработкой сигналов (кривая 1) и без обработки (кривая 2), идеальная ДН ЦАР (кривая 3) при приеме сигнала на частоте  $f_0 - 20$  кГц

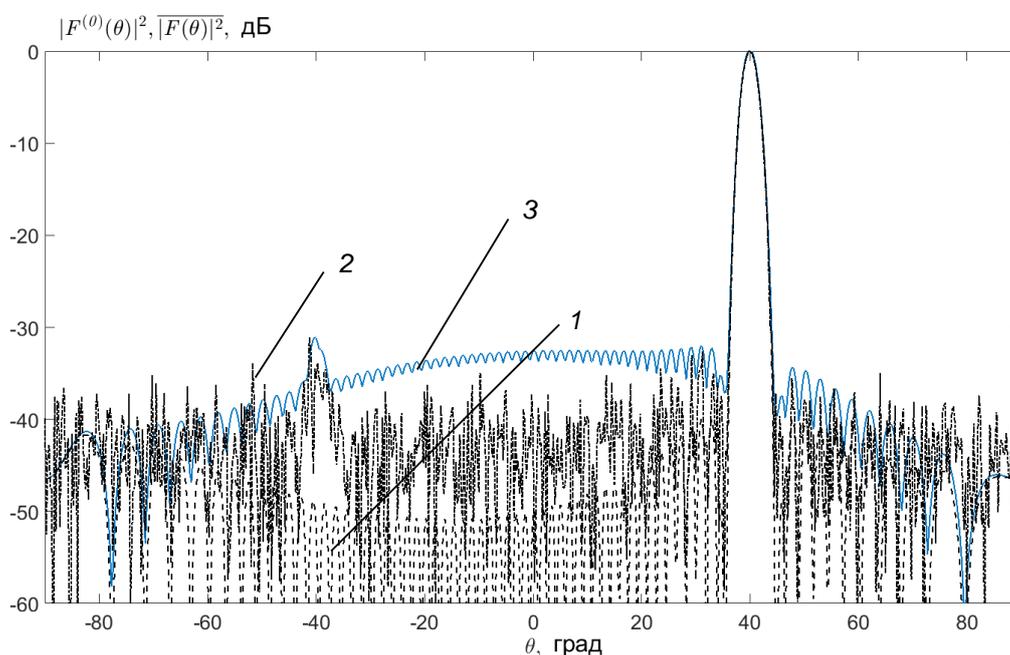


Рис. 4. Идеальная ДН (кривая 1), средняя ДН, полученная по результатам моделирования (кривая 2), оценка средней ДН на основании выражения (13) (кривая 3).

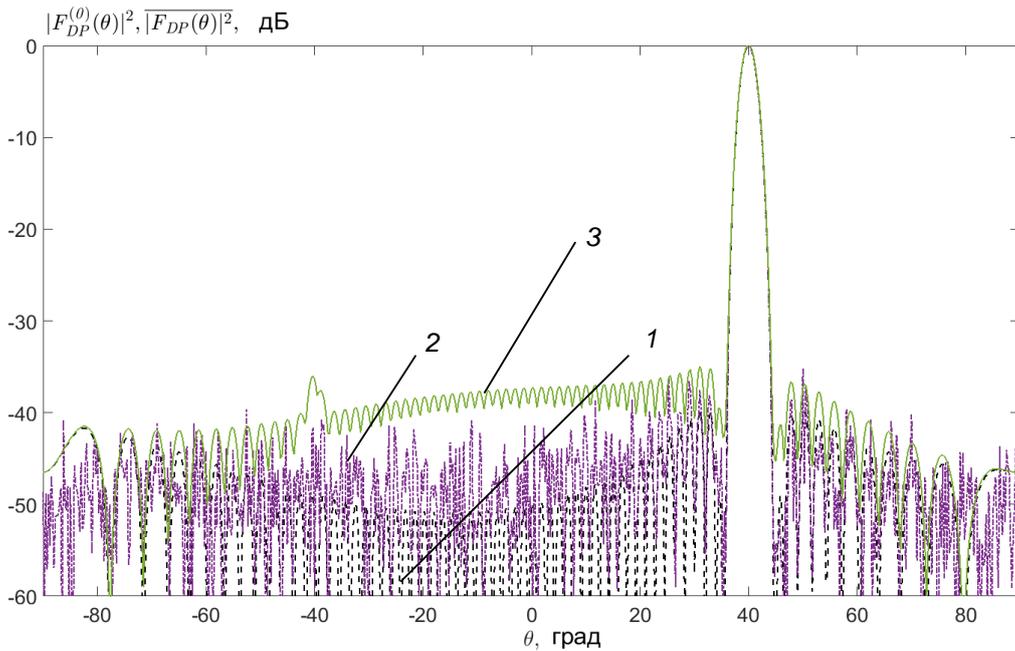


Рис. 5. Идеальная ДН (кривая 1), средняя ДН, полученная по результатам моделирования (кривая 2), оценка средней ДН на основании выражения (13) после цифровой обработки сигналов в скользящем окне (кривая 3).

Результаты, представленные на рис. 4 и 5 подтверждают, что при увеличении ошибок округления происходит «заплывание» нулей ДН и рост среднего уровня боковых лепестков. Кроме того, по амплитуде бокового лепестка средней ДН можно оценить дисперсию шумов джиттера и уходов частоты.

### Заключение

Таким образом, полученные соотношения для оценки средней ДН по мощности ЦАР отличаются от аналогичных выражений для ФАР дополнительным слагаемым и наличием двух дисперсий. При этом одна из них, отражающая влияние на средний уровень боковых лепестков ДН ЦАР, зависит от мощности шумов и амплитуды сигнала. Вторая определяет вклад нового слагаемого, позволяющего учесть шум джиттера и уходы сигнала по частоте. Вклад данного слагаемого наиболее заметен при отклонении луча ЦАР от направления нормали. В этом случае симметрично главному лучу над средним уровнем боковых лепестков возникает боковой лепесток, обусловленный влиянием соответствующих частотных и временных ошибок. Установлено, что

снижение уровня шумов за счет цифровой обработки сигналов позволяет снизить уровень боковых лепестков и уровень шумов джиттера в средней ДН по мощности ЦАР. Для рассматриваемого примера дисперсия внутренних шумов сокращается за счет цифровой обработки в четыре раза, при этом дисперсия ошибок формирования квадратурных составляющих уменьшается примерно в два раза, а суммарная дисперсия шумов джиттера и ошибок фазовой калибровки – в 4 раза.

### Литература

1. *Активные фазированные антенные решетки*. Под ред. Воскресенского Д.И., Канащенкова А.Н. Москва, Радиотехника. 2004. 488 с.
2. Григорьев Л.Н. *Цифровое формирование диаграммы направленности в фазированных антенных решетках*. Москва, Радиотехника. 2010. 144 с.
3. Корниенко Л.Г., Шифрин Я.С. Статистический синтез антенн. В кн. *Проблемы антенной техники*. Под ред. Бахраха Л.Д., Воскресенского Д.И. Москва, Радио и связь. 1989. С.275-296.
4. Шифрин Я.С. *Вопросы статистической теории антенн*. Москва, Советское радио. 1970. 384 с.
5. Parker M. *Radar Basics. Part 4: Space-time adaptive processing* [электронный ресурс]. <https://www.eetimes.com/radar-basics-part-4-space-time-adaptive-processing>.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория вероятностей*. Москва, Наука. 1969. 368 с.
7. Мищенко Е.Н., Мищенко С.Е., Шацкий Н.В. *Способ диаграммообразования в приемной цифровой антенной решетке*. Заявка на патент РФ № 2021108461 от 31.03.2021.

#### Для цитирования:

Мищенко Е.Н., Мищенко С.Е., Шацкий Н.В. Средняя диаграмма направленности и способ снижения среднего уровня боковых лепестков цифровой антенной решетки. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.5.7>