

УДК 538.566

## ПОЛЕ ЗЕМНОЙ ВОЛНЫ НАД ПРОТЯЖЕННЫМИ НЕОДНОРОДНЫМИ РАДИОТРАССАМИ

М. Г. Дембелов<sup>1</sup>, Ю. Б. Башкуев<sup>1</sup>, В. П. Мельчинов<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт физического материаловедения СО РАН,  
670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6<sup>2</sup>Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,  
677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2019 г.

**Аннотация.** Рассмотрено поле земной волны, которое создается вертикальным электрическим диполем над неоднородной в электрическом и геометрическом отношении поверхностью Земли. Такое поле представляет интерес на расстояниях, когда влиянием на поле отраженных от ионосферы волн можно пренебречь. Для протяженных радиотрасс (свыше 500 км) для расчета функции ослабления поля земной волны предложено использовать метод интегрального уравнения Фейнберга для электрически неоднородных радиотрасс, учитывающих рельеф местности. Данный метод позволяет выполнять расчеты в ДВ-СВ диапазонах радиоволн над трассами с относительно «плохой» проводимостью. На начальном однородном участке трассы функция ослабления рассчитывается по модели «плоской» поверхности Земли с использованием формул Зоммерфельда.

**Ключевые слова:** поле земной волны, поверхностный импеданс, функция ослабления, рельеф радиотрассы.

**Abstract.** High-precision radio systems use the properties of the propagation of an electromagnetic field along the Earth's surface. Nowadays the interest remains in the methods for calculating the amplitude-phase structure of the field over real radio paths. The main property of the earth wave field is the stability of the phase structure and diffraction propagation over relatively large distances. The field of the earth wave is considered which is created by a vertical electric dipole over an electrically and geometrically inhomogeneous surface of the Earth. Such waves are called

diurnal, they are of interest at distances when the influence of waves reflected from the ionosphere on the field can be neglected.

In the case of an electrically homogeneous radio path, the attenuation function of the earth wave field is calculated using the Sommerfeld's formulas for the flat surface model and the Fock's series for the spherical surface model. To calculate the levels of the electromagnetic field and its phase over geometrically and electrically inhomogeneous radio paths, the most used method is the numerical solution of the Hufford's integral equation. The disadvantage of numerically integrating the Hufford equation is that the range of applicability of the method is limited in distance due to the loss of accuracy of calculations. In practice, such a disadvantage is at high frequencies with "poor" conductivities of the underlying medium. For extended radio paths, it is proposed to use the method of the modernized Feinberg's integral equation for electrically inhomogeneous radio paths taking into account the relief of the terrain to calculate the function of attenuation of the earth wave field. This method allows performing calculations in the LF-MF ranges of radio waves over paths with relatively "poor" conductivity.

**Key words:** earthwave field, surface impedance, attenuation function, radio path relief.

## **Введение**

Численным методам решения задачи распространения радиоволн над земной поверхностью посвящено большое количество публикаций, среди которых известные работы В.А. Фока [1], Дж. Уайта [2], Е.Л. Фейнберга [3] и Г.И. Макарова [4]. Так как многие высокоточные радиосистемы основаны на использовании электромагнитного поля, распространяющегося вдоль земной поверхности, все еще сохраняется интерес к подобным методам вычислений. Поле земной волны характеризуется стабильностью фазовой структуры и распространением на большие расстояния благодаря дифракции.

Для случая однородной в электрическом отношении радиотрассы функция ослабления поля земной волны  $W$  рассчитывается с использованием формул Зоммерфельда [4] для модели «плоской» поверхности или посредством формулы Фока [1] для модели сферической поверхности. Однако, модель однородной радиотрассы не всегда отвечает точности прогнозирования уровня поля и фазы на некотором фиксированном расстоянии от источника. Для определения уровня электромагнитного поля и его фазы в настоящее время наиболее распространенным является метод численного решения интегрального уравнения Хаффорда [5]. В работе [6] приведен алгоритм численного решения данного интегрального уравнения. Недостатком численного решения уравнения Хаффорда является то, что область применимости метода оказывается ограниченной по расстоянию из-за потери точности вычислений. На практике такой недостаток проявляется на высоких частотах при «плохих» проводимостях подстилающей среды. В этом случае при численном интегрировании происходит накапливание погрешностей вычислений, которое на некотором расстоянии приводит к расходимости метода. Так на частоте 200 кГц с электрическими параметрами подстилающей среды  $\epsilon=10$ ,  $\sigma=0.001$  См/м численное решение уравнения Хаффорда обеспечивает хорошее совпадение с рядом нормальных волн (рядом Фока) на всем протяжении трассы протяженностью 600 км. На частоте 400 кГц хорошее совпадение обеспечивается до расстояния 500 км, а на частоте 600 кГц лишь до расстояния 200 км, далее решения расходятся.

Причина неустойчивости решения заключается в том, что в уравнении Хаффорда зависимость от рельефа и характер поведения "средней" функции ослабления определяется интегральной частью. Форма уравнения, в котором характер поведения функции ослабления в основном описывается членом, не входящим под знак интеграла, может дать более устойчивое численное решение. Для случая электрически неоднородной сферической и плоской земной поверхности без учета рельефа местности уравнение в такой форме

получено Е.Л. Фейнбергом [3], численная реализация которого предложена в работе [7]. В настоящей работе предлагается численное решение обобщенного интегрального уравнения Фейнберга для электрически и геометрически неоднородных радиотрасс.

Цель работы заключается в обосновании применения интегрального уравнения Е.Л. Фейнберга для моделирования распространения длинных и средних радиоволн над протяженными гористыми и мерзлотными радиотрассами.

### **1. Функция Зоммерфельда при расположении источника и приемника на плоской поверхности**

Рассмотрено поле вертикального электрического диполя над плоской поверхностью. Решение этой задачи важно для расчетов поля на расстояниях, когда кривизной Земли можно пренебречь. Ограничимся приближенным решением задачи при постоянном импедансе, когда источник и приемник расположены на поверхности. Функция ослабления поля земной волны  $W$  вводится относительно бесконечно проводящей поверхности и записывается в интегральной форме [4]:

$$W(SR) = 1 + 2\sqrt{SR}e^{-SR} \int_{\sqrt{SR}}^{+\infty} \exp(-z^2) dz. \quad (1)$$

Функция ослабления  $W$  зависит от численного расстояния  $SR$ , где  $R$  – расстояние от источника до приемника,  $S = ik\delta^2 / 2$ ,  $\delta$  – приведенный поверхностный импеданс всей трассы ( $|\delta^2| \ll 1$ ),  $k$  – волновое число свободного пространства.

Для расчета функции ослабления по формуле (1) используются разложения по прямым или обратным степеням численного расстояния  $SR$ . Для разложения по прямым степеням удобно заменить интеграл в (1) в виде разности двух членов интегрированием от 0 до  $+\infty$  и от 0 до  $\sqrt{SR}$ . В этом случае формула (1) может быть представлена в виде:

$$W(SR) = 1 + i\sqrt{\pi SR}e^{-SR} - 2e^{-SR} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(SR)^{n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (2)$$

Ряд в формуле (2) сходится при любых значениях численного расстояния. На практике эту формулу можно использовать при условии  $0 < |SR| < 10$ . При больших значениях  $|SR| > 10$  для расчета функции ослабления используется разложение по обратным степеням численного расстояния  $1/(SR)$ . Разложение получается в результате асимптотического представления интеграла, входящего в формулу (1). Это разложение имеет разный вид в зависимости от знака  $\text{Im}S$ . При условии  $\text{Im}S > 0$  функция ослабления может быть записана в результате многократного интегрирования по частям в виде конечного ряда:

$$W(SR) = -\sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)!!}{(2SR)^n}. \quad (3)$$

При условии  $\text{Im}S < 0$ , которое соответствует сильноиндуктивным значениям поверхностного импеданса  $\delta$ , интеграл в формуле (1) необходимо представить в виде:

$$\int_{\sqrt{SR}}^{+i\infty} e^{z^2} dz = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z^2} dz - \int_{\sqrt{SR}}^{-i\infty} e^{z^2} dz = i\sqrt{\pi} + \int_{\sqrt{SR}}^{-i\infty} e^{z^2} dz. \quad (4)$$

Учитывая соотношение (4) и разложение (3), можно записать выражение для функции ослабления для больших значений  $|SR|$ :

$$W(SR) = 2i\sqrt{\pi SR}e^{-SR} - \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)!!}{(2SR)^n}. \quad (5)$$

Разложения в формулах (3) и (5) асимптотические, они расходятся при  $N \rightarrow \infty$  для любых значений  $SR$ , поэтому при их применении используются несколько первых членов, которые с ростом  $n$  уменьшаются. Значение  $|SR|$  должно быть больше 10. В выражении для функции ослабления (5) имеется член  $W_{нов} = 2i\sqrt{\pi SR}e^{-SR}$ , который соответствует поверхностной волне для сильноиндуктивных импедансов.

На рис. 1 приведены расчеты модуля функции ослабления на частоте 1 МГц при фиксированном значении модуля поверхностного импеданса, равного

0.1, и разных значений фазы поверхностного импеданса ( $-45^\circ, -60^\circ, -80^\circ, -85^\circ, -88^\circ$ ). Здесь при фазах, соответствующих сильноиндуктивным импедансам, имеет место превышение единицы значения  $|W| > 1$  на начальном участке трассы. При стремлении фазы импеданса к значению  $-90^\circ$  наблюдается большой рост модуля функции ослабления из-за проявления эффекта поверхностной волны [8].

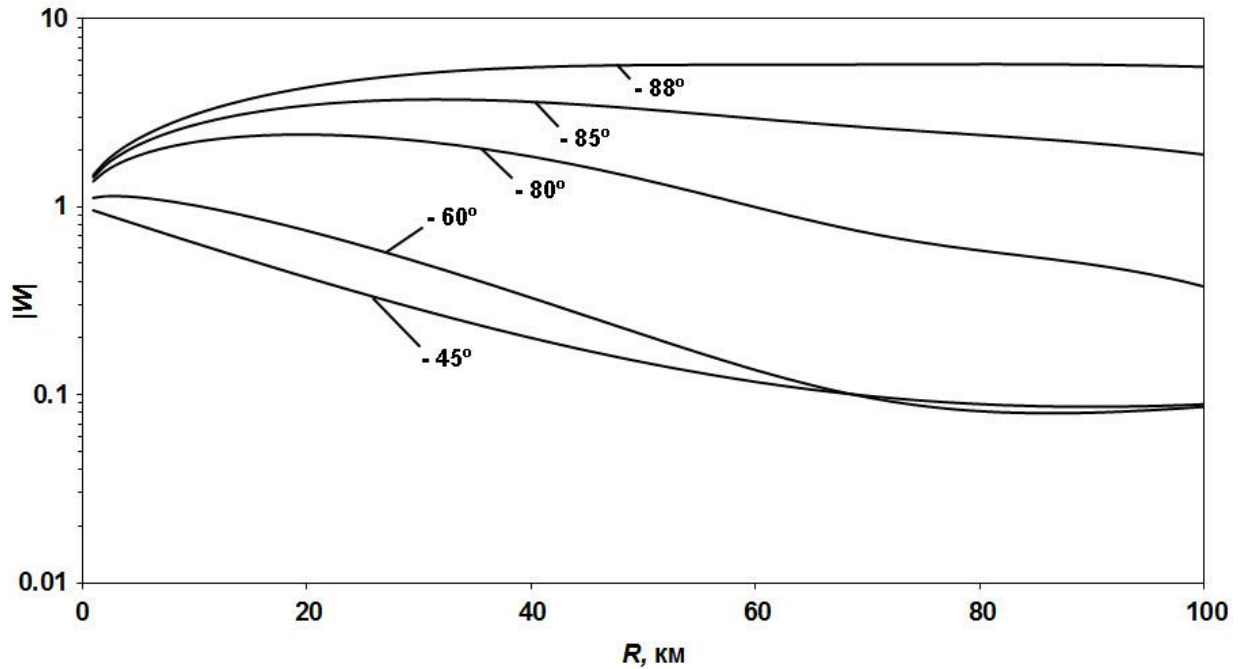


Рис. 1. Графики модуля функции ослабления  $|W|$  при фиксированном значении модуля импеданса  $|\delta|=0.1$  и разных значениях фазы импеданса.

## 2. Обобщенное интегральное уравнение Фейнберга

Рассмотрим задачу о поле вертикального электрического диполя над геометрически и электрически неоднородной поверхностью Земли в сферической системе координат  $(r, \theta, \tau)$ , радиус Земли  $a=6371$  км. Введем однокомпонентный вектор Герца  $\vec{\Pi} = \Pi \vec{e}_r$ , где  $\vec{e}_r$  –единичный вектор, направленный из центра Земли. Потенциал  $\Pi$ , являющийся скалярной функцией, удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца [3]. Также введем однокомпонентный вектор  $\vec{\phi} = \phi \vec{e}_r$ , который является потенциалом Герца для случая гладкой однородной импедансной сферы. При этом скалярная функция

$\varphi$  является фундаментальным решением однородного волнового уравнения Гельмгольца.

Переход от потенциалов  $\Pi$  и  $\varphi$  к функциям ослабления  $W$  и  $W_0$  осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} \Pi(r_1) &= \frac{e^{ikr_1}}{r_1} W(r_1) \\ \varphi(r_2) &= \frac{e^{ikr_2}}{r_2} W_0(r_2) \end{aligned} ,$$

здесь  $W_0(r_2)$  - функция ослабления над гладкой сферой с однородным импедансом  $\delta_0$ ; где  $k=2\pi f/c$  - волновое число свободного пространства;  $f$  - частота;  $r_1$  - расстояние от источника до текущей точки радиотрассы;  $r_2$  - расстояние от текущей точки до точки приема. Считаем, что непрерывными являются функция, описывающая рельеф трассы  $h(x)$ , и ее производная  $h'(x)$ ,  $x$  - расстояние вдоль земной поверхности. На размеры препятствий нерегулярной трассы необходимо наложить условие малости относительно длины волны:  $kh_0 < 1$ , где  $h_0$  - высота препятствия. При выполнении такого условия для геометрических препятствий будем считать, что в задаче применимо приближенное импедансное граничное условие на нерегулярной поверхности  $S$  для потенциала  $\Pi$ :

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right|_S = -ik\delta \Pi ,$$

где  $\delta$  - переменный поверхностный импеданс радиотрассы, для которого должно выполняться условие  $|\delta|^2 \ll 1$ ,  $n$  - внешняя по отношению к поверхности Земли нормаль.

Не останавливаясь на всех приближениях, которые были использованы при получении одномерного интегрального уравнения для функции ослабления  $W$ , запишем само обобщенное уравнение Фейнберга [9]:

$$W(D) = W_0(D) + i\sqrt{\frac{ikD}{2\pi}} \int_0^D \left[ \delta(x) + \frac{1}{ikW_0} \frac{\partial W_0}{\partial n} + \left(1 - \frac{1}{ikr_2}\right) \frac{\partial r_2}{\partial n} \right] \times$$

$$\times W(x)W_0(D-x) \frac{\exp[ik(r_1 + r_2 - r_0)]}{\sqrt{x(D-x)}} \frac{dx}{\cos \psi}. \quad (6)$$

Здесь  $D$  – длина трассы, отсчитываемая вдоль земной поверхности,  $W(D)$  – функция ослабления над сферической Землей с переменным вдоль трассы распространения радиоволны поверхностным импедансом  $\delta(x)$ ,  $W_0(D)$  – функция ослабления для трассы с постоянным импедансом  $\delta_0$ , которая рассчитывается по ряду нормальных волн [1,4]. Смысл использованных обозначений ясен из рис. 2. В уравнении (6) интегральная часть имеет смысл добавки, которая за счет выбора  $\delta_0$  может быть минимизирована. Это свойство позволяет использовать метод обобщенного интегрального уравнения Фейнберга (6) как наиболее эффективный для случая кусочно-однородных трасс при произвольном числе однородных импедансных участков, особенно при «плохих» проводимостях подстилающей среды.

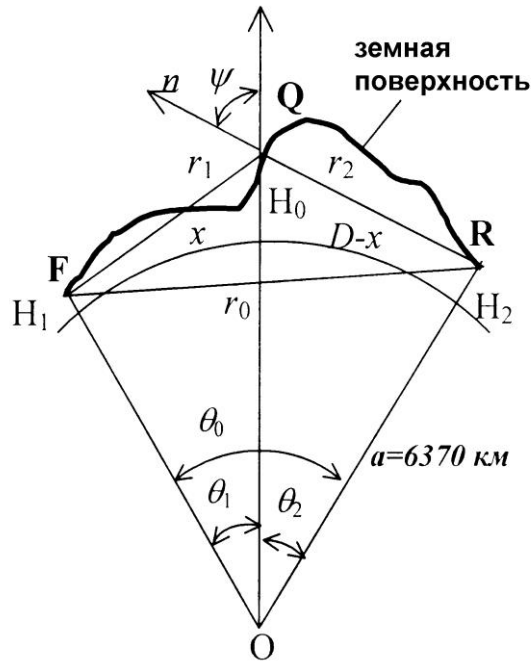


Рис. 2. Геометрия задачи.



### 3. Приближения в уравнении Фейнберга

Входящие в интегральное уравнение (6) расстояния  $r_0$ ,  $r_1$  и  $r_2$  определяются соотношениями:

$$r_0 = \left[ (H_2 - H_1)^2 + 4(a + H_1)(a + H_2) \sin^2 D / 2a \right]^{1/2},$$

$$r_1 = \left[ (H_0 - H_1)^2 + 4(a + H_0)(a + H_1) \sin^2 x / 2a \right]^{1/2},$$

$$r_2 = \left[ (H_0 - H_2)^2 + 4(a + H_0)(a + H_2) \sin^2 (D - x) / 2a \right]^{1/2}.$$

Для гладкой сферы эти соотношения могут быть записаны в виде:

$$r_0 = 2a \sin \frac{\theta_0}{2} = 2a \sin \frac{D}{2a},$$

$$r_1 = 2a \sin \frac{\theta_1}{2} = 2a \sin \frac{x}{2a},$$

$$r_2 = 2a \sin \frac{\theta_2}{2} = 2a \sin \frac{D - x}{2a}.$$

При численных расчетах для  $r_2 > 0$  очевидно, что допустимо приближение

$\left(1 - \frac{1}{ikr_2}\right) \frac{\partial r_2}{\partial n} \approx \frac{\partial r_2}{\partial n}$ . В сферической системе координат производная по нормали

$\frac{\partial r_2}{\partial n}$  определяется формулой  $\frac{\partial r_2}{\partial n} = \frac{\partial r_2}{\partial r} \cos \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \sin \psi$ ,  $r$  – расстояние от центра сферы до точки интегрирования:  $r = a + h(\theta_1)$ ,  $\theta_1 = x/a$  – угловое расстояние.

С учетом приведенных соотношений выражение для  $\frac{\partial r_2}{\partial n}$  можно записать в виде:

$$\frac{\partial r_2}{\partial n} = \frac{a \cos \psi}{r_2} \left\{ 1 + \frac{h(x)}{a} - \left(1 + \frac{h_2}{a}\right) [\cos(\theta_0 - \theta_1) + \sin(\theta_0 - \theta_1) \operatorname{tg} \psi] \right\}.$$

После несложных преобразований данное соотношение запишется в виде:

$$\frac{\partial r_2}{\partial n} = \left(1 + \frac{h_2}{a}\right) \frac{a \sin(\theta_0 - \theta_1)}{r_2} \cos \psi \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}\right) + \frac{h(x) - h_2}{(a + h_2) \sin(\theta_0 - \theta_1)} + h'(x) \right\}. \quad (7)$$

Для гладкой сферы формула (7) сводится к выражению  $\frac{\partial r_2}{\partial n} = \frac{r_2}{2a}$ . Так как функция  $\frac{\partial r_2}{\partial n}$  стремится к нулю, как  $r_2$ , то функция  $\left(1 - \frac{1}{ikr_2}\right) \frac{\partial r_2}{\partial n}$  не имеет особенности в точке приема  $r_2=0$ . Раскрывая неопределенность формулы при  $r_2 \rightarrow 0$ , запишем предельное соотношение:

$$\left(1 - \frac{1}{ikr_2}\right) \frac{\partial r_2}{\partial n} \Big|_{r_2=0} = \frac{i}{2ka}.$$

Отметим, что угол  $\psi$  между нормалью и радиус-вектором в каждой точке интегрирования связан с функцией рельефа  $h(x)$  соотношением  $\text{tg } \psi = h'(x)$ , очевидно, что  $\cos \psi = [1 + h'^2(x)]^{-1/2}$ .

Условие на границе раздела сред для второго члена в квадратных скобках в уравнении (6) записывается в виде отношения разложений по ряду нормальных волн с учетом высотного множителя  $y$  [1,4]:

$$\frac{1}{ikW_0} \frac{\partial W_0}{\partial n} \Big|_s = \frac{-\left(\frac{2}{ka}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\pi x_1} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ix_1 t_s}}{t_s - q^2} \frac{w'(t_s - y)}{w(t_s)}}{i\sqrt{\pi x_1} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ix_1 t_s}}{t_s - q^2} \frac{w(t_s - y)}{w(t_s)}} \cdot \cos \psi$$

Здесь  $q = i\left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \delta_0$ ,  $x_1 = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \theta$ ,  $y = \left(\frac{2}{ka}\right)^{\frac{1}{3}} kh$ ,  $h$  - приподнятость точки наблюдения относительно уровня точки источника,  $w(t_s)$ ,  $w'(t_s)$  - функция Эйри и ее производная,  $t_s$  - нули трансцендентного уравнения  $f(t_s) = w'(t_s) - qw(t_s) = 0$ . Нули  $t_s$  находятся методом последовательных приближений Ньютона  $t_s^{(m+1)} = t_s^{(m)} - f(t_s^{(m)})/f'(t_s^{(m)})$ ,  $m$  - номер итерации [4].

Функцию Эйри и ее производную удобно представлять в виде разложений:

$$w(t_s) = \alpha(\varepsilon)w(t_s^{(0)}) + \beta(\varepsilon)w'(t_s^{(0)}),$$

$$w'(t_s) = \alpha'(\varepsilon)w(t_s^{(0)}) + \beta'(\varepsilon)w'(t_s^{(0)}),$$

где  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  - вспомогательные ряды по степеням параметра  $\varepsilon = t_s - t_s^{(0)}$ . В зависимости от параметра  $q$  значения  $t_s^{(0)}$  соответствуют либо нулям производной функции Эйри  $t_{0s}$ , либо нулям самой функции Эйри  $t_{\infty s}$  [4]. С учетом того, что  $q = w'(t_s)/w(t_s)$ , для высотных множителей оказываются справедливы формулы:

$$w(t_s - y)/w(t_s) = \alpha(\varepsilon) + q\beta(\varepsilon);$$

$$w'(t_s - y)/w'(t_s) = \alpha'(\varepsilon) + q\beta'(\varepsilon).$$

#### 4. Численные результаты

На рис. 3 в качестве примера приведены результаты расчета модуля и аргумента функции ослабления для радиотрассы Ангарск-Чита протяженностью 670 км на частоте 576 кГц. Сравнительные расчеты выполнены по методу интегрального уравнения Хаффорда [5, 6] и по методу интегрального уравнения (6). При численном моделировании учитывались рельеф и электрические неоднородности радиотрассы. В таблице 1 приведены значения каждого из 8 импедансных участков радиотрассы. Для метода обобщенного интегрального уравнения Фейнберга выбрано значение однородного импеданса, которое равно средней величине для всей трассы  $\delta_0 = 0.1 \exp(-i45^\circ)$ . Оптимальный выбор значения однородного импеданса позволяет существенно оптимизировать численное решение. В ряде случаев путем подбора можно для одного или нескольких импедансных участков свести к минимуму подинтегральную величину в уравнении (6). Из графиков видно, что рельеф заметно искажает амплитудно-фазовую структуру поля. Расходимости численных значений модуля  $|W|$  и дополнительной фазы  $\arg W$  функции ослабления, выполненных с использованием интегрального уравнения Хаффорда, начинают проявляться с расстояния от источника около 460 км. При этом расчеты по формуле (6) дают устойчивые результаты расчетов на всем протяжении радиотрассы как для модуля, так и для дополнительной фазы.

Таблица 1. Импедансные разбиения 8-кусочной радиотрассы «Ангарск - Чита» на частоте 576 кГц.

0-65 км	65-145 км	145-230 км	230-270 км	270-395 км	395-440 км	440-650 км	650-670 км
$\delta_1=0.14 \times$ $\times \exp(-i47^\circ)$	$\delta_2=0.17 \times$ $\times \exp(-i45^\circ)$	$\delta_3=0.07 \times$ $\times \exp(-i45^\circ)$	$\delta_4=0.1 \times$ $\times \exp(-i43^\circ)$	$\delta_5=0.2 \times$ $\times \exp(-i32^\circ)$	$\delta_6=0.1 \times$ $\times \exp(-i43^\circ)$	$\delta_7=0.2 \times$ $\times \exp(-i32^\circ)$	$\delta_8=0.17 \times$ $\times \exp(-i45^\circ)$

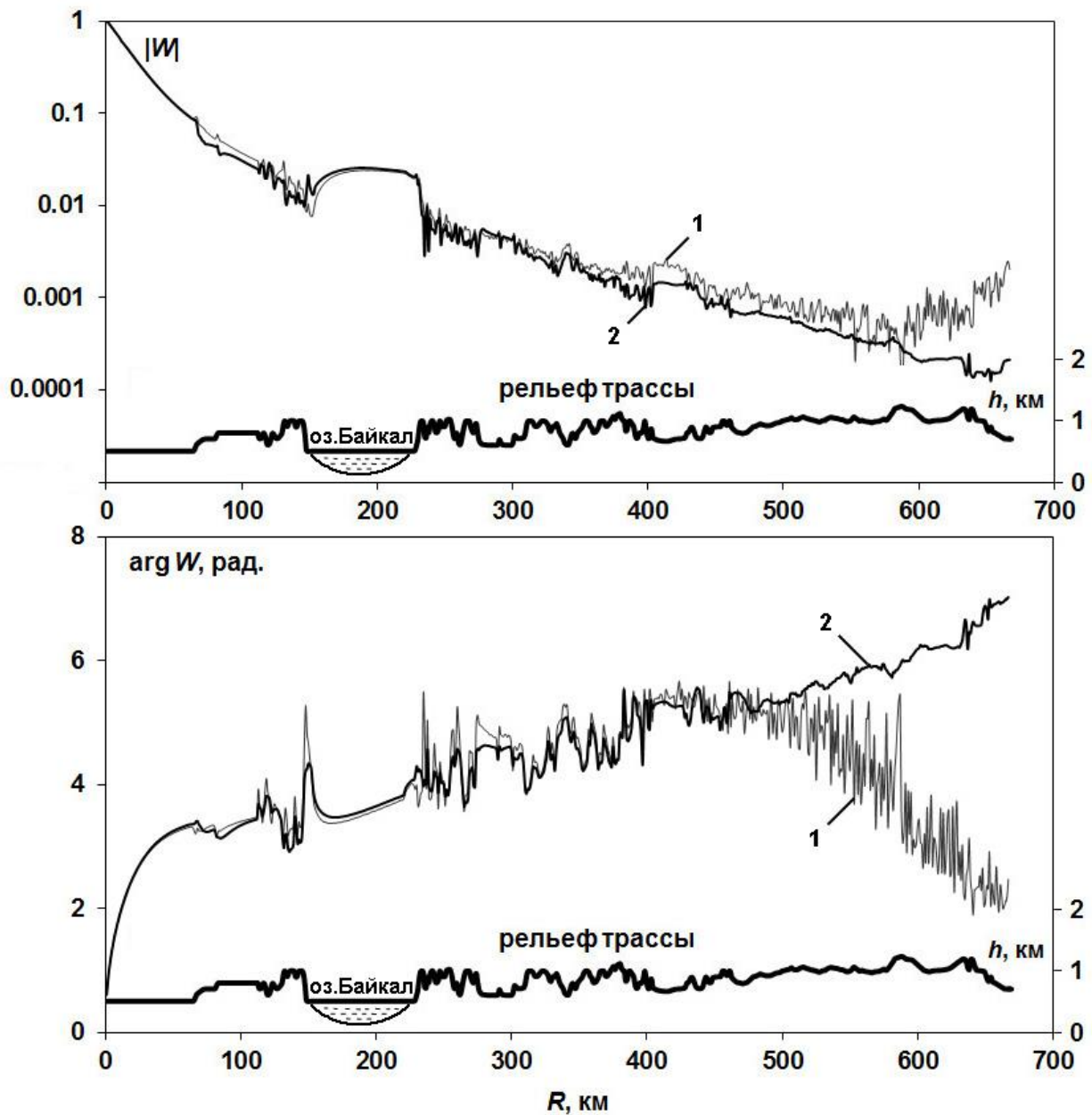


Рис. 3. Модельные расчеты  $|W|$  и  $\arg W$  для 8-кусочной гористой трассы.

1 – расчет по методу интегрального уравнения Хаффорда [5], 2 – расчет по методу обобщенного уравнения Фейнберга (6).

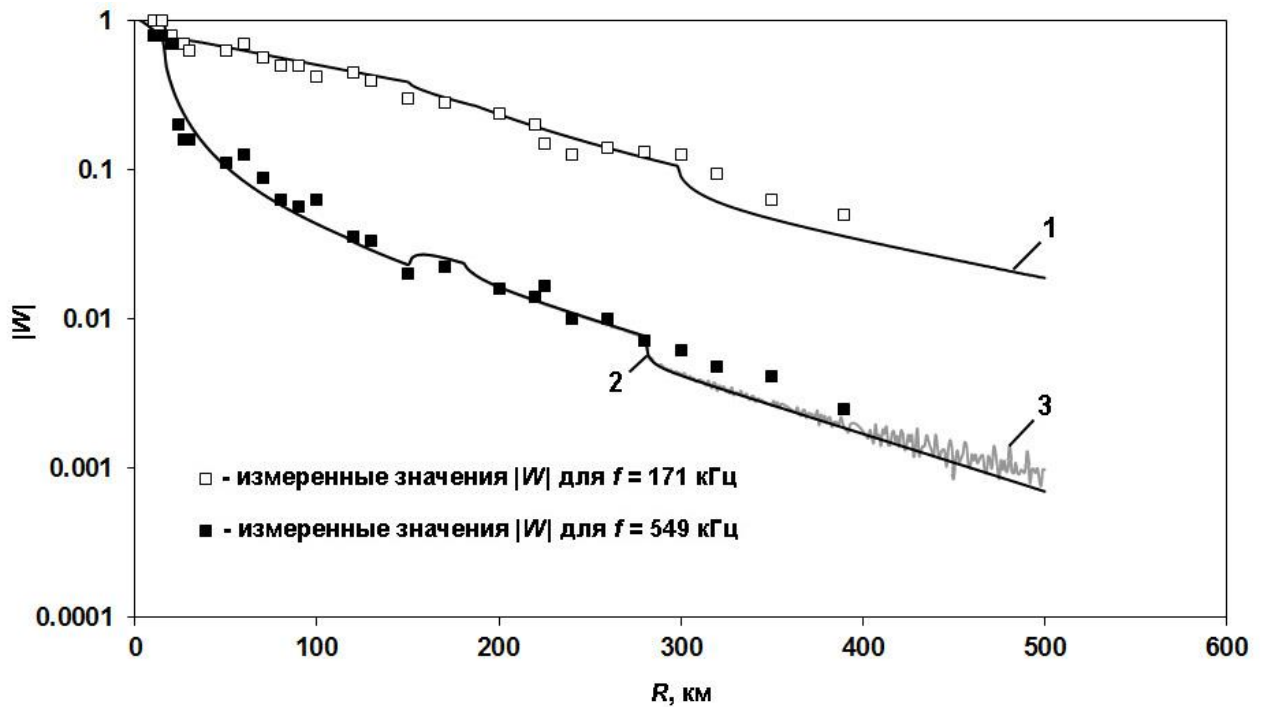


Рис. 4. Измеренные и расчетные значения  $|W|$  для кусочно-однородной трассы Якутск – Теплый Ключ.

- 1 – расчет по методу уравнения Фейнберга на частоте 171 кГц;
- 2 - расчет по методу уравнения Фейнберга на частоте 549 кГц;
- 3 - расчет по методу уравнения Хаффорда на частоте 549 кГц.

На рис. 4 представлены для сравнения численные расчеты  $|W|$  с экспериментальными результатами, полученными методом радиокомпарирования на радиотрассе Якутск – Теплый Ключ (Предгорье Верхоянского хребта) с борта самолета на частотах 171 и 549 кГц. Методом обобщенного интегрального уравнения Фейнберга выполнены расчеты  $|W|$  для 6-кусочной трассы по измеренным значениям поверхностного импеданса (таблица 2). Наблюдается очень хорошее совпадение расчетных и измеренных значений  $|W|$ . Однородный импеданс выбран равным  $\delta_0=0.09\exp(-i28^\circ)$  для частоты 171 кГц и  $\delta_0=0.14\exp(-i22^\circ)$  для частоты 549 кГц. Согласно графикам на рис. 4 расхождения экспериментальных и рассчитанных значений  $|W|$  в среднем находятся в пределах  $\pm 20\%$ . Для частоты 549 кГц дополнительно выполнены расчеты по методу интегрального уравнения Хаффорда, которые показали неустойчивость моделирования после 300 км.

Таблица 2. Импедансные разбиения мерзлотной радиотрассы Якутск - Теплый Ключ на частотах 171 и 549 кГц.

0-15 км	15-20 км	20-150 км	150-185 км	185-298 км	298-500 км
$f=171$ кГц					
$\delta_1=0.098 \times \exp(-i53^\circ)$	$\delta_2=0.226 \times \exp(-i28^\circ)$	$\delta_3=0.077 \times \exp(-i40^\circ)$	$\delta_4=0.09 \times \exp(-i28^\circ)$	$\delta_5=0.12 \times \exp(-i35^\circ)$	$\delta_6=0.176 \times \exp(-i10^\circ)$
$f=549$ кГц					
$\delta_1=0.114 \times \exp(-i52^\circ)$	$\delta_2=0.191 \times \exp(-i19^\circ)$	$\delta_3=0.2 \times \exp(-i20^\circ)$	$\delta_4=0.14 \times \exp(-i22^\circ)$	$\delta_5=0.182 \times \exp(-i26^\circ)$	$\delta_6=0.23 \times \exp(-i15^\circ)$

### Заключение

Модельные расчеты  $|W|$  и  $\arg W$  для 8-кусочной гористо-лесистой трассы показали, что использование обобщенного интегрального уравнения Фейнберга позволяет с высокой точностью рассчитывать функцию ослабления и уровни поля для протяженных неоднородных радиотрасс. При этом удачный подбор значения однородного поверхностного импеданса позволяет существенно оптимизировать численное решение интегрального уравнения (6) и повысить устойчивость самого решения. На практике расчеты по интегральному уравнению Хаффорда в диапазоне длинных и средних радиоволн можно использовать лишь до таких расстояний, при которых уровни модуля функции ослабления  $|W|$  достигают сверху значения 0.005. Метод расчета функции ослабления по обобщенному интегральному уравнению Фейнберга позволяет проводить расчеты электромагнитного поля на большие дальности. Это обусловлено тем, что внеинтегральный член формулы (6) вносит более существенный вклад в общее решение, а интегральная часть, учитывающая электрические и геометрические неоднородности, служит добавкой. Расчеты однородной функции ослабления  $W_0$  выполняются по ряду нормальных волн В.А. Фока для сферической модели Земли при выполнении импедансных граничных условий Щукина-Леонтовича  $|\delta_0|^2 \ll 1$  для любых значений фазы поверхностного импеданса из интервала  $(-90^\circ < \arg \delta_0 < 90^\circ)$ .

Исследование выполнено по госбюджетному проекту «Распространение радиоволн в неоднородных импедансных каналах» и частично при финансовой поддержке РФФИ и Министерства образования и науки Республики Саха (Якутия) в рамках научного проекта № 18-41-140002-р\_а.

### **Литература**

1. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. - М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
2. Wait J.R. Electromagnetic waves in stratified media. - New York: Pergamon Press Inc, 1962. 372 p.
3. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. - М.: Физматлит, 1999. 496 с.
4. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. - М.: Наука, 1991. 196 с.
5. Hufford G.A. An integral equation approach to the problem of wave propagation over an irregular surface // Quarterly of Applied Mathematics. 1952. Vol. 9. p. 391-404.
6. Проскурин Е.П., Пылаев А.А., Тихомиров Н.П., Штейнберг А.А. Распространение радиоволн над электрически и геометрически неоднородными трассами // Проблемы дифракции и распространения волн. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. Вып. 18. с. 171-183.
7. Горшенев А.М., Тихомиров Н.П. Численное решение уравнения Фейнберга для функции ослабления на электрически неоднородных трассах // Тезисы докладов Межведомственного семинара по распространению километровых и более длинных радиоволн. Хабаровск, 1983. с. 39-40.
8. Башкуев Ю.Б., Хаптанов В.Б., Дембелов М.Г. Экспериментальное доказательство существования поверхностной электромагнитной волны // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 3. с. 88-95.

9. Дембелов М.Г., Башкуев Ю.Б. Моделирование распространения длинных и средних радиоволн в гористой местности // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т. 10, № 4. с. 11-15.

**Для цитирования:**

Дембелов М.Г., Башкуев Ю.Б., Мельчинов В.П. Поле земной волны над протяженными неоднородными радиотрассами. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov19/11/text.pdf>. DOI 10.30898/1684-1719.2019.11.11