

## О ЗАТУХАНИИ ВИДЕОИМПУЛЬСА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ИДЕАЛЬНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

А. С. Кюрегян

Всероссийский электротехнический институт, 111250 Москва, Красноказарменная, 12

Статья поступила в редакцию 3 октября 2018 г.

**Аннотация.** Затухание видеоимпульса с монотонно нарастающим напряжением  $U_0(t)$  на входе в линию передачи с идеальным диэлектриком можно охарактеризовать «омическим» падением напряжения  $U_\sigma(t)$  вдоль электродов с конечной проводимостью  $\sigma$ . Для вычисления  $U_\sigma(t)$  в коаксиальной и полосковой линиях получены точные аналитические формулы без учета и с учетом сильного скин-эффекта, которые не зависят от дисперсии и степени нелинейности диэлектрика и поэтому пригодны для оценки затухания ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи.

**Ключевые слова:** нелинейные линии передачи, затухание видеоимпульса, скин-эффект.

**Abstract.** The attenuation of video pulse with monotonically increasing input voltage in a transmission lines with an ideal dielectric can be characterized by "ohmic" voltage drop  $U$  along the electrodes with finite conductivity. The exact analytical formulas for the calculations  $U$  in coaxial and strip lines with and without taking into account the strong skin effect have been obtained. These formulas do not depend on the dispersion and the degree of nonlinearity of the dielectric and therefore is suitable for evaluating of shock electromagnetic waves attenuation in nonlinear transmission lines.

**Key words:** nonlinear transmission lines, attenuation of video pulse, skin effect.

Пусть на вход незаряженной коаксиальной линии передачи с идеальным диэлектриком<sup>1</sup> подается монотонно нарастающий видеоимпульс напряжения

---

<sup>1</sup> Мы называем идеальным диэлектрик, проводимость которого равна нулю.

$U_0(t)$ . Распространение сигнала при известных [1] условиях описывается системой телеграфных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} + E_\sigma = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

с начальным и граничным условиями

$$U(0, z) = 0 = I(0, z), \quad U(t, 0) = U_0(t), \quad (3)$$

где  $U = U(t, z)$  и  $Q = Q(t, z)$  - разность потенциалов между электродами и линейная плотность заряда,  $E_\sigma = E_\sigma^+(t, z) - E_\sigma^-(t, z)$ ,  $E_\sigma^\pm(t, z)$  - тангенциальные компоненты напряженности поля на границах между диэлектриком и электродами, обусловленные протеканием вдоль линии тока  $I = I(t, z)$ ,  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i}$  -

погонная индуктивность,  $\mu_0$  магнитная постоянная,  $r_{e,i}$  - внешний и внутренний радиусы диэлектрической трубки.

Будем считать, что длина диффузии магнитного поля много меньше толщины электродов, а ток  $I(t, z)$  мало изменяется на расстоянии порядка  $2\sqrt{D_\sigma t}$ , где  $D_\sigma = 1/\mu_0\sigma \sim 160 \text{ cm}^2/\text{s}$  - коэффициент магнитной диффузии,  $\sigma$  - проводимость электродов. В этом случае оправдано приближение сильного планарного скин-эффекта и, используя теорию диффузии магнитного поля в металле (см., например, [2]), нетрудно получить соотношение

$$I(t, z) = \frac{\sqrt{t_\sigma}}{\pi L} \int_{t_z}^t E_\sigma(\vartheta, z) \frac{d\vartheta}{\sqrt{t-\vartheta}}, \quad (4)$$

где  $t_\sigma = \frac{\pi}{D_\sigma} \left( \frac{r_e r_i}{r_e + r_i} \ln \frac{r_e}{r_i} \right)^2$ ,  $t_z = t_f(z)$  - время достижения передним фронтом сигнала плоскости  $z$ . Интегрирование (4) по  $z$  приводит к уравнению Абеля [3]

$$\int_0^t U_\sigma(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} = \frac{\pi L}{\sqrt{t_\sigma}} \int_0^{z_f} I(t, z) dz \equiv \Phi(t) \quad (5)$$

для «омического» падения напряжения  $U_{\sigma}(t) = \int_0^{z_t} E_{\sigma}(t, z) dz$  на обоих электродах между входом линии и передним фронтом сигнала  $z_t = z_f(t)$ , дальше которого  $U = 0 = I$ . При монотонно нарастающей функции  $U_0(t)$  напряжение  $U_{\sigma}(t)$  характеризует затухание видеоимпульса в линии.

Так как  $\Phi(0) = 0$ , то решение (5) имеет вид [3]

$$U_{\sigma}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}. \quad (6)$$

Из определения  $\Phi(t)$  и уравнения (1) следует, что

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{t_{\sigma}}} \left[ I(t, z_t) L \frac{dz_t}{dt} - U(t, z_t) + U_0(t) - U_{\sigma}(t) \right], \quad (7)$$

где  $dz_t/dt$  - скорость распространения фронта видеоимпульса. Во всех реалистичных случаях два первых слагаемых в правой части (7) равны нулю, поэтому равенство (6) является уравнением Абеля второго рода

$$\int_0^t U_{\sigma}(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} + \sqrt{t_{\sigma}} U_{\sigma}(t) = \int_0^t U_0(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad (8)$$

для функции  $U_{\sigma}(t)$ . Его решение имеет вид [3]

$$U_{\sigma}(t) = F(t) + \frac{\pi}{t_{\sigma}} \int_0^t F(\theta) \exp\left(\pi \frac{t-\theta}{t_{\sigma}}\right) d\theta, \quad (9)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t_{\sigma}}} \int_0^t U_0(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} - \frac{1}{t_{\sigma}} \int_0^t \left[ \int_0^{\theta} U_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\theta-\tau}} \right] \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad (10)$$

В качестве примера рассмотрим случай трапецеидального нарастания напряжения на входе в линию

$$U_0(t) = V \begin{cases} t/t_0 & \text{при } t < t_0 \\ 1 & \text{при } t > t_0 \end{cases}, \quad (11)$$

для которого получается

$$F(t) = \frac{V}{t_0} \left\{ \frac{4}{3\sqrt{t_{\sigma}}} \left[ t^{3/2} - (t-t_0)^{3/2} H(t-t_0) \right] - \frac{\pi}{2t_{\sigma}} \left[ t^2 - (t-t_0)^2 H(t-t_0) \right] \right\}, \quad (12)$$

где  $H(t)$  - ступенчатая функция Хевисайда. Зависимости  $F(t)$  и  $U_\sigma(t)$  для этого случая изображены на Рис. 1. Видно, что второе слагаемое в правой части (9) пренебрежимо мало в актуальном диапазоне значений  $U_\sigma < 0.3V$ , поэтому для расчета  $U_\sigma(t)$  можно использовать простую формулу  $U_\sigma(t) \approx F(t)$ . В простейшем случае ступенчатого сигнала или при  $t_0/t \rightarrow 0$

$$F(t) = V \left( 2 \sqrt{\frac{t}{t_\sigma}} - \pi \frac{t}{t_\sigma} \right) \quad (13)$$

и для  $U_\sigma(t)$  получается формула

$$U_\sigma(t) = V \left[ 1 - \exp\left(-\pi \frac{t}{t_\sigma}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\pi \frac{t}{t_\sigma}} \right]_{t \ll t_\sigma} \approx 2V \sqrt{\frac{t}{t_\sigma}}, \quad (14)$$

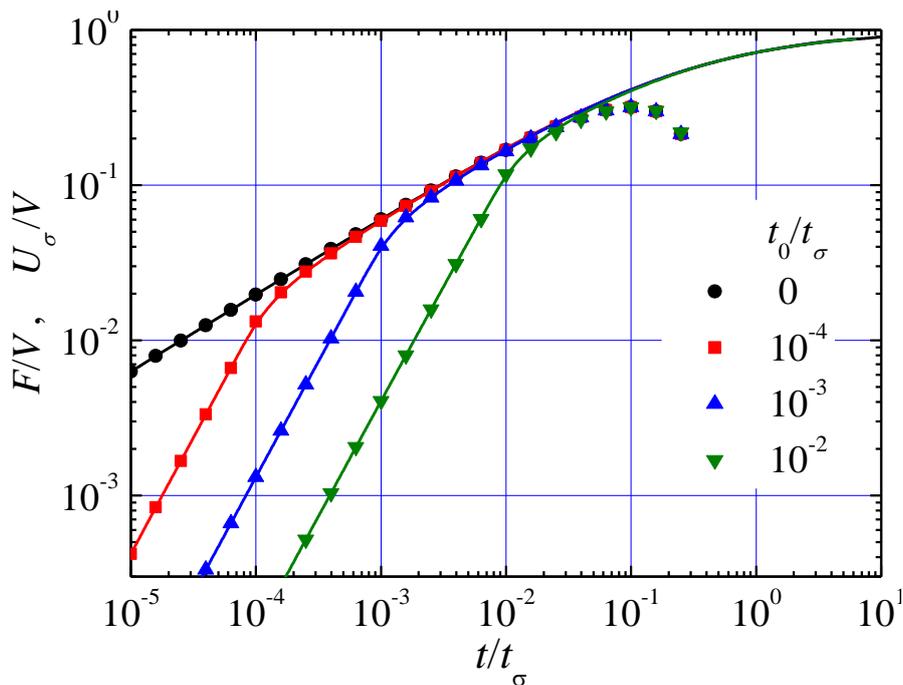


Рис. 1. Зависимости  $U_\sigma(t)$  (линии) и  $F(t)$  (символы), рассчитанные по формулам (9), (11) и (12) для четырех значений отношения  $t_0/t_\sigma$ .

где  $\operatorname{erfc}(x)$  - дополнительная функция ошибок. Формулы (9)-(14) пригодны и для полосковой линии передачи, ширина которой много больше расстояния  $d$  между электродами, однако в этом случае следует положить  $t_\sigma = \pi d^2 / 4D_\sigma$ .

При очень малой проводимости  $\sigma$  длина диффузии магнитного поля  $2\sqrt{D_\sigma t}$  может оказаться много больше толщины электродов. Тогда можно пренебречь скин-эффектом и, полагая  $E_\sigma = IR$ , переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial U}{\partial z} + t_R \frac{\partial E_\sigma}{\partial t} + E_\sigma = 0, \quad (15)$$

где  $R$  - сумма погонных сопротивлений электродов, которая практически не зависит от  $t$ , и  $t_R = L/R$ . Легко показать, что в этом случае

$$U_\sigma(t) = \int_0^t U_\sigma(\theta) \exp\left(\frac{\theta-t}{t_R}\right) \frac{d\theta}{t_R}, \quad (16)$$

и для трапецеидального входного сигнала при  $t > t_0$

$$U_\sigma(t) = V \left\{ 1 - \frac{t_R}{t_0} \left[ \exp\left(\frac{t_0}{t_R}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t}{t_R}\right) \right\} \quad (17)$$

Полученные формулы позволяют вычислить время распространения сигнала  $t_\delta$ , за которое отношение  $U_\sigma/V \equiv \delta$  достигнет заданной допустимой величины. Примеры зависимостей  $t_\delta$  от  $t_0$  для трапецеидального входного сигнала приведены на Рис. 2. При  $t_0 \ll t_\delta \ll t_{\sigma,R}$  из (14) и (17) следует, что  $t_\delta \approx t_\sigma \delta^2/4$  и  $t_\delta \approx t_R \delta$  соответственно.

Следует отметить, что обычно [2,4,5] затухание ступенчатого видеоимпульса характеризуется величиной  $\Delta = 1 - U_f(t)/V$ , где  $U_f(t) = U(t, z_f)$  - скачек напряжения на фронте. Однако для вычисления  $\Delta$  нужно иметь полное решение задачи Коши (1)-(3). Насколько нам известно, точное решение было получено только для линейной линии передачи без учета скин-эффекта [4,6]. Из него, как нетрудно показать следует, что

$$\Delta(t) = 1 - \exp(-t/2t_R), \quad (18)$$

тогда как

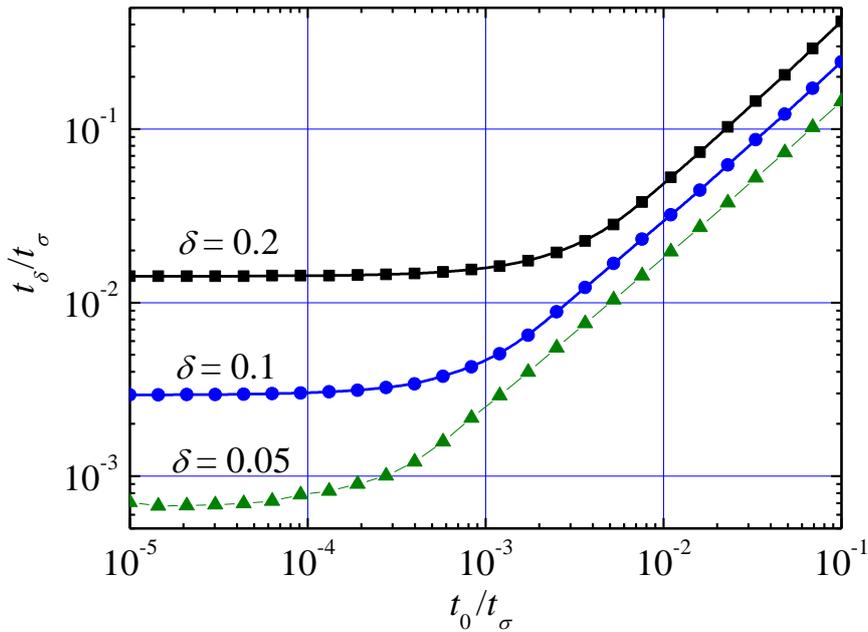


Рис. 2. Зависимости времен  $t_\delta$  достижения отношением  $U_\sigma/V$  величин  $\delta$  от длительности фронта  $t_0$  импульса на входе в линию, рассчитанные по формулам (9), (11) и (12).

$$\delta(t) = 1 - \exp(-t/t_R). \quad (19)$$

Эта последняя формула, разумеется, получается и из (17) в пределе  $t_0 \rightarrow 0^2$ . Таким образом напряжение на фронте  $U_f$  уменьшается со временем в два раза медленнее, чем возрастает «омическое» падение напряжения  $U_\sigma$ . Причина этого очевидна: рост  $U_\sigma$  приводит к уменьшению со временем тока  $I(t, z)$  вдоль линии, так что второе слагаемое в (1) частично (в этом простейшем случае - ровно наполовину) компенсирует «омическое» поле  $E_\sigma$  и замедляет уменьшение напряжения  $U$  с ростом  $z$ . С учетом сильного скин-эффекта было получено приближенное решение [5,7], верное только при  $t \ll t_\sigma$ , когда

$$\Delta(t) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{t_\sigma}}, \quad (20)$$

то есть в этом случае  $\Delta$  в 4 раза меньше  $\delta$  (см. (14)).

<sup>2</sup> В этом пределе два первых слагаемых в правой части (7) отличны от нуля, но их сумма равна нулю, так как  $dz_i/dt = 1/\sqrt{LC}$  и  $U(t, z_i)/I(t, z_i) = \sqrt{L/C}$ . Поэтому уравнение (8) и его решение (9) справедливо и для ступенчатого входного сигнала.

На первый взгляд, предложенный метод оценки затухания видеосигнала менее нагляден, чем обычный. Однако у него есть два существенных преимущества. Во-первых, величина  $\delta$ , равная в первом приближении относительной потере мощности, сохраняет свой ясный смысл при любом соотношении между  $t$  и характерным временем  $t_0$  нарастания напряжения на входе в линию, а не только при  $t_0 \rightarrow 0$ . Во-вторых, при вычислении  $\delta$  уравнение (2) не использовалось, поэтому полученные выше точные результаты справедливы даже при сложной взаимосвязи между напряжением  $U$  и плотностью заряда  $Q$ , когда необходимое для расчета величины  $\Delta$  полное аналитическое решение задачи Коши (1)-(3) невозможно даже без учета скин-эффекта. В частности, это позволяет дать оценку величины затухания ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи [8].

Автор благодарен А. В. Горбатюку за обсуждение результатов. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-08-01292).

### Литература

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. С. 100-115.
2. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972. С. 68.
3. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: точные решения. М.: Факториал, 1998. С. 20, 120. [Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of integral equations. CRC Press, 2008].
4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Высшая школа, 1996. С. 399. [Bessonov L. A. Theoretical bases of electrical engineering. Moscow, USSR: High school, 1996, p.399].
5. Smith P. W. Transient Electronics. Pulsed Circuit Technology. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2002. pp. 237-266.

6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. С. 534.
7. Wigington R. L., Nahman N. S. Transient analysis of coaxial cables considering skin effect // Proc. IRE. 1957. Vol. **45**(2), pp. 166-174.
8. Кюрегян А. С. Ударная электромагнитная волна большой амплитуды в нелинейной линии передачи на основе распределенного полупроводникового диода. URL: <https://arxiv.org/abs/1712.03287>.

**Для цитирования:**

А. С. Кюрегян. О затухании видеоимпульса в нелинейных линиях передачи с идеальным диэлектриком. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct18/9/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2018.10.9