

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ФАРАДЕЯ ОТ ЗАДАННЫХ ИСТОЧНИКОВ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ИСХОДЯ ИЗ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЛЯ НА Е- И Н-ВОЛНЫ

Е. И. Лаврецкий

АО НИИ Точных Приборов, Москва, ул. Декабристов, владение 51

Статья поступила в редакцию 12 октября 2020 г.

Аннотация. Выведены формулы для напряженностей электрического и магнитного полей в виде разложений на Е- и Н-волны, создаваемых заданными сторонними электрическими и магнитными токами в сферической системе координат. На их основе были получены аналитические формулы для напряженностей полей в спиральном базисе от сторонних источников круговой поляризации. По известным напряженностям полей были получены и исследованы формулы для векторов Фарадея в спиральном базисе, описывающих волны правой и левой поляризации. Были рассчитаны потоки вектора Пойнтинга для волн обеих круговых поляризации. Проведено обсуждение полученных представлений для векторов Фарадея и результатов других исследователей.

Ключевые слова: электромагнитное поле, излучение волн, потенциалы Дебая, сферические гармоники, вектора Фарадея.

Abstract. Formulas for electric and magnetic field strengths as sums of TE- and TM-modes in spherical coordinates excited by given volume electric and magnetic currents were derived. On the basis of them we obtained analytical formulas for field strengths in spiral basis excited by sources of circular polarization. From the known field strengths we derived and investigated formulas for Faraday vectors in spiral basis for waves of right and left circular polarizations. Pointing vector flows were calculated for waves of both circular polarizations. Obtained presentations for Faraday vectors and known results of other explorers are discussed.

Key words: electromagnetic fields, electromagnetic radiation, Debye potentials, spherical harmonics, spherical wave expansion, Faraday vectors.

Посвящается памяти моего учителя,
 профессора кафедры АУ и РРВ МЭИ
 Вадима Викентьевича Бодрова (1936-2019)

Введение

В последнее время одним из популярных направлений прикладной электродинамики стали методы расчетов с применением векторов Фарадея, представляющих собой линейные комбинации напряженностей электрических и магнитных полей [1-4]. Введение таких векторов позволяет разделить систему уравнений Максвелла на две независимые подсистемы уравнений: для электромагнитных волн правой и левой поляризации. В свете исторических исследований приоритета и зарубежных публикаций вектора Фарадея недавно были названы векторами Римана-Зильберштейна [3,4], что не меняет их сути.

Изложим кратко ключевые идеи публикаций [1-4], представляющие интерес для последующего рассмотрения. Для случая линейной изотропной среды с постоянными во времени параметрами вектора Фарадея были введены посредством формул

$$\vec{F}_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \vec{E} \mp i\sqrt{z} \cdot \vec{H} \right), \quad (1)$$

где $z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ – волновое сопротивление среды. Вектор \vec{F}_+ соответствует правой поляризации, вектор \vec{F}_- соответствует левой поляризации. В среде с пространственно-однородным импедансом ($grad z = 0$) уравнения Максвелла преобразуются в систему двух независимых уравнений для векторов Фарадея с соответствующими источниками возбуждения:

$$\begin{cases} rot \vec{F}_+ - k_a \vec{F}_+ = \vec{j}_+ \\ rot \vec{F}_- + k_a \vec{F}_- = \vec{j}_- \end{cases}, \quad (2)$$

где $k_a = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ – волновое число, а плотности сторонних токов (токов круговой поляризации) представляют собой линейные комбинации объемных плотностей магнитного и электрического токов

$$\vec{j}_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \vec{j}^M \pm i\sqrt{z} \cdot \vec{j}^E \right). \quad (3)$$

Были найдены векторные сферические гармоники, которые являются решениями уравнений (2) для однородного случая (с нулевыми источниками возбуждения). В сферической системе координат в спиральном базисе [5] векторные сферические гармоники были записаны в виде [3,4]

$$\vec{F}_{nm}^{\pm}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} P_{m,1}^n(\cos\theta) \cdot \left(\frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} r \mp i\right) \\ P_{m,0}^n(\cos\theta) \cdot \left(\frac{i\sqrt{2n(n+1)}}{kr}\right) \\ -P_{m,-1}^n(\cos\theta) \cdot \left(\frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} r \pm i\right) \end{bmatrix} z_n(kr) e^{-im\varphi}, \quad (4)$$

где $z_n(kr)$ – сферическая функция Ханкеля, $P_{m,m'}^n(z)$ – D-функция Вигнера [5,6]. При нахождении выражений для сферических гармоник (4) угловые функции задавались в [1-4] «директивным» путем, как функции полного набора неприводимых представлений группы вращений трехмерного евклидова пространства, применяемые для нахождения собственных функций линейных задач любых тензорных объектов, а радиальные функции были найдены путем решения уравнений (2) для однородного случая методом разделения переменных.

В работах [1-4] в явном виде частные неоднородные решения уравнений (2) не искали, ограничивались нахождением выражений сферических гармоник. Для расчета полей заданных источников применяли разложения по сферическим гармоникам с неизвестными коэффициентами разложения, при этом сами коэффициенты определяли с помощью леммы Лоренца (аналогично тому, как решают задачу возбуждения металлических волноводов заданными источниками при известных собственных функциях поперечного сечения).

В [1,2] был рассчитан поток вектора Пойнтинга через поверхность сферы, используя вектора Фарадея. Было получено, что поток вектора Пойнтинга равен разности мощностей спиральных составляющих поля:

$$P_{\text{изл}} = \frac{1}{2} \cdot (|f_{+1}|^2 - |f_{-1}|^2), \quad (5)$$

где поток мощности одной составляющей направлен наружу сферы, а другой - внутрь сферы. Мощность составляющей, поток которой направлен наружу, всегда превышает мощность другой составляющей на постоянную величину излучённой мощности. В [2-4] дана трактовка этого явления как соотношений мощностей падающей и отражённой волн в линии передачи, в данном случае, в сферическом волноводе.

Необходимо заметить, что поскольку вектора Фарадея (1) введены формулами для линейных комбинаций напряженностей полей, то всегда можно решить задачу расчета полей заданных источников известными методами, а затем сгруппировать напряженности полей по формуле (1), получив аналитические формулы для векторов Фарадея от заданных источников. В этом смысле вектора Фарадея носят некоторый вторичный характер по отношению к напряженностям электрического и магнитного поля. Наиболее интересный случай относится к векторам Фарадея в сферической системе координат. При объединении напряженностей полей в вектора Фарадея для решенных задач может быть достигнуто лучшее понимание физической сущности этих векторов, сняты все сомнения по отношению к этим векторам, выполнены соответствующие проверки формул и т.п.

Цель данной работы - получить и исследовать формулы для возбуждаемых заданными сторонними источниками векторов Фарадея в сферической системе координат. Для этого сначала выведены аналитические формулы для напряженностей электрического и магнитного полей от заданных сторонних источников в сферической системе координат в виде классических разложений на E- и H-волны. Затем были получены аналитические формулы для напряженностей электрического и магнитного полей от сторонних источников круговой поляризации в спиральном базисе. На последнем этапе по известным напряженностям полей были получены и исследованы формулы для векторов Фарадея; был рассчитан поток вектора Пойнтинга для волн разных круговых поляризаций.

1. Вывод выражений для полей заданных источников в сферической системе координат

Аналитическое решение задачи возбуждения полей в сферической системе координат наиболее просто получить с помощью введения потенциалов Дебая. Потенциалы Дебая были применены в [7] для решения задачи возбуждения цилиндрических металлических волноводов. В [8] с помощью потенциалов Дебая аналитически была решена задача расчета полей источников, находящихся под многослойным сферическим диэлектрическим укрытием.

Для получения аналитического решения в сферической системе координат будем действовать методически последовательно аналогично [8]. Пусть заданные сторонние источники находятся в свободном пространстве с проницаемостями ε_a и μ_a . Будем использовать зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$. Сначала запишем систему уравнений Максвелла в сферических координатах, введем потенциалы Дебая. Затем получим системы уравнений для E- и H-волн (классификация по радиальной координате) и решим их, находя частные решения.

Уравнения Максвелла в сферических координатах (r, θ, φ) имеют вид [9]:

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\theta = i\omega \varepsilon_a E_r + j_r^3 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = i\omega \varepsilon_a E_\theta + j_\theta^3 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} H_r = i\omega \varepsilon_a E_\varphi + j_\varphi^3 \end{cases} \quad (6')$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\theta = -i\omega \mu_a H_r - j_r^M \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = -i\omega \mu_a H_\theta - j_\theta^M \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} E_r = -i\omega \mu_a H_\varphi - j_\varphi^M \end{cases} \quad (6'')$$

Введем потенциалы Дебая в сферических координатах с помощью соотношений [8]:

$$\begin{cases} H_\theta = -\frac{\partial \Phi^3}{r \sin \theta \partial \varphi} + \frac{\partial \Phi^M}{r \partial \theta} \\ H_\varphi = \frac{\partial \Phi^3}{r \partial \theta} + \frac{\partial \Phi^M}{r \sin \theta \partial \varphi} \\ E_\theta = \frac{\partial \Psi^3}{r \partial \theta} + \frac{\partial \Psi^M}{r \sin \theta \partial \varphi} \\ E_\varphi = \frac{\partial \Psi^3}{r \sin \theta \partial \varphi} - \frac{\partial \Psi^M}{r \partial \theta} \end{cases} \quad (7)$$

Подставляем (7) в уравнения (6') и (6''), и после ряда преобразований получим две отдельные системы уравнений, для Е-волн и для Н-волн. Е-волны (электрические волны) имеют радиальную компоненту только электрического поля, в свою очередь Н-волны (магнитные волны) имеют радиальную компоненту только магнитного поля.

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \left(E_r - \frac{\partial \Psi^3}{\partial r} - i\omega \mu_a \Phi^3 \right) = R(\vec{j}^M) \\ \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \left(\frac{\partial \Phi^3}{\partial r} + i\omega \varepsilon_a \Psi^3 \right) = -D(\vec{j}^3) \\ \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \Phi^3 = i\omega \varepsilon_a E_r + j_r^3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Е-волны} \\ \text{Н-волны} \end{array} \quad (8')$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \left(H_r - \frac{\partial \Phi^M}{\partial r} - i\omega \varepsilon_a \Psi^M \right) = -R(\vec{j}^3) \\ \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \left(\frac{\partial \Psi^M}{\partial r} + i\omega \mu_a \Phi^M \right) = -D(\vec{j}^M) \\ \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \Psi^M = i\omega \mu_a H_r + j_r^M \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Н-волны} \\ \text{Е-волны} \end{array} \quad (8'')$$

В (8') и (8'') введено следующее обозначение оператора Лапласа для координат, касательных к сфере [10]:

$$\Delta_{\theta\varphi} \psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad (9)$$

Функции источника $R(\vec{j})$ и $D(\vec{j})$ в (8') и (8'') равны

$$R(\vec{j}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial j_\theta}{\partial \varphi} = \vec{r}^0 \cdot \text{rot} \vec{j} \quad (10')$$

$$D(\vec{j}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} = \text{div} \vec{j}_\perp \quad (10'')$$

Обозначение \vec{j}_\perp используется для стороннего тока без радиальной компоненты («поперечный» ток по отношению к продольному вектору).

Для решения систем уравнений в сферической системе координат нужно разложить продольные поля и потенциалы Дебая по собственным функциям оператора Лапласа $\Delta_{\theta\varphi}$, удовлетворяющим уравнению

$$\Delta_{\theta\varphi} Y = -\kappa_{nm}^2 Y \quad (11)$$

У оператора $\Delta_{\theta\varphi}$ есть два класса решений: регулярные при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$; растущие при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \pi$. Ограниченность переменных θ и φ порождает дискретный спектр. Решения уравнения нахождение собственных значений, удовлетворяющие условиям

$$Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi),$$

$$|Y(0, \varphi)| < \infty, |Y(\pi, \varphi)| < \infty,$$

обладающие непрерывными производными до 2-го порядка включительно, называются сферическими функциями [10].

Ортонормированные сферические функции имеют вид [11]:

$$f_{nm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}} \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) e^{-im\varphi}, \quad n \geq 0, |m| \leq n \quad (12)$$

где $P_n^{(m)}(z)$ – присоединенная функция Лежандра [11,12]. Собственные значения уравнения (11) равны $\kappa_{nm}^2 = n \cdot (n + 1)$ [11].

Разложим радиальные составляющие полей и потенциалы Дебая по ортонормированным сферическим функциям (12).

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \sum_{n,m} E_{nm}(r) f_{nm}(\theta, \varphi) \\ \Psi^\vartheta &= \sum_{n,m} \Psi_{nm}^\vartheta(r) f_{nm}(\theta, \varphi) \\ \Phi^\vartheta &= \sum_{n,m} \Phi_{nm}^\vartheta(r) f_{nm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Размерность:} \\ [f_{nm}] = 1 \\ [\Psi_{nm}^{\vartheta, M}] = B \\ [\Phi_{nm}^{\vartheta, M}] = A \end{array} \quad (13')$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \sum_{n,m} H_{nm}(r) f_{nm}(\theta, \varphi) \\ \Psi^M &= \sum_{n,m} \Psi_{nm}^M(r) f_{nm}(\theta, \varphi) \\ \Phi^M &= \sum_{n,m} \Phi_{nm}^M(r) f_{nm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (13'')$$

Ряды следует понимать следующим образом (см. определение присоединенных функций Лежандра [11]):

$$\sum_{n,m}\{\dots\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \{\dots\}.$$

Подставляем разложения (13') и (13'') в системы уравнений для электрических и магнитных волн. Затем проецируем уравнения систем на функции $f_{n',m'}^*(\theta, \varphi)$ (знак «*» означает комплексное сопряжение), используем свойство ортонормированности скалярных функций разложения, получаем:

$$\begin{cases} \kappa_{nm}^2 \left(E_{nm}(r) - \frac{\partial \Psi_{nm}^{\exists}(r)}{\partial r} - i\omega\mu_a \Phi_{nm}^{\exists}(r) \right) = -R_{nm}^M(r) \\ \kappa_{nm}^2 \left(\frac{\partial \Phi_{nm}^{\exists}(r)}{\partial r} + i\omega\varepsilon_a \Psi_{nm}^{\exists}(r) \right) = D_{nm}^{\exists}(r) \\ i\omega\varepsilon_a E_{nm}(r) + \frac{1}{r^2} \kappa_{nm}^2 \Phi_{nm}^{\exists}(r) = -j_{nm}^{\exists}(r) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{E-волны} \\ \\ \end{array} \quad (14')$$

$$\begin{cases} \kappa_{nm}^2 \left(H_{nm}(r) - \frac{\partial \Phi_{nm}^M(r)}{\partial r} - i\omega\varepsilon_a \Psi_{nm}^M(r) \right) = R_{nm}^{\exists}(r) \\ \kappa_{nm}^2 \left(\frac{\partial \Psi_{nm}^M(r)}{\partial r} + i\omega\mu_a \Phi_{nm}^M(r) \right) = D_{nm}^M(r) \\ i\omega\mu_a H_{nm}(r) + \frac{1}{r^2} \kappa_{nm}^2 \Psi_{nm}^M(r) = -j_{nm}^M(r) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{H-волны} \\ \\ \end{array} \quad (14'')$$

Здесь введены следующие обозначения для функций источников:

$$\begin{aligned} R_{nm}^M(r) &= r^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R(\vec{J}^M) \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ D_{nm}^{\exists}(r) &= r^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} D(\vec{J}^{\exists}) \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ j_{nm}^{\exists}(r) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} j_r^{\exists} \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (15')$$

$$\begin{aligned} R_{nm}^{\exists}(r) &= r^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R(\vec{J}^{\exists}) \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ D_{nm}^M(r) &= r^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} D(\vec{J}^M) \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ j_{nm}^M(r) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} j_r^M \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (15'')$$

Прежде, чем решать полученные системы уравнений (14') и (14''), запишем выражения для касательных к сфере компонент полей используя (7) и (13).

$$\begin{cases} H_\theta = -\sum_{n,m} \Phi_{nm}^\varepsilon(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} + \sum_{n,m} \Phi_{nm}^M(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} \\ H_\varphi = \sum_{n,m} \Phi_{nm}^\varepsilon(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} + \sum_{n,m} \Phi_{nm}^M(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} \\ E_\theta = \sum_{n,m} \Psi_{nm}^\varepsilon(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} + \sum_{n,m} \Psi_{nm}^M(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} \\ E_\varphi = \sum_{n,m} \Psi_{nm}^\varepsilon(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} - \sum_{n,m} \Psi_{nm}^M(r) \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} \end{cases} \quad (16)$$

Вектора, касательные к сфере, будем обозначать \vec{H}_\perp и \vec{E}_\perp (подразумеваем, что эти вектора перпендикулярны радиальному вектору). Отсюда можем записать:

$$\begin{aligned} \vec{H}_\perp = & \sum_{n,m} \Phi_{nm}^\varepsilon(r) \left(-\frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} \vec{\theta}^0 + \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} \vec{\varphi}^0 \right) + \\ & + \sum_{n,m} \Phi_{nm}^M(r) \left(\frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} \vec{\theta}^0 + \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} \vec{\varphi}^0 \right) \quad , \end{aligned} \quad (17')$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp = & \sum_{n,m} \Psi_{nm}^\varepsilon(r) \left(\frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} \vec{\theta}^0 + \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} \vec{\varphi}^0 \right) + \\ & + \sum_{n,m} \Psi_{nm}^M(r) \left(\frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \sin\theta \partial\varphi} \vec{\theta}^0 - \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r \partial\theta} \vec{\varphi}^0 \right) \quad . \end{aligned} \quad (17'')$$

По аналогии с полями в цилиндрическом металлическом волноводе [7] введем обозначения для векторных угловых функций разложения поперечного магнитного поля

$$\vec{g}_{nm} = -\frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\sin\theta \partial\varphi} \vec{\theta}^0 + \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \vec{\varphi}^0 \quad , \quad (18')$$

$$\vec{p}_{nm} = \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \vec{\theta}^0 + \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\sin\theta \partial\varphi} \vec{\varphi}^0 \quad , \quad (18'')$$

и векторных угловых функций разложения поперечного электрического поля

$$\vec{G}_{nm} = \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \vec{\theta}^0 + \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\sin\theta \partial\varphi} \vec{\varphi}^0 \quad , \quad (18''')$$

$$\vec{p}_{nm} = \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\sin\theta \partial\varphi} \vec{\theta}^0 - \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \vec{\varphi}^0 \quad . \quad (18''')$$

Тогда можем записать

$$\vec{H}_\perp = \vec{H}_\perp^{\text{Э}} + \vec{H}_\perp^{\text{М}} = \frac{1}{r} \sum_{n,m} \Phi_{nm}^{\text{Э}}(r) \vec{g}_{nm} + \frac{1}{r} \sum_{n,m} \Phi_{nm}^{\text{М}}(r) \vec{P}_{nm} \quad (19')$$

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}_\perp^{\text{Э}} + \vec{E}_\perp^{\text{М}} = \frac{1}{r} \sum_{n,m} \Psi_{nm}^{\text{Э}}(r) \vec{G}_{nm} + \frac{1}{r} \sum_{n,m} \Psi_{nm}^{\text{М}}(r) \vec{p}_{nm} \quad (19'')$$

Векторные угловые функции таковы, что между ними имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{nm} &= \vec{G}_{nm}, & \vec{g}_{nm} &= -\vec{p}_{nm} \\ \vec{g}_{nm} &= \vec{r}^0 \times \vec{G}_{nm}, & \vec{G}_{nm} &= \vec{g}_{nm} \times \vec{r}^0 \\ \vec{P}_{nm} &= \vec{r}^0 \times \vec{p}_{nm}, & \vec{p}_{nm} &= \vec{P}_{nm} \times \vec{r}^0 \end{aligned} \quad (20)$$

Легко показать, что выполняются следующие соотношения ортогональности для векторных угловых функций:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{G}_{nm} \cdot \vec{G}_{n'm'}^* \cdot \sin\theta d\theta d\varphi &= \kappa_{nm}^2 \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \\ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{p}_{nm} \cdot \vec{p}_{n'm'}^* \cdot \sin\theta d\theta d\varphi &= \kappa_{nm}^2 \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \\ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{g}_{nm} \cdot \vec{g}_{n'm'}^* \cdot \sin\theta d\theta d\varphi &= \kappa_{nm}^2 \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \\ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{P}_{nm} \cdot \vec{P}_{n'm'}^* \cdot \sin\theta d\theta d\varphi &= \kappa_{nm}^2 \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \\ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{G}_{nm} \cdot \vec{p}_{n'm'}^* \cdot \sin\theta d\theta d\varphi &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{g}_{nm} \cdot \vec{P}_{n'm'}^* \cdot \sin\theta d\theta d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера [10].

Выразим функции $R_{nm}(r)$ и $D_{nm}(r)$ через плотности сторонних токов (в (15) это есть функции от производных сторонних токов), перенося производные на угловые функции. Будем интегрировать по частям в следующих интегралах по угловым координатам:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta j_{\theta,\varphi}) \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta &= - \int_{\theta=0}^{\pi} j_{\theta,\varphi} \cdot \frac{\partial f_{nm}^*(\theta, \varphi)}{\partial\theta} \sin\theta d\theta \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial j_{\theta,\varphi}}{\partial\varphi} \cdot f_{nm}^*(\theta, \varphi) d\varphi &= - \frac{1}{\sin\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} j_{\theta,\varphi} \cdot \frac{\partial f_{nm}^*(\theta, \varphi)}{\partial\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} R_{nm}(r) &= r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(j_\theta \cdot \frac{\partial f_{nm}^*(\theta, \varphi)}{\sin\theta \partial\varphi} - j_\varphi \cdot \frac{\partial f_{nm}^*(\theta, \varphi)}{\partial\theta} \right) \sin\theta d\theta d\varphi \\ D_{nm}(r) &= -r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(j_\theta \cdot \frac{\partial f_{nm}^*(\theta, \varphi)}{\partial\theta} + j_\varphi \cdot \frac{\partial f_{nm}^*(\theta, \varphi)}{\sin\theta \partial\varphi} \right) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (22)$$

Легко видеть, что под знаком интеграла находятся скалярные произведения плотностей поперечных токов и векторных угловых функций (18). Для записи функций источника $R_{nm}^M(r)$ и $D_{nm}^E(r)$ для Е-волн (15') будем использовать векторные угловые функции \vec{g}_{nm} и \vec{G}_{nm} :

$$\begin{aligned} R_{nm}^M(r) &= -r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{J}_{\perp}^M \vec{g}_{nm}^* \sin\theta d\theta d\varphi = -r \cdot \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^M \vec{g}_{nm}^* d\Omega \\ D_{nm}^E(r) &= -r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{J}_{\perp}^E \vec{G}_{nm}^* \sin\theta d\theta d\varphi = -r \cdot \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^E \vec{G}_{nm}^* d\Omega \end{aligned} \quad (23')$$

Для записи функций источника $R_{nm}^H(r)$ и $D_{nm}^M(r)$ для Н-волн (15'') будем использовать векторные угловые функции \vec{p}_{nm} и \vec{P}_{nm} :

$$\begin{aligned} R_{nm}^H(r) &= r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{J}_{\perp}^H \vec{p}_{nm}^* \sin\theta d\theta d\varphi = r \cdot \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^H \vec{p}_{nm}^* d\Omega \\ D_{nm}^M(r) &= -r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{J}_{\perp}^M \vec{P}_{nm}^* \sin\theta d\theta d\varphi = -r \cdot \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^M \vec{P}_{nm}^* d\Omega \end{aligned} \quad (23'')$$

В (23') и (23'') использовалось обозначение интеграла по телесному углу $\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \{...\} \sin\theta d\theta d\varphi = \iint_{\Omega} \{...\} d\Omega$.

Для решения системы уравнений (14') выразим все неизвестные спектральные плотности через Φ_{nm}^E . Для нахождения Φ_{nm}^E должно использоваться дифференциальное уравнение второго порядка.

$$\frac{\partial^2 \Phi_{nm}^E(r)}{\partial r^2} + \left(k_a^2 - \frac{\kappa_{nm}^2}{r^2} \right) \Phi_{nm}^E(r) = -N_{nm}^E(r) \quad (24')$$

Для решения системы уравнений (14'') выразим все неизвестные спектральные плотности через функцию Ψ_{nm}^M , удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{nm}^M(r)}{\partial r^2} + \left(k_a^2 - \frac{\kappa_{nm}^2}{r^2} \right) \Psi_{nm}^M(r) = -N_{nm}^M(r) \quad (24'')$$

Заметим, что при $r^2 \rightarrow \infty$ уравнения (24') и (24'') переходят в уравнения Гельмгольца и описывают плоские волны.

Правые части дифференциальных уравнений (24') и (24'') рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} N_{nm}^E(r) &= -j_{nm}^E(r) + \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(i\omega \varepsilon_a \cdot R_{nm}^M(r) - \frac{\partial}{\partial r} (D_{nm}^E(r)) \right) = \\ &= - \int_{\Omega} j_r^E \cdot f_{nm}^* d\Omega + \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(-i \frac{k_0 \varepsilon_r}{W_0} \cdot r \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^M \vec{g}_{nm}^* d\Omega + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^E \vec{G}_{nm}^* d\Omega \right) \right) \end{aligned} \quad (25')$$

$$N_{nm}^M(r) = -j_{nm}^M(r) - \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(i\omega\mu_a \cdot R_{nm}^{\exists}(r) + \frac{\partial}{\partial r} (D_{nm}^M(r)) \right) = \quad (25'')$$

$$= - \int_{\Omega} j_r^M \cdot f_{nm}^* d\Omega - \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(ik_0 W_0 \mu_r \cdot r \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^{\exists} \vec{P}_{nm}^* d\Omega - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\Omega} \vec{J}_{\perp}^M \vec{P}_{nm}^* d\Omega \right) \right)$$

Рассмотрим следующее уравнение 2-го порядка (уравнение Риккати-Бесселя), использующееся для нахождения функции Грина:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} G + \left(k_a^2 - \frac{\kappa_{nm}^2}{r^2} \right) G = -\delta(r - r_0) \quad (26)$$

Функция Грина для него имеет следующий вид [8]:

$$G(r, r_0) = \frac{1}{ik_a} \cdot \begin{cases} \psi_n(k_a r) \xi_n(k_a r_0), & \text{если } r < r_0 \\ \xi_n(k_a r) \psi_n(k_a r_0), & \text{если } r > r_0 \end{cases}, \quad (27)$$

где введены следующие обозначения для входящих функций

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x) = x \cdot j_n(x) \\ \xi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = x \cdot h_n^{(2)}(x) \end{cases}. \quad (28)$$

Сферические функции Бесселя и Ханкеля равны [12]:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (29)$$

$$h_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x) \quad (30)$$

В общем виде частное неоднородное решение для E-волн (24') равно:

$$\Phi_{nm}^{\exists}(r) = \frac{1}{ik_a} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists}(r') \begin{cases} \psi_n(k_a r) \xi_n(k_a r'), & \text{если } r < r_{min} \\ \xi_n(k_a r) \psi_n(k_a r'), & \text{если } r > r_{max} \end{cases} dr' \quad (31)$$

Составляющие полей для E-волн могут быть рассчитаны по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{i\omega\epsilon_a} \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \left(\frac{\kappa_{nm}^2}{r^2} \Phi_{nm}^{\exists}(r) + j_{nm}^{\exists}(r) \right) \\ \vec{E}_{\perp}^{\exists} &= -\frac{1}{i\omega\epsilon_a} \cdot \frac{1}{r} \sum_{n,m} \vec{G}_{nm} \left(\frac{\partial \Phi_{nm}^{\exists}(r)}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_{nm}^2} D_{nm}^{\exists}(r) \right) \\ \vec{H}_{\perp}^{\exists} &= \frac{1}{r} \sum_{n,m} \vec{g}_{nm} \Phi_{nm}^{\exists}(r) \end{aligned} \right\} \text{E-волны} \quad (32)$$

В общем виде частное неоднородное решение для H-волн (24'') равно:

$$\Psi_{nm}^M(r) = \frac{1}{ik_a} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^M(r') \begin{cases} \psi_n(k_a r) \xi_n(k_a r'), & \text{если } r < r_{min} \\ \xi_n(k_a r) \psi_n(k_a r'), & \text{если } r > r_{max} \end{cases} dr' \quad (33)$$

Составляющие полей для Н-волн могут быть рассчитаны по формулам:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{i\omega\mu_a} \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \left(\frac{\kappa_{nm}^2}{r^2} \Psi_{nm}^M(r) + j_{nm}^M(r) \right) \\ \vec{E}_\perp^M &= \frac{1}{r} \sum_{n,m} \vec{p}_{nm} \Psi_{nm}^M(r) \\ \vec{H}_\perp^M &= -\frac{1}{i\omega\mu_a} \cdot \frac{1}{r} \sum_{n,m} \vec{P}_{nm} \left(\frac{\partial \Psi_{nm}^M(r)}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_{nm}^2} D_{nm}^M(r) \right) \end{aligned} \right\} \text{Н-волны} \quad (34)$$

Укажем, что выражения для полей (31)-(34) имеют общий характер, справедливы для любой точки наблюдения, в том числе в области сторонних источников.

2. Вывод выражений для напряженностей полей, возбуждаемых токами круговой поляризации

Как было указано выше, сторонние токи круговой поляризации (3) возбуждают независимые вектора Фарадея (1). В силу независимости векторов Фарадея будут независимыми также и возбуждаемые токами круговой поляризации соответствующие напряженности полей.

Получим выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, возбуждаемых токами круговой поляризации. Для простоты будем рассматривать случай вакуума, когда волновое число равно $k_a = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, а волновое сопротивление среды равно $W_0 = 120\pi$ Ом. Используя (3), выразим объемные плотности магнитного и электрического токов через сторонние токи круговой поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}^M &= -\sqrt{W_0} \cdot (\vec{j}_+ + \vec{j}_-) \\ \vec{j}^E &= \frac{i}{\sqrt{W_0}} \cdot (\vec{j}_+ - \vec{j}_-) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (35)$$

Таким образом, плотности магнитного и электрического токов представляют собой линейные комбинации плотностей токов круговой поляризации. Подставим (35) в выражения для функций источников (25') и (25''), будем использовать в них только угловые функции \vec{g}_{nm} и \vec{P}_{nm} (см. соотношения (20)). Функции источников (25') и (25'') можно представить в виде сумм функций, возбуждаемых токами разных круговых поляризаций.

$$N_{nm}^E(r) = N_{nm}^{E+}(r) + N_{nm}^{E-}(r) \quad (36')$$

$$\begin{aligned}
 N_{nm}^{\exists+}(r) &= \\
 &= -\frac{i}{\sqrt{W_0}} \left\{ \int_{\Omega} j_r^+ \cdot f_{nm}^* d\Omega + \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(-k_0 \cdot r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^+ \vec{g}_{nm}^* d\Omega - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^+ \vec{P}_{nm}^* d\Omega \right) \right) \right\} \\
 N_{nm}^{\exists-}(r) &= \\
 &= -\frac{i}{\sqrt{W_0}} \left\{ -\int_{\Omega} j_r^- \cdot f_{nm}^* d\Omega + \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(-k_0 \cdot r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^- \vec{g}_{nm}^* d\Omega + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^- \vec{P}_{nm}^* d\Omega \right) \right) \right\} \\
 N_{nm}^M(r) &= N_{nm}^{M+}(r) + N_{nm}^{M-}(r) \tag{36''} \\
 N_{nm}^{M+}(r) &= \\
 &= \sqrt{W_0} \left\{ \int_{\Omega} j_r^+ \cdot f_{nm}^* d\Omega + \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(-k_0 \cdot r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^+ \vec{g}_{nm}^* d\Omega - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^+ \vec{P}_{nm}^* d\Omega \right) \right) \right\} \\
 N_{nm}^{M-}(r) &= \\
 &= \sqrt{W_0} \left\{ \int_{\Omega} j_r^- \cdot f_{nm}^* d\Omega + \frac{1}{\kappa_{nm}^2} \left(k_0 \cdot r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^- \vec{g}_{nm}^* d\Omega - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\Omega} \vec{j}_{\perp}^- \vec{P}_{nm}^* d\Omega \right) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 N_{nm}^{M+}(r) &= iW_0 \cdot N_{nm}^{\exists+}(r) \tag{37} \\
 N_{nm}^{M-}(r) &= -iW_0 \cdot N_{nm}^{\exists-}(r)
 \end{aligned}$$

Соотношения (37) позволяют удобным образом записать отдельно поля для токов разных круговых поляризаций. Используем выражения для полей (31)-(34); для простоты рассмотрим точку наблюдения вне области источников при $r > r_{max}$ (область излучения).

Напряженности полей от токов правой поляризации \vec{j}_+ равны:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{\perp}(\vec{j}_+) &= \frac{1}{ik_0} \cdot \sum_{n,m} \frac{\vec{g}_{nm} \xi_n(k_0 r) - \vec{P}_{nm} \xi_n'(k_0 r)}{r} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \\
 \vec{E}_{\perp}(\vec{j}_+) &= -\frac{W_0}{k_0} \cdot \sum_{n,m} \frac{\vec{g}_{nm} \xi_n(k_0 r) - \vec{P}_{nm} \xi_n'(k_0 r)}{r} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \tag{38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_r(\vec{j}_+) &= \frac{i}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \kappa_{nm}^2 \cdot \frac{\xi_n(k_0 r)}{r^2} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \\
 E_r(\vec{j}_+) &= \frac{W_0}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \kappa_{nm}^2 \cdot \frac{\xi_n(k_0 r)}{r^2} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr'
 \end{aligned}$$

Напряженности полей от токов левой поляризации \vec{j}_- равны:

$$\vec{H}_{\perp}(\vec{j}_-) = \frac{1}{ik_0} \cdot \sum_{n,m} \frac{\vec{g}_{nm} \xi_n(k_0 r) + \vec{P}_{nm} \xi_n'(k_0 r)}{r} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists-}(r') \psi_n(k_0 r') dr'$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{J}_-) = \frac{W_0}{k_0} \cdot \sum_{n,m} \frac{\vec{g}_{nm}\xi_n(k_0r) + \vec{P}_{nm}\xi'_n(k_0r)}{r} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\pm}(r') \psi_n(k_0r') dr' \quad (39)$$

$$H_r(\vec{J}_-) = -\frac{i}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \kappa_{nm}^2 \cdot \frac{\xi_n(k_0r)}{r^2} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\pm}(r') \psi_n(k_0r') dr'$$

$$E_r(\vec{J}_-) = \frac{W_0}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \kappa_{nm}^2 \cdot \frac{\xi_n(k_0r)}{r^2} \cdot \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\pm}(r') \psi_n(k_0r') dr'$$

Легко видеть, что справедливы следующие соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей для разных круговых поляризаций:

$$\vec{E}(\vec{J}_+) = -iW_0 \cdot \vec{H}(\vec{J}_+)$$

$$\vec{E}(\vec{J}_-) = iW_0 \cdot \vec{H}(\vec{J}_-)$$

Запишем выражения для полей в спиральной системе координат, будем использовать контравариантные спиральные орты [5]:

$$\vec{e}'^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\vec{e}_\theta - i \cdot \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{e}'^0 = \vec{e}_r \quad (40)$$

$$\vec{e}'^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\vec{e}_\theta + i \cdot \vec{e}_\varphi)$$

Переход к спиральным ортам затронет только напряженности для поперечных полей (касательные к сфере компоненты). Для поперечных полей от токов правой поляризации \vec{J}_+ при переходе к спиральным ортам получаем следующие векторные функции:

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{g}_{nm}\xi_n(k_0r) - \vec{P}_{nm}\xi'_n(k_0r)}{r} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}'^{+1} \cdot \frac{\xi'_n(k_0r) - i\xi_n(k_0r)}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin\theta \partial \varphi} \right\} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}'^{-1} \cdot \frac{\xi'_n(k_0r) + i\xi_n(k_0r)}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin\theta \partial \varphi} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Аналогично получаем векторные функции для поперечных полей от токов левой поляризации \vec{J}_- :

$$\frac{\vec{g}_{nm}\xi_n(k_0r) + \vec{P}_{nm}\xi'_n(k_0r)}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}'_{+1} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i\xi_n(k_0 r)}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}'_{-1} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i\xi_n(k_0 r)}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \quad (42)$$

В итоге имеем:

$$\vec{H}_\perp(\vec{J}_+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{ik_0} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times$$

$$\times \left\{ \vec{e}'_{+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i\xi_n(k_0 r)}{r} - \right.$$

$$\left. - \vec{e}'_{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i\xi_n(k_0 r)}{r} \right\} \quad (43')$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{J}_+) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{W_0}{k_0} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times$$

$$\times \left\{ \vec{e}'_{+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i\xi_n(k_0 r)}{r} - \right.$$

$$\left. - \vec{e}'_{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i\xi_n(k_0 r)}{r} \right\} \quad (43'')$$

$$\vec{H}_\perp(\vec{J}_-) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{ik_0} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists-}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times$$

$$\times \left\{ \vec{e}'_{+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i\xi_n(k_0 r)}{r} - \right.$$

$$\left. - \vec{e}'_{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i\xi_n(k_0 r)}{r} \right\} \quad (44')$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{J}_-) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{W_0}{k_0} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists-}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times$$

$$\times \left\{ \vec{e}'_{+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i\xi_n(k_0 r)}{r} - \right.$$

$$\left. - \vec{e}'_{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i\xi_n(k_0 r)}{r} \right\} \quad (44'')$$

3. Вывод выражений для векторов Фарадея

Объединим напряженности электрического и магнитного полей в вектора Фарадея по формулам (1). Используем выражения для полей (38), (39), (43) и (44). Отдельно записываем вектора Фарадея для поперечных и продольных компонент.

$$\vec{F}_\perp^+ = \frac{1}{2\sqrt{W_0}} (\vec{E}_\perp(\vec{J}_+) - iW_0 \cdot \vec{H}_\perp(\vec{J}_+)) = \quad (45')$$

$$= -\frac{\sqrt{W_0}}{2\sqrt{2}} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times$$

$$\times \left\{ \vec{e}'^{+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} - \right.$$

$$\left. - \vec{e}'^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} \right\}$$

$$F_r^+ = \frac{1}{2\sqrt{W_0}} (E_r(\vec{J}_+) - iW_0 \cdot H_r(\vec{J}_+)) = \quad (45'')$$

$$= \frac{\sqrt{W_0}}{2} \cdot \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \kappa_{nm}^2 \cdot \frac{\xi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists(+)}(r') \psi_n(k_0 r') dr'$$

$$\vec{F}_\perp^- = \frac{1}{2\sqrt{W_0}} (\vec{E}_\perp(\vec{J}_-) + iW_0 \cdot \vec{H}_\perp(\vec{J}_-)) = \quad (46')$$

$$= -\frac{\sqrt{W_0}}{2\sqrt{2}} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists-}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times$$

$$\times \left\{ \vec{e}'^{+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} - \right.$$

$$\left. - \vec{e}'^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} \right\}$$

$$F_r^- = \frac{1}{2\sqrt{W_0}} (E_r(\vec{J}_-) + iW_0 \cdot H_r(\vec{J}_-)) = \quad (46'')$$

$$= \frac{\sqrt{W_0}}{2} \cdot \sum_{n,m} f_{nm}(\theta, \varphi) \kappa_{nm}^2 \cdot \frac{\xi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\exists(-)}(r') \psi_n(k_0 r') dr'$$

Для векторов Фарадея правой и левой круговых поляризаций (45)-(46) векторные сферические гармоники в базисе $(\vec{e}'^{+1}, \vec{e}'^0, \vec{e}'^{-1})$ имеют следующие компоненты:

$$F_{nm}^+ = \begin{pmatrix} \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} \\ -\sqrt{2} \kappa_{nm}^2 \cdot f_{nm}(\theta, \varphi) \cdot \frac{\xi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2} \\ -\left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} \end{pmatrix} \quad (47')$$

$$F_{nm}^- = \begin{pmatrix} \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} \\ -\sqrt{2} \kappa_{nm}^2 \cdot f_{nm}(\theta, \varphi) \cdot \frac{\xi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2} \\ -\left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r} \end{pmatrix} \quad (47'')$$

Заметим, что поскольку мы записали векторные сферические гармоники (47) на основании выведенных аналитических формул для векторов Фарадея, возбуждаемых сторонними источниками, то автоматически в формулах (47) имеются корректные знаки при компонентах и корректная относительная нормировка.

В публикациях [3, 4] радиальные функции для компонент сферических гармоник поперечных векторов Фарадея в спиральных координатах имели вид

$$\left(\frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} r - i\right) h_n^{(2)}(kr) \text{ - для главных поляризаций и}$$

$$\left(\frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} r + i\right) h_n^{(2)}(kr) \text{ - для кросс-поляризаций.}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} r - i\right) h_n^{(2)}(kr) &= \frac{1}{kr} \left(\frac{d}{dr} \{ r h_n^{(2)}(kr) \} - i k r h_n^{(2)}(kr) \right) = \\ &= \frac{1}{kr} \left(\frac{d}{d(kr)} \{ k r h_n^{(2)}(kr) \} - i k r h_n^{(2)}(kr) \right) = \frac{1}{kr} (\xi_n'(kr) - i \xi_n(kr)) \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\left(\frac{1}{kr} \frac{d}{dr} r + i\right) h_n^{(2)}(kr) = \frac{1}{kr} (\xi_n'(kr) + i \xi_n(kr))$$

Следовательно, радиальные функции для поперечных составляющих векторов Фарадея в [1-4] точно совпадают с радиальными функциями, полученными в настоящей статье.

Радиальная функция для продольных компонент векторов Фарадея в [1-4] также совпадает с полученной радиальной функцией в настоящей статье:

$$\frac{h_n^{(2)}(kr)}{kr} = \frac{kr \cdot h_n^{(2)}(kr)}{(kr)^2} = \frac{\xi_n(kr)}{(kr)^2}$$

Таким образом, зависимости от радиальной координаты для поперечных компонент даются формулами $\frac{\xi_n'(k_0 r) \pm i \xi_n(k_0 r)}{k_0 r}$, а для радиальных компонент формулой $\frac{\xi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2}$.

Исследуем функции $\xi_n'(z) \pm i \xi_n(z)$. Используя (28), можем записать:

$$\xi_n'(z) - i \xi_n(z) = \frac{d}{dz} (z \cdot h_n^{(2)}(z)) - iz \cdot h_n^{(2)}(z) \quad (48')$$

$$\xi'_n(z) + i\xi_n(z) = \frac{d}{dz} \left(z \cdot h_n^{(2)}(z) \right) + iz \cdot h_n^{(2)}(z) \quad (48'')$$

Сферическая функция Ханкеля целого индекса 2-го рода представляется в виде конечного разложения [12]

$$h_n^{(2)}(z) = i^{n+1} z^{-1} e^{-iz} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \cdot (2iz)^{-k} \quad (49)$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{d}{dz} \left(z \cdot h_n^{(2)}(z) \right) = -iz \cdot h_n^{(2)}(z) + 2i^n e^{-iz} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot (2iz)^{-k-1} \quad (50)$$

Тогда

$$\xi'_n(z) - i\xi_n(z) = -2iz \cdot h_n^{(2)}(z) + 2i^n e^{-iz} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot (2iz)^{-k-1} \quad (51')$$

$$\xi'_n(z) + i\xi_n(z) = 2i^n e^{-iz} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot (2iz)^{-k-1} \quad (51'')$$

Легко видеть, что для $\xi'_n(z) - i\xi_n(z)$ первый член разложения равен $2i^n e^{-iz}$; для $\xi'_n(z) + i\xi_n(z)$ первый член разложения $\sim \frac{e^{-iz}}{z^2}$. Значит, разные радиальные функции, стоящие в виде коэффициентов при спиральных ортах в формулах (45') и (46'), имеют разную степень убывания с ростом радиальной координаты. Амплитуда основной поляризации убывает $\sim \frac{1}{r}$, а амплитуда кросс-поляризационной составляющей убывает $\sim \frac{1}{r^3}$. При больших расстояниях от источника (в дальней зоне) будем иметь поперечные вектора Фарадея, соответствующие одной круговой поляризации (основной):

$$\vec{F}_{\perp}^{+} \approx -\frac{\sqrt{W_0}}{2\sqrt{2}} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\pm+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times \quad (52')$$

$$\times \vec{e}^{\prime+1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{2i^n e^{-ik_0 r}}{k_0 r}$$

$$\vec{F}_{\perp}^{-} \approx \frac{\sqrt{W_0}}{2\sqrt{2}} \sum_{n,m} \int_{r'=r_{min}}^{r_{max}} N_{nm}^{\pm-}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \times \quad (52'')$$

$$\times \vec{e}^{\prime-1} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \frac{2i^n e^{-ik_0 r}}{k_0 r}$$

Рассмотрение выражений для напряженностей полей (43) и (44) показывает, что в дальней зоне идеальную круговую поляризацию имеют как вектора Фарадея, так и напряженности полей.

Из сравнения формул (4) и (47) можно записать равенства для угловых функций:

$$P_{m,1}^n(\cos\theta) = \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\sin\theta\partial\varphi} \quad (53')$$

$$P_{m,0}^n(\cos\theta) \cdot i\sqrt{2n(n+1)} = -\sqrt{2}\kappa_{nm}^2 f_{nm}(\theta,\varphi) \quad (53'')$$

$$P_{m,-1}^n(\cos\theta) = \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} - i \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{r\sin\theta\partial\varphi} \quad (53''')$$

Из формулы (53'') получаем формулу, связывающую функцию Вигнера $P_{m,0}^n(\cos\theta)$ со скалярной сферической гармоникой (12).

$$P_{m,0}^n(\cos\theta) = i\sqrt{n(n+1)} \cdot f_{nm}(\theta,\varphi) \quad (54)$$

Для функций Вигнера справедливы следующие известные рекуррентные формулы [5]:

$$P_{m,\pm 1}^n(\cos\theta) = \frac{1}{i\sqrt{n(n+1)}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \frac{m}{\sin\theta} \right) P_{m,0}^n(\cos\theta) \quad (55)$$

Тогда с помощью формулы (54) полиномы $P_{m,\pm 1}^n(\cos\theta)$ могут быть выражены через скалярные сферические гармоники (12):

$$P_{m,\pm 1}^n(\cos\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \frac{m}{\sin\theta} \right) f_{nm}(\theta,\varphi) = \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \pm i \frac{\partial f_{nm}(\theta,\varphi)}{\sin\theta\partial\varphi} \quad (56)$$

Легко видеть, что формула (56) совпадает с полученными нами ранее формулами (53') и (53'''). Таким образом, доказано полное совпадение выражений для векторных сферических гармоник (4), полученных в работах [3, 4], с выражениями (47) в настоящей статье. Угловые функции для векторных сферических гармоник (47) произошли от скалярных сферических гармоник (12), для вычисления которых нужно уметь вычислять только присоединенные функции Лежандра и их производные. Функции Вигнера, примененные в работах [1-4], сами выражаются простым образом через скалярные сферические гармоники (12). Введение для записи векторов Фарадея функций Вигнера не является обязательным. Угловые функции для всех компонент векторных сферических гармоник (47) осесимметричны.

4. Расчет мощностей, излученных через поверхность сферы

Найдем мощность, излучаемую через поверхность сферы радиуса r (т.е. мощность, выходящую из объема):

$$\begin{aligned}
 P_{\text{изл}} &= \int_S \vec{S} \vec{n} \cdot dS = \int_{\Omega} \vec{S} \vec{r}^0 \cdot r^2 d\Omega = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\vec{E}_{\pm} \times \vec{H}_{\pm}^*) \vec{r}^0 \cdot r^2 d\Omega = -\frac{i}{2} \int_{\Omega} \vec{F}_{\pm} \times \vec{F}_{\pm}^* \cdot \vec{r}^0 \cdot r^2 d\Omega
 \end{aligned} \quad (57)$$

При расчете радиальной компоненты вектора Пойнтинга принимают участие только поперечные поля (касательные к сфере). По отдельности рассчитаем излученные мощности для полей правой и левой поляризации, которые являются независимыми. Расчет можно выполнить как исходя из векторов Фарадея (45), (46), так и исходя из напряженностей полей (43), (44).

При интегрировании по сфере возникает ортогональность в произведениях угловых функций:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + i \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial f_{n'm'}^*(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - i \frac{\partial f_{n'm'}^*(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \right\} = \\
 &= \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_{n'm'}^*(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_{n'm'}^*(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} - \\
 &- i \left(-\frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_{n'm'}^*(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} + \frac{\partial f_{nm}(\theta, \varphi)}{\sin \theta \partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_{n'm'}^*(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) = \vec{g}_{nm} \cdot \vec{g}_{n'm'}^* - i \vec{g}_{nm} \cdot \vec{p}_{n'm'}^*
 \end{aligned}$$

В силу соотношений ортогональности (21) можем записать:

$$\int_{\Omega} (\vec{g}_{nm} \cdot \vec{g}_{n'm'}^* - i \vec{g}_{nm} \cdot \vec{p}_{n'm'}^*) d\Omega = \kappa_{nm}^2 \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (58)$$

Для волн разных круговых поляризаций после интегрирования получили:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{изл}}^+ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{W_0}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} \kappa_{nm}^2 \cdot \left| \int_{r'=r_{\min}}^{r_{\max}} N_{nm}^{\pm+}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \right|^2 \times \\
 &\times \{ |\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)|^2 - |\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)|^2 \}
 \end{aligned} \quad (59')$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{изл}}^- &= \frac{1}{4} \cdot \frac{W_0}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} \kappa_{nm}^2 \cdot \left| \int_{r'=r_{\min}}^{r_{\max}} N_{nm}^{\pm-}(r') \psi_n(k_0 r') dr' \right|^2 \times \\
 &\times \{ |\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)|^2 - |\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)|^2 \}
 \end{aligned} \quad (59'')$$

Легко видеть, что поток мощности основной поляризации пропорционален $|\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)|^2$ и направлен от источника наружу сферы (положителен), а поток мощности кросс-поляризации пропорционален $|\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)|^2$ и направлен внутрь сферы (отрицателен), результирующий поток мощности равен их разности.

Исследуем радиальную функцию:

$$|\xi'_n(k_0 r) - i \xi_n(k_0 r)|^2 - |\xi'_n(k_0 r) + i \xi_n(k_0 r)|^2 =$$

$$= 2i \cdot \{\xi'_n(k_0r)\xi_n^*(k_0r) - \xi_n(k_0r)\xi_n'^*(k_0r)\}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой определитель Вронского [11], значение которого легко вычисляется.

$$\xi'_n(k_0r)\xi_n^*(k_0r) - \xi_n(k_0r)\xi_n'^*(k_0r) = -2i \quad (60)$$

В итоге радиальная функция равна постоянной величине:

$$|\xi'_n(k_0r) - i\xi_n(k_0r)|^2 - |\xi'_n(k_0r) + i\xi_n(k_0r)|^2 = 4 \quad (61)$$

Для иллюстрации на рис.1 показаны графики функций $f1(x) = |\xi'_1(x) - i\xi_1(x)|^2$ и $f2(x) = |\xi'_1(x) + i\xi_1(x)|^2$. Функция $f2(x)$ быстро убывает с возрастанием аргумента. Разница значений функций постоянна при любых значениях аргумента и равна $f1(x) - f2(x) = 4$.

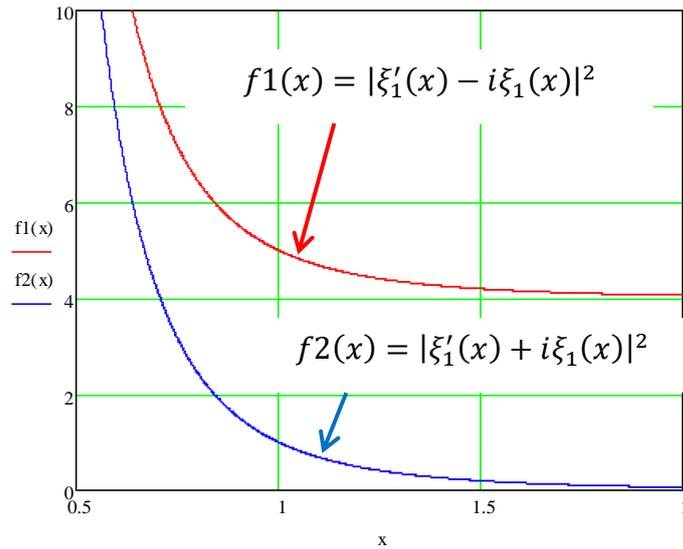


Рис. 1. Графики функций $f1(x)$ и $f2(x)$

В итоге излученные мощности для разных поляризаций равны:

$$P_{\text{изл}}^+ = \frac{W_0}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} \kappa_{nm}^2 \cdot \left| \int_{r'=r_{\min}}^{r_{\max}} N_{nm}^{\text{э}+}(r') \psi_n(k_0r') dr' \right|^2 \quad (62')$$

$$P_{\text{изл}}^- = \frac{W_0}{k_0^2} \cdot \sum_{n,m} \kappa_{nm}^2 \cdot \left| \int_{r'=r_{\min}}^{r_{\max}} N_{nm}^{\text{э}-}(r') \psi_n(k_0r') dr' \right|^2 \quad (62'')$$

Таким образом, излученная мощность (мощность, выходящая из объема через поверхность сферы) не зависит от радиуса сферы. В ближней зоне результирующий поток мощности равен разности потоков мощности основной поляризации и кросс-поляризации.

Выводы

Выведены формулы для напряженностей электрического и магнитного полей в виде разложений на E и H-волны в сферической системе координат, создаваемых заданными сторонними электрическими и магнитными токами. На их основе были получены аналитические формулы для напряженностей полей в спиральном базисе от сторонних источников круговой поляризации. По известным напряженностям полей были получены и исследованы формулы для векторов Фарадея в спиральном базисе, описывающих волны правой и левой поляризации. Были рассчитаны потоки вектора Пойнтинга для волн разных круговых поляризаций. Показано, что для сторонних источников круговой поляризации идеальную круговую поляризацию в дальней зоне имеют как вектора Фарадея, так и напряженности полей.

Получены выражения для векторных сферических гармоник разложения векторов Фарадея в спиральном базисе. Показано, что угловые функции данных векторных сферических гармоник выражаются через ортонормированные скалярные сферические гармоники (4), в которые входят тригонометрические функции и хорошо известные присоединенные функции Лежандра. Использование специальных функций Вигнера для записи векторных сферических гармоник разложения векторов Фарадея не является обязательным, так как сами функции Вигнера выражаются через ортонормированные скалярные сферические гармоники (4) с помощью формул (54) и (56).

Выведенные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей и для векторов Фарадея, возбуждаемых токами круговой поляризации, показывают, что чистые круговые поляризации возникают только в дальней зоне. Подтвержден вывод работ [1-4], что поля источников правой и левой поляризации в ближней и промежуточной зонах принципиально являются полями эллиптических поляризации.

В работах [1,2] Коган Б.Л. изложил наглядную концепцию, что поле от источников круговой поляризации в ближней зоне есть комбинация уходящей и

отраженной волн в сферическом волноводе (основной поляризации и паразитной кросс-поляризации), в результате чего полное поле имеет в ближней зоне эллиптическую поляризацию. Однако анализ полного поля (43)-(44) показывает, что составляющие основной поляризации и кросс-поляризации имеют в радиальной функции одну и ту же сферическую функцию Ханкеля $h_n^{(2)}(kr)$, которая описывает уходящие волны. В привычном представлении длинных линий и волноводов отраженная волна должна иметь комплексно-сопряженный фазовый множитель, то есть должна была бы иметь сферическую функцию Ханкеля $h_n^{(1)}(kr)$. С другой стороны, в сферическом волноводе нет радиальных нерегулярностей, которые могли бы привести к возникновению отраженных волн (примером радиальной нерегулярности является сферический слой магнито-диэлектрика конечной толщины, охватывающий область с источниками).

Заметим, что в ближней зоне вдобавок к кросс-поляризационной составляющей существуют еще и продольные (радиальные) компоненты поля, затухающие как $\sim \frac{1}{r^2}$. Можно высказать гипотезу, что наличие кросс-поляризационной составляющей и радиальных составляющих полей в ближней зоне (реактивной зоне) выполняет функцию замыкания силовых линий полей на источники. В дальней зоне силовые линии размыкаются, формируются чистые сферические волны, и поля имеют идеальные круговые поляризации.

Литература

1. Коган Б.Л. Электромагнитные поля круговой поляризации в теории антенн. Диссертация на соискание уч. степени д.т.н., Москва, 2004. 179 с.
2. Коган Б.Л. Применение векторов Фарадея в теории антенн. Журнал Радиоэлектроники. 2008. №7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul08/1/text.pdf>
3. Коган Б.Л., Белькович И.В. Теория и практическое применение векторов Римана-Зильберштейна для задач антенной техники. Журнал радиоэлектроники. 2018. №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2018.12.11>.

4. Белькович И.В. Расчет эффективности зеркальных антенн и лучеводов с учетом неидеальностей поверхностей зеркал и кожуха лучевода с применением векторов Римана-Зильберштейна. Журнал радиоэлектроники. 2019. №11. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.11.14>.
5. Варшалович Д.А., Москалёв А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Ленинград: Наука, 1975, 439 с.
6. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.А. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958, 368 с.
7. Бодров В.В. Разработка алгоритмов расчета электромагнитных полей устройств СВЧ. М.: МЭИ, 1986, 56 с.
8. Суркова И.В. Влияние многослойных диэлектрических укрытий различной конфигурации на характеристики излучения антенн с плоской апертурой. Диссертация к.т.н., 1994. 158 с.
9. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967. 371 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 736 с.
11. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977, 831 с.
12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

Для цитирования:

Лаврецкий Е.И. Вывод выражений для векторов Фарадея от заданных источников в сферической системе координат, исходя из разложений поля на Е- и Н-волны. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №11. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.11.11>