

## **СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ РЕШЕТКИ СВЯЗАННЫХ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ**

**С. Е. Банков**

**Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН  
125009, Москва, ул. Моховая 11, корп.7**

Статья поступила в редакцию 27 октября 2017 г.

**Аннотация.** Приведены результаты теоретического исследования собственных волн бесконечной решетки полосковых линий передачи. Сформулирована граничная задача на собственные волны решетки в квазипериодическом режиме, которая сводится к системе интегральных уравнений относительно электрических токов на полосковых проводниках. Развита метод решения системы интегральных уравнений, позволяющий свести ее к системе линейных алгебраических уравнений низкого порядка. Численно исследовано поведение основных параметров собственных волн структуры: характеристического сопротивления и коэффициента замедления в зависимости от ее геометрических параметров и фазового сдвига между каналами решетки.

**Ключевые слова:** полосковая линия передачи, решетка, сингулярное интегральное уравнение, преобразования Швингера.

**Abstract.** Results of theoretical investigation of eigen modes of an infinite array of coupled strip lines are presented. Eigen mode boundary problem for the array in quasi-periodical regime is formulated. The problem is reduced to a system of integral equations relatively electrical currents on strip conductors. The system of integral equations is reduced to a system of singular integral equations that is analytically solved in quasi-static approximation. A method for the system solution in the general case is proposed. This method reduces integral equations to a low order system of linear algebraic equations. Behavior of eigen mode parameters: characteristic impedance and retardation factor relatively geometrical parameters and inter – channel phase shift is numerically investigated. Special attention is paid to wave

transformation when strip width is close to array period and periodical structure transforms to two plane waveguides.

**Key words.** Strip line, array, singular integral equation, Schwinger transform

## 1. Постановка задачи

Многопроводные линии передачи относятся к классическим объектам электродинамики. Они интересовали исследователей и разработчиков с точки зрения создания на их основе замедляющих структур, которые применяются в электронике высоких мощностей. Исследование собственных волн таких линий передачи началось в середине пятидесятых годов [1]. В последующие годы был предложен ряд методов решения соответствующих электродинамических задач [2 – 6]. Рассматривались как конечные, так и бесконечные структуры с проводниками различных форм: прямоугольными, круглыми, полосковыми.

Особый интерес представляют многопроводные микрополосковые линии (МПЛ) передачи, которые могут быть изготовлены методами пленочной технологии. Они представляют интерес не только для построения электронных приборов, но и для создания более широкого класса СВЧ устройств: полосовых и полосно – заграждающих фильтров, антенных решеток, планарных СВЧ линз и т.д. В литературе известно большое число методов анализа полосковых линий передачи. Среди них выделим метод, описанный в работе [7]. Граничная задача в нем сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ), которая решается полностью аналитически в статическом приближении. Отличие электродинамической задачи от статической учитывается при помощи ограниченного числа поправочных слагаемых. В этом случае получить удобное аналитическое решение затруднительно. Однако, удастся свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) сравнительно небольшого порядка, равного числу поправочных членов. Отметим, что данный подход [7], был продемонстрирован на примере одиночной МПЛ. Впоследствии метод анализа систем МПЛ, основанный на решении СИУ был развит в работах Неганова В.А. и его коллег [8].

В последнее время интерес к собственным волнам связанных щелевых и полосковых структур увеличился в связи с исследованием и разработкой сверхширокополосных (СШП) антенных решеток. В качестве элементов в них используются антенны Вивальди и ТЕМ – рупора, которые представляют собой щелевые и полосковые двухпроводные ЛП с плавно изменяющимися параметрами. По этой причине изучение их собственных волн позволяет объяснить ряд эффектов, наблюдающихся в решетках на их основе.

Метод анализа собственных волн периодических решеток связанных полосковых и щелевых ЛП, основанный на решении СИУ показал высокую эффективность [9]. При его помощи удается создавать быстродействующие алгоритмы численного решения электродинамических задач. Важно также, что подход к описанию СШП решеток, связанный с изучением их собственных волн позволяет достаточно просто объяснять сложные явления, обусловленные взаимодействием элементов в решетках: эффекты ослепления, деполяризации, аномального обратного излучения [10], [11].

Следует отметить, что решетки микрополосковых ЛП также представляют интерес для разработки СШП структур, поскольку на их основе создаются решетки полосковых рупоров. Они находят применение в антенной технике, например, в качестве облучателей линз Ротмана [12]. Такие структуры исследовались многими авторами численно (см. например [13]). Попытки построения теоретических моделей представлены в работах [14], [15]. Однако, полноценное решение граничной электродинамической задачи в них получено не было.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что развитие метода СИУ для решеток связанных микрополосковых ЛП является актуальной научной задачей. Отметим ее существенное отличие от задач, рассмотренных в работах [9] – [11]. Оно связано с присутствием диэлектрической подложки в структуре микрополосковой ЛП. Полосковая ЛП также может быть выполнена на подложке. Однако, диэлектрик в ней полностью заполняет всю область, занятую полем. Поэтому дополнительных границ раздела, связанных с

диэлектриком не возникает. Иная ситуация в случае микрополосковой линии, имеющей неоднородное диэлектрическое заполнение.

Наличие границ раздела типа воздух – диэлектрик значительно усложняет решение электродинамической задачи, так как волны в структуре становятся гибридными, содержат все шесть компонент поля и не являются ни поперечными магнитными (ТМ), ни поперечными электрическими (ТЕ) волнами.

Целью данной работы является создание метода анализа и алгоритма расчета параметров собственных волн бесконечной решетки бесконечных микрополосковых линий, основанных на решении системы СИУ.

## 2. Вывод системы СИУ

Исследуемая структура показана на рис. 1. Она представляет собой бесконечную по оси  $Ox$  периодическую с периодом  $P_x$  решетку бесконечных по оси  $Oz$  связанных микрополосковых ЛП, которые выполнены на подложке толщиной  $h$  и относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . На расстоянии  $a$  от подложки расположен металлический экран.

Полосковые проводники шириной  $w$  считаем бесконечно тонкими и идеально проводящими. Верхний и нижний экраны также считаем идеально проводящими. Рассматриваем решетку в квазипериодическом режиме, в котором поля удовлетворяют следующему условию:

$$\vec{E}(x + nP_x) = \vec{E}(x) \exp(-ik_x nP_x), \quad (1)$$

$$\vec{H}(x + nP_x) = \vec{H}(x) \exp(-ik_x nP_x).$$

Здесь  $\kappa_x$  - постоянная, задающая фазовый сдвиг между периодами, а  $n$  - целое число.

В силу условия (1) анализ бесконечной решетки можно свести к анализу поля в одном периоде, который также часто называют каналом Флоке (см. рис. 2). На правой и левой стенках канала Флоке выполняются условия периодичности (1).

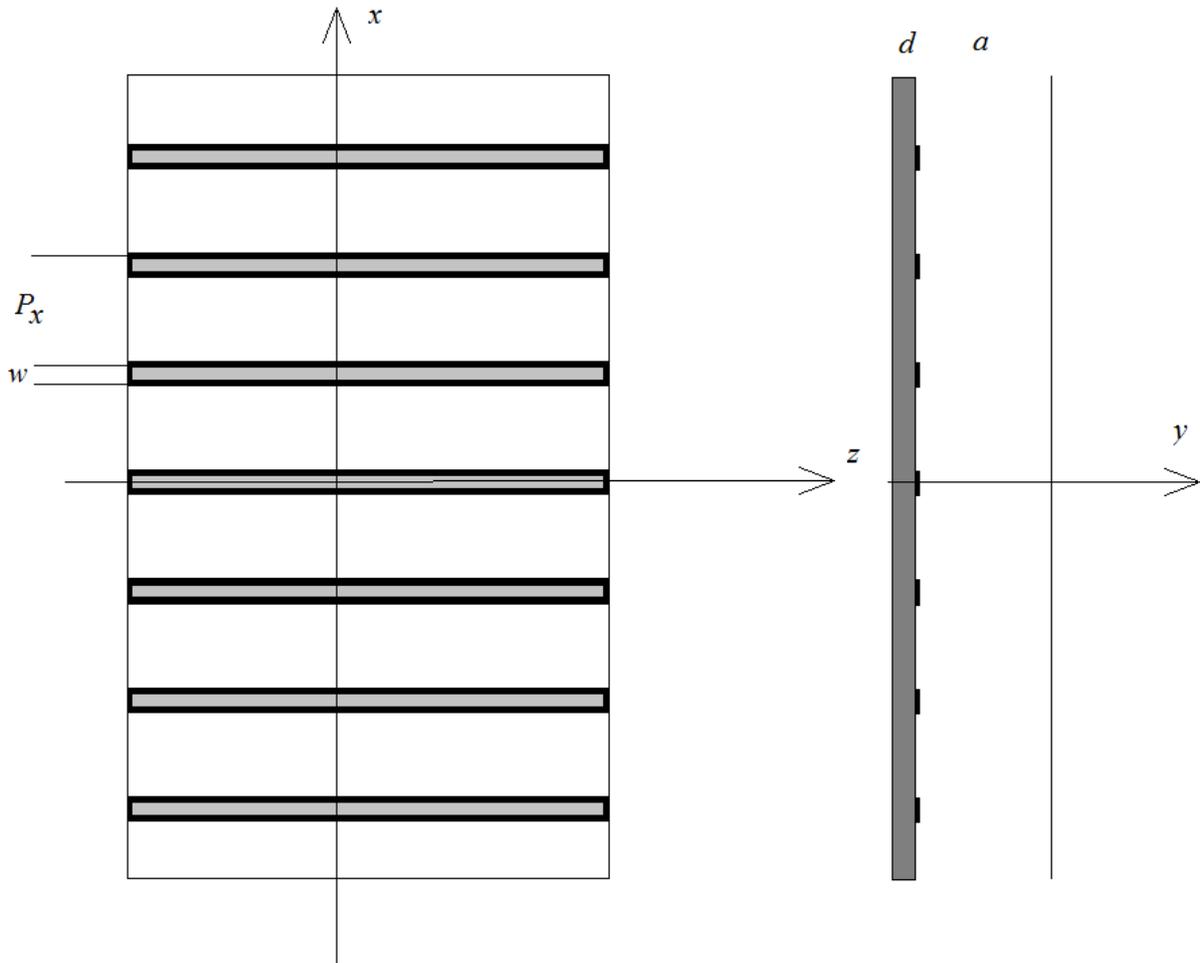


Рис. 1. Решетка микрополосковых линий

Ищем поле в виде волны, бегущей вдоль оси  $Oz$  :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) \exp(-i\beta z), \quad (2)$$

где  $\beta$  - неизвестная постоянная распространения. В дальнейшем общий для всех величин экспоненциальный множитель будем при записи полей и токов опускать.

Сформулируем граничную задачу на собственные волны стандартным образом при помощи Функции Грина данной структуры.

Для этого временно заменим полосковый проводник листком электрического тока с компонентами  $I_{x,z}(x)$ . Далее при помощи функции Грина данной структуры найдем поле, возбужденное в ней указанным током. Это поле удовлетворяет всем граничным условиям за исключением условия на поверхности полоскового проводника:

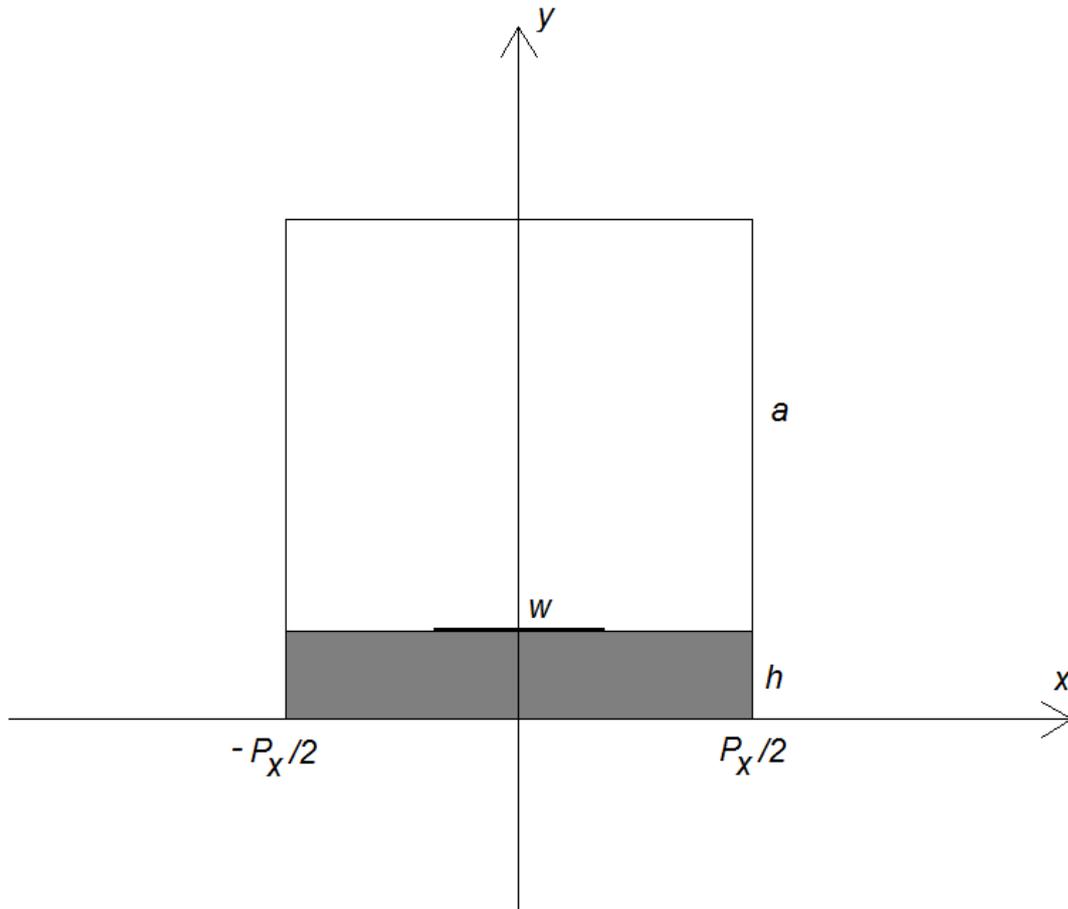


Рис. 2. Канал Флоке решетки микрополосковых линий

$$E_{x,z} = 0, \quad |x| < w/2. \quad (3)$$

Подставим найденное выражение для поля в соотношение (3) и получим искомую систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $I_{x,z}(x)$ .

Вывод функции Грина можно осуществить по известной схеме [16]. Не будем подробно описывать математические преобразования и приведем окончательное выражение для функции Грина:

$$\begin{bmatrix} E_z(x) \\ E_x(x) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} K_{11n} & K_{12n} \\ K_{12n} & K_{22n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z(x') \\ I_x(x') \end{bmatrix} \exp(-i\kappa_n(x-x')) dx', \quad (4)$$

$$K_{11n} = \frac{\kappa_n^2 E_{1n} + \beta^2 H_{2n}}{(\kappa_n^2 + \beta^2) E_{1n} H_{2n}} \varphi_n,$$

$$K_{12n} = \frac{\kappa_n \beta (E_{1n} - H_{2n})}{(\kappa_n^2 + \beta^2) E_{1n} H_{2n}} \varphi_n,$$

$$K_{22n} = \frac{\kappa_n^2 H_{2n} + \beta^2 E_{1n}}{(\kappa_n^2 + \beta^2) E_{1n} H_{2n}} \varphi_n,$$

$$E_{1n} = k^2 (\varepsilon p_n \cos q_n \operatorname{dsh} p_n a - q_n \sin q_n \operatorname{dch} p_n a),$$

$$H_{2n} = p_n q_n (p_n \sin q_n \operatorname{dch} p_n a + q_n \cos q_n \operatorname{dsh} p_n a),$$

$$\varphi_n = p_n q_n \sin q_n \operatorname{dsh} p_n a,$$

$$p_n = \sqrt{\kappa_n^2 + \beta^2 - k^2},$$

$$q_n = \sqrt{\varepsilon k^2 - \kappa_n^2 - \beta^2},$$

$$\kappa_n = \kappa_x + \alpha_n,$$

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{P_x},$$

где  $k$  - волновое число свободного пространства, а  $W_0$  - его волновое сопротивление.

Выражение для электрического поля (4) получено для  $y = h$ , то есть в плоскости, в которой располагается полосковый проводник. Подставляем выражение (4) в (3) и получаем исходную систему интегральных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} K_{11n} & K_{12n} \\ K_{12n} & K_{22n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z(x') \\ I_x(x') \end{bmatrix} \exp(-i\kappa_n(x-x')) dx' = 0, \quad (5)$$

$$|x| < w/2.$$

Приведем ее к виду удобному для дальнейшего решения. Для этого возьмем интегралы от  $I_x(x')$  по частям:

$$\int_{-w/2}^{w/2} I_z(x') \exp(i\kappa_n x') dx' = I_z(x') \frac{\exp(i\kappa_n x')}{i\kappa_n} \Big|_{-w/2}^{w/2} - \int_{-w/2}^{w/2} I'_z(x') \frac{\exp(i\kappa_n x')}{i\kappa_n} dx'. \quad (6)$$

Внеинтегральное слагаемое в правой части (6) обращается в нуль в силу того, компонента тока перпендикулярная кромке проводника равна нулю на его краю:

$$\int_{-w/2}^{w/2} I_x(x') \exp(i\kappa_n x') dx' = - \int_{-w/2}^{w/2} I'_x(x') \frac{\exp(i\kappa_n x')}{i\kappa_n} dx', \quad (7)$$

где  $I'_x(x')$  - производная от тока по  $x$ .

Введем также новые неизвестные функции:

$$\tilde{I}_{x,z} = I_{x,z} \exp(-i\kappa_n x). \quad (8)$$

С учетом сделанных преобразований система уравнений (5) приобретает следующий вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} G_{11n} & G_{12n} \\ G_{12n} & G_{22n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_z(x') \\ \tilde{I}'_x(x') \end{bmatrix} \exp(-i\alpha_n(x-x')) dx' = 0, \quad (9)$$

$$G_{11n} = K_{11n}, \quad G_{12n} = -\frac{K_{11n}}{i\kappa_n},$$

$$G_{21n} = K_{21n}, \quad G_{22n} = -\frac{K_{22n}}{i\kappa_n}.$$

Отметим, что при  $|n| \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические равенства:

$$E_{1n} \rightarrow \frac{\kappa_n k^2 (\varepsilon + 1)}{4} \exp(\kappa_n (a + d)), \quad (10)$$

$$H_{2n} \rightarrow -\frac{\kappa_n^3}{2} \exp(\kappa_n (a + d)),$$

$$\varphi_n \rightarrow -\frac{\kappa_n^2}{4} \exp(\kappa_n (a + d)).$$

При помощи (10) находим асимптотические выражения для  $G_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ :

$$G_{11n} \rightarrow \frac{g_{11a}}{|n|}, \quad G_{12n} \rightarrow \frac{g_{12a}}{|n|}, \quad (11)$$

$$G_{21n} \rightarrow \frac{g_{21a}n}{|n|}, \quad G_{22n} \rightarrow \frac{g_{22a}n}{|n|},$$

$$g_{11a} = q_{11a}, \quad g_{12a} = -\frac{q_{12a}P_x}{2\pi i},$$

$$g_{21a} = q_{12a}, \quad g_{22a} = -\frac{q_{22a}P_x}{2\pi i},$$

$$q_{11a} = \frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{k^2(\varepsilon + 1)}, \quad q_{12a} = \frac{\beta}{k^2(\varepsilon + 1)},$$

$$q_{21a} = q_{12a}, \quad q_{22a} = -\frac{1}{k^2(\varepsilon + 1)}.$$

Выделим в системе (9) асимптотические слагаемые в явном виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} g_{11a} & g_{12a} \\ g_{21a}n & g_{22a}n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_z(x') \\ \tilde{I}'_x(x') \end{bmatrix} \exp(-i\alpha_n(x-x')) dx' +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} \delta_{11n} & \delta_{12n} \\ \delta_{21n} & \delta_{22n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_z(x') \\ \tilde{I}'_x(x') \end{bmatrix} \exp(-i\alpha_n(x-x')) dx',$$
(12)

где

$$\delta_{ijn} = G_{ijn} - \frac{g_{ijn}}{|n|} \begin{pmatrix} 1, & i=1 \\ n, & i=2 \end{pmatrix}.$$
(13)

Введем новые неизвестные функции  $f_{1,2}(x)$ :

$$f_1 = \tilde{I}_z g_{11a} + \tilde{I}'_x g_{12a},$$
(14)

$$f_2 = \tilde{I}_z g_{21a} + \tilde{I}'_x g_{22a}.$$

Запишем систему интегральных уравнений с учетом (14):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} f_1(x') \\ f_2(x')n \end{bmatrix} \exp(-i\alpha_n(x-x')) dx' +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-w/2}^{w/2} \begin{bmatrix} \Delta_{11n} & \Delta_{12n} \\ \Delta_{21n} & \Delta_{22n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x') \\ f_2(x') \end{bmatrix} \exp(-i\alpha_n(x-x')) dx'.$$
(15)

Для параметров  $\Delta_{ijn}$  имеет место следующее матричное соотношение:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11n} & \Delta_{12n} \\ \Delta_{21n} & \Delta_{22n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11a} & g_{12a} \\ g_{21a} & g_{22a} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{11n} & \delta_{12n} \\ \delta_{21n} & \delta_{22n} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Отметим важное свойство рядов, входящих в систему (15). Первый ряд, в который входят асимптотические слагаемые сходится медленно. В тоже время второй ряд, члены которого пропорциональны разностям (13) сходится намного быстрее, так как величины  $G_{ijn}$  с ростом  $n$  быстро приближаются к своим асимптотическим значениям. Поэтому мы можем второй ряд заменить конечной суммой от минус до плюс  $N$ , где  $N$  - параметр, определяющий точность решения. В нулевом приближении мы можем оставить в нем одно слагаемое с  $n = 0$ .

Далее перейдем в уравнениям, заданным на половине исходного интервала  $(0, w/2)$ . Также перейдем к суммированию от единицы до бесконечности. Для этого введем следующие определения:

$$f_{1,2,c,n} = \frac{f_{1,2}(x) \pm f_{1,2}(-x)}{2}, \quad (17)$$

$$\Delta_{ijn,c,n} = \frac{\Delta_{ijn} \pm \Delta_{ij(-n)}}{2}.$$

Здесь индексы  $c,n$  показывают, что соответствующая функция является четной или нечетной функцией своего аргумента. С учетом определений (17), приравнивая нулю отдельно четные и нечетные части уравнений (15), а также дифференцируя по  $x$  уравнение для нечетной части первого уравнения (15), получаем систему интегральных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{aligned} L_1(f_{1c}) + \frac{1}{2}(\xi_{10,c}\Delta_{110} + \xi_{20,c}\Delta_{120}) + \\ + \sum_{n=1}^N (\xi_{1n,c}\Delta_{11n,c} + \xi_{2n,c}\Delta_{12n,c} + i(\xi_{1n}\Delta_{11n,n} + \xi_{2n}\Delta_{12n,n})) \cos \alpha_n x = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$L_2(f_{2H}) + \frac{1}{2i}(\xi_{10,u}\Delta_{210} + \xi_{20u}\Delta_{220}) - \sum_{n=1}^N (i(\xi_{1n,u}\Delta_{21n,u} + \xi_{2n,u}\Delta_{22n,u}) - \xi_{1n,H}\Delta_{21n,H} - \xi_{2n,H}\Delta_{22n,H}) \cos \alpha_n x = 0, \quad (19)$$

$$L_3(f_{1H}) - \sum_{n=1}^N (i(\xi_{1n,u}\Delta_{11n,H} + \xi_{2n,u}\Delta_{12n,H}) - \xi_{1n,H}\Delta_{11n,u} - \xi_{2n,H}\Delta_{12n,u}) n \cos \alpha_n x = 0, \quad (20)$$

$$L_4(f_{2u}) + \sum_{n=1}^N (\xi_{1n,u}\Delta_{21n,H} + \xi_{2n,u}\Delta_{22n,H} + i(\xi_{1n,H}\Delta_{21n,u} + \xi_{2n,H}\Delta_{22n,u})) \sin \alpha_n x = 0, \quad (21)$$

$$L_1(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f(x') \frac{\cos \alpha_n x \cos \alpha_n x'}{n} dx',$$

$$L_2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f(x') \cos \alpha_n x \sin \alpha_n x' dx',$$

$$L_3(f) = L_2(f),$$

$$L_4(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f_{2u} \sin \alpha_n x \cos \alpha_n x' dx',$$

$$\xi_{1,2,u,H} = \int_0^{w/2} f_{1,2,u,H} \begin{pmatrix} \cos \alpha_n x \\ \sin \alpha_n x \end{pmatrix} dx.$$

Асимптотическую форму системы интегральных уравнений получаем полагая  $N = 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f_{1u} \frac{\cos \alpha_n x \cos \alpha_n x'}{n} dx' + \frac{1}{2}(\xi_{10,u}\Delta_{110} + \xi_{20u}\Delta_{120}) = 0, \quad (22)$$

$$i \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f_{2H} \cos \alpha_n x \sin \alpha_n x' dx' + \frac{1}{2}(\xi_{10,u}\Delta_{210} + \xi_{20u}\Delta_{220}) = 0, \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f_{1H} \cos \alpha_n x \sin \alpha_n x' dx' = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{w/2} f_{2\alpha} \sin \alpha_n x \cos \alpha_n x' dx' = 0. \quad (25)$$

### 3. Решение системы СИУ

Ряды, стоящие в асимптотической системе уравнений (22) – (25) суммируются аналитически при помощи соотношений [7]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x \sin \alpha_n x' = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_1 x'}{\cos \alpha_1 x - \cos \alpha_1 x'}, \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x \cos \alpha_n x'}{n} = -\frac{1}{2} \ln 2 |\cos \alpha_1 x - \cos \alpha_1 x'|.$$

Решение уравнений (23) – (25) можно получить при помощи преобразований [7]:

$$\cos \alpha_1 x' = C - Sv, \quad (27)$$

$$\cos \alpha_1 x = C - Su,$$

$$C = \cos^2 \frac{\pi w}{2P_x},$$

$$S = \sin^2 \frac{\pi w}{2P_x},$$

$$u, v \in [-1, 1].$$

Их применение сводит интегральные уравнения (23) – (25) к сингулярным интегральным уравнениям, решение которых известно [7]. Уравнение (22) можно было бы решить таким же методом. Однако для этого необходимо его предварительно продифференцировать. В отличие от уравнения (24) также полученного путем дифференцирования дифференцирование (22) приводит к потере постоянного слагаемого, что в дальнейшем требует дополнительного аналитического исследования. Отметим, что при выводе уравнения (24) постоянное слагаемое не теряется, так как дифференцируемая функция нечетная и, следовательно, не может содержать постоянных членов. Чтобы

избежать трудностей отмеченных выше уравнение (22) решается при помощи преобразований аналогичных (27), в которых вместо переменных  $u, v$  используются переменные  $\varphi, \psi$ , изменяющиеся на интервале  $[0, \pi]$ :

$$u = -\cos \varphi, \quad (28)$$

$$v = -\cos \psi.$$

Наша задача состоит не в аналитическом решении асимптотической системы, а в разработке алгоритма, позволяющего достаточно просто решить исходную систему (18) – (21) при произвольном значении параметра  $N$ .

Ищем неизвестные функции в виде следующих сумм:

$$\frac{f_{1,2\psi}}{\sin \alpha_1 x} = \sum_{m=0}^N B_{1,2m,\psi} \frac{\cos m\varphi}{\sin \varphi}, \quad (29)$$

$$f_{1,2,\psi} = \sum_{m=0}^{N-1} B_{1,2m,\psi} \frac{1 - \cos(m+1)\varphi}{\sin \varphi},$$

где  $B_{1,2m,\psi}$  - неизвестные коэффициенты. Связь между переменными  $x$  и  $\varphi$  задается соотношениями (27) и (28).

Отметим важное свойство интегральных операторов, стоящих в левых частях уравнений (18) – (21):

$$L_r \left( \frac{\cos n\psi}{\sin \psi} \right) = \sum_{m=0}^n R_{r,n,m} \cos m\varphi. \quad (30)$$

Здесь под  $L_r(f)$  мы понимаем любой из указанных операторов, а  $R_{r,n,m}$  - известные постоянные,  $r = 1, \dots, 4$ . Необходимо отметить, что суммирование в выражении (30) осуществляется в конечных пределах.

Докажем выполнение равенства (30) на примере оператора  $L_1(f)$ .

Воспользуемся вторым соотношением (26):

$$L_1(f) = -\frac{1}{2} \int_0^{w/2} f(x') \ln 2 |\cos \alpha_1 x - \cos \alpha_1 x'| dx'. \quad (31)$$

Заменим исходные переменные на  $\varphi, \psi$  при помощи преобразований (27)

и (28):

$$L_1(f) = -\frac{S \ln S}{2\alpha_1} \int_0^\pi \frac{f(\varphi) \sin \varphi}{\sin \alpha_1 x(\varphi)} d\varphi - \frac{S}{2\alpha_1} \int_0^\pi \frac{f(\varphi) \sin \varphi}{\sin \alpha_1 x(\varphi)} \ln 2 |\cos \varphi - \cos \psi| d\varphi. \quad (32)$$

Применим к соотношению (32) второе равенство из (26):

$$L_1(f) = -\frac{S \ln S}{2\alpha_1} \int_0^\pi \frac{f(\varphi) \sin \varphi}{\sin \alpha_1 x(\varphi)} d\varphi + \frac{S}{\alpha_1} \int_0^\pi \frac{f(\varphi) \sin \varphi}{\sin \alpha_1 x(\varphi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi \cos n\psi}{n} d\varphi. \quad (33)$$

Подставим в равенство (33) функцию

$$f(\varphi) = \frac{\cos m\varphi}{\sin \varphi}.$$

В результате получаем:

$$L_1(f) = -\frac{S \ln S}{2\alpha_1} \int_0^\pi \cos m\varphi d\varphi + \frac{S}{\alpha_1} \int_0^\pi \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi \cos n\psi}{n} d\varphi.$$

Воспользуемся ортогональностью функций  $\cos n\varphi$ :

$$L_1(f) = \begin{cases} -\frac{\pi S \ln S}{2\alpha_1}, & m = 0, \\ \frac{\pi S}{2\alpha_1 m} \cos m\psi, & m > 0. \end{cases} \quad (34)$$

Выражение (34) доказывает справедливость равенства (30).

Нетрудно показать выполнение следующих соотношений:

$$\cos \alpha_n x(\varphi) = \sum_{m=0}^n C_{n,m} \cos m\varphi, \quad (35)$$

$$\frac{\sin \alpha_n x(\varphi)}{\sin \alpha_1 x(\varphi)} = \sum_{m=0}^{n-1} S_{n,m} \cos m\varphi,$$

где коэффициенты  $C_{n,m}$  и  $S_{n,m}$  определяются численным интегрированием.

Таким образом, видно, что функции, входящие в левые части уравнений (18) – (21) представляются конечными тригонометрическими рядами по функциям  $\cos m\psi$ . Благодаря их ортогональности равенство нулю должно выполняться отдельно для каждого члена ряда. Приравнявая их нулю, мы получаем однородную СЛАУ относительно коэффициентов  $B_{1,2m,ч,н}$ . Порядок СЛАУ равен  $4(N + 1)$ .

Условие существования нетривиальных решений однородной СЛАУ в виде равенства нулю ее определителя дает нам дисперсионное уравнение относительно постоянных распространения собственных волн решетки. Стандартная процедура, связывающая коэффициенты  $B_{1,2m,ч,н}$  друг с другом позволяет найти с точностью до постоянного множителя функции  $f_{1,2}$ , а затем токи на полосковых проводниках.

#### 4. Исследование собственных волн решетки

Рассмотрим результаты численного решения электродинамической задачи на собственные волны решетки связанных микрополосковых ЛП. Будем анализировать поведение двух основных параметров: коэффициента замедления волны  $U = \beta/k$  и характеристического сопротивления  $Z$ . Воспользуемся стандартным для полосковых линий определением сопротивления через полный ток  $J$  и мощность, переносимую через поперечное сечение канала Флоке  $P$ :

$$Z = \frac{2P}{J^2}. \quad (36)$$

Прежде чем переходить к обсуждению численных результатов отметим, что рассматриваемая структура не имеет одноволнового режима, так как в ней на любых частотах распространяются две волны. Одну из них можно назвать полосковой волной. Ее свойства близки к свойствам волны микрополосковой ЛП. Другую волну можно назвать волноводной, так как ее свойства близки к свойствам  $E_1$  - волны, распространяющейся в планарном волноводе,

образованном двумя металлическими экранами и диэлектрической пластиной между ними.

Свойства основных волн существенно различаются. Для их описания удобно ввести нумерацию проводников. Пусть экран при  $y = 0$  имеет нулевой номер, полосковый проводник номер 1, а экран при  $y = h + d$  номер 2. По этим проводникам текут токи  $J_{0-2}$  и они имеют напряжения относительно нулевого проводника  $U_{1,2}$ .

Полосковая волна характеризуется приближенным равенством:

$$U_2 \approx 0. \quad (37)$$

Если бы она была поперечной  $T$  – волной, то соотношение (37) выполнялось бы точно. В силу того, что волна в микрополосковой ЛП является только квази  $T$  – волной мы имеем лишь приближенное равенство.

Для волноводной волны также справедливо приближенное соотношение:

$$J_1 \approx 0, \quad (38)$$

которое в случае однородного диэлектрического заполнения становится строгим.

Таким образом, для рассматриваемой структуры рабочим является двухволновый режим. С увеличением частоты в ней появляются распространяющиеся волны высших порядков. В ходе численных исследований мы ограничимся двухволновым режимом.

Рассмотрим поведение основной полосковой волны синфазной решетки при  $\kappa_x = 0$ . На рис. 3 показана зависимость коэффициента замедления  $U_s$  волны от ширины проводника  $W$ , которая меняется от некоторого значения много меньшего периода решетки до  $P_x$ . Кривые 1 – 3 получены при  $P_x = 15$ ,  $h = 1$ ,  $a = 14$ ,  $f = 5$  ГГц,  $\varepsilon = 2,4,6$ . На рис. 4 приведена зависимость характеристического сопротивления  $Z_s$  волны при тех же параметрах структуры.

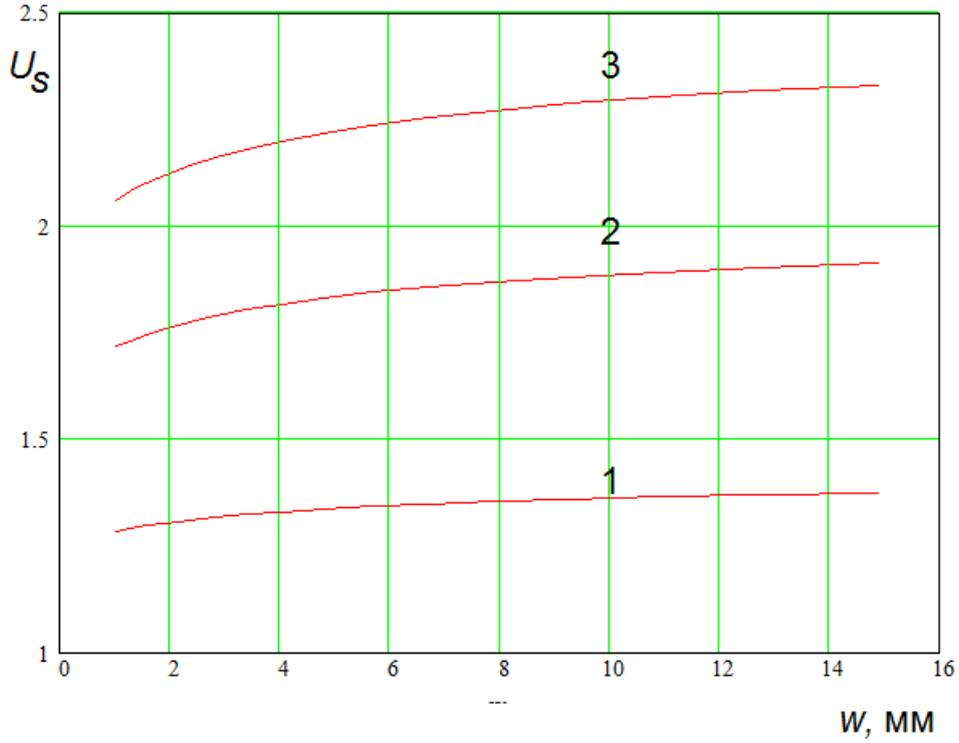


Рис. 3. Зависимость коэффициента замедления полосковой волны от ширины  
полоскового проводника

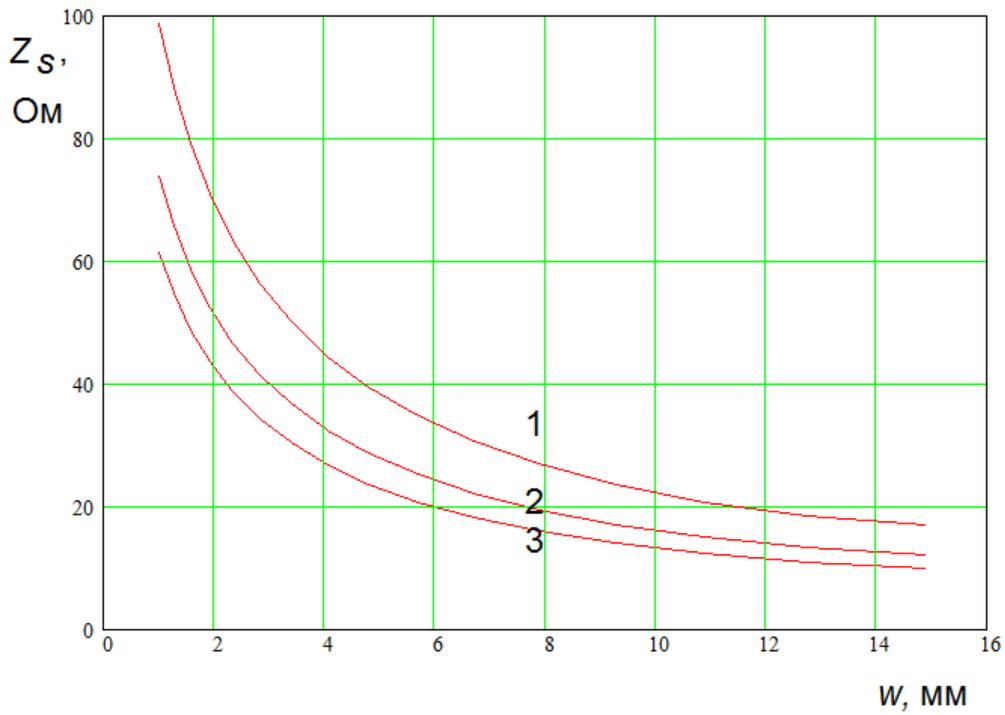


Рис. 4. Зависимость сопротивления полосковой волны от ширины полоскового  
проводника

Особое внимание необходимо обратить на поведение исследуемых параметров при  $w \rightarrow P_x$ . В точке  $w = P_x$  происходит переход от решетки микрополосковых ЛП к структуре в виде двух плоских волноводов. Один из них высотой  $h$  заполнен средой с проницаемостью  $\varepsilon$ , а другой высотой  $a$  имеет воздушное заполнение. Назовем их первым и вторым волноводами. Коэффициент замедления основной Т – волны первого волновода  $U_{w1}$  равен  $\sqrt{\varepsilon}$ . Его характеристическое сопротивление  $Z_{w1}$  при  $\kappa_x = 0$  определяется соотношением:

$$Z_{w1} = W_0 \frac{h}{P_x \sqrt{\varepsilon}}. \quad (39)$$

Коэффициент замедления волны во втором волноводе  $U_{w2} = 1$ , а характеристическое сопротивление  $Z_{w2}$  описывается выражением:

$$Z_{w2} = W_0 \frac{a}{P_x}. \quad (40)$$

Из рис. 3,4 видно, что ни коэффициент замедления, ни характеристическое сопротивление полосковой волны решетки не стремятся при  $w \rightarrow P_x$  к значениям соответствующих параметров первого волновода. Они достаточно близки к ним, но не равны.

Для предельного значения коэффициента замедления полосковой волны дать точную аналитическую оценку затруднительно, но для характеристического сопротивления удалось найти выражение, хорошо описывающее параметр  $Z_s(P_x)$ :

$$Z_s(P_x) = \frac{Z_{w1} Z_{w2}}{Z_{w1} + Z_{w2}}. \quad (41)$$

Из соотношения (41) видно, что только при  $h/\sqrt{\varepsilon} \ll a$  параметр  $Z_s(P_x)$  приближается к сопротивлению первого волновода. В общем случае он может существенно отличаться от него.

Таким образом, можно сделать вывод, что переход полосковой волны в волну первого волновода будет иметь плавный характер только при выполнении определенных соотношений между параметрами структуры. Сочленение решетки с плоскими волноводами нарушает регулярность тем меньше, чем меньше толщина диэлектрической подложки и чем больше ее проницаемость.

Рассмотрим далее поведение полосковой волны в режиме сканирования, когда  $\kappa_x \neq 0$ . На рис. 5 показана зависимость сопротивления  $Z_s$  от безразмерного параметра  $\kappa_x P_x$ . Кривые 1 – 4 получены при  $P_x = 15$ ,  $h = 0.5$ ,  $a = 14.5$ ,  $f = 5$  ГГц,  $\varepsilon = 1$ ,  $w = 1, 4, 8, 13$ .

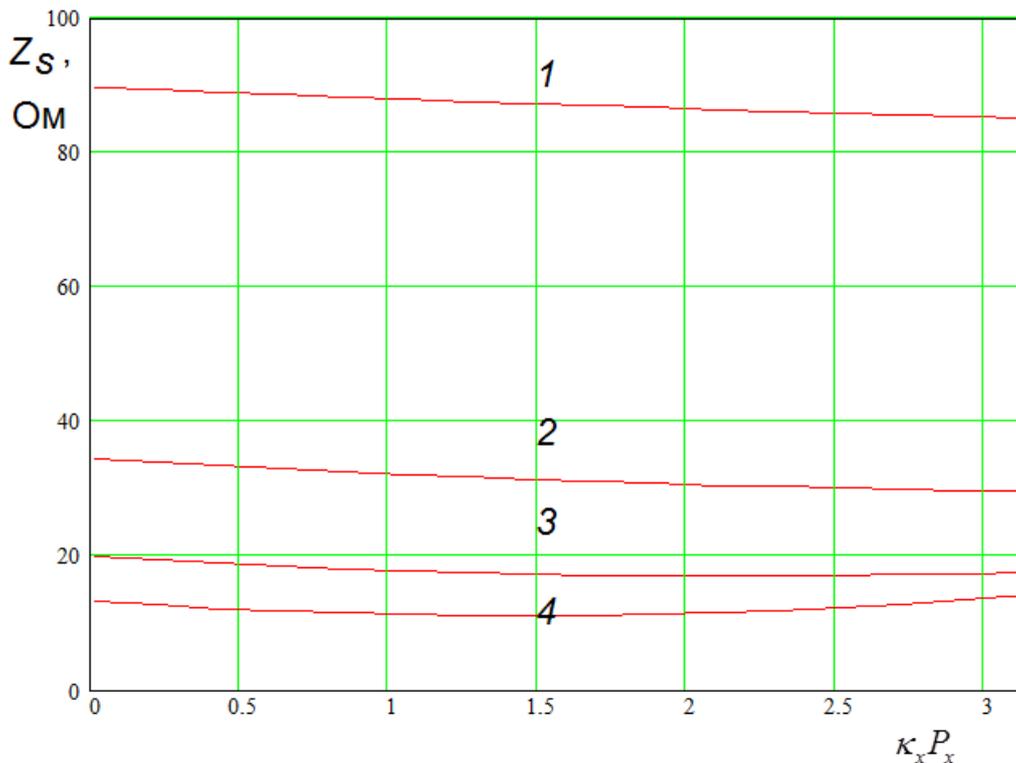


Рис. 5. Зависимость сопротивления полосковой волны от сдвига фаз между каналами решетки

Отметим, что характеристическое сопротивление достаточно слабо зависит от фазового сдвига между каналами решетки, который описывается параметром  $\kappa_x P_x$ . С ростом ширины ЛП относительная величина изменений сопротивления растет.

Зависимость сопротивления  $Z_s$  от фазового сдвига характеризует уровень связи между ЛП в решетке. Видно, что он не очень высокий. Его увеличение при  $w \rightarrow P_x$  связано со сближением линий и увеличением их взаимного влияния.

Зависимость параметров полосковой волны от частоты незначительна, что связано с тем, что она является квази Т – волной, близкой по своим свойствам к поперечной Т – волне.

Как отмечалось выше, волноводная волна решетки близка по своим свойствам к  $E_1$  - волне плоского волновода с диэлектрической пластиной. За исключением случая  $w \rightarrow P_x$  для ее параметров  $U_w, Z_w$  можно получить простые оценочные формулы, точность которых повышается на низких частотах:

$$U_w = \sqrt{U_0^2 - \left(\frac{\kappa_x}{k}\right)^2}, \quad (42)$$

$$U_0 = \sqrt{\frac{a+h}{a+h/\varepsilon}},$$

$$Z_w = \frac{W_0 U_0^2}{U_w} \frac{h/\varepsilon + a}{P_x}.$$

Соотношения (42) справедливы для  $\kappa_x \neq 0$ .

## 5. Заключение

Исследование собственных волн бесконечной решетки связанных микрополосковых ЛП является важным этапом построения теоретической модели решетки микрополосковых рупоров, которые широко применяются на практике в качестве элементов антенных систем и облучателей линз Ротмана. Важно отметить, что представленная выше модель не только позволяет дать количественную оценку параметрам исследуемой структуры, но и проводить

аналитические исследования ее поведения в таких предельных случаях, как переход при  $w \rightarrow P_x$ , имеющий важное практическое значение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-07-07797.

### Литература

1. Butcher P.N. A theoretical study of propagation along tape ladder lines // Proc. IEE. 1957. Pt. B. V. 104. N14. P. 169.
2. Куликов Э.Л., Федоров А.Н., Санинский А.С. О синтезе многопроводных линий с ТЕМ волной. В кн.: Техническая электроника и электродинамика. Саратов, 1976, вып. 1.
3. Куликов Э.Л., Левина Н.Н. К методам расчета многопроводных линий. // РЭ. 1971. Т. 16. №11. С. 2194.
4. Chestnut P.C. On determining the capacitances of shielded multiconductor transmission lines. // IEEE Trans – MTT. 1969. V. 11. N10. P. 734.
5. Сухов В.А. Характеристическое сопротивление и затухание ТЕМ – волн, распространяющихся вдоль многопроводной линии из прямоугольных проводников. // РЭ. 1961. Т. 6. №5. С. 820.
6. Сухов В.А., Рыженко Б.Ф. Расчет поля бегущей ТЕМ – волны, распространяющейся вдоль периодической многопроводной линии из круглых проводников. // РЭ. 1962. Т. 7. №10. С. 1769.
7. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь. 1981.
8. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Полосково – щелевые структуры сверх- и крайне высоких частот. М.: Наука. Физматлит. 1996.
9. Банков С.Е., Скородумова Е.А. Квазистатический анализ собственных волн решетки связанных щелевых линий передачи. // РЭ. 2015. Т. 60. №5. С. 470-479.
10. Банков С.Е. Эффекты ослепления и деполяризации в решетках антенн Вивальди. // Труды 4-ой Всероссийской Микроволновой конференции. Москва. Ноябрь 2016. С. 265-269.

11. Банков С.Е., Калошин В.А., Нгуен К.З. К теории антенных решеток из ТЕМ рупоров. // Труды 4-ой Всероссийской Микроволновой конференции. Москва. Ноябрь 2016. С. 410-413.
12. Rotman W. and Turner R.F. Wide-Angle Microwave Lens for Line Source Applications. // IEEE Transactions on AP. 1963. V. 11. N. 11. P. 623-632.
13. Rausch E.O., Peterson A.F. Rotman Lens Design Issues. // Antennas and Propagation Society International Symposium, IEEE, 2005, V. 2B, P. 35-38.
14. Банков С. Е., Курушин А. А. Рупорный облучатель планарных зеркал и линз. // Журнал радиоэлектроники, №6, 2013.  
<http://jre.cplire.ru/jre/jun13/4/text.html>.
15. Банков С. Е., Грачёв Г. Г., Калошин В. А. Об излучении микрополосковых рупоров. // Журнал радиоэлектроники. 2017. №4.  
<http://jre.cplire.ru/jre/apr17/6/text.pdf>.
16. Бодров В.В, Сурков В.И. Математическое моделирование устройств СВЧ и антенн. М.: Изд-во МЭИ, 1994.

**Ссылка на статью:**

С. Е. Банков. Собственные волны решетки связанных полосковых линий передачи. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №11. Режим доступа:  
<http://jre.cplire.ru/jre/nov17/12/text.pdf>