DOI https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.1 УДК 621.37

# ПРЯМОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ПУТИ, ПРОЙДЕННОГО СИГНАЛОМ ПО ТРАССЕ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

А. А. Кальщиков, В. В. Штыков, Е. В. Шалимова НИУ «Московский энергетический институт», 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

Статья поступила в редакцию 22 августа 2020 г.

Аннотация. Одна из тенденций в развитии радиотехники в современном мире заключается в использовании широкополосных сигналов. С увеличением полосы частот полезного сигнала сильнее проявляются амплитудно-фазовые искажения, обусловленные частотной дисперсией среды распространения. В работе обсуждается новый метод для определения длины пути, пройденного трассе с частотной дисперсией, основанный на теории сигналом обобщенных функций, функциональных пространств вариационного И исчисления. Достоверность полученной оценки длины пути обосновывается через неравенство Коши-Буняковского. Для сравнения предложенного метода с оценкой, полученной через задержку огибающей сигнала, было выведено аналитическое выражение для значения дисперсии ошибки определения длины пути. Показано, что при использовании предложенного метода дисперсия ошибки не превышает дисперсию ошибки косвенного метода и сохраняется постоянной на всем протяжении трассы.

**Ключевые слова:** дисперсия, неравенство Коши-Буняковского, широкополосные сигналы, определение длины пути.

**Abstract.** One of the trends in the development of radio engineering in the modern world is the use of broadband signals. With an increase in the frequency bandwidth of the useful signal, the amplitude-phase distortion is more pronounced due to the frequency dispersion of the propagation medium. The paper discusses a new method for determining the path length traveled by a signal along a path with frequency dispersion based on the theory of generalized functions, function spaces and the

calculus of variations. The reliability of the obtained estimate for the path length is substantiated through the Cauchy-Bunyakovsky inequality. To compare the proposed method with the estimate obtained through the signal envelope delay, an analytical expression was derived for the value of the error variance in determining the path length. It is shown that when using the proposed method, the error variance does not exceed the error variance of the indirect method and remains constant throughout the entire path.

**Key words:** dispersion, Cauchy-Bunyakovsky inequality, broadband signals, path length estimation.

### Введение

Исторически сложилось так, что большинство цифровых устройств используют методы обработки сигналов, которые берут свое начало из аналоговой техники. В свою очередь, некоторые из этих методов были разработаны с ограничением на тогда существующий уровень техники и поэтому не всегда эффективно используют математический аппарат, который, с помощью численных методов, доступен для цифровых вычислительных устройств. Примером такой ситуации, которая рассмотрена в настоящей работе, является задача определения расстояния, пройденного полезным сигналом по трассе с частотной дисперсией.

В большинстве случаев такая задача решается по измерению времени задержки огибающей полезного сигнала с перерасчетом, через групповую скорость сигнала, в расстояние. Однако, при наличии существенных дисперсионных искажений, форма полезного сигнала искажается, а групповая скорость сильно зависит от частоты колебаний, таким образом, такой метод может оказаться нерабочим из-за большой методической ошибки.

Также не получится создать корректирующий фильтр для нивелирования влияния дисперсионных искажений [1], поскольку комплексный коэффициент передачи такого фильтра будет зависеть от длины трассы с дисперсией, которая заранее не известна.

Таким образом, разработка метода определения длины пути, пройденного сигналом по трассе с частотной дисперсией, является актуальной задачей и представляет практический интерес в задачах подповерхностного радиозондирования, гидролокации, ультразвуковой дефектоскопии, ионосферных и волоконно-оптических системах связи [2-3].

В работе [4] рассмотрен алгоритм обработки широкополосных сигналов, распространяющихся в средах с частотной дисперсией фазовой скорости. Показано, что использование метода вычисления функционала позволяет увеличить энергетические характеристики радиотехнического устройства. В работе [5] показано, что можно добиться ускорения процедуры с использованием операции быстрого преобразования Фурье.

В настоящей работе получена аналитическая оценка для точности определения расстояния, а также сопоставляются результаты с классическим методом определения длины пути, основанным на вычислении расстояния через временную задержку огибающей полезного сигнала и групповую скорость.

### 1. Математическая формулировка метода

В работе [4] показано, что на основании теории обобщенных функций процедура определения расстояния до объекта сводится к вариации функционала

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{rx}(\omega, L) \dot{S}_{pr}^{*}(\omega, z) d\omega, \qquad (1)$$

который по сути представляет собой взаимную энергию, где  $\dot{S}_{\rm rx}(\omega,L)$  и  $\dot{S}_{\rm pr}^{\ \ *}(\omega,z)$  — спектральные плотности наблюдаемого сигнала и пробной функции соответственно.

Подынтегральное выражения функционала (1) представлено в частотной области, т.к. построить пробную функцию удобно в частотной области; пример этого будет показан ниже.

Выражение (1) можно переписать в виде следующего функционала

$$\Phi(z) = \|\dot{S}_{rx}(L)\|^2 \cdot \|\dot{S}_{pr}(z)\|^2 - |W(z)|^2.$$
 (2)

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$|W(z)|^2 \le ||\dot{S}_{rx}(L)||^2 \cdot ||\dot{S}_{pr}(z)||^2,$$
 (3)

где 
$$\left\| s_{\mathrm{rx}} \left( L \right) \right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{\mathrm{rx}} \left( \omega, L \right) \right|^2 d\omega$$
 и  $\left\| \dot{S}_{\mathrm{pr}} \left( z \right) \right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{\mathrm{pr}} \left( \omega, z \right) \right|^2 d\omega$  — энергии сигнала

и пробной функции, соответственно.

Неравенство (3) обращается в равенство, если наблюдаемая и пробная функции являются линейно зависимыми

$$\dot{S}_{rx}(\omega,L) = k\dot{S}_{pr}^*(\omega,z_0),$$

таким образом, глобальный минимум (2) будет достигаться в точке  $z_0 = L$ .

Будем рассматривать трассу, которая является линейной системой, тогда в частотной области, с точностью до постоянного коэффициента, она будет описываться комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{K}(\omega, z) = \exp(-j\gamma(\omega)z). \tag{4}$$

Продольное волновое число канала связи зависит от материальной среды распространения сигнала и в общем случае является комплексной функцией от частоты колебаний

$$\gamma(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$$
,

где действительная часть волнового числа  $\beta(\omega)$  определяет фазовую частотную дисперсию, а мнимая часть  $\alpha(\omega)$  амплитудную частотную дисперсию.

Для наглядности на рис. 1 изображена модель описываемой длинной линии.

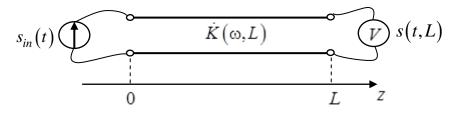


Рис . 1. Модель трассы.

В качестве пробной функции  $\dot{S}_{\rm pr}(\omega,z)$  будем использовать модель полезного сигнала в сечении трассы (4)

$$\dot{S}_{\rm pr}(\omega, z) = \dot{K}(\omega, z)\dot{S}_{\rm in}(\omega). \tag{5}$$

В общем случае спектральная плотность наблюдаемого сигнала равна

$$\dot{S}_{\rm rx}(\omega, L) = \dot{K}(\omega, L)\dot{S}_{\rm in}(\omega) + \dot{N}(\omega), \tag{6}$$

где  $\dot{N}(\omega)$  – это спектральная плотность шумов наблюдений.

Продемонстрируем аналитический вывод выражения (1) для импульса с гауссовой огибающей вида

$$s_{\rm in}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right)\cos(\omega_0 t). \tag{7}$$

для случая фазовых искажений, представленных в виде усеченного ряда Тейлора [6]

$$\gamma(\omega) = \beta_0 + \beta_0' (\omega - \omega_0) + \beta_0'' (\omega - \omega_0)^2 / 2, \tag{8}$$
где  $\beta_0 \equiv \beta(\omega_0), \beta_0' \equiv \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \bigg|_{\omega = \omega_0}, \beta_0'' \equiv \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} \bigg|_{\omega = \omega}, R_{\beta n}(\Omega) \leq \frac{|\Omega|^n}{n!} \sup_{0 < \xi < \Omega} \left| \frac{d^n\beta}{d\omega^n} \right|_{\xi},$ 

когда шумы наблюдения отсутствуют  $\dot{N}(\omega) = 0$ .

В этом случае амплитуда взаимной энергии (1) обращается к виду

$$\Psi(z) = |W(z)| = A_{\text{in}}^2 \frac{\sqrt{\pi \tau}}{\sqrt[4]{1 + (\beta_2(z - L))^2}} \exp\left(-\frac{(\beta_1(z - L))^2}{4(1 + (\beta_2(z - L))^2)}\right).$$

где  $\beta_1 = \beta_0'/\tau$ ,  $\beta_2 = \beta_0''/(2\tau^2)$ .

Косвенный метод основан на оценке групповой задержки с пересчетом ее в протяженность трассы. Таким образом, групповая задержка сигнала оценивается как аргумент максимума на выходе согласованного фильтра [7]

$$\Psi(t,z) = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{rx}(\omega,L) \dot{S}_{pr}^{*}(\omega,0) \exp(j\omega t) d\omega \right|, \tag{10}$$

$$\begin{split} \Psi\!\left(\hat{t},z\right) &= A_{\mathrm{in}}^2 \frac{\sqrt{\pi \tau}}{\sqrt[4]{1 + \left(\beta_2 z\right)^2}} \exp\!\left(\!-\frac{\left(\hat{t} - \beta_1 z\right)^2}{4\!\left(1 + \left(\beta_2 z\right)^2\right)}\right)\!, \end{split}$$
 где  $\hat{t} = t/\tau$ ,  $\beta_1 = \beta_0'/\tau$ ,  $\beta_2 = \beta_0''/\left(2\tau^2\right)$ .

# 2. Демонстрация фазовых дисперсионных искажений

В качестве иллюстрации проведем численное моделирование для радиоимпульса с гауссовой огибающей (7) с нормировкой времени на длительность импульса  $\hat{t} = t/\tau$  и циклической частоты на несущую частоту  $\hat{f} = f/f_0$ .

Сигнал на выходе трассы будет описываться согласно выражению

$$s(t,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}(\omega,z) \dot{S}_{\rm in}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

и равен

$$s(t,z) = \operatorname{Re}\left\{A_{\operatorname{in}} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + j\beta_0''z}} \exp\left(-\frac{\left(t - \beta_0'z\right)^2}{2\left(\tau^2 + j\beta_0''z\right)}\right) \exp\left(j\left(\omega_0 t - \beta_0 z\right)\right)\right\}. \tag{11}$$

В качестве продольного волнового числа выберем модель, которая одинаково описывает продольное волновое число для прямоугольного волновода и плазмы без потерь; для наглядности выберем параметры: длина волны  $\lambda$ , нормированная критическая частота  $\hat{f}_{\rm cut}=0.75$ .

$$\gamma(\hat{f}) = \frac{2\pi \hat{f}}{\lambda} \sqrt{1 - (\hat{f}_{\text{cut}}/\hat{f})^2} \,. \tag{12}$$

Коэффициенты для выражения (8) на несущей частоте равны  $\beta_0 = 4{,}156~\text{рад/м}\,, \ \beta_0' = 1{,}512~\text{рад}\cdot\text{c/m}\,, \ \beta_0'' = -0{,}309~\text{рад}\cdot\text{c}^2/\text{м} \ \text{в соответствии с}$  моделью волнового числа (12).

Из анализа выражения для спектральной плотности сигнала вида (7), а также из критерия, что ширина полосы частот  $\Delta\Omega=\sqrt{8}/\tau$  определяется по уровню  $e^{-1}$ , получается, что для полосы частот 25 % длительность сигнала равна  $\tau=\sqrt{32}/\pi$ .

На рис. 2 изображен результат (10) фильтрации сигнала с гауссовой огибающей в сечениях  $L = \{10\lambda, 20\lambda, 30\lambda, 40\lambda\}$  трассы с частотной дисперсией вида (12) без учета дисперсионных искажений в опорной функции (согласованная фильтрация). Для переноса результата из временной области в пространственную было использовано приближение групповой скорости: шкала времени была помножена на значение групповой скорости на несущей частоте, далее пространственная шкала была нормирована на длину волны колебания  $\lambda$  на центральной частоте. Графики были нормированы на максимальное значение огибающей результата, полученного для трассы в сечении L=0, но это сечение не показано на семействе графиков.

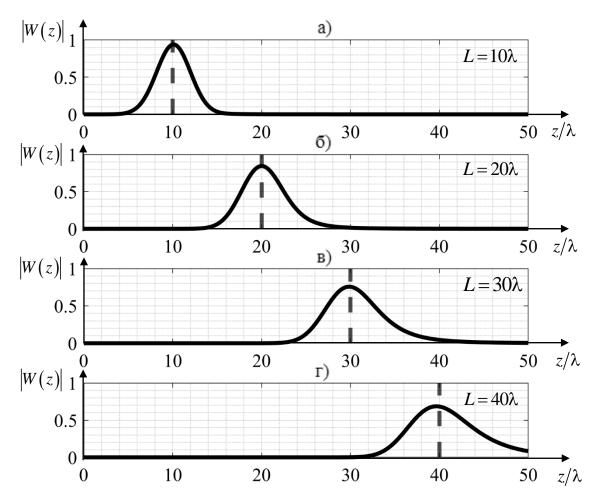


Рис. 2. Результат фильтрации (косвенный метод).

Из рис. 2 видно, что с увеличением расстояния максимум отклика смещается относительно ожидания по методу приближения групповой скорости (вертикальная штриховая линия); величина пика уменьшается,

эффективная ширина импульса увеличивается – снижается точность оценки максимума.

На рис. З изображена зависимость взаимной энергии наблюдаемого сигнала и пробной функции при отсутствии шумов наблюдений, вычисленная с помощью выражения (9) непосредственно в пространственной области. Для наглядности результат был нормирован на максимальное значение, полученное в сечении трассы L=0, которое не показано на семействе графиков.

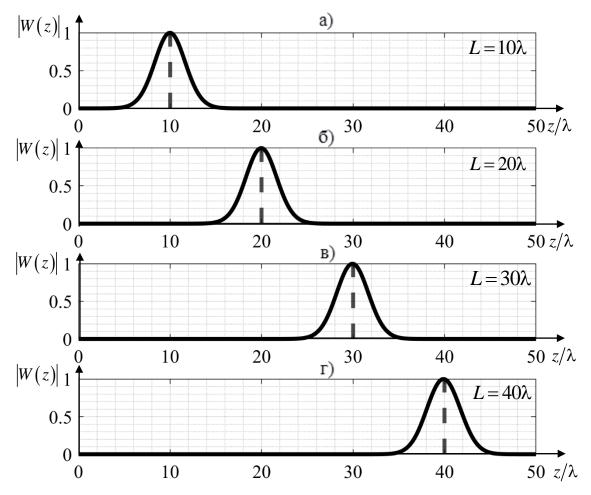


Рис. 3. Модуль взаимной энергии (прямой метод).

Из рис. З видно, что амплитуда взаимной энергии и эффективная ширина огибающей не зависят от пространственной координаты z. Таким образом, на протяжении трассы сохраняется одинаковая всем точность пространственной длины трассы. Максимум огибающей трассы, оценка по максимуму является протяженности несмещенной. Поскольку модель трассы задана без потерь и в прямом методе определения

протяженности трассы сохраняется эффективная ширина гауссовой огибающей, то по закону сохранения энергии на всем протяжении трассы сохраняется значение максимума взаимной энергии.

### 3. Точность оценки протяженности трассы

Было показано, что максимум  $\Psi(z)$  достигается при  $z_{\max} = L$ . Таким образом, по известной реализации W(z) необходимо найти оценку  $\hat{L} = z_{\max}$  и оценить ее дисперсию.

Рассмотрим случай, когда наблюдаемый сигнал аддитивно смешивается с белым гауссовым шумом n(t) с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma_n^2$ 

$$s_{\rm rx}(t,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\rm in}(\xi) h(t-\xi,z) d\xi + n(t),$$

тогда амплитуда взаимной энергии (1) будет равна

$$E(z) = \left| \dot{\psi}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{N}(\omega) \dot{S}_{pr}^{*}(\omega, z) d\omega \right|.$$

Протяженность трассы оценивается по максимуму наблюдаемой амплитуды

$$\hat{L} = \arg\max(E(z)),\tag{13}$$

тогда оценим смещение оценки  $x = \hat{L} - L$  методом максимального правдоподобия.

Распределение амплитуды белого гауссового шума при наличии регулярной составляющей сигнала описывается распределением Райса [8]

$$p(E \mid x) = \frac{E}{\sigma_E^2} \exp\left(-\frac{E^2 + E_m^2(x)}{2\sigma_E^2}\right) I_0\left(\frac{EE_m(x)}{\sigma_E^2}\right),$$

где E — амплитуда наблюдаемого сигнала,  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя, дисперсия шумов взаимной энергии

$$\sigma_E^2 = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{S}_{pr}^* (\omega, z) \right|^2 d\omega,$$

для сигнала с гауссовой огибающей  $\left|\dot{S}_{\mathrm{pr}}^{*}\left(\omega,z\right)\right|^{2}=A_{\mathrm{in}}\,2\pi\tau^{2}\exp\!\left(-\tau^{2}\Omega^{2}\right)$  и

постоянным уровнем спектра мощности  $N_0$  дисперсия на выходе равна  $\sigma_E^2 = N_0 A_{\rm in}^2 \sqrt{\pi} \tau \,, \text{ а среднее значение амплитуды (9), при } x \ll 1 \,,$ 

$$E_m(x) = \Psi(x) = \left[1 - (\beta_1 x/2)^2\right] \Psi_{\text{max}}.$$
 (14)

Для наглядности, будем считать, что  $E_m(x) > 3\sigma_E$ , тогда

$$p_E(E \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_E}} \exp\left(-\frac{\left(E - E_m(x)\right)^2}{2\sigma_E^2}\right),$$

при этом  $E - E_m(0) = 0$ .

Далее составим функцию правдоподобия

$$\Lambda(x) = p_E(x | E),$$

максимум которой соответствует максимуму функции

$$\ln\left[\Lambda(x)\right] = -\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_E\right) - \frac{\left(E - E_m(x)\right)^2}{2\sigma_E^2},$$

причем максимум достигается в точке, которую можно найти в результате решения следующего уравнения

$$\frac{\partial \ln \left[\Lambda(x)\right]}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}} = 0,$$

$$(E-E_m(\hat{x}))E'_m(\hat{x})=0,$$

то есть

$$\hat{x} = 2 \frac{\sqrt{1 - E/\Psi_{\text{max}}}}{\beta_1}.$$

Из условия равенства вероятностей  $p_x(x)dx = p_E(E)dE$  и условия нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x)dx = 1$ , найдем дифференциальную плотность вероятности смещения оценки протяженности трассы

$$p_x(x) = \Psi_{\text{max}} \frac{\beta_1^2 |x|}{2\sqrt{2\pi}\sigma_E} \exp\left(-\frac{\Psi_{\text{max}}^2 (\beta_1 x/2)^4}{2\sigma_E^2}\right).$$

Поскольку  $p_x(x)$  четная функция, то математическое ожидание  $\overline{x}=0$ , значит, оценка  $\hat{L}$  является несмещенной.

Дисперсия оценки протяженности трассы

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx = \frac{4\sigma_E}{\beta_1^2 \Psi_{\text{max}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{4}{SNR_E} \left(\frac{\tau}{\beta_0'}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$
 (15)

где  $\mathit{SNR}_E = \Psi_{\mathrm{max}}/\sigma_E$  — отношение энергии сигнала к энергии шума.

Сравним точность оценки протяженности трассы прямого метода с оценкой, полученной через косвенный метод измерения (10).

Введем смещение относительно групповой задержки  $\Delta t = \hat{t} - \beta_1 z$ , тогда при условии, что  $\Delta t \ll 1$ , можно применить аппроксимацию

$$\left|\Psi\left(\Delta\hat{t},z\right)\right| = \tilde{\Psi}_{\max}\left(1 - \left(\tilde{\beta}_{1}\Delta\hat{t}/2\right)^{2}\right),$$

где  $\tilde{\Psi}_{\text{max}} = \Psi_{\text{max}} / \sqrt[4]{1 + \left(\beta_2 z\right)^2}$ ,  $\tilde{\beta}_1 = 1 / \sqrt{1 + \left(\beta_2 z\right)^2}$ .

Очевидно, что полученное выражение совпадает с выражением (14) с точностью до постоянного коэффициента. Таким образом, при оценке групповой задержки (протяженности трассы) по максимуму амплитуды оценка групповой задержки является несмещенной  $\overline{\Delta t} = 0$  и дисперсию оценки групповой задержки можно оценить следующим выражением

$$\sigma_{\Delta t}^{2} = \frac{4\sigma_{E}}{\tilde{\beta}_{1}^{2}\tilde{\Psi}_{\text{max}}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{\left(1 + (\beta_{2}z)^{2}\right)^{5/4}}{SNR_{E}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Для пересчета нормированной групповой задержки в протяженность трассы необходимо умножить ее на коэффициент нормировки  $\tau$  и поделить на групповую скорость  $1/\beta_0'$ . Таким образом, дисперсия оценки протяженности трассы косвенным методом через оценку времени групповой задержки составляет

$$\sigma_L^2 = \frac{\left(1 + \left(\beta_2 z\right)^2\right)^{5/4}}{SNR_E} \left(\frac{\tau}{\beta_0'}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

При отсутствии дисперсии фазовой скорости ( $\beta_2=0$ ) прямой и косвенный методы оценки протяженности трассы показывают одинаковую точность измерений. При  $\beta_2\neq 0$  точность оценки косвенным методом уменьшается и становится хуже с увеличением расстояния пропорционально  $\left(1+\left(\beta_2z\right)^2\right)^{5/4}$ .

При  $\beta_2 z \gg 1$  дисперсия ошибки будет стремиться к величине

$$\sigma_L^2 = \frac{\sqrt{2N_0}}{A_{\text{in}}} \frac{\left(\beta_0''z\right)^{5/2}}{\pi^{3/4} \left(\beta_0'\right)^2}$$

и перестанет зависеть от ширины полосы частот полезного сигнала.

### Заключение

Было показано, что при наличии дисперсии на трассе распространения сигнала ошибка, вызванная использованием приближения групповой скорости, возрастает при увеличении рабочей полосы частот полезного сигнала. Также ошибка возрастает при увеличении полезным сигналом пройденного расстояния по трассе с дисперсией.

Было показано, что использование прямого метода оценки протяженности трассы через расчет взаимной энергии позволяет сохранить дисперсию оценки постоянной.

Если в среде распространения существуют частотно-зависимые потери, то  $\gamma(\omega)$  является комплексной функцией частоты. В этом случае значительно затрудняется получение аналитического решения для функционала (1), поскольку интегрирование переходит в комплексную плоскость. Однако получить аналитическое выражение возможно с помощью асимптотических методов, например, с использованием метода перевала [9].

Построена процедура на вариации функционала на базе Коши-Буняковского, но если целей много, то придется оставить только действительную часть волнового числа в пробной функции. Если в среде

распространения сигнала присутствует многоканальность, то меняется вариационная процедура что необходимо учитывать в пробной функции.

При отношении мощности полезного сигнал к мощности шума, равным 10 в точке наблюдения, и полосе сигнала, равной 25 %, дисперсия ошибки определения длины пути предложенным методом ограничена сверху величиной  $D_x^2 \le 1,04\lambda^2$ .

Если для сигнала с гауссовой огибающей и полосой частот  $\Delta f$ , распространяющегося по трассе длиной L со второй производной коэффициента распространения по частоте  $\beta_0''$  величина  $\left(\Delta f\right)^2\beta_0''L\geq 0,35$ , то дисперсия ошибки определения длины пути по времени задержки огибающей полезного сигнала будет превышать дисперсию ошибки предложенным методом не менее чем в два раза.

## Литература

- 1. Volakis J.L., Young J.D. Phase linearization of a broadband antenna response in time domain // IEEE Antennas and propagation. 1982. Vol.30. No.2. <a href="https://doi.org/10.1109/TAP.1982.1142784">https://doi.org/10.1109/TAP.1982.1142784</a>
- 2. Иванов Д.В., Иванов В.А., Рябова Н.В. Исследование эффективности метода компенсации нелинейной частотной дисперсии в широкополосных трансионосферных радиоканалах. // 28-я международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». eLIBRARY ID: 36569225. Российская Федерация, 2018.
- 3. Иванов В.А., Иванов Д.В., Рябова Н.В. Оптоволокно как линейная одномерная система с частотной дисперсией // Материалы XV Международной научно-технической конференции. eLIBRARY ID: 34979989. Российская Федерация, 2017.
- 4. Кальщиков А.А., Штыков В.В. Алгоритм обработки широкополосных сигналов, распространяющихся в средах с частотной дисперсией А. А. Кальщиков, В. В. Штыков. Алгоритм обработки широкополосных сигналов, распространяющихся в средах с частотной дисперсией. // Журнал

радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №2. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.2.9

- 5. А.А. Кальщиков, В.В. Штыков. Ускоренный метод определения расстояния до объекта при наличии частотной дисперсии фазовой скорости. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №3. <a href="https://doi.rg/10.30898/1684-1719.2020.3.5">https://doi.rg/10.30898/1684-1719.2020.3.5</a>
- 6. Корн Г.. Справочник по математике для научных работников и инженеров. ISBN 978-5-458-25439-7. М.: «Книга по требованию», 2014.
- 7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи с распределёнными параметрами: Учебное пособие для вузов. ISBN 5397022659. М.: Высшая школа, 1980.
- 8. А. И. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. ISBN 5-93108-047-3. М.: Радиотехника, 2003.
- 9. Д. Е. Вакман. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М.: Сов. радио, 1962.

### Для цитирования:

Кальщиков А.А., Штыков В.В., Шалимова Е.В. Прямой метод определения длины пути, пройденного сигналом по трассе с частотной дисперсией. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №9. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.1