

УДК 621.396.6

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА В НЕГАУССОВСКИХ КАНАЛАХ CDMA СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВНУТРИСИСТЕМНЫХ ПОМЕХ

В. В. Кадушкин

**Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ**

Статья поступила в редакцию 1 октября 2016 г., после доработки – 15 ноября 2016 г.

Аннотация. В статье представлены результаты синтеза алгоритма оптимального приема сигналов по критерию максимального правдоподобия при воздействии теплового шума, внутрисистемных помех и сторонних произвольно флуктуирующих помех различного характера для частного случая когерентного приема с учетом воздействия. Предложена обобщенная структурная схема такого приемника, реализующего процедуру оптимального разрешения детерминированных сигналов для систем беспроводной связи с кодовым разделением каналов (CDMA), дана оценка вычислительной сложности разработанного алгоритма.

Ключевые слова: оптимальный прием сигналов, негауссовские помехи и распределения, вероятностные смеси, статистическая обработка сигналов, CDMA системы.

Abstract. The problem of optimum signal reception in the synchronous CDMA systems in the presence of non-Gaussian intersystem and industrial noise as well as multiple access interference (MAI) is considered. Analytical representation of the noise can be achieved via probabilistic mixture of a number of Gaussian PDFs with a-priori known parameters.

In order to solve the problem a novel optimum ML-signal resolution algorithm is proposed, that makes estimations of transmitted information bits.

The basic idea, contained in the proposed algorithm, is to form the complete set of statistical hypotheses that correspond to various super-impositions of non-Gaussian noise components as well as spreading chip sequences of interfering users. Because

of each spreading chip sequence for particular user corresponds to one of two binary bit, signal resolution problem can be reduced to the problem of distinguishing of paired antithetical hypotheses. Final decision about the transmitted bits is made based on the maximization of the likelihood ratios.

The proposed statistical signal processing (SSP) algorithm takes into account MAI by means of calculating complete set of super-impositions of spreaded chip sequences from multiple interfering users, contained in the structure of corresponding likelihood ratios. It leads to enhancement of likelihood for correct hypotheses.

It is shown that computational complexity has linear dependence of number of samples per chip and noise components and has nonlinear dependence of number of users. The proposed algorithm can serve as the basis for the further synthesis of quasi-optimum SSP algorithms with lower computational complexity and near optimum performance.

Keywords. Optimal reception, non-Gaussian interference and distributions, probabilistic mixtures, statistical signal processing, CDMA systems.

Введение

Современный этап развития систем подвижной радиосвязи с множеством приемно-передающих терминалов в условиях ограниченной полосы частот характеризуется высокими требованиями к помехоустойчивости, скорости передачи и количеству одновременно обслуживаемых абонентов. В условиях городской застройки эффективная работа подобных систем связи особенно затруднена высоким потоком внутрисистемных, межсистемных, индустриальных и др. видов помех. Для достижения заданного качества обслуживания (QoS) в указанных условиях [1, 2] перспективным направлением является совершенствование методов и адаптивных алгоритмов совместной обработки сигналов и помех, позволяющих компенсировать внутрисистемные помехи и производить оценку канала связи. Известен оптимальный многопользовательский детектор [3], позволяющий компенсировать внутрисистемные помехи, для CDMA систем связи в каналах с аддитивным

белым гауссовым шумом. Однако проведенные исследования беспроводных каналов связи [4-6] показывают, что статистика сигналов и помех имеет произвольные негауссовы распределения вероятностей. Учет данного факта требует синтеза новых квазиоптимальных алгоритмов, в основе которых заложены посткорреляционные методы и алгоритмы статистической обработки сигналов [5, 7-10]. Тем не менее, оптимальные алгоритмы различения и особенно разрешения в негауссовской постановке вместе с высокой помехоустойчивостью обладают столь же высокой вычислительной сложностью, которая зависит от числа сигналов, помех, а также размерности вектора отсчетов. Так, число гипотез о реализовавшейся комбинации наложения сигналов и помех можно рассчитать, исходя из выражения:

$$H = \frac{(K + k)!(Z + z)!}{K!k!Z!z!}, \quad (1)$$

где K - максимальное число сигналов, k - число сигналов, реализовавшихся во входном колебании, Z - максимальное число компонент негауссовой помехи, z - реализовавшееся число компонент негауссовой помехи.

Известны оригинальные методологические решения проф. Чабдарова, предложенные с учетом специфики радиолокационных систем с активным запросом – ответом [11]. Однако в настоящей статье делается акцент на применении наработанных решений и алгоритмов применительно к специфике телекоммуникационных систем. Отличительной особенностью предлагаемого оптимального алгоритма является то, что он позволяет учитывать влияние внутриаппаратурных шумов, внешних шумов и помех, имеющих в общем случае негауссовский характер плотностей распределения вероятностей, а также позволяющий учитывать внутрисистемных помех множественного доступа.

Несмотря на то, что полученный оптимальный алгоритм также является затратным с точки зрения количества вычислительных операций, его помехоустойчивость определяет предельные значения вероятности битовой ошибки, а также формирует задачу синтеза новых квазиоптимальных

алгоритмов, помехоустойчивость которых приближается к помехоустойчивости оптимального, но которые обладают меньшей, практически реализуемой сложностью.

1. Модель рассматриваемой системы связи

Рассмотрим систему связи, в которой на передающей стороне в наблюдаемом интервале времени $[0, T_{набл.}]$ присутствует K активных передатчиков абонентов. Каждый передатчик абонента содержит источник сообщения, который с вероятностью $p_{ист.k}^{(+)}$ на длительности $[0, T_b]$ генерирует прямоугольный импульс b_k^+ (Рис.1а) с единичной амплитудой и положительной полярностью, а с вероятностью $p_{ист.k}^{(-)}$ - отрицательный единичный импульс b_k^- (Рис.1а) (информационный бит). Предположим, что на интервале наблюдения $[0, T_{набл.}]$ регистрируется некоторое кратное количество информационных бит. Каждый информационный бит перемножается с заданной уникальной кодовой последовательностью c_k длиной N , например, с псевдослучайными последовательностями Голда, используемыми в CDMA системах (см. Рис.1б). Такая последовательность представляет собой многоэлементный код с длительностью одного элемента, называемым чипом, равным T_c . В результате в каждом абонентском передатчике может образоваться пара сигналов s_k^{0+} или s_k^{0-} , каждый со своей априорной вероятностью (Рис.1в).

Под информационным битом $b_k = \{b_k^+, b_k^-\}$, $k = \overline{1, K}$ мы понимаем кодовый бит, уже прошедший процедуру помехоустойчивого кодирования, контроля избыточности и преобразованную в биполярную последовательность, где «1» заменяется на «-1», и «0» - соответственно на «1».

После фазовой манипуляции, предварительного усиления, переноса на несущую частоту и других обязательных процедур формирования канального сигнала, сигналы множества активных пользователей $s_k = \{s_k^+, s_k^-\}$ излучаются в радиоканал, образуя групповой сигнал $r(t)$, который подвергается канальным

искажениям и воздействию различного рода внутрисистемных и промышленных помех, $l_z(t)$, а в первых каскадах приемного тракта - воздействию теплового шума, $n(t)$, который может быть представлен отсчетами гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием $m_{uu} = 0$, дисперсией σ_{uu}^2 в дискретные отсчеты времени.

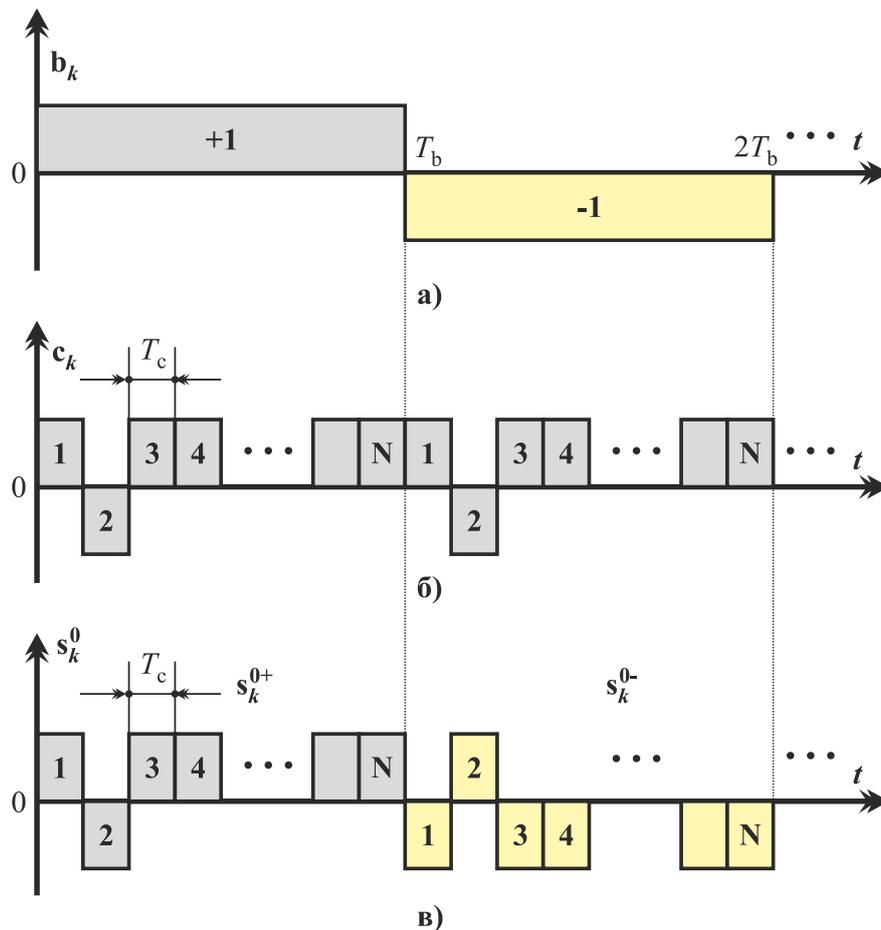


Рис.1. Принцип формирования сигнала абонентским передатчиком с использованием биполярных последовательностей: а) b_k - информационный бит длительностью T_b , б) c_k - расширяющая чиповая последовательность, в) s_k^0 - расширенная немодулированная информационная посылка.

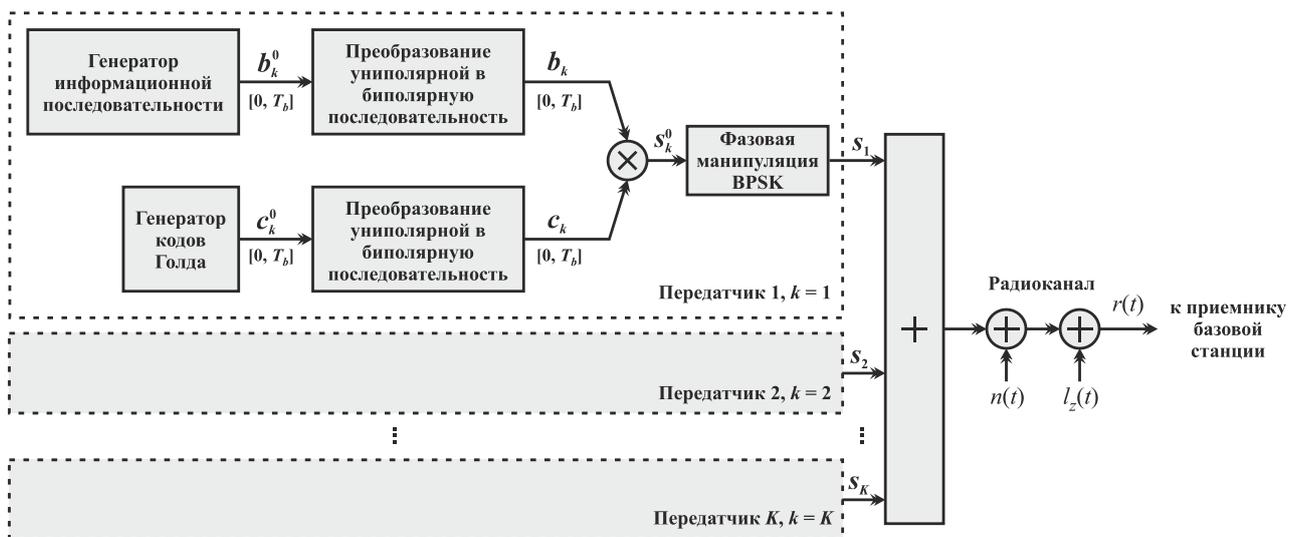
Следует отметить, что рассматриваемая модель системы связи справедлива при некоторых допущениях и ограничениях, которые введены для простоты аналитического описания синтезированного алгоритма и могут быть в дальнейшем сняты для перехода к общему случаю:

1. Рассматривается прием детерминированных сигналов, а случайный характер флуктуаций входного процесса определяется случайной природой

негауссовой помехи, теплового шума. Данное предположение можно считать справедливым при условии, что заданный уровень сигнала на приемной стороне гарантируется существующим механизмом управления мощностью.

2. Будем считать, что индустриальная помеха $l_z(t)$, представляет собой произвольно заданную негауссовскую помеху, которая может быть представлена в виде взвешенной суммы z -гауссовских компонент [7], параметры которых мы считаем известными (достоверно оцененных с использованием EM-алгоритма [12]). Предположим, что на интервале $[0, T_b]$ может или присутствовать реализация только одной из z -гауссовских компонент, или не быть ни одной из них.
3. На интервале наблюдения рассматривается реализация группового сигнала $r(t)$ в предположении, что все K активных абонентов принимаются синхронно с одинаковой задержкой распространения. При снятии данного ограничения для структуры оптимального алгоритма обработки требуется оценка задержек для каждого абонентского канала.

С учетом введенных допущений обобщенная структурная схема для рассматриваемой системы связи представлена на Рис.2.



а)

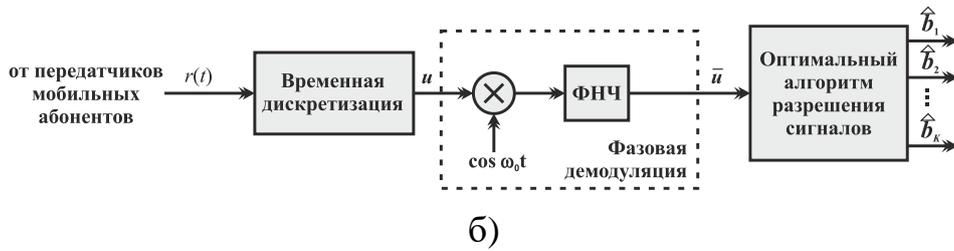


Рис.2. Модель CDMA системы связи: а) структура передатчика с ФМ-2 манипуляцией и модель канала; б) структура предлагаемого приемника

2. Синтез оптимального алгоритма различения

В работе будем рассматривать такие процессы, когда на приемном устройстве после временной дискретизации $r(t)$ и фазовой демодуляции (Рис.2б), результирующий вектор колебаний на интервале наблюдения на приемной стороне можно представить следующим образом:

$$\bar{u} = A_1 \bar{s}_1^+ + (1 - A_1) \bar{s}_1^- + A_2 \bar{s}_2^+ + (1 - A_2) \bar{s}_2^- + \dots + A_k \bar{s}_k^+ + (1 - A_k) \bar{s}_k^- + \bar{n} + B_1 l_1 + B_2 l_2 + \dots + B_z l_z, \quad (1)$$

где $A_k, k = \overline{1, K}$ и $B_z, z = \overline{1, Z}$ - индикаторные функции, которые отражают наличие или отсутствие в реализации вектора \bar{u} соответствующего символа положительной или отрицательной полярности единичной энергии и гауссовской компоненты полигауссового представления негауссовской помехи соответственно:

$$A_k = \begin{cases} 1, & \text{если } s_k = 1, \\ 0, & \text{если } s_k = -1. \end{cases} \quad \text{и } B_z = \begin{cases} 1, & \text{в случае } p_{ном.z} \\ 0, & \text{в случае } (1 - p_{ном.z}). \end{cases} \quad (2)$$

и $p_{ном.z}$ - априорная вероятность наличия z -й гауссовской компоненты помехи вероятностной смеси, удовлетворяющие условию нормировки:

$$\sum_{z=1}^Z p_{ном.z} = 1. \quad (3)$$

В (1) \bar{s}_k^+ - вектор значений, который принимает сигнал k -го активного абонента при условии, что передавался информационный бит положительной полярности «+1», $\bar{s}_k^+ = \{s_{k,1}^+ s_{k,2}^+ \dots s_{k,N}^+\}$, причем $s_{k,1}^+$ - элемент «+1» k -го активного абонента на первой чиповой позиции, $\bar{s}_k^- = \{s_{k,1}^- s_{k,2}^- \dots s_{k,N}^-\}$ - вектор

аналогичной структуры при передаче информационного бита отрицательной полярности «-1».

2.1. Постановка задачи синтеза

Необходимо синтезировать алгоритм, который бы на фоне теплового шума и произвольной (в части статистических параметров) случайной (в части ее наличия) негауссовой помехи принимал оптимальное в смысле максимального правдоподобия решение о том, информационный бит какой полярности \hat{b}_k^+ или \hat{b}_k^- передавался передатчиком k -го абонента на интервале наблюдения $[0, T_{набл.}]$.

2.2. Решение задачи

Определим, какие группы гипотез могут иметь место при наличии/отсутствии помех на интервале $[0, T_b]$:

Таблица 1. Группы проверяемых статистических гипотез.

№ гипотезы, d	Описание гипотезы	Обозначение	Число подгипотез, шт.
1	На входе приемника регистрируется реализация информационных сигналов K -абонентов и шума, причем 1-й абонент передавал только «+1», а остальные – либо «+1», либо «-1».	$H_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n}}$	2^{K-1}
2	На входе приемника содержится реализация информационных сигналов K -абонент и шума, причем 1-й абонент передавал только «-1», а остальные – либо «+1», либо «-1».	$H_{\bar{s}_1^-, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n}}$	2^{K-1}
3	На входе приемника содержится реализация информационных сигналов K -абонентов, 1-й компоненты помехи и шума, причем 1-й абонент передавал только «+1», а остальные – либо «+1», либо «-1».	$H_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n} l_1}$	2^{K-1}
4	На входе приемника содержится реализация информационных сигналов K -абонентов, 1-й компоненты помехи и шума, причем 1-й абонент передавал только «-1», а остальные – либо «+1»,	$H_{\bar{s}_1^-, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n} l_1}$	2^{K-1}

№ гипотезы, d	Описание гипотезы	Обозначение	Число подгипотез, шт.
	либо «-1».		
...
$z \times 2^K$	На входе приемника содержится реализация информационных сигналов K -абонентов, z -й компоненты помехи и шума, причем 1-й абонент передавал только «+1», а остальные – либо «+1», либо «-1».	$H_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n} l_z}$	2^{K-1}
$(z+1) \times 2^K$	На входе приемника содержится реализация информационных сигналов K -абонентов, z -й компоненты помехи и шума, причем 1-й абонент передавал только «-1», а остальные – либо «+1», либо «-1».	$H_{\bar{s}_1^-, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n} l_z}$	2^{K-1}

Таким образом, для одного пользователя получаем $2(z+1)2^{K-1} = (z+1)2^K$ статистических гипотез. Используя методологию полигауссового синтеза [7] для проверки первой и второй статистических гипотез из Таблицы 1, запишем частные функционалы отношения правдоподобия:

$$l(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm) = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{d=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \exp \left\{ Z(u_n | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm) - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm} \right\}, \quad (4)$$

$$l(\bar{u} | \bar{s}_1^-, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm) = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{d=1}^{2^{K-1}} q_d^{(-)} \exp \left\{ Z(u_n | \bar{s}_1^-, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm) - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\bar{s}_1^-, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm} \right\},$$

где d – порядковый номер гипотезы, компонента $Z(u_n | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm)$ представляет собой корреляцию случайной входной реализации на n -й чиповой позиции с некоторой суперпозицией сигналов и шума, соответствующих гипотезе $H_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm \bar{n}}$, а $\mathcal{E}_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm}$ отражает энергию компоненты некоторой суперпозиции сигналов и шума:

$$Z(u_n | s_{1,n}^+, s_{2,n}^\pm \dots s_{K,n}^\pm) = \frac{u_n \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} \right)}{\sigma_{uu}^2}; \quad (5)$$

$$\mathfrak{E}_{s_{1,n}^{\pm}, s_{2,n}^{\pm} \dots s_{K,n}^{\pm}} = \frac{\left(s_{1,n}^{\pm} + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} \right)}{2\sigma_{uu}^2}.$$

Поскольку помеховый процесс является независимым от сигнала и шума, то статистические параметры суммарного процесса как некоторой суперпозиции реализаций сигналов, шума и некоторой компоненты помехи $z, z = \overline{1, Z}$ в одномерном случае будут определяться следующим образом:

Средние значения: $\overline{s_1^{\pm}} + \overline{s_2^{\pm}} + \dots + \overline{s_K^{\pm}} + \overline{l_z}$, дисперсия: $\sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2$, а вероятность появления комбинации сигнала и помехи:

$$\begin{aligned} q_d^{(+)} &= p_1^+ \times \prod_{k=2}^K p_k^{(d)} \times p_{ном.z}, z = \overline{1, Z}, \\ q_d^{(-)} &= p_1^- \times \prod_{k=2}^K p_k^{(d)} \times p_{ном.z}, z = \overline{1, Z}. \end{aligned} \quad (6)$$

где $p_k^{(d)}$ - априорная вероятность передачи информационного бита «1» k -м абонентом, соответствующая d -й гипотезе,

Плотность вероятности вектора входных значений находится аналогично – как произведение плотностей вероятностей по всем чипам:

$$\begin{aligned} w_1(\overline{u} | \overline{s_1^{\pm}}, \overline{s_2^{\pm}} \dots \overline{s_K^{\pm}}, l_z) &= \prod_{u_n, n=1}^N w_1(u_n | s_{1,n}^{\pm}, s_{2,n}^{\pm} \dots s_{K,n}^{\pm}, l_z); \\ w_1(\overline{u} | \overline{s_1^{\pm}}, \overline{s_2^{\pm}} \dots \overline{s_K^{\pm}}, l_z) &= \prod_{u_n, n=1}^N w_1(u_n | s_{1,n}^{\pm}, s_{2,n}^{\pm} \dots s_{K,n}^{\pm}, l_z) \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае отношение правдоподобия для одной из помеховых группы простых гипотез может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} l(\overline{u} | \overline{s_1^{\pm}}, \overline{s_2^{\pm}} \dots \overline{s_K^{\pm}}, l_z) &= \frac{w_1(\overline{u} | \overline{s_1^{\pm}}, \overline{s_2^{\pm}} \dots \overline{s_K^{\pm}}, l_z)}{w(\overline{u} | \overline{n})} = \frac{\prod_{u_n, n=1}^N w_1(\overline{u} | \overline{s_1^{\pm}}, \overline{s_2^{\pm}} \dots \overline{s_K^{\pm}}, l_z)}{\prod_{u_n, n=1}^N w(u_n | \overline{n})} = \\ &= \frac{\prod_{u_n, n=1}^N \sum_{d=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \Gamma \left\{ u_n; s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z}; \sigma_{l_z u} \right\}}{\prod_{u_n, n=1}^N \Gamma \{ u_n; 0; \sigma_{uu} \}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Gamma \left\{ u_n; s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z}; \sigma_{l_z u} \right\}$ - гауссовская плотность вероятности с

дисперсией $\sigma_{l_z u}^2 = \sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2$ и средним значением $s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z}$, а m_{l_z} - среднее значение z -й компоненты негауссовской помехи. Распишем подробно выражение (8):

$$\begin{aligned}
 l(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z) &= \frac{w_1(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z)}{w(\bar{u} | \bar{n})} = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{b=1}^{2^{K-1}} \frac{q_d^{(+)} \sqrt{2\pi\sigma_{u u}^2}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)}} \times \\
 &\times \exp \left\{ - \frac{\left(u_n - \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right) \right)^2}{2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \frac{u_n^2}{2\sigma_{u u}^2} \right\} = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{b=1}^{2^{K-1}} \frac{q_d^{(+)} \sqrt{2\pi\sigma_{u u}^2}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)}} \times \\
 &\times \exp \left\{ - \frac{\left(u_n - \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right) \right)^2 \sigma_{u u}^2}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \frac{u_n^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} \right\} = \\
 &= \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{b=1}^{2^{K-1}} \frac{q_d^{(+)} \sqrt{2\pi\sigma_{u u}^2}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)}} \times \tag{9} \\
 &\times \exp \left\{ - \frac{\left(u_n^2 - 2u_n \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right) + \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right)^2 \right) \sigma_{u u}^2}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \right. \\
 &\left. + \frac{u_n^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} \right\} = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{b=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \sqrt{\frac{\sigma_{u u}^2}{\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2}} \times \exp \left\{ - \frac{u_n^2 \sigma_{u u}^2}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \right. \\
 &\left. + \frac{2u_n \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right) \sigma_{u u}^2 - \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right)^2 \sigma_{u u}^2}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \frac{u_n^2 \sigma_{u u}^2 + u_n^2 \sigma_{l_z}^2}{2\sigma_{u u}^2(\sigma_{u u}^2 + \sigma_{l_z}^2)} \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{b=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \sqrt{\frac{\sigma_{u_n}^2}{\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2}} \times \exp \left\{ \frac{2u_n \left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right) \sigma_{u_n}^2}{2\sigma_{u_n}^2 (\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right)^2 \sigma_{u_n}^2}{2\sigma_{u_n}^2 (\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \frac{u_n^2 \sigma_{l_z}^2}{2\sigma_{u_n}^2 (\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2)} \right\} = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{b=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \sqrt{\frac{\sigma_{u_n}^2}{\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2}} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ u_n \left(\frac{s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z}}{(\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2)} - \frac{1}{2} \frac{\left(s_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K s_{k,n}^{(d)} + m_{l_z} \right)^2}{(\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2)} + \frac{1}{2} \frac{u_n^2 \sigma_{l_z}^2}{\sigma_{u_n}^2 (\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2)} \right) \right\} = \\
 &= \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{d=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \sqrt{\frac{\sigma_{u_n}^2}{\sigma_{u_n}^2 + \sigma_{l_z}^2}} \times \exp \left\{ Z(u_n | \bar{s}_1^{\pm}, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z) - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\bar{s}_1^{\pm}, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathcal{E}(u_n | \bar{s}_1^{\pm}, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z) \right\},
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются отношения правдоподобия для всех $(z+1)2^K$ групп гипотез: $l(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_1)$, $l(\bar{u} | \bar{s}_1^-, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_1) \dots$ $l(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z)$, $l(\bar{u} | \bar{s}_1^-, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z)$, $l(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm})$, $l(\bar{u} | \bar{s}_1^-, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm})$.

Решение в пользу той или иной гипотезы будем принимать на основе критерия максимального правдоподобия:

$$H_{\bar{s}_1^{\pm}, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm} \bar{n} l_z} = \max_{(z+1)2^K} l(\bar{u} | \bar{s}_1^{\pm}, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z) \quad (10)$$

Структурная схема блока формирования отношения правдоподобия $l(\bar{u} | \bar{s}_1^{\pm}, \bar{s}_2^{\pm} \dots \bar{s}_K^{\pm}, l_z)$ для одного пользователя представлена на Рис.3. Для каждой из различных гипотез из Табл.1 структура блока формирования отношения правдоподобия будет аналогичной. Для гипотез о наличии суперпозиции сигналов и шума (группа гипотез 1, 2 Табл.1) структура блока будет упрощенной – будут отсутствовать компоненты, связанные с вычислением энергии входной реализации, обозначенные на Рис.3

как $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}\left(u_n | \bar{s}_1^\pm, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z \right)$.

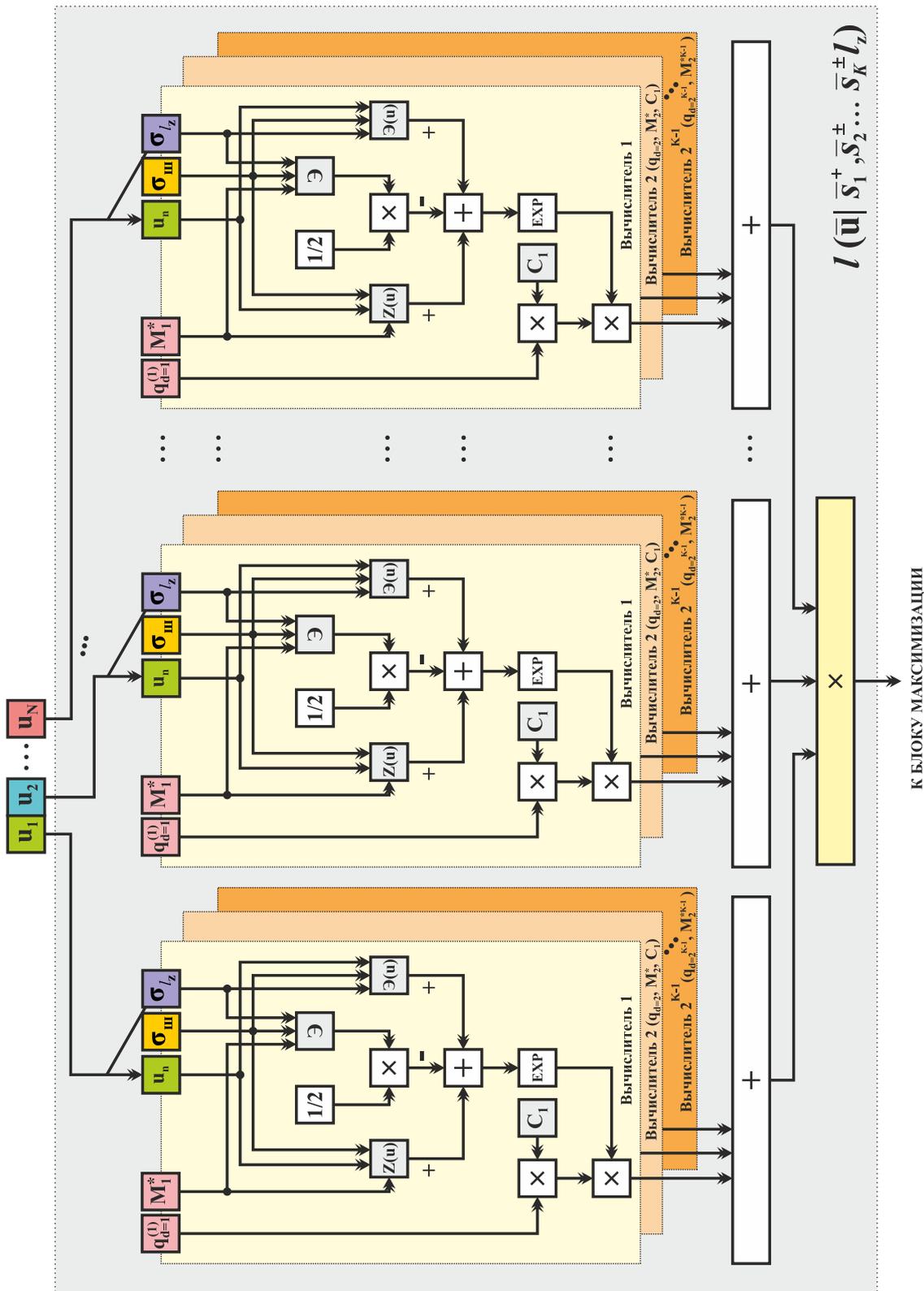


Рис.3. Структурная схема вычисления отношения правдоподобия для 1-го абонента при условии, что передавался информационный бит «+1». На рисунке буквой M_1^* обозначена суперпозиция значений $s_{k,n}, k = \overline{1, K}$ для номера гипотезы $d = 1$, шума и z -й компоненты негауссовской помехи

3. Расчет вычислительной сложности

Как было отмечено ранее, вычислительная сложность синтезированного оптимального алгоритма зависит от числа абонентов (числа сигналов) K , числа компонент помех полигауссового представления негауссовской помехи z , длины расширяющей чиповой последовательности N , а также числа отсчетов, приходящихся на один чип сигнала j . Наиболее весомый вклад в вычислительную сложность синтезированного оптимального алгоритма вносят первые два параметра, которые определяют основное число проверяемых статистических гипотез.

Количество таких гипотез определяется выражением (см. Табл.1):

$$H = (z + 1)2^K. \quad (11)$$

В случае, когда кроме основного луча сигнала или помехи могут присутствовать его переотраженные копии, количество гипотез увеличивается до значения, представленного в выражении (1).

Следует отметить, что (1) справедлива для фиксированного числа абонентов, т.е. когда имеются достоверные данные о точном количестве сигналов активных абонентов k на входе приемника. В случае, когда таких данных нет, число проверяемых гипотез H определяется выражением:

$$H_{\Sigma} = \sum_{k=1}^K \sum_{z=1}^Z \frac{(K+k)!(Z+z)!}{K!k!Z!z!}. \quad (12)$$

На Рис.4 представлены результаты расчетов по формулам (1), (11) для максимального числа обслуживаемых абонентов $K = 50$ и $Z = 3$ компонент полигауссового представления негауссовой помехи, причем на длительности одного информационного бита может реализоваться только одна компонента помехи, т.е. $z = 1$. Как видно из Рис.4, увеличение числа гипотез имеет экспоненциальный характер и уже для 15 активных абонентов составляет 10^5 и 10^{15} гипотез соответственно.

Фактически, вычислительная сложность предложенного алгоритма определяется количеством выполняемых вычислительных операций. Для того,

чтобы оценить вычислительную сложность алгоритма, рассчитаем число вычислительных операций, приходящихся на одну статистическую гипотезу.

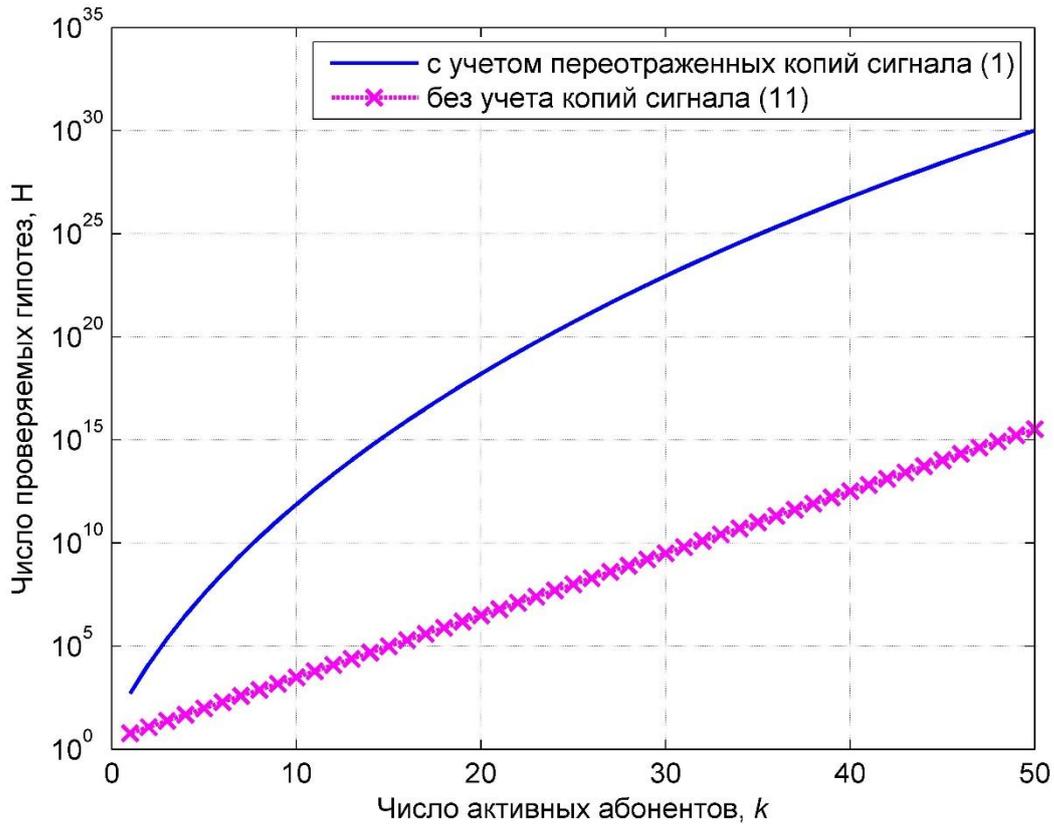


Рис.4. Число проверяемых гипотез N как функция от количества активных абонентов k

Для случая многоотсчетной обработки (9) преобразуется к следующему виду:

$$l(\bar{u} | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z) = \prod_{u_n, n=1}^N \sum_{d=1}^{2^{K-1}} q_d^{(+)} \sqrt{\frac{\det \|\sigma_{uu}^2\|}{\det \|\sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2\|}} \times$$

$$\times \exp \left\{ \underbrace{\bar{u}_n \|\sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2\|^{-1} \left(\bar{s}_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K \bar{s}_{k,n}^{(d)} + \bar{m}_{l_z} \right)^T}_{Z(\bar{u}_n | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z)} \right\} - \quad (13)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} \left(\bar{s}_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K \bar{s}_{k,n}^{(d)} + \bar{m}_{l_z} \right) \left\| \sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2 \right\|^{-1} \left(\bar{s}_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K \bar{s}_{k,n}^{(d)} + \bar{m}_{l_z} \right)^T}_{\mathfrak{D}_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z}} + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \bar{u}_n \left(\left\| \sigma_{uu}^2 \right\|^{-1} - \left\| \sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2 \right\|^{-1} \right) \bar{u}_n^T \\ & \mathfrak{D}(\bar{u}_n | \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z) \end{aligned} \right\}$$

где $\left\| \sigma_{uu}^2 \right\|$ - ковариационная матрица шума, $\left\| \sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2 \right\|$ - ковариационная матрица помеха-шум размером $j \times j$. Расчет количества вычислительных операций представлен в Таблице 2.

Таблица 2. Расчет вычислительных операций по формуле (10)

№ п.п.	Тип операции	Кол-во умножений	Кол-во сложений/вычитаний	Кол-во операций деления	Кол-во операций возведение в степень
1	$q_d^{(+)}$	$2^{K-1} \times K$	$2^{K-2} \times (K-1)$	0	0
2 ¹	$\det \left\ \sigma_{uu}^2 \right\ $	$j-1$	0	0	0
3 ²	$\det \left\ \sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2 \right\ $	$j \prod_{c=1}^{j-1} (j-c) + (j-1)$	$j \prod_{c=1}^{j-1} (j-c)$	0	0
4	$\text{п.1} \times (\text{п.2/п.3})^{1/2}$	1	0	1	1
5	$Z(\bar{u}_n \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^\pm \dots \bar{s}_K^\pm, l_z)$				
5.1 ³	$\left\ \sigma_{uu}^2 + \sigma_{l_z}^2 \right\ ^{-1}$	j^3	$j^3 - j^2$	0	0
5.2	$\left(\bar{s}_{1,n}^+ + \sum_{k=2}^K \bar{s}_{k,n}^{(d)} + \bar{m}_{l_z} \right)^T$	0	$j(2^{K-1} + 2)$	0	0
5.3	$\bar{u}_n \times \text{п.5.1}$	j^2	$j^2 - j$	0	0

¹ Поскольку предполагается, что шум не коррелированный, определитель матрицы вычисляется как произведение его диагональных элементов

² Матрица не является диагональной, поскольку предполагается, что отсчеты помехи могут быть коррелированы. (Количество вычислительных операций приведено для случая использования метода Гаусса)

³ Расчет вычислительных операций приведен для случая использования метода Гаусса-Жордано

№ п.п.	Тип операции	Кол-во умножений	Кол-во сложений/вычитаний	Кол-во операций деления	Кол-во операций возведение в степень
5.4	п.5.3 × п.5.2	j	$j-1$	0	0
6 ⁴	$\mathfrak{E}_{\bar{s}_1^+, \bar{s}_2^+ \dots \bar{s}_K^+, l_z}$				
6.1.	п.5.2 × п.5.1	j^2	$j^2 - j$	0	0
6.2.	п.6.1 × п.5.2	j	$j-1$	0	0
7	$\mathfrak{E}(\bar{u}_n \bar{s}_1^+, \bar{s}_2^+ \dots \bar{s}_K^+, l_z)$				
7.1 ⁵	$\ \sigma_{uu}^2\ ^{-1}$	0	0	j	0
7.2	п.7.1 - п.5.1	0	j^2	0	0
7.3	$\bar{u}_n \times$ п.7.2	j^2	$j^2 - j$	0	0
7.4	п.7.3 × \bar{u}_n^T	j	$j-1$	0	0
8	п.5 - 0.5 × п.6 + 0.5 × п.7	2	2	0	0
9	exp (п.8)	0	0	0	1
10	$\sum_{d=1}^{2^{K-1}} (\text{п.4} \times \text{п.9})$	2^{K-1}	$2^{K-1} - 1$	0	0
	Итого по типу операции	$2^{K-1} \times (K+1) + j \prod_{c=1}^{j-1} (j-c) + j^3 + 3j^2 + 5j$	$2^{K-2} \times (K+2j+1) + j \prod_{c=1}^{j-1} (j-c) + j^3 + 3j^2 + 2j - 2$	$j+1$	2
	Суммарное кол-во операций	$\approx N \times (K+j) \times 2^{K-1}$			

С учетом (11) можно получить выражение для оценки итоговой вычислительной сложности предложенного алгоритма:

$$O \approx (z+1)N(K+j) \times 2^{2K-1}$$

4. Выводы

- Синтезированный алгоритм оптимального приема сигналов по критерию максимального правдоподобия в комплексе негауссовских помех

⁴ Затраты на непосредственное вычисление ковариационных матриц и векторов средних значений не учитываются, поскольку были найдены ранее в п.5 Табл.2.

⁵ Поскольку матрица диагональная, то обратная матрица будет также диагональная, каждый элемент которой равен отношению 1 к соответствующему элементу исходной матрицы.

состоит из множества каналов проверки частных гипотез типа $H_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_K^+ | n, l_1}$.

Вычислительная сложность оптимального алгоритма имеет нелинейную зависимость от числа пользователей и определяется выражением:

$$O \approx (z + 1)N(K + j) \times 2^{2K-1}.$$

- За счет того, что синтезированный алгоритм осуществляет проверку всех возможных гипотез, обеспечивается минимальная вероятность ошибки, однако платой за низкую вероятность ошибки является высокая вычислительная сложность.

- Синтезированный алгоритм оптимального приема сигналов сводится к решению задачи различения для множества парных несовместных гипотез (Табл.1, гипотезы 1-2, 3-4 и т.д.).

К достоинствам полученного алгоритма относится конечный набор типовых простых операций, выполняемых в каждом из каналов обработки многоканального приемника (Табл.2), эффективно реализующихся на современных ПЛИС. Это обосновывается высокой параллельностью выполняемых вычислений (Рис.3).

Важно отметить, что разработанный алгоритм является основой для синтеза менее сложных, квазиоптимальных алгоритмов статистической обработки сигналов, технически реализуемых в современных и перспективных системах подвижной связи.

Материалы, изложенные в данной статье, выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках научных исследований по государственному заданию, проект №3469.

Литература

1. Файзуллин Р.Р. Посткорреляционные модели и методы в задачах оптимизации параметров качества обслуживания систем мобильных инфокоммуникаций 3-го поколения // Труды «Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени

- А.С. Попова»: Научная сессия, посвященная дню Радио: М.: Радио и связь, 2005. - Вып. LX-2. - Т.2 – с. 268-269
2. Файзуллин Р.Р. Оптимизация параметров QoS при управлении качеством обслуживания трафика в сетях 3G // Инфокоммуникационные технологии. 2011. Т.9. №3. С.37-46.
 3. Verdú S. Computational complexity of optimum multiuser detection //Algorithmica. – 1989, Т. 4, №. 1-4. С. 303-312.
 4. Р.Р. Файзуллин, В.В. Кадушкин, Р.Ф. Зарипов. Полигауссовый алгоритм совместной демодуляции-декодирования в каналах мобильных систем связи // Нелинейный мир – 2015. №8. Т.13. С. 4-9.
 5. Р.Р. Файзуллин, В.В. Кадушкин, М.С. Воробьев. Синтез полигауссовых квазиоптимальных алгоритмов многопользовательской обработки сигналов в комплексе внутрисистемных негауссовских помех // Известия вузов. Авиационная техника. – 2015. № 3. – С. 93-98.
 6. Козлов С.В. Новые смесевые подходы к проектированию радиointерфейса систем связи. – Казань: ООО «Новое знание», 2014. – 132 с.
 7. Чабдаров Ш.М., Трофимов А.Т., Полигауссовы представления произвольных помех и прием дискретных сигналов// Радиотехника и электроника, 1975. - Т.20. №4. С.734-745
 8. Чабдаров Ш.М. Полигауссовы представления случайных явлений в радиотехнике. Юбилейный сборник избранных трудов членов Академии наук Республики Татарстан, под ред. Н.А.Сахибуллина. - Казань, Фолиантъ, 2002. С.59-100.
 9. Чабдаров Ш.М. Оптимальный прием при произвольных флуктуациях импульсных помех и сигналов // Радиотехника и электроника, 1979 – Т.24. №5. С.1082-1086.
 10. Надеев А.Ф. Марково-смешанные полигауссовы вероятностные модели случайных процессов // Телекоммуникации – 2000. №1. С.2-5
 11. Чабдаров Ш.М., Феоктистов А.Ю., Надеев А.Ф., Файзуллин Р.Р., Козлов С.В. Алгоритмы и спецпроцессоры обработки сигналов в радиолиниях

САЗО // Радиоэлектронные устройства и системы. Межвуз. сб. научн. трудов КГТУ им. А.Н.Туполева, Казань, 1996. С.4-16.

12. Кадушкин В.В., Фатыхов М.М., Зарипов Р.Ф. О достаточности полигауссовой аппроксимации произвольных вероятностных распределений в радиолиниях систем связи с подвижными объектами // Новые технологии, материалы и оборудование российской авиакосмической отрасли: Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием, 10 – 12 августа 2016 г.: Сборник докладов. Том 2. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. – Т.2. –с. 521-523.