

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.2>

УДК 621.396.677

## ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СФЕРИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЩЕЛЕВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

М. В. Инденбом

Всероссийский научно-исследовательский институт радиотехники,  
105082, Москва, Большая Почтовая, 22

Статья поступила в редакцию 20 августа 2020 г.

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию сферических осесимметричных фазированных антенных решеток (ФАР) для широкоугольного кругового электрического сканирования. Щелевые излучающие элементы ФАР с согласующими цепочками на входе расположены в прямоугольной или треугольной сетке на равноотстоящих по углу поворота образующих (меридианах) с постоянным шагом. Для учета взаимной связи щелевых излучателей при больших размерах сферической антенной решетки использован ранее развитый асимптотический метод анализа квазипериодических выпуклых антенных решеток, форма и размеры единичной ячейки которых являются медленными функциями точки на поверхности антенны. В работе на основе асимптотического метода получено и исследовано интегральное уравнение для распределения напряжения в центрах щелей по поверхности сферической антенной решетки. Получено асимптотическое выражение для коэффициентов ряда Фурье для парциальной диаграммы элемента антенной решетки (понимаемой как диаграмма направленности антенной решетки при возбуждении одного из ее элементов и волновых нагрузках на входах всех остальных элементов) при больших электрических размерах антенны. Получены простые асимптотические выражения для амплитуд отраженных волн на входе излучателей при остронаправленном излучении. Численное исследование полученных асимптотических решений показало их хорошее согласование с результатами расчета, выполненными

строгим методом для сферической антенной решетки радиуса около  $4\lambda$ . В результате расчетов показана практическая применимость простого приближенного решения, для которого не требуется решения интегрального уравнения для распределения напряжения по поверхности антенной решетки.

Исследованы характеристики сферических ФАР большого электрического размера с радиусом поверхности  $13,5\lambda$  и числом элементов порядка  $10^4$ . Показано, что сферическая ФАР аксиальных щелей позволяет обеспечить круговое широкоугольное сканирование вплоть до полусферы. При этом потери коэффициента усиления (КУ) и потенциала при отклонении луча по углу места  $85^\circ$  составляют около 4 дБ (при расстоянии между элементами в пределах половины длины волны).

**Ключевые слова:** сферическая осесимметричная фазированная антенная решетка, взаимодействие излучателей, асимптотический метод, широкоугольное сканирование, щели, диаграмма направленности, реализованный коэффициент усиления, отраженные волны, матрица рассеяния.

**Abstract.** In this paper, axisymmetric spherical phased array antennas (SPAA) for circle wide-angle electric scanning are explored. Slot radiators of SPAA are placed in rectangular or triangular grid on shifted on equal angle meridians with equal distances between slots and have impedance matching networks in its inputs.

Earlier developed by author asymptotic method for analysing quasi-periodic convex antenna array with interaction of the slot elements is used to study axisymmetric SPAA. It is applicable because unit cell form and sizes are slow functions of point on SPAA surface. In the paper, relationships of asymptotic method were further developed. Integral equation for distribution of slots voltages on SPAA surface were got and studied. The element patterns (in array environment) for large sphere radius are presented as Fourier series with asymptotic expression for coefficients. The simple asymptotic expressions for calculation of reflected waves in element inputs were also deduced in case of narrow-directed radiation. Numerical calculations of obtained asymptotic solutions were carried out. Good agreement with results obtained by strict method of eigenfunctions is established for SPAA with about  $4\lambda$  radius. As a result of

calculations, the practical applicability of a simple approximate solution is shown, for which the solution of the integral equation for the voltage distribution over the surface of the antenna array is not required. The characteristics of large sized SPAA with a radius of  $13,5\lambda$  and a number of elements of about  $10^4$  are numerically studied. It is shown that the spherical PAR of the axial slots provides circular wide-angle scanning up to the hemisphere. In this case, the loss of the gain and EIRP when the beam is deflected by the elevation angle of  $85^\circ$  is about 4 dB (with a distance between the elements within half the wavelength).

**Key words:** spherical axisymmetric phased antenna array, slot elements interaction, asymptotic methods, wide-angle scanning, radiation pattern, realized gain, reflection waves, scattering matrix

## Введение

Для кругового электрического сканирования могут применяться сферические осесимметричные фазированные антенные решетки (ФАР), излучающие элементы которых расположены в прямоугольной или треугольной сетке с постоянным шагом на равноотстоящих по углу поворота образующих (меридианах) (рис. 1). Такая антенная решетка может состоять из щелевых излучателей, каждый из которых питается независимой фидерной линией, например, резонаторно-щелевых излучателей или открытых концов узких прямоугольных волноводов.

Известно, что при управлении амплитудно-фазовым и поляризационным распределением источников сферическая антенна может обеспечить электрическое сканирование во всем пространстве с постоянным коэффициентом направленного действия (КНД), максимальным при данном размере антенны [1]. Цель данной работы заключается в развитии теории и на ее основе исследовании возможностей широкоугольного электрического сканирования с помощью сферической антенной решетки щелевых излучающих элементов, ориентированных под фиксированным углом к меридианам, не позволяющей управлять поляризацией. Такая антенная решетка

с точки зрения практической реализации значительно проще, чем антенная решетка с элементами двойной поляризации с управлением поляризацией излучения.

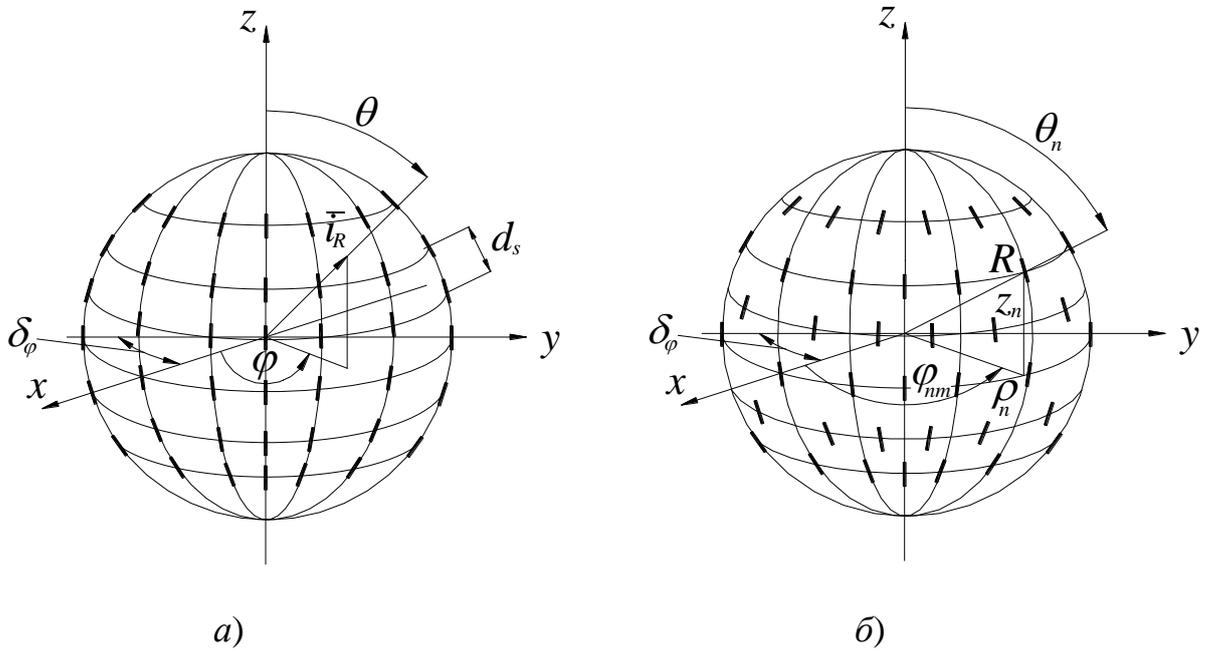


Рис. 1. Сетка координат размещения излучателей; прямоугольная (а), треугольная (б).

Для адекватного описания характеристик сканирующей сферической ФАР необходимо учитывать взаимную связь щелевых излучающих элементов. В рамках, так называемого, поэлементного подхода эффекты взаимной связи описывают с помощью матрицы взаимных проводимостей, размеры которой для многоэлементной антенной решетки достаточно велики. Использование осевой симметрии сферической антенной решетки с помощью модального подхода и разложения электромагнитного поля в ряд по сферическим гармоникам позволяет существенно уменьшить размеры матриц [2].

При больших размерах сферической антенной решетки с квазипериодическим размещением щелевых излучающих элементов может быть использован асимптотический метод [3-5], подобный методу периодических структур, применяемому для анализа бесконечных плоских ФАР [6]. Квазипериодичность антенной решетки подразумевает, что форма и размеры единичной ячейки антенной решетки являются медленными

функциями точки на поверхности антенны. Математическая формулировка условия медленности дана в [3]. В сферической осесимметричной антенной решетке условия квазипериодичности нарушаются только вблизи полюсов, где происходит сгущение излучающих элементов.

В данной работе асимптотический метод получил дальнейшее развитие. Получены приближенные асимптотические соотношения, выполнено численное исследование характеристик сферической решетки большого размера, проведено сравнение численных результатов, полученных асимптотическими методами и на основании строгого решения [2].

Хотя на рис. 1 щели имеют аксиальную ориентацию, полученные ниже расчетные соотношения получены для произвольной идентичной ориентации щелей относительно местных меридианов.

## 1. Расчетные соотношения асимптотического метода

**Геометрия сферической антенной решетки.** Излучающие элементы ФАР расположены на направляющих (окружностях) с постоянным угловым шагом

$$\delta_\varphi = 2\pi / N_\varphi, \quad (1)$$

где  $N_\varphi$  – число элементов в кольце. Для треугольной сетки нечетные кольца элементов смещены на  $\delta_\varphi/2$  (рис. 1).

Для описания поверхности и координат элементов введем поверхностную сферическую систему координат  $\vartheta, \varphi$ . Координаты центров излучателей

$$\begin{cases} \vartheta_n = \vartheta_0 + n\delta_\vartheta, \\ \varphi_{nm} = \left(m + \varepsilon \frac{n}{2}\right)\delta_\varphi, \end{cases} \quad n = 1, \dots, N_\vartheta, \quad m = 1, \dots, N_\varphi \quad (2)$$

где  $N_\vartheta$  – число колец излучающих элементов,  $\delta_\varphi, \delta_\vartheta, \vartheta_0$ , – постоянные;  $\varepsilon = 0$  для прямоугольной сетки,  $\varepsilon = 1$  для треугольной сетки.

Шаг элементов по кольцу (рис. 2) зависит от номера кольца:

$$d_\varphi = \delta_\varphi R \sin \vartheta_n, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус сферической поверхности антенны.

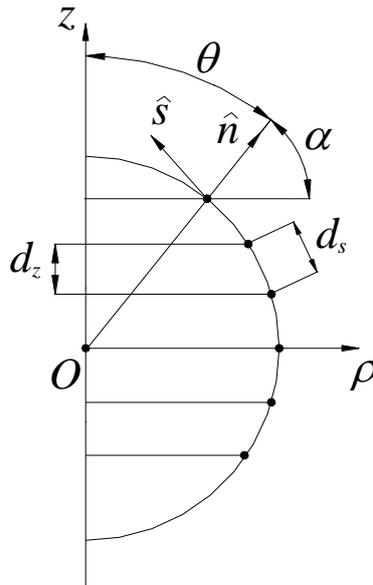


Рис. 2. Образующая сферической поверхности, координаты и обозначения.

Шаг колец образующей и по оси  $z$  связаны между собой соотношением

$$d_z = d_s \sin \vartheta_n . \quad (4)$$

**Спектральное представление.** Произвольное возбуждение ФАР системой падающих волн в фидерах излучателей запишем в виде  $N$ -элементного вектора-столбца комплексных амплитуд этих волн  $\mathbf{a}$  ( $N$  – число элементов ФАР). Это возбуждение можно представить в виде спектра «парциальных возбуждений» с единичной амплитудой и линейной фазой [3]:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{e}(\mathbf{u}) d\gamma d\nu , \quad (5)$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{e}^+(\mathbf{u}) \mathbf{a} \quad (6)$$

– спектр возбуждения  $\mathbf{a}$ ,  $+$  – знак эрмитова сопряжения,

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \left\| e^{-j\mathbf{nu}} \right\| \quad (7)$$

– вектор-столбец амплитуд падающих волн парциального возбуждения,

$$\mathbf{n} = (m \mid n) \quad (8)$$

– вектор-строка номеров излучающего элемента,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \nu \end{pmatrix} . \quad (9)$$

Постоянные парциального возбуждения  $\gamma, \nu$  определяют сдвиг фазы парциального возбуждения между соседними элементами антенной решетки.

Соотношение (5) позволяет изучить поведение антенной решетки при парциальном возбуждении (8) и затем получить результаты для произвольного возбуждения с помощью принципа линейной суперпозиции. Например, вектор-столбец амплитуд отраженных волн на входе излучателей при произвольном возбуждении  $\mathbf{a}$  представится в виде интеграла от амплитуд отраженных волн при парциальных возбуждениях

$$\mathbf{b} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) d\gamma d\nu, \quad (10)$$

где  $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$  – вектор-столбец амплитуд отраженных волн на входе излучателей при парциальном возбуждении  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ .

**Напряжения в щелях сферической антенной решетки.** Будем рассматривать «одномодовое» приближение, при котором распределение поля в пределах щели считается известным, обычно косинусоидальным. Напряжение же в центре щели неизвестно и изменяется от излучателя к излучателю. При парциальном возбуждении (7) распределение напряжения по поверхности антенной решетки  $U(x)$  определяется из решения интегрального уравнения, которое в простейшем случае, когда только одна из пространственных гармоник в разложении поля по пространственным гармоникам имеет точки перехода (в которых пространственная гармоника переходит из режима распространения вдоль поверхности антенны в режим нераспространения), является уравнением Вольтерра со слабой особенностью ядра [4]. Аргумент напряжения  $x$  является безразмерной поверхностной координатой, связанной с этой пространственной гармоникой. Для осесимметричной сферической антенной решетки с постоянным шагом элементов по образующей безразмерные координаты для всех таких гармоник, имеющих точки перехода, выражаются через  $\vartheta$

$$x_i = \lambda_i \vartheta, \quad \lambda_i = -2m_\xi \frac{kd_s}{\tau_{pq_i}} \quad (11)$$

где  $k$  – волновое число,

$$m_\xi = \left( \frac{kR}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

– большой параметр асимптотической задачи,

$$\tau_{pq_i} = \nu_{q_i} - \frac{\varepsilon}{2} \gamma_{p_i}, \quad (13)$$

где

$$\gamma_p = \gamma + 2\pi p, \quad \nu_q = \nu + 2\pi q, \quad (14)$$

$p = p_i, q = q_i$  – номера соответствующей пространственной гармоники.

Интегральное уравнение для напряжения в щелях может быть в результате записано от переменной  $\vartheta$

$$U(\theta) + \int_0^\pi \frac{U(\vartheta)}{\sqrt{|\theta - \vartheta|}} \sum_i \Theta(\lambda_i(\theta - \vartheta)) a_i(\theta) \nu(\lambda_i(\theta - \vartheta)) e^{-j\psi_i(\theta, \vartheta)} d\vartheta = f(\theta), \quad (15)$$

где суммирование ведется по всем пространственным гармоникам, имеющим на сферической поверхности точки перехода,

$$a_i = \frac{j m_\xi \sqrt{|\lambda_i|} S_0 |f_\xi(\gamma_{p_i}, \nu_{q_i})|^2}{\sqrt{j\pi Z(Y' + Y_{\text{int}})}}, \quad (16)$$

$$Y' = Y - j m_\xi \frac{S_0}{Z} \sum_i \frac{w'_2(t_\xi)}{w_2(t_\xi)} |f_\xi|^2, \quad (17)$$

$$Y = Y(\vartheta, \gamma, \tau) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} Y_0(\vartheta; \gamma_p, \tau_{pq}), \quad (18)$$

$$Y_0(\vartheta; \gamma, \tau) = \frac{S_0}{Z} \left\{ j m_\xi \frac{w'_2(t_\xi)}{w_2(t_\xi)} |f_\xi|^2 + \frac{1}{j m_\xi} \frac{w_2(t_\xi)}{w'_2(t_\xi)} |f_\eta|^2 \right\}, \quad (19)$$

$$t_\xi = t_\xi(\gamma, \tau) = m_\xi^2 (g_1^{-1} - 1), \quad g_1^{-1} = \left( \frac{\gamma}{kd_\varphi} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{kd_s} \right)^2 \quad (20)$$

$$f_{\xi} = \hat{f}(\kappa) \cos(\chi + \phi) , \quad f_{\eta} = \hat{f}(\kappa) \sin(\chi + \phi) , \quad (21)$$

$$\kappa = \frac{\gamma a \cos \chi + \tau \sin \chi}{d_s} , \quad (22)$$

$\chi$  – угол поворота щели по отношению к координатным линиям  $\varphi$ ,

$$\hat{f}(\kappa) = \frac{1}{S_0} \int e(l) \exp(j\kappa l) dl , \quad (23)$$

$l$  – локальная декартова координата вдоль продольной оси щели,

$S_0 = S_0(\mathcal{G}) = d_s d_{\varphi}$  – площадь ячейки антенной решетки;

$$\sin \phi = \frac{\gamma / d_{\varphi}}{\sqrt{(\gamma / d_{\varphi})^2 + (\tau / d_s)^2}} , \quad \cos \phi = \frac{\tau / d_r}{\sqrt{(\gamma / d_{\varphi})^2 + (\tau / d_s)^2}} , \quad (24)$$

$$\psi_i(\theta, \mathcal{G}) = \lambda_i \int_{\theta}^{\mathcal{G}} t_{\xi}(\gamma_{p_i}, \nu_{q_i}, \mathcal{G}') d\mathcal{G}' , \quad (25)$$

$\Theta(x) = 1, x > 0; \Theta(x) = 0, x < 0; Z = 120\pi;$

$\nu(x)$  – функция Фока (приложение 1), являющаяся гладкой функцией.

Свободный член интегрального уравнения (15)

$$f(x) = \frac{I_0}{(Y' + Y_{\text{int}})} , \quad (26)$$

где  $I_0, Y_{\text{int}}$  – постоянные, поясняемые эквивалентной схемой входной цепи щелевого излучателя, представленной на рис. 3.

На этой схеме реактивная проводимость  $B$ , параллельная проводимости щели  $Y$ , включает в себя как паразитную проводимость включения, так и специально введенную реактивность для согласования излучателя;  $n$  – коэффициент трансформации при неполном включении щели в линию питания с волновым сопротивлением  $W$ .

$$Y_{\text{int}} = n^{-2} W^{-1} + jB \quad (27)$$

– входная проводимость цепи питания со стороны щели, а  $I_0$  – ток короткого замыкания на выходе цепи при единичной мощности падающей волны на входе

$$I_0 = \frac{2\sqrt{2}}{n\sqrt{W}} . \quad (28)$$

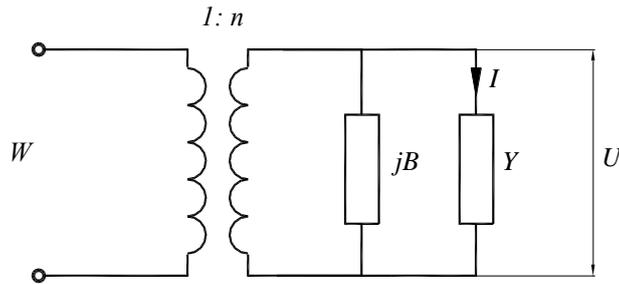


Рис. 3. Эквивалентная схема входной цепи излучателя.

Интегральное уравнение имеет интегрируемую особенность ядра, которая может быть устранена заменами переменных интегрирования вида  $\lambda(\theta - \vartheta) = |\lambda|z^2$ . Для численного решения полученного таким образом интегрального уравнения с гладким ядром в работе использовался метод коллокаций [7].

Если точки перехода пространственных гармоник отсутствуют, как это имеет место, например, при расстоянии между элементами меньше половины длины волны, то сумма по  $i$  исчезает и решение получается из (15) алгебраически

$$U(\theta) = f = \frac{I_0}{(Y + Y_{\text{int}})} . \quad (29)$$

Это выражение и в общем случае наличия точек перехода дает приближенное асимптотическое решение интегрального уравнения. Его можно получить, если разложить  $\psi_i(\theta, \vartheta)$  в ряд Тейлора в окрестности особой точки ядра  $\vartheta = \theta$ , ограничиться его линейным членом, расширить пределы интегрирования до бесконечности и использовать (П.1.5).

Будем называть (29) асимптотическим решением первого порядка. Решение, получающееся при удержании в ряде Тейлора  $\psi_i(\theta, \vartheta)$  двух членов, включая квадратичный, ранее полученное в [5], далее будем называть асимптотическим решением второго порядка.

В силу осевой симметрии антенной решетки напряжение в щелях не зависят от азимутального угла  $\varphi$ .

**Парциальная диаграмма элемента.** Под парциальной диаграммой элемента антенной решетки понимается диаграмма направленности антенной решетки при возбуждении одного из ее элементов и волновых нагрузках на входах всех остальных элементов [3]. Парциальная диаграмма  $(n, m)$ -го элемента сферической антенной решетки может быть представлена в виде ряда Фурье [5]

$$\vec{f}_{nm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} j^l \vec{B}_{nl}(\theta) e^{-jl(\varphi-\varphi_{nm})} e^{jkR\cos\vartheta_n \cos\theta}, \quad (30)$$

с коэффициентами

$$\vec{B}_{nl}(\theta) = j^{-l} \int_0^{2\pi} U(\vartheta_n, \delta_\varphi l, \tau_0(\varphi')) \vec{G}(\vartheta_n, 1, \varphi') e^{j(kR\cos\vartheta_n \sin\theta \cos\varphi' - l\varphi')} d\varphi', \quad (31)$$

где  $U$  – найденное выше напряжение в щелях при парциальном возбуждении,

$$\left. \begin{aligned} G_\theta &= -\frac{kS_0}{2\sqrt{2\pi Z}} \left\{ (\hat{\varphi}_0 \hat{s}) A_s + (\hat{\varphi}_0 \hat{\varphi}) A_\varphi + (\hat{\varphi}_0 \hat{n}) A_n \right\} \\ G_\varphi &= \frac{kS_0}{2\sqrt{2\pi Z}} \left\{ (\hat{\theta}_0 \hat{s}) A_s + (\hat{\theta}_0 \hat{\varphi}) A_\varphi + (\hat{\theta}_0 \hat{n}) A_n \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} A_s &= [f_\eta \cos\phi - f_\xi \sin\phi] - \left( \vec{i}_R \hat{n} \right) (h_\xi \cos\phi + h_\eta \sin\phi) \\ A_\varphi &= [f_\eta \sin\phi + f_\xi \cos\phi] - \left( \vec{i}_R \hat{n} \right) (h_\xi \sin\phi - h_\eta \cos\phi) \\ A_n &= \left[ \left( \vec{i}_R \hat{s} \right) \cos\phi + \left( \vec{i}_R \hat{\varphi} \right) \sin\phi \right] h_\xi + \left[ \left( \vec{i}_R \hat{s} \right) \sin\phi - \left( \vec{i}_R \hat{\varphi} \right) \cos\phi \right] h_\eta \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

$$h_\xi = \frac{j}{m_\xi} f_\eta \frac{w'_2(t_\xi)}{w_2(t_\xi)}, \quad h_\eta = jm_\xi f_\xi \frac{w_2(t_\xi)}{w'_2(t_\xi)}, \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_R \hat{s} &= -\sin\theta \cos\vartheta_n \cos\varphi' + \cos\theta \sin\vartheta_n, \\ \vec{i}_R \hat{n} &= \sin\theta \sin\vartheta_n \cos\varphi' + \cos\theta \cos\vartheta_n, & \vec{i}_R \hat{\varphi} &= -\sin\theta \sin\varphi', \\ \hat{\theta}_0 \hat{s} &= -\cos\theta \cos\vartheta_n \cos\varphi' - \sin\theta \sin\vartheta_n, & \hat{\varphi}_0 \hat{s} &= -\cos\vartheta_n \sin\varphi', \\ \hat{\theta}_0 \hat{n} &= \cos\theta \sin\vartheta_n \cos\varphi' - \sin\theta \cos\vartheta_n, & \hat{\theta}_0 \hat{\varphi} &= -\cos\theta \sin\varphi', \\ \hat{\varphi}_0 \hat{n} &= \sin\vartheta_n \sin\varphi', & \hat{\varphi}_0 \hat{\varphi} &= \cos\varphi', \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$\vec{i}_R, \vec{\theta}_0, \varphi_0$  – сферические орты точки наблюдения,  $\vec{s}$  – касательный единичный вектор к образующей (рис. 2);  $\tau_0 = kd_s \vec{i}_R \vec{s}^1$ .

Для ускорения вычисления интеграла (31) в [5] предложено использовать дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от медленноменяющегося амплитудного множителя в подынтегральном выражении.

Этот интеграл при больших электрических размерах антенны может быть также вычислен асимптотически как интеграл от быстро осциллирующей функции. Фазовая функция (31) имеет две стационарные точки

$$\varphi_l^{(1)} = -\arcsin \frac{l}{p}, \quad \varphi_l^{(2)} = -\pi + \arcsin \frac{l}{p}, \quad (36)$$

которые сливаются в одну точку  $\varphi_0 = \pm\pi/2$  при  $l = \pm p$ , где

$$p = kR \sin \vartheta_n \sin \theta. \quad (37)$$

Равномерная асимптотика интеграла (приложение 2)

$$\vec{B}_{nl} = \pi \left\{ \frac{\vec{M}_1 + \vec{M}_2}{2} J_l(p) + j \frac{\vec{M}_2 - \vec{M}_1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{l}{p}\right)^2}} J'_l(p) \right\}, \quad (38)$$

где  $\vec{M}_{1,2} = U(\vartheta_n, \delta_\varphi l, \tau_0(\varphi_l^{(1,2)})) \vec{G}(\vartheta_n, \delta_\varphi l, \varphi_l^{(1,2)})$  – значения амплитудного множителя в стационарных точках.

Использование асимптотического значения интеграла (38) существенно упрощает вычисления, поскольку в нем используются значения напряжения в щелях только в двух (стационарных) точках вместо обычно нескольких десятков точек при ДПФ.

Трудности использования асимптотики (38) связаны с необходимостью аналитического продолжения напряжения в щелях в комплексную плоскость

<sup>1</sup> В последнем выражении (33) исправлена, допущенная в [5], ошибка знака второго слагаемого.

переменных при  $|l| > p$ . На практике аналитическое продолжение напряжения легко может быть выполнено только в асимптотическом приближении первого порядка для напряжения в щелях (29). Альтернативой этому является применение неравномерной асимптотики интеграла (которая получается, если при  $|l| > p$  использовать значения напряжения, имеющие место при  $l = \pm p$ ), что приводит к снижению точности расчета, либо ДПФ.

При использовании для напряжения в щелях асимптотического приближения первого порядка сложности возможны также в ситуации, когда одновременно и  $|l| \approx p$ , и для одной из пространственных гармоник стационарная точка является точкой перехода, т.е.  $g_1 = 1$  (21). В этом случае при  $|l| > p$  контур наискорейшего спуска в (31) для одной из стационарных точек пересекает полюса напряжения в комплексной плоскости, что приводит к нарушению условий справедливости использованного метода асимптотического интегрирования. В этом случае также необходимо воспользоваться неравномерной асимптотикой интеграла, либо ДПФ, либо численным методом расчета.

Асимптотическое выражение для парциальной диаграммы элемента, как можно заметить, зависит от шагов решетки только через напряжение в щелях  $U$ . Поэтому, полагая вследствие формального предельного перехода  $d_\varphi, d_z \rightarrow \infty$   $U = 1$ , получим из него асимптотическое выражение для диаграммы направленности одиночной щели, прорезанной в проводящей сферической поверхности.

**Характеристики излучения сферической ФАР.** Диаграмма направленности ФАР является взвешенной суммой парциальных диаграмм элементов (30), имеющих общее начало отсчета фазы

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = \sum_{n,m} a_{nm} \vec{f}_{nm}(\theta, \varphi) . \quad (39)$$

Для создания режима остронаправленного излучения возбуждение элементов ФАР падающими волнами

$$a_{nm} = A_{nm} \vec{p} \vec{f}_{nm}^* (\theta_0, \varphi_0), \quad (40)$$

где  $\theta_0, \varphi_0$  – направление максимума излучения,  $A_{nm}$  – вещественный множитель спада,  $\vec{p}$  – единичный вектор основной поляризации.

При  $A_{nm} = 1$  (40) доставляет максимум КУ ФАР, т.е. является оптимальным по КУ. Максимальный (реализованный) КУ [3]

$$G_{\max} = \frac{\left| \sum_{n,m} \left( \vec{p} \vec{f}_{nm}^* \right) \vec{f}_{nm} \right|^2}{\sum_n \left| \left( \vec{p} \vec{f}_{nm}^* \right) \right|^2}. \quad (41)$$

Для уменьшения уровня боковых лепестков диаграммы направленности ФАР необходимо увеличить спадание амплитуды возбуждения к краям эквивалентного раскрыва [1]. Один из вариантов множителя спада для уменьшения уровня боковых лепестков в азимутальных сечениях [3]

$$A_m = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos^p (\varphi_{nm} - \varphi), & |\varphi_{nm} - \varphi| \leq \pi / 2 \\ \alpha, & |\varphi_{nm} - \varphi| > \pi / 2 \end{cases}, \quad (42)$$

где  $\alpha, p$  – числовые параметры.

В режиме передачи активной ФАР (АФАР) максимальный потенциал<sup>2</sup> достигается при возбуждении АФАР с постоянной амплитудой и фазой, соответствующей максимальному КУ, т.е. фазе (40) [8].

Максимальный коэффициент направленного действия (КНД) сферической антенны в приближении физической оптики определяется площадью эквивалентного плоского раскрыва, перпендикулярного направлению максимума излучения [1]. При возбуждении пояса сферы

$$D_{\max} (\theta_0) = \frac{8\pi^2 R^2}{\lambda^2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[ \sin \theta_0 \sin^2 \vartheta \sin \varphi_g (\vartheta) + \cos \theta_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \varphi_g (\vartheta) \right] d\vartheta, \quad (43)$$

где

<sup>2</sup> Произведение КУ на падающую мощность или КНД на мощность излучения, EIRP.

$$\varphi_g(\vartheta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin(\operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \vartheta) \right], \quad (44)$$

– граничный угол освещенной области антенны,  $\vartheta_{1,2}$  – граничные углы возбужденного пояса сферы.

Потери КУ сферической ФАР определим соотношением

$$\mu(\theta_0) = \frac{G(\theta_0)}{D_{\max}(\theta_0)}. \quad (45)$$

**Отраженные волны на входе излучателей и КПД.** Коэффициент отражения при парциальном возбуждении на входе согласующей цепочки излучателя, как нетрудно установить из эквивалентной схемы рис. 3,

$$\Gamma_a(\vartheta; \gamma, \tau) = \frac{Y_{\text{int}}^* - Y}{Y_{\text{int}} + Y}, \quad (46)$$

где  $\tau = \nu - \varepsilon\gamma/2$ , а  $Y$  – действующая проводимость щели при парциальном возбуждении, связанная с напряжением в щелях, полученным в результате решения интегрального уравнения (15), соотношением, следующим из закона Ома для цепи рис. 3:

$$Y = \frac{I_0}{U} - Y_{\text{int}}. \quad (47)$$

Коэффициент отражения (46), соответствующий парциальному возбуждению антенной решетки (7), является действующим коэффициентом отражения и может принимать по модулю значения не только меньше, но и больше единицы.

Легко видеть, что при использовании для напряжения асимптотического приближения первого порядка (29) действующая проводимость (48) определяется (18), (19).

При произвольном возбуждении комплексные амплитуды отраженных волн определяются выражением (10), воспользоваться которым непосредственно для вычислений достаточно сложно. Для остронаправленного излучения можно получить более простые приближенные выражения для амплитуд отраженных волн.

Для этого сначала преобразуем общее выражение для спектра возбуждения (6). Допустим, что возбуждение  $a_{nm}$  можно выразить через дискретные значения непрерывной функции:  $a_{nm} = a(m, n)$ . Тогда применением к (6) формулы суммирования Пуассона [1, 9] получим

$$F(\gamma, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_0^{N_\theta} \int_0^{N_\varphi} a(\zeta, h) e^{j(\gamma_p \zeta + \nu_q h)} d\zeta dh, \quad (48)$$

где  $\gamma_p, \nu_q$  определяются (14).

Амплитуды отраженных волн после подстановки (48) и  $\hat{b}_{nm} = \Gamma_a(\mathcal{G}_n; \gamma, \tau) \exp(-j(\gamma m + \nu n))$  в (10), с учетом  $2\pi$ -периодичности  $\Gamma_a(\mathcal{G}_n; \gamma, \tau)$  по  $\gamma, \nu$ , можно представить в виде

$$b_{nm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{N_h} \int_0^{N_\varphi} a(\zeta, h) \Gamma_a(\mathcal{G}_n; \gamma, \tau) e^{j[\gamma(\zeta-m) + \nu(h-n)]} d\zeta dh d\gamma d\nu. \quad (49)$$

При остронаправленном излучении ФАР в амплитудно-фазовом распределении падающих волн на входе элементов можно выделить быстроменяющийся фазовый множитель и медленноменяющийся амплитудный множитель [3]

$$a_{nm} = A_{nm} e^{-jk \vec{i}_{R0} \vec{r}_{nm}}, \quad (50)$$

где  $A_{nm}$  – амплитудный множитель,  $\vec{i}_{R0}$  – единичный вектор в направлении максимума излучения,  $\vec{r}_{nm}$  – радиус-вектор  $m, n$ -го элемента.

В этом случае фазовый множитель в подынтегральном выражении (49) оказывается быстро осциллирующим и для приближенного вычисления четырехкратного интеграла можно применить метод стационарной фазы [10]. С учетом (2 – 4) точка стационарной фазы

$$\left. \begin{aligned} \zeta_s &= m, \quad h_s = n, \\ \gamma_s &= kd_\varphi \sin \mathcal{G}_n \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_{nm}) \\ \tau_s &= kd_{s_n} \left( \sin \mathcal{G}_n \cos \theta_0 - \cos \mathcal{G}_n \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_{nm}) \right) \end{aligned} \right\}, \quad (51)$$

где  $\theta_0, \varphi_0$  – углы направления луча.

Гессиан в стационарной точке равен 1. В результате применения формулы многомерного метода стационарной фазы [10]

$$b_{nm} \cong \Gamma_a(\mathcal{Q}_n; \gamma_s, \tau_s) a_{nm} . \quad (52)$$

Выражение (52) не учитывает, однако, вклад полюсов  $\Gamma_a(\mathcal{Q}_n; \gamma, \tau)$  в комплексной плоскости переменных, расположенных вблизи точек перехода пространственных гармоник, который проявляется, когда точка стационарной фазы приближается к точке перехода.

Чтобы учесть этот вклад воспользуемся вместо непрерывного спектрального представления вектора падающих волн (5) дискретно-непрерывным представлением, учитывающим, что элементы осесимметричной антенной решетки расположены в кольцах с одинаковым числом элементов

$$a_{nm} = \frac{1}{N_\varphi} \sum_{i=1}^{N_\varphi} e^{-j\delta_\varphi i m} \int_{-\pi}^{\pi} F(\delta_\varphi i, \tau) e^{-j\nu m} d\nu . \quad (53)$$

Амплитуды отраженных волн по принципу линейной суперпозиции

$$b_{nm} = \frac{1}{N_\varphi} \sum_{i=1}^{N_\varphi} e^{-j\delta_\varphi i m} \int_{-\pi}^{\pi} F(\delta_\varphi i, \nu) \Gamma_a(\mathcal{Q}_n; \delta_\varphi i, \tau) e^{-j\nu m} d\nu . \quad (54)$$

Подставив сюда (6) и применив формулу суммирования Пуассона [1, 10], получим

$$b_{nm} = \frac{1}{2\pi N_\varphi} \sum_{i=1}^{N_\varphi} \sum_{m'=1}^{N_\varphi} e^{j\delta_\varphi i (m'-m)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a(m', h) \Gamma_a(\mathcal{Q}_n; \delta_\varphi i, \tau) e^{j\nu(h-n)} d\nu dh . \quad (55)$$

Снова применим формулу суммирования Пуассона к сумме по  $m'$

$$b_{nm} = \frac{1}{2\pi N_\varphi} \sum_{p=-\infty}^\infty \sum_{i=1}^{N_\varphi} e^{-j\delta_\varphi i m} \int_1^{N_\theta} \int_1^{N_\varphi} \int_{-\infty}^\infty a(\zeta, h) \Gamma_a(\mathcal{Q}_n; \delta_\varphi i, \tau) e^{j[\nu(h-n) + (\delta_\varphi i - 2\pi p)\zeta]} d\nu d\zeta dh ,$$

и объединив суммы по  $p$  и  $i$ , найдем

$$b_{nm} = \frac{1}{2\pi N_\varphi} \sum_{l=-\infty}^\infty \int_1^{N_\theta} \int_1^{N_\varphi} \int_{-\infty}^\infty a(\zeta, h) \Gamma_a(\mathcal{Q}_n; \delta_\varphi l, \tau) e^{j[\nu(h-n) + \delta_\varphi l(\zeta-m)]} d\nu d\zeta dh . \quad (56)$$

Теперь заменим переменные интегрирования  $\zeta, \nu$  на

$$\varphi' = \delta_\varphi \left( \zeta + \frac{\varepsilon}{2} h \right), \quad \tau = \nu - \frac{\varepsilon}{2} \delta_\varphi l ; \quad (57)$$

в результате

$$b_{nm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{z_1}^{z_{N_h}} a(\varphi', h) \Gamma_a(\mathcal{G}_n; \delta_\varphi l, \tau) e^{j[\tau(h-n)+l(\varphi'-\varphi_{nm})]} dh d\tau d\varphi' \quad (58)$$

В режиме остронаправленного излучения (51)

$$a(\varphi', h) = A(\varphi' - \varphi_0, h) e^{-jkR(\sin \theta_0 \sin(\delta_\varphi h + \mathcal{G}_0) \cos(\varphi' - \varphi_0) + \cos(\delta_\varphi h + \mathcal{G}_0) \cos \theta_0)} . \quad (59)$$

В этом случае двойной внутренней интеграл в (58) можно вычислить по методу стационарной фазы. Приравняв нулю первые частные производные фазовой функции, найдем, что стационарная точка

$$\left. \begin{aligned} \tau_0(\varphi' - \varphi_0) &= -kd_s (\sin \theta_0 \cos \mathcal{G}_n \cos(\varphi' - \varphi_0) - \cos \theta_0 \sin \mathcal{G}_n) \\ h_0 &= n \end{aligned} \right\} . \quad (60)$$

Нетрудно вычислить, что гессиан равен 1, сигнатура равна 2, и в результате применения метода стационарной фазы

$$b_{nm} \cong \frac{j}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} a(\varphi', n) \Gamma_a(\mathcal{G}_n; \delta_\varphi l, \tau_0(\varphi' - \varphi_0)) e^{jl(\varphi' - \varphi_{nm})} d\varphi' . \quad (61)$$

Это выражение можно иначе записать в виде ряда Фурье

$$b_{nm} = \frac{j e^{-jkz_n \cos \theta_0}}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} j^{-l} R_{nl} e^{jl(\varphi_0 - \varphi_{nm})} , \quad (62)$$

Где  $z_n = R \cos \mathcal{G}_n$ ,

$$R_{nl} = j^l \int_0^{2\pi} A(\varphi', \mathcal{G}_n) \Gamma_a(\mathcal{G}_n; \delta_\varphi l, \tau_0(\varphi')) e^{-j[kR \sin \mathcal{G}_n \sin \theta_0 \cos \varphi' - l\varphi']} d\varphi' . \quad (63)$$

Формулы (62), (63) аналогичны представлению парциальной диаграммы элемента в виде ряда Фурье (30), (31). Для вычисления интеграла (63) могут быть использованы так же метод ДПФ [5] и равномерная асимптотика (38) с соответствующей заменой медленноменяющейся функции и знака перед мнимой единицей:

$$R_{nl} = \pi \left\{ \frac{M_1 + M_2}{2} J_l(p) - j \frac{M_2 - M_1}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{l}{p}\right)^2}} J'_l(p) \right\}, \quad (64)$$

где  $M_{1,2} = A(\varphi_l^{(1,2)}, \vartheta_n) \Gamma_a(\vartheta_n; \delta_\varphi l, \tau_0(\varphi_l^{(1,2)}))$ ,  $p$  определяется (37),  $\varphi_l^{(1,2)}$  – (36) при  $\theta = \theta_0$ .

Трудность аналитического продолжения функции  $A(\varphi_l^{(1,2)}, \vartheta_n)$  в комплексную плоскость, когда углы, определяющие стационарные точки становятся комплексными, можно преодолеть, зафиксировав ее значение в точке слияния  $\varphi_l^{(1,2)} = \pm \pi / 2$ .

Полученные соотношения для амплитуд отраженных волн (52), (62) – (64) справедливы не только для сферической, но и для произвольной осесимметричной ФАР при замене  $R \sin \vartheta_n = \rho_n$ .

Коэффициент полезного действия (КПД) ФАР без диссипативных потерь в излучателях определяется суммарной мощностью отраженных волн на входах элементов антенной решетки [3]

$$\eta = 1 - \frac{\sum_{n,m} |b_{mn}|^2}{\sum_{n,m} |a_{mn}|^2}. \quad (65)$$

## 2. Численное исследование решений

**Напряжение в щелевых излучателях.** Исследуем зависимость напряжения в щели при парциальном возбуждении от места расположения щели в антенной решетке. Выберем для численных расчетов антенную решетку сравнительно небольшого размера с радиусом проводящей сферы  $R = 4,103\lambda$ , что позволит сопоставить между собой результаты расчета, полученные асимптотическим и строгим методом [2].

Другие параметры антенной решетки: длина щелей  $l = 0,5\lambda$ ; максимальный номер учитываемых пространственных гармоник  $P = 3, Q = 3$ .

Согласующие цепочки на входе излучателей выбраны из условия согласования элементов, расположенных на экваторе сферы ( $\vartheta = 90^\circ$ ) в синфазном режиме.

Результаты расчета на рис. 4, 5 относятся к антенной решетке аксиальных (т.е. ориентированных вдоль меридианов) щелей, размещенных в прямоугольной сетке. Число элементов по кольцу  $N_\varphi = 46$  (наибольший азимутальный шаг щелей  $d_{\varphi_{\max}} = 0,56\lambda$ ); шаг по образующей  $d_s = 0,56\lambda$ .

На рис. 4 приведены зависимости первого метрического коэффициента  $g_1$  (20) от угла  $\vartheta$  точки на поверхности сферы для трех пространственных гармоник с наибольшей величиной  $g_1$  при значении постоянных парциального возбуждения  $\gamma = 2,5$ ,  $\tau = 0,01$ . Видно, что только одна нулевая пространственная гармоника находится в режиме распространения ( $g_1 > 1$ ) в центральной части сферической поверхности и имеет две точки перехода  $g_1 = 1$ .

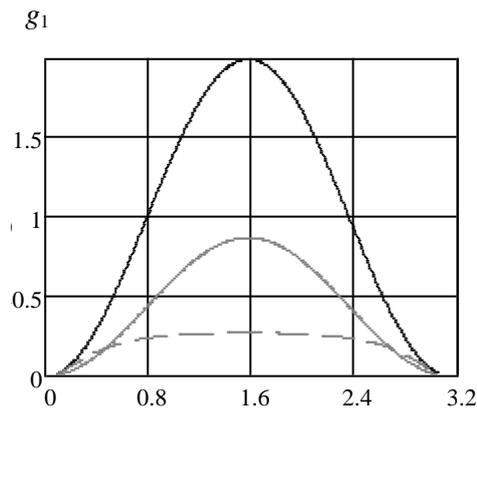


Рис. 4. Зависимости метрических коэффициентов пространственных гармоник от местоположения щели в антенной решетке при  $\gamma = 2,5$ ,  $\tau = 0,01$ ;

—  $p = q = 0$ ; —  $p = -1, q = 0$ ; ---  $p = 0, q = 1$ .

На рис. 5 приведены зависимости модуля напряжения в щелях от угла  $\vartheta$ , характеризующего расположение щели, для различных методов решения интегрального уравнения (15).

Асимптотическое решение первого порядка с графической точностью совпадает с численным решением интегрального уравнения по методу коллокаций. Асимптотическое решение второго порядка осциллирует в полярных областях антенны, где происходит сгущение элементов антенной

решетки и  $\beta \rightarrow \infty$ . Для сравнения приведено также решение в приближении геометрической оптики, которое, как видим, имеет две точки нулевых значений с разрывом производной, к которым действующий коэффициент отражения обращается в единицу, тогда как для других решений он отличен от единицы.

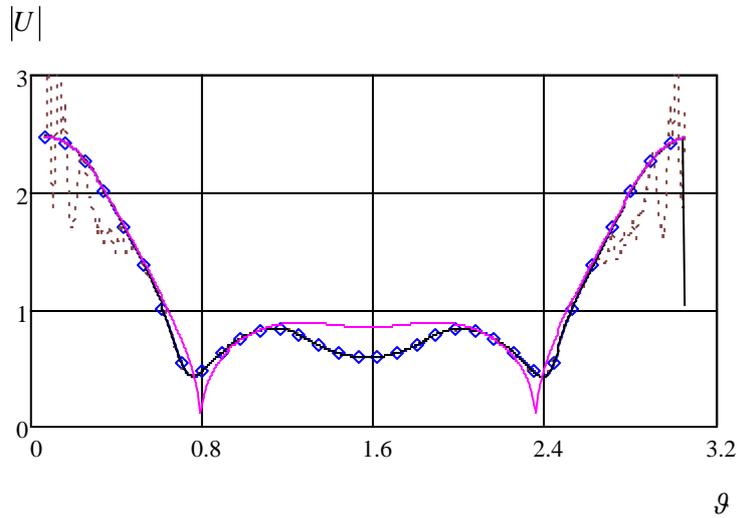


Рис. 5. Зависимости модуля напряжения в щелях от местоположения щели в сферической антенной решетке при  $\gamma = 2,5$ ,  $\tau = 0,01$ ;  
 — метод коллокаций (319 точек); — метод геометрической оптики;  
 асимптотические решения: —◇— 1-го порядка; - - - - 2-го порядка.

На рис. 6 приведены зависимости  $g_1$  от угла  $\vartheta$  для значений постоянных парциального возбуждения  $\gamma = 3,2$ ,  $\tau = 0,7$ . В этом случае в центральной части поверхности две пространственные гармоники переходят в режим распространения ( $g_1 > 1$ ).

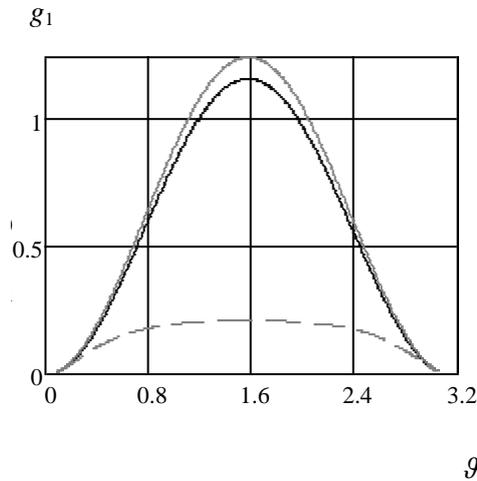


Рис. 6. Зависимости метрических коэффициентов пространственных гармоник от местоположения щели в антенной решетке при  $\gamma = 3,2$ ,  $\tau = 0,7$ ;  
 —  $p = q = 0$ ; —  $p = -1, q = 0$ ; - - -  $p = 0, q = 1$ .

На рис. 7 приведены соответствующие зависимости модуля напряжения в щелях на основе решения интегрального уравнения методом коллокаций и асимптотических решений первого и второго порядка.

На рис. 8, 9 представлены аналогичные результаты для случая наличия двух распространяющихся пространственных гармоник, распространение которых происходит преимущественно по углу места  $\vartheta$ , тогда как в двух предыдущих случаях распространение происходило в основном в азимутальном направлении. Значение постоянных частичного возбуждения для данного случая  $\gamma = 1, \tau = 3$ .

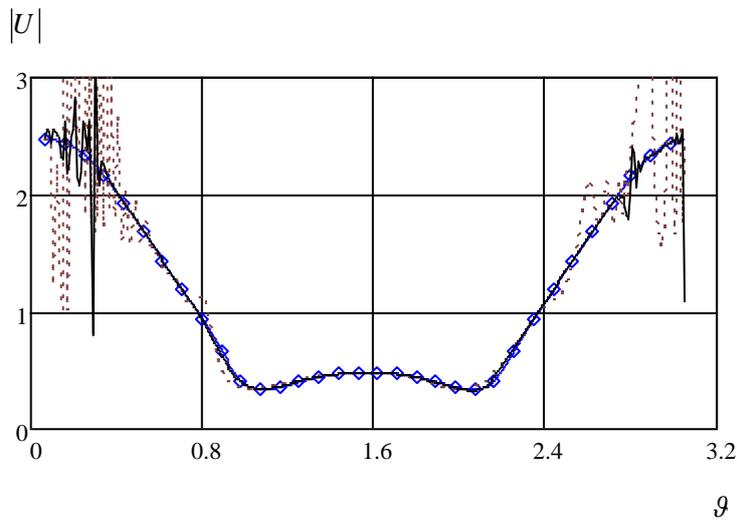


Рис. 7. Зависимости модуля напряжения в щелях от местоположения щели в антенной решетке при  $\gamma = 3,2, \tau = 0,7$ ;  
 — метод коллокаций; —◆— асимптотическое решение 1-го порядка;  
 - - - асимптотическое решение 2-го порядка.

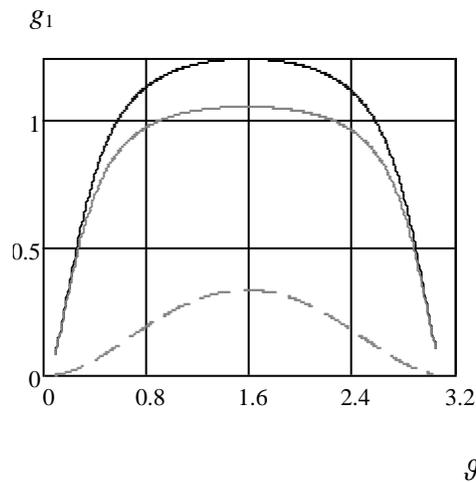


Рис. 8 – Зависимости метрических коэффициентов от местоположения щели в антенной решетке при  $\gamma = 1, \tau = 3$ ;  
 —  $p = q = 0$ ; —  $p = 0, q = -1$ ; - - -  $p = -1, q = 0$ .

Как видим, все решения близки между собой в основной области антенны. В полярных областях, где происходит сгущение излучающих элементов, асимптотическое решение второго порядка и решение по методу коллокаций имеют осцилляции. Тем не менее к решению по методу коллокаций ближе всего асимптотическое решение первого порядка. Искажения решения по методу коллокаций на самых краях области обусловлены трудностями реализации численной процедуры из-за возрастания частоты осцилляций ядра интегрального уравнения. Однако большого значения эти нарушения не имеют, поскольку на практике полярные области не содержат излучающих элементов.

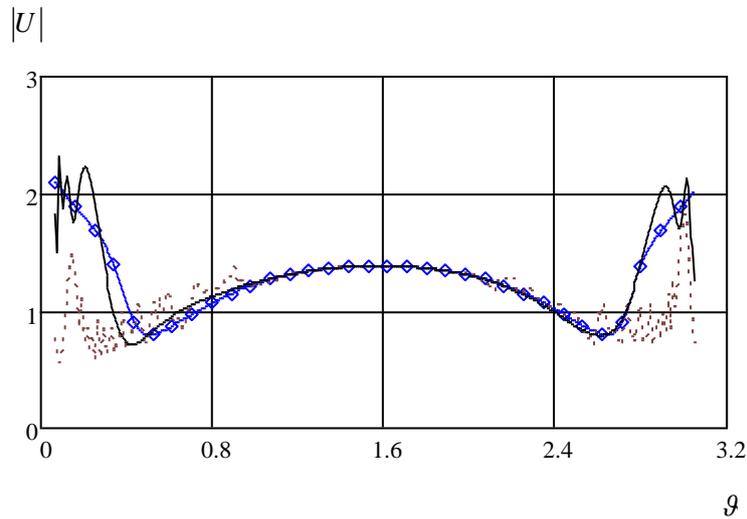


Рис. 9. Зависимости модуля напряжения в щелях от местоположения щели в антенной решетке при  $\gamma = 1$ ,  $\tau = 3$ ;  
 — метод коллокаций; —◆— асимптотическое решение 1-го порядка;  
 - - - асимптотическое решение 2-го порядка.

Асимптотическое решение первого порядка достаточно близко к численному решению интегрального уравнения; асимптотическое решение второго порядка имеет сильные частые осцилляции в полярных областях, отсутствующие в численном решении. Численное исследование, частично представленное выше, показывает, что для осесимметричной сферической антенной решетки с постоянным шагом элементов по образующей, асимптотическое решение первого порядка во всех исследованных случаях дает

хорошее приближение к численному решению интегрального уравнения для распределения напряжения в щелевых излучающих элементах.

Приближенное решение первого порядка является локальным, поскольку действующие напряжение и коэффициент отражения при парциальном возбуждении любого элемента определяются характеристиками антенной решетки только в месте расположения этого элемента. Это решение соответствует аппроксимации квазипериодической антенной решетки периодической антенной решеткой в рассматриваемой точке поверхности.

Данное решение дает большую экономию времени счета и будет использоваться при дальнейших расчетах в данной статье.

В полярных областях осесимметричной сферической антенной решетки нарушаются условия локальной периодичности [3] и весь асимптотический подход теряет свою применимость. В связи с этим представляет интерес сопоставить расчеты, полученные асимптотическим методом, с расчетами, полученными строгим методом собственных функций [2].

На рис. 10 – 13 приведены результаты расчета напряжения в щелях двумя методами для той же сферической антенной решетки. Для метода собственных функций число элементов решетки по образующей  $N_\theta = 23$ , координата центра первого элемента  $\vartheta_1 = \delta_\theta/2 = 3,91^\circ$ . Антенная решетка имеет особые точки сгущения элементов  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = 180^\circ$ .

На рис. 10 показаны зависимости вещественной и мнимой части напряжения в щелях от угла  $\vartheta$ , рассчитанные методом собственных функций и асимптотическим методом (асимптотическое решение первого порядка). Параметром являются фазовые сдвиги между элементами  $\gamma, \tau$ .

Как следует из представленных графиков, результаты расчета двумя методами близки друг к другу для всех элементов, кроме первого. Можно видеть, что асимптотический метод дает хорошие результаты, в том числе и в полярных областях сгущения элементов осесимметричной антенной решетки, исключая лишь малую окрестность полюсов.

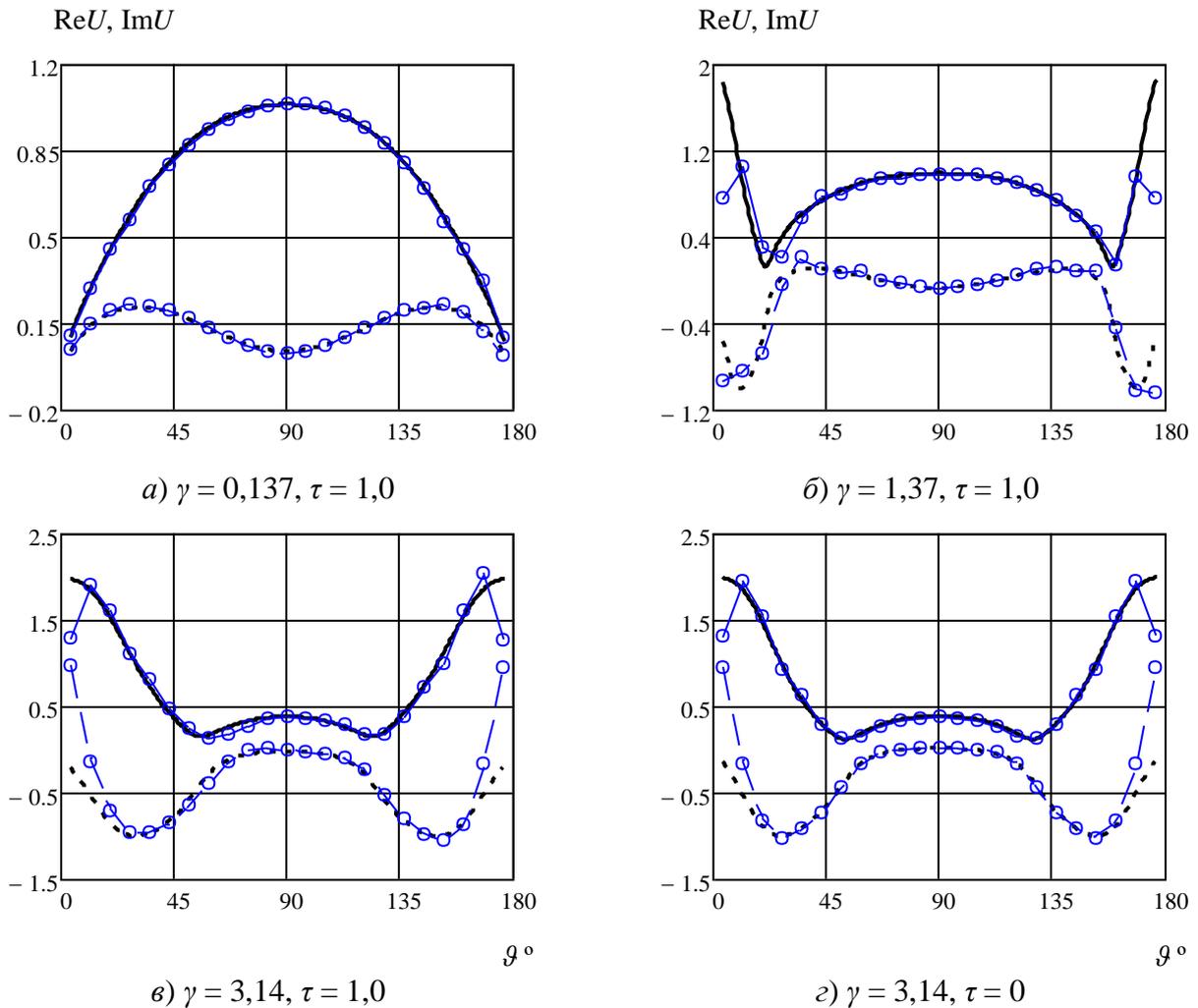


Рис. 10. Зависимости вещественной и мнимой частей напряжения в щелях от местоположения элемента решетки;

==== асимптотический метод;     $\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}$  метод собственных функций;  
 $\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}$  ReU;     $\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}$  ImU.

На рис. 11 приведены соответствующие зависимости действующего коэффициента отражения.

Отметим, что рассмотренные численные примеры относятся к относительно небольшой антенной решетке, для которой «большой параметр» асимптотического метода  $m_\xi \cong 2,33$ .

При больших размерах антенной решетки применение метода собственных функций становится затруднительным. Асимптотический метод в приближении первого порядка позволяет рассчитать характеристики сферической антенной решетки очень больших размеров.

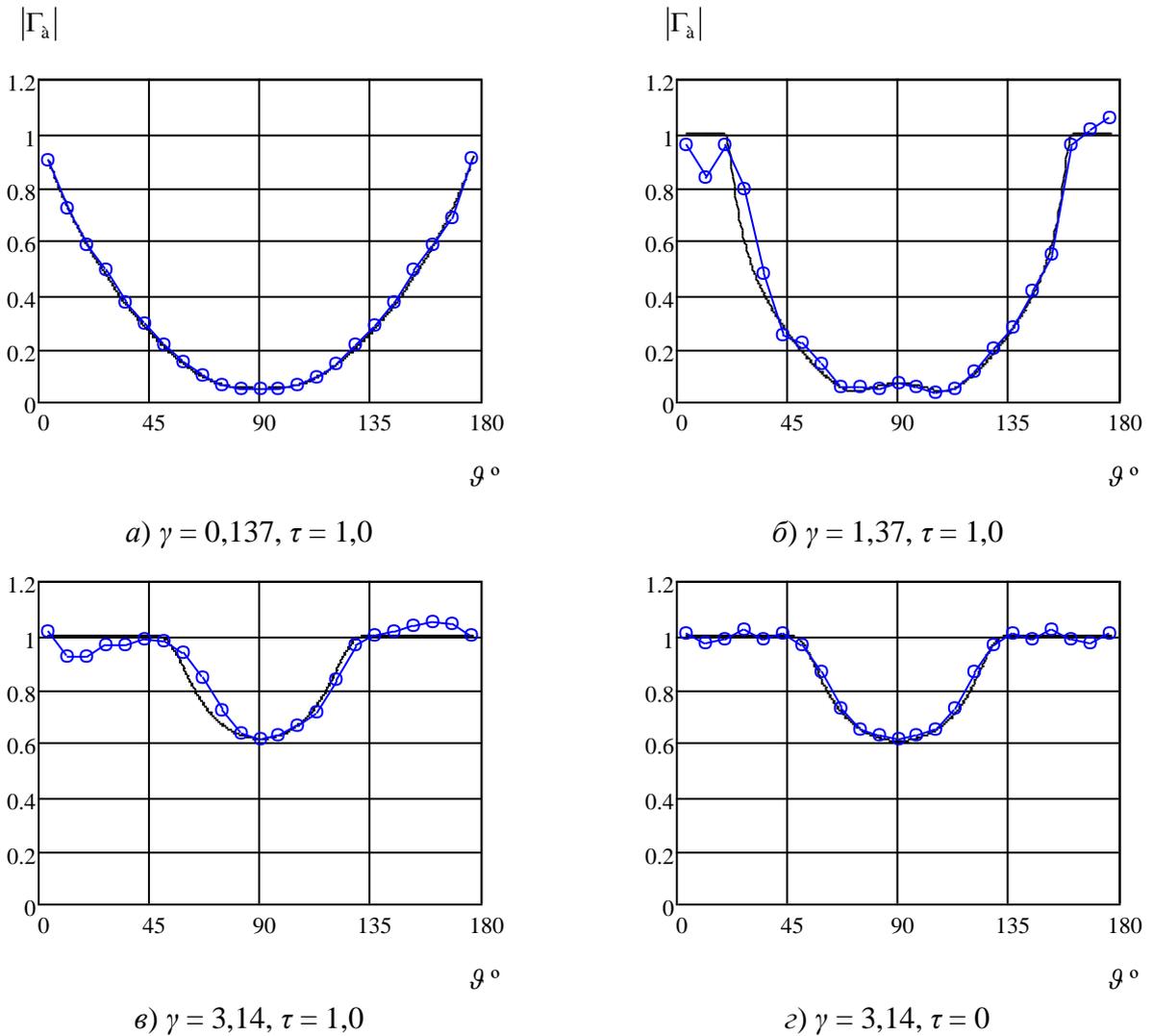


Рис. 11. Зависимости действующего коэффициента отражения от расположения элемента решетки при  $\gamma = 0,546, \tau = 2,0$ ;  
 ——— асимптотический метод первого порядка;  
 —○—○— метод собственных функций.

**Диаграмма направленности одиночной щели.** Для расчета парциальной диаграммы элемента в работе использован асимптотический метод. Для верификации воспользуемся возможностью его применения для расчета диаграммы направленности одиночной щели, расположенной на проводящей сферической поверхности, и сравним результаты расчета с результатами расчета строгим методом собственных функций [2].

На рис. 12 – 14 приведены результаты расчета амплитудной диаграммы направленности аксиальной щели на поверхности проводящей сферы радиуса

$R = 3,74\lambda$ , при различных значениях угла расположения щели  $\vartheta$  и угла наблюдения  $\theta$ , выполненные методом асимптотического вычисления интеграла (38) и методом собственных функций.

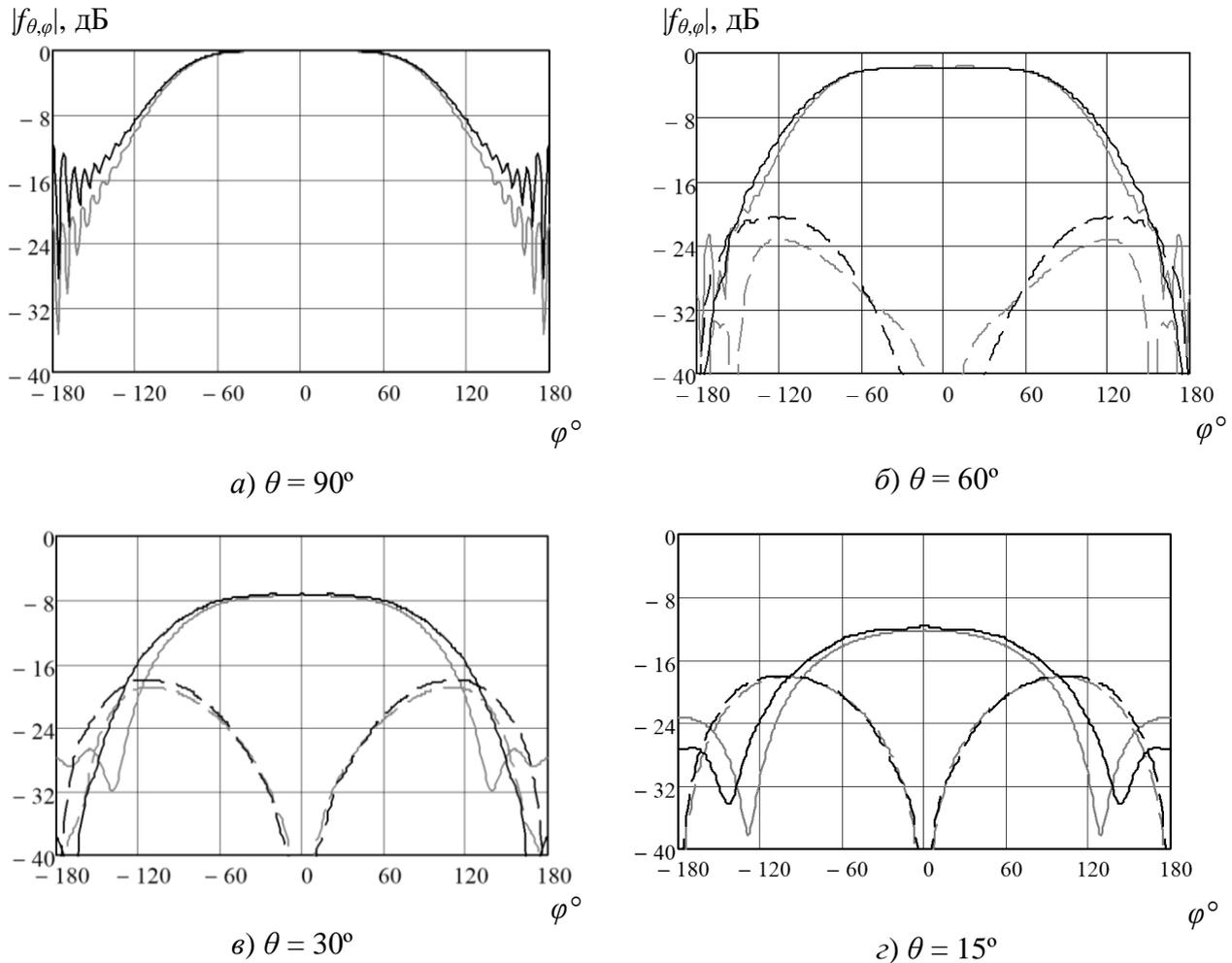
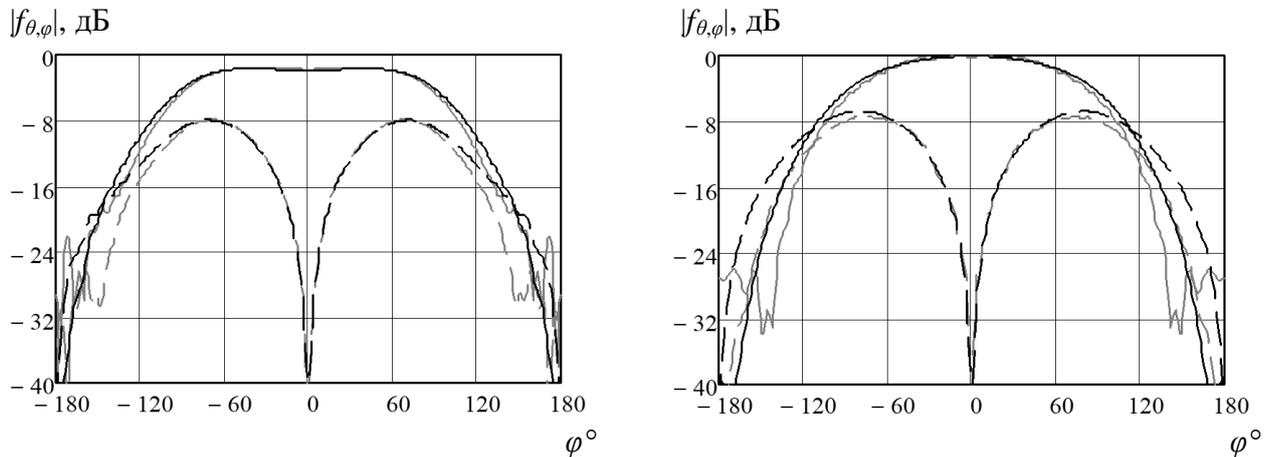


Рис. 12. Амплитудная диаграмма направленности одиночной аксиальной щели на проводящей сфере при  $\vartheta = 90^\circ$ ;

----- метод собственных функций; ===== асимптотический метод;

====  $\varphi$ -поляризация; =====  $\theta$ -поляризация.



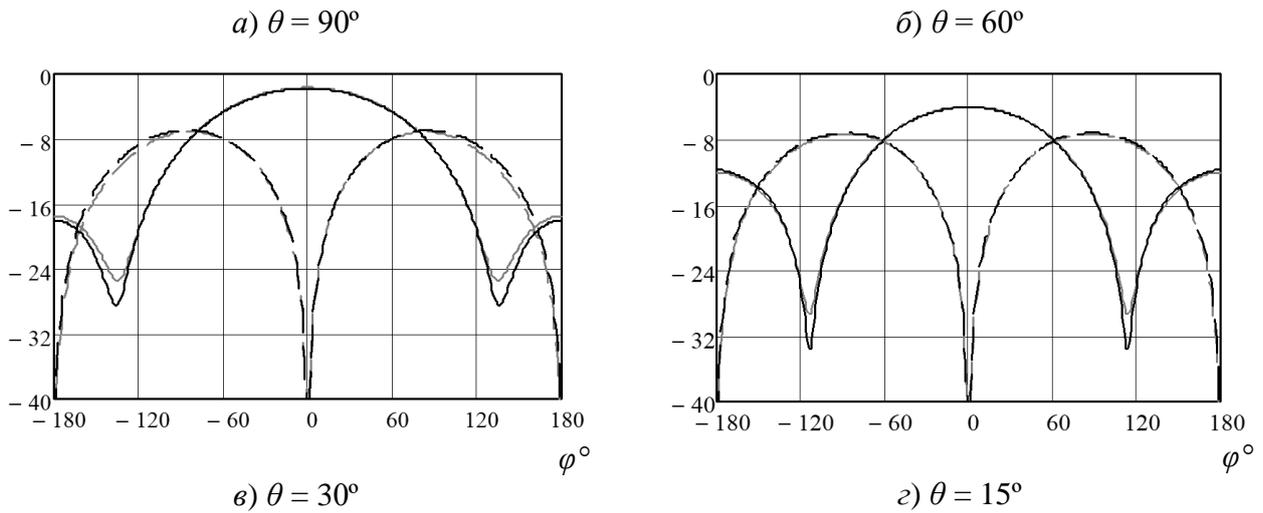


Рис. 13. Амплитудная диаграмма направленности одиночной аксиальной щели на проводящей сфере при  $\vartheta = 60^\circ$ ;  
 ----- метод собственных функций; ———— асимптотический метод;  
 ————  $\varphi$ -поляризация; -----  $\theta$ -поляризация.

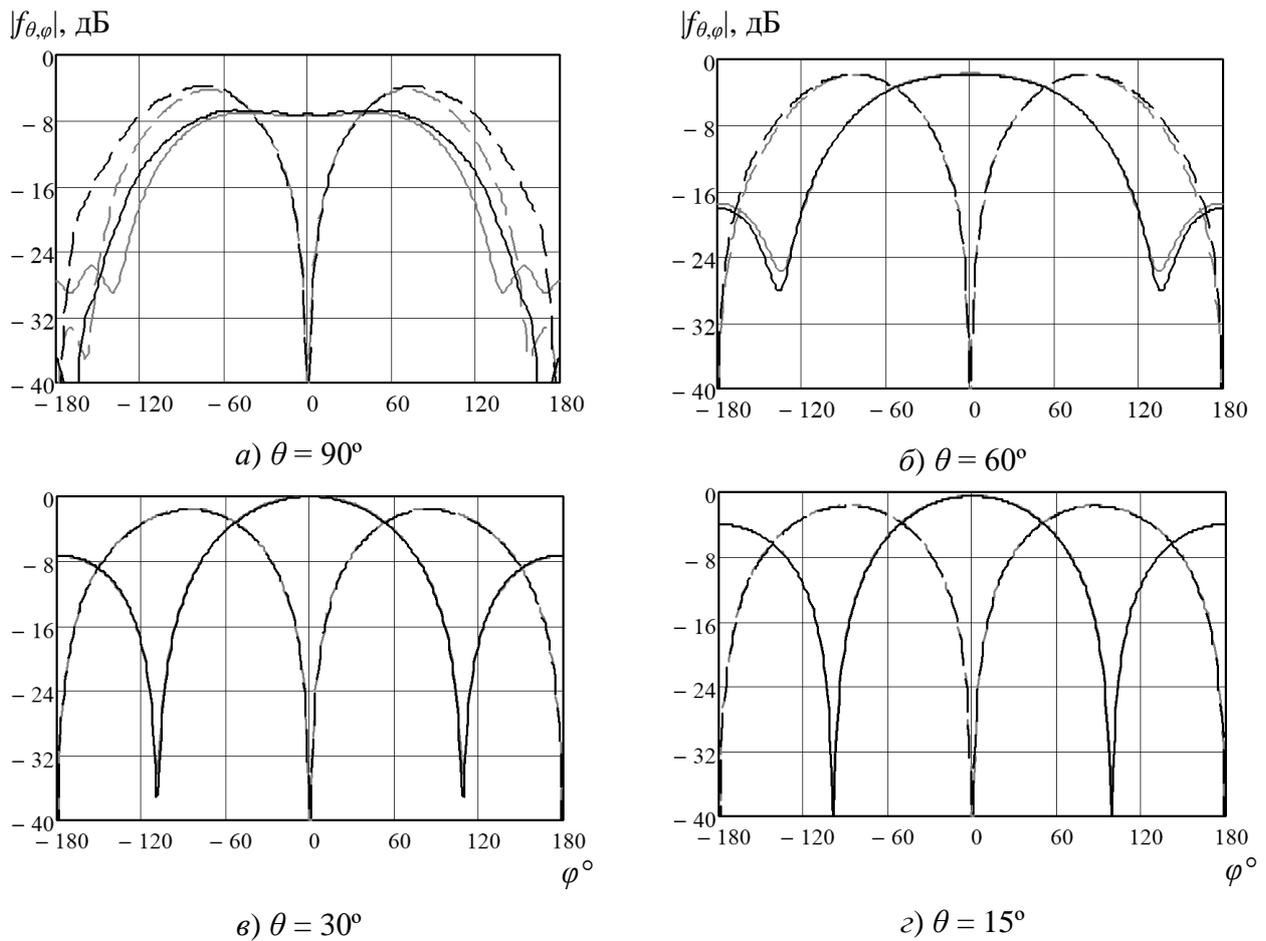


Рис. 14. Амплитудная диаграмма направленности одиночной аксиальной щели на проводящей сфере при  $\vartheta = 30^\circ$ ;  
 ----- метод собственных функций; ———— асимптотический метод;  
 ————  $\varphi$ -поляризация; -----  $\theta$ -поляризация.

**Парциальные диаграммы щелевых излучателей сферической антенной решетки аксиальных с прямоугольной сеткой.** Амплитудная парциальная диаграмма направленности (ПДН) элемента, расположенного на большом диаметре ( $\vartheta_n = 90^\circ$ ), рассчитанная как асимптотическим методом, так и методом собственных функций, приведена на рис. 15 для нескольких значений угла  $\theta$  в зависимости от азимутального угла  $\varphi$ . Нормировка ПДН выполнена на корень квадратный из КНД единичной ячейки в плоской антенной решетке.

При асимптотическом методе расчета использовалось представление парциальной диаграммы в виде ряда азимутальных гармоник (30), приближение первого порядка для напряжения в щелях и асимптотика интеграла (38).

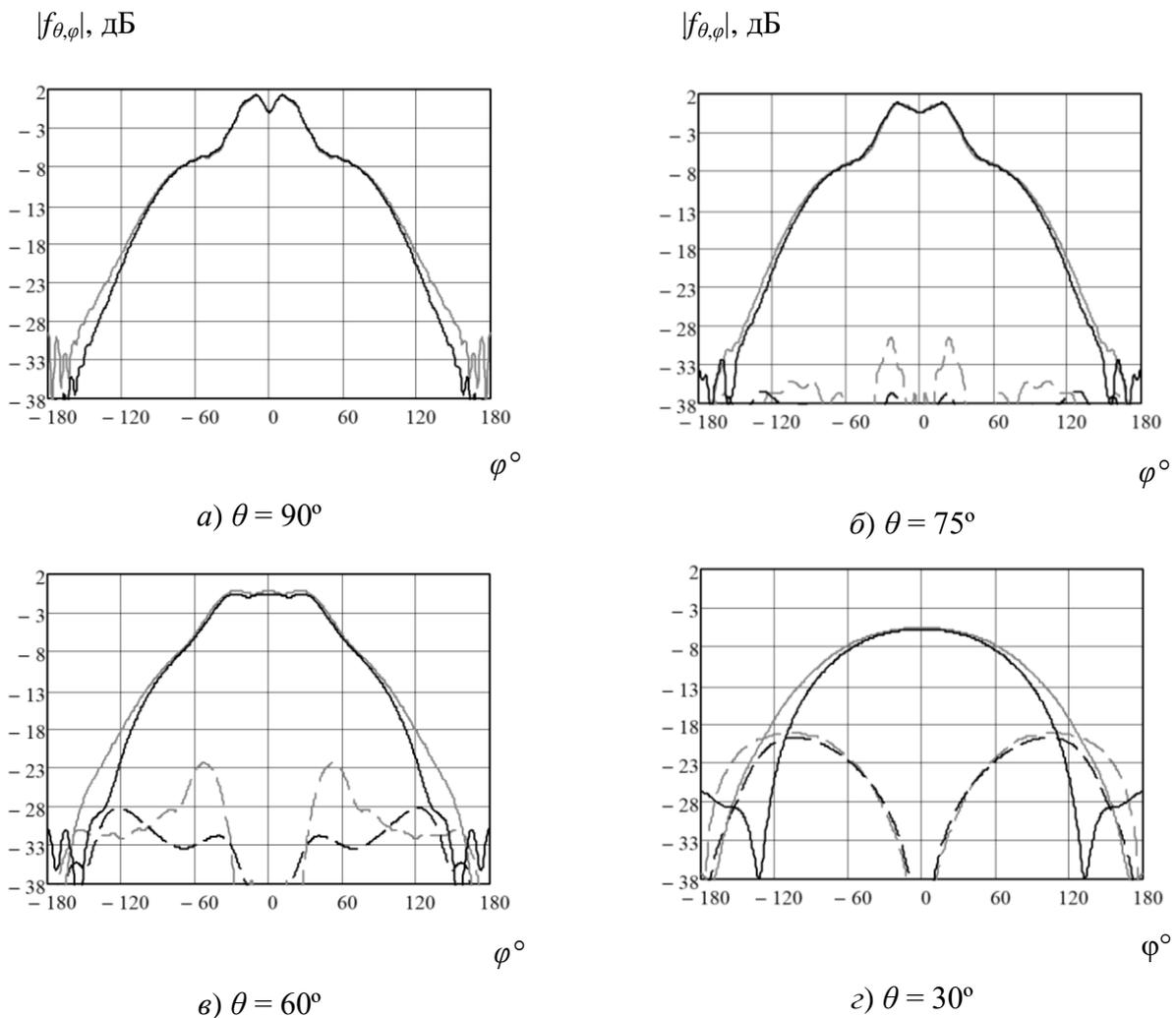


Рис. 15. Парциальная диаграмма аксиальной щели сферической антенной решетки с прямоугольной сеткой;  $\vartheta_n = 90^\circ$ ;  
 - - - - асимптотический метод; — — — метод собственных функций;  
 — — —  $\varphi$ -поляризация; - - - -  $\theta$ -поляризация.

Параметры сферической решетки описаны в начале раздела.

На рис. 16 приведены азимутальные сечения  $\theta = 90^\circ$  парциальных диаграмм той же антенной решетки для различных значений угла местоположения элемента  $\vartheta_n$ .

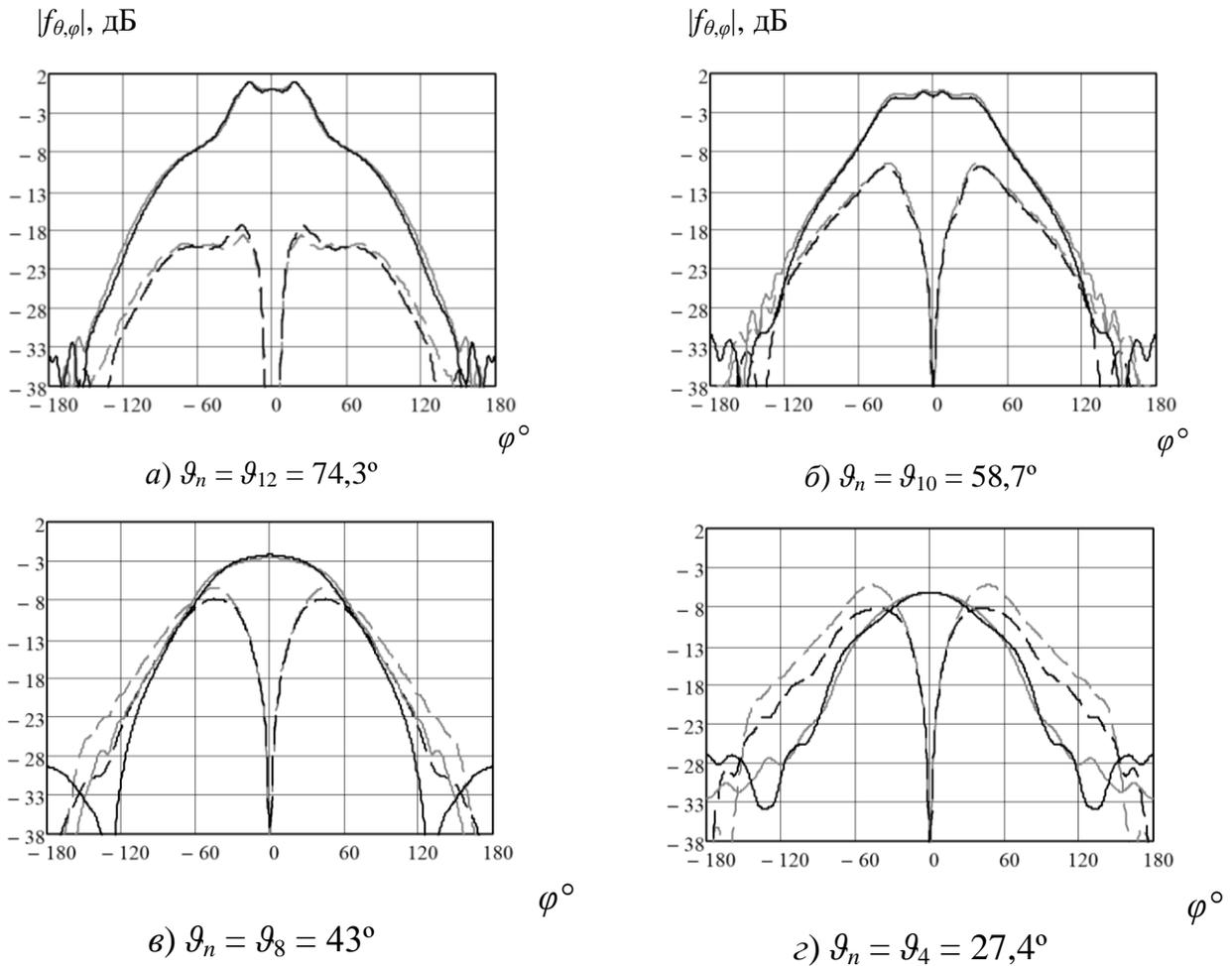


Рис. 16. Парциальная диаграмма аксиальной щели сферической антенной решетки с прямоугольной сеткой при  $\theta = 90^\circ$ ;

==== асимптотический метод; === метод собственных функций;

=====  $\phi$ -поляризация; =====  $\theta$ -поляризация

**Парциальные диаграммы щелевых излучателей сферической антенной решетки аксиальных с треугольной сеткой.** На рис. 17, 18 приведены диаграммы элемента антенной решетки аксиальных щелей, расположенных при  $\vartheta_n = 90^\circ$ . Параметры антенной решетки:  $R = 3,746\lambda$ ,  $N_\phi = 23$ ,  $N_r = 31$ ,  $d_s = 0,327\lambda$ ,  $l = 0,5\lambda$ . Для сравнения на рисунках приведены как

результаты, полученные асимптотическим методом с асимптотическим интегрированием, так и методом собственных функций.

С учетом сравнительно небольшого радиуса сферической поверхности антенны для асимптотического метода согласование результатов расчета асимптотическим и строгим методами можно считать удовлетворительным.

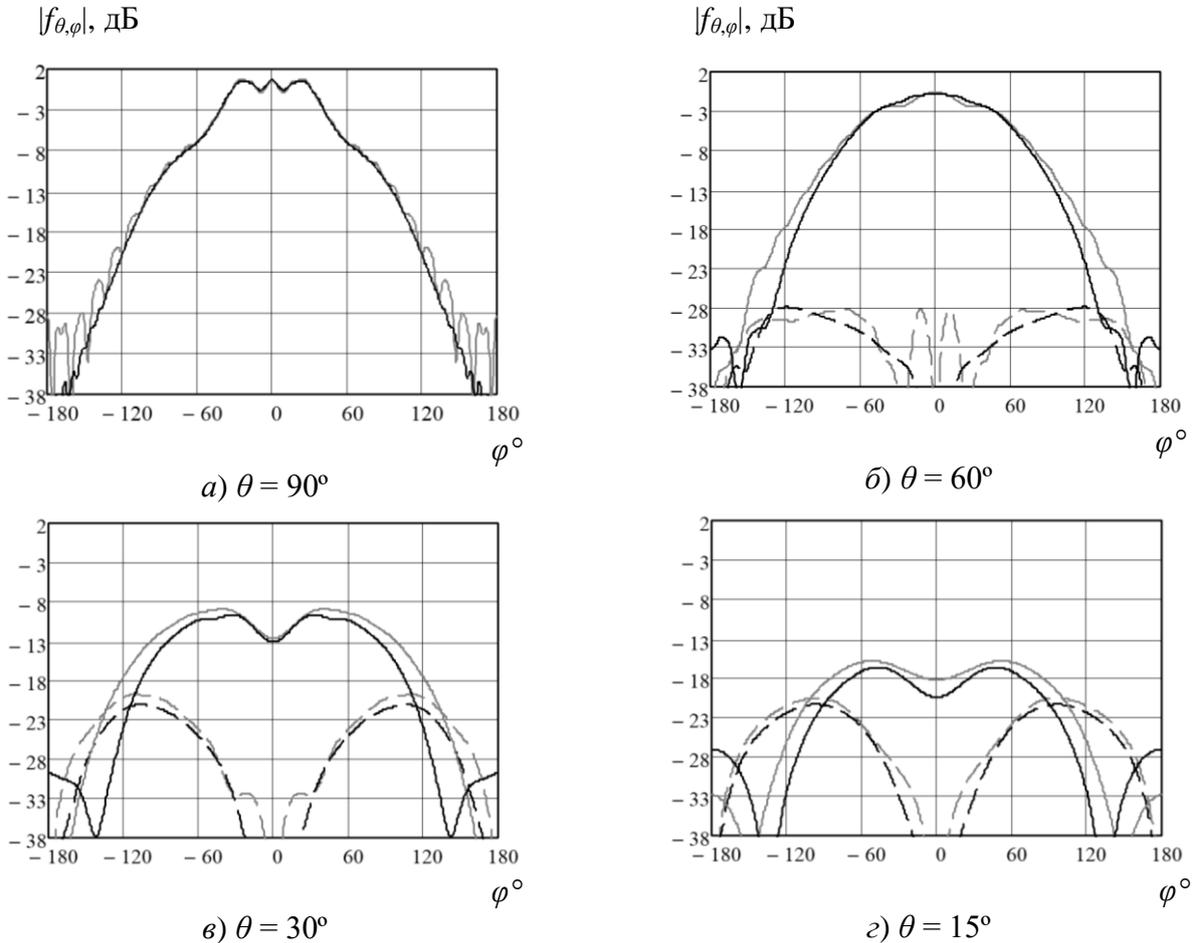


Рис. 17. Диаграмма элемента сферической антенной решетки аксиальных щелей с треугольной сеткой;  $\vartheta_n = 90^\circ$ ;

==== асимптотический метод; ---- метод собственных функций;

====  $\phi$ -поляризация; ----  $\theta$ -поляризация.

**Парциальные диаграммы азимутальных щелевых излучателей сферической антенной решетки с треугольной сеткой.** Сферическая антенная решетка азимутальных щелей с треугольной сеткой является удобным объектом для сравнения вариантов асимптотического метода расчета парциальной диаграммы, поскольку в этом случае наиболее сильно проявляется влияние полюсов напряжения в комплексной плоскости переменных на асимптотику интеграла (38).

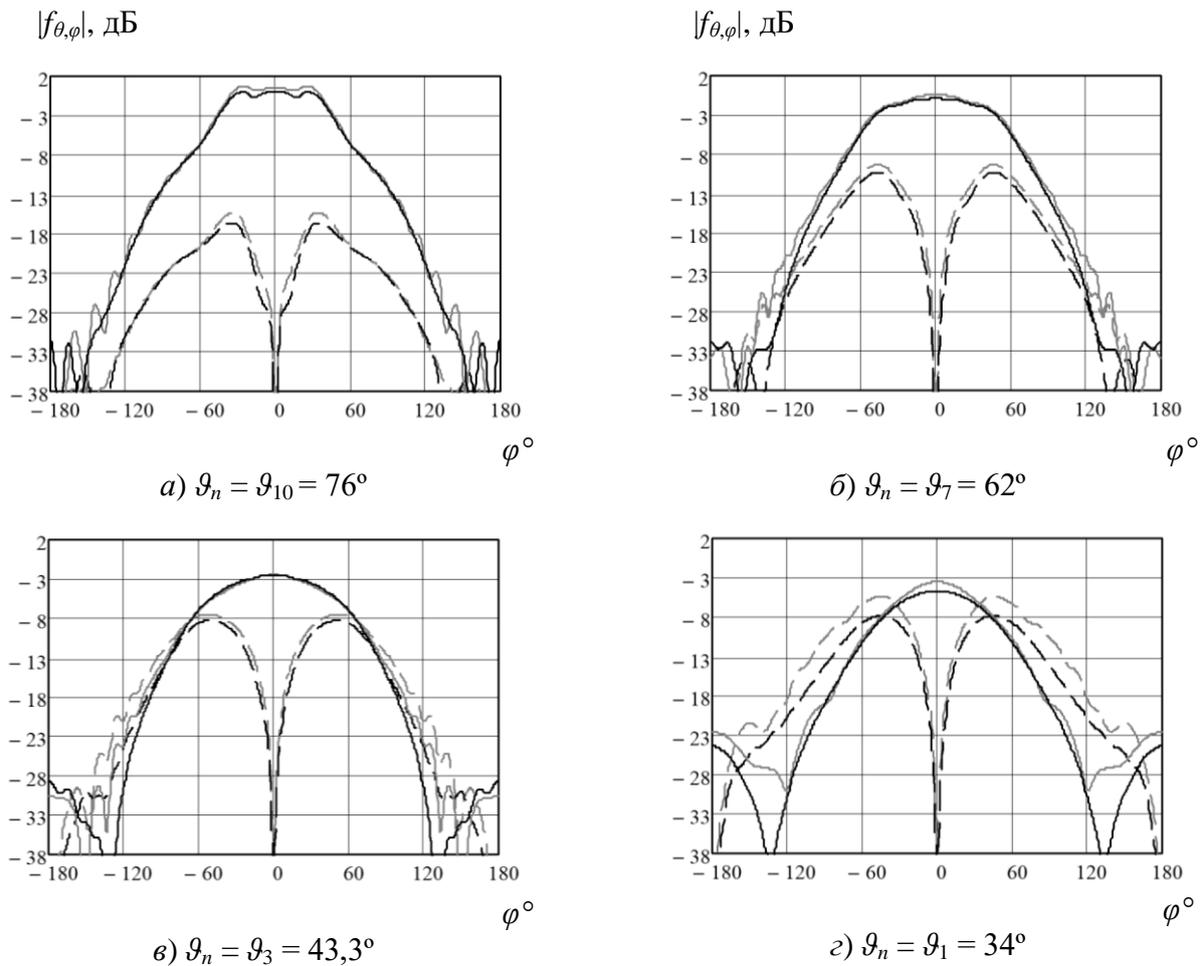


Рис. 18. Диаграмма элемента сферической антенной решетки аксиальных щелей с треугольной сеткой при  $\theta = 90^\circ$ ;

==== асимптотический метод; ===== метод собственных функций;

=====  $\varphi$ -поляризация; =====  $\theta$ -поляризация.

В большинстве случаев оба варианта асимптотического расчета дают близкие между собой результаты расчета. Так, на рис. 19 приведены парциальные диаграммы щелевых элементов при  $R = 4,016\lambda$ ,  $N_\varphi = 24$ ,  $N_r = 35$ ,  $d_s = 0,327\lambda$ ,  $l = 0,5\lambda$ , рассчитанные с помощью асимптотического интегрирования (38) и ДПФ, при  $\vartheta_n = 90^\circ$ . Число членов ДПФ – 17.

Критическими значениями параметров антенной решетки и углов являются такие значения, при которых полюса напряжения (расположенные вблизи точки перехода одной из пространственных гармоник ( $g_1 = 1$ )) приближаются к точке слияния стационарных точек.

Парциальные диаграммы при критическом значении параметров, приведенные на рис. 20 при  $\vartheta_n = 90^\circ$ , рассчитаны методом асимптотического

интегрирования в вариантах равномерной и неравномерной асимптотики, а также с помощью ДПФ.

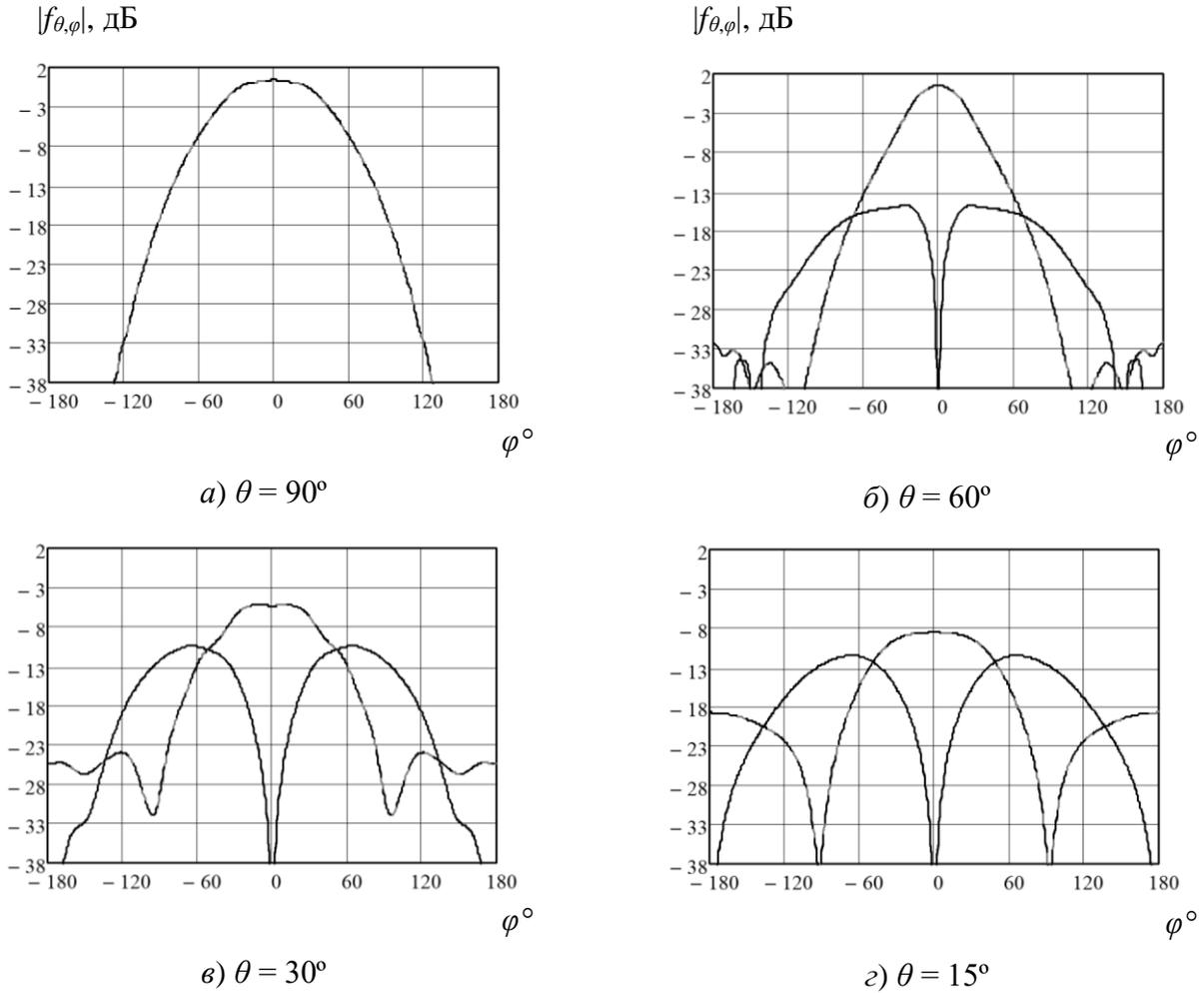
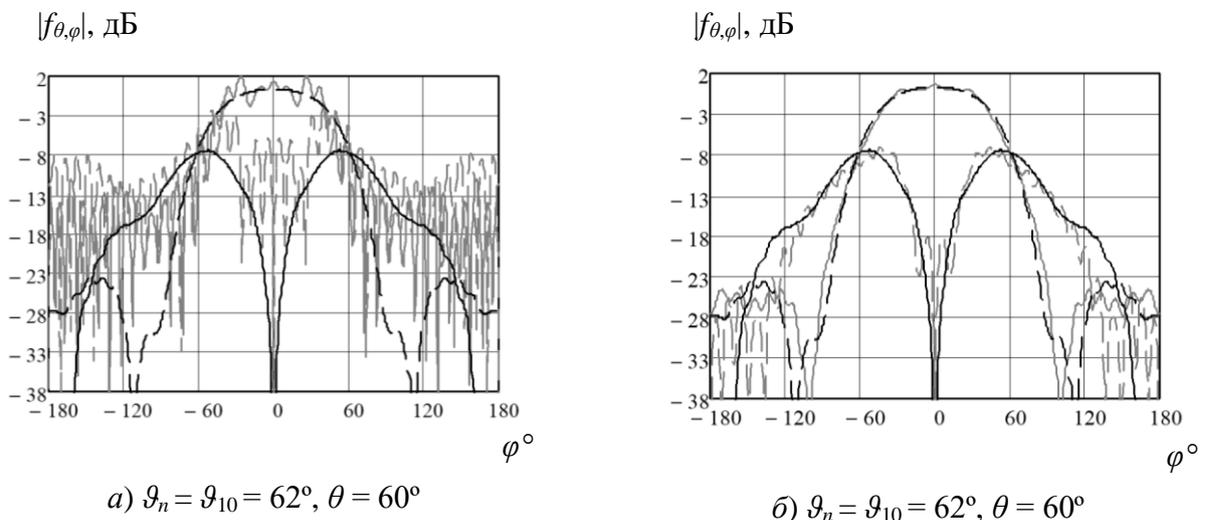


Рис. 19. ПДН азимутальных щелей в сферической антенной решетке с треугольной сеткой;  $\vartheta_n = 90^\circ$ ;  
 - - - - ДПФ; - - - - асимптотическое интегрирование.



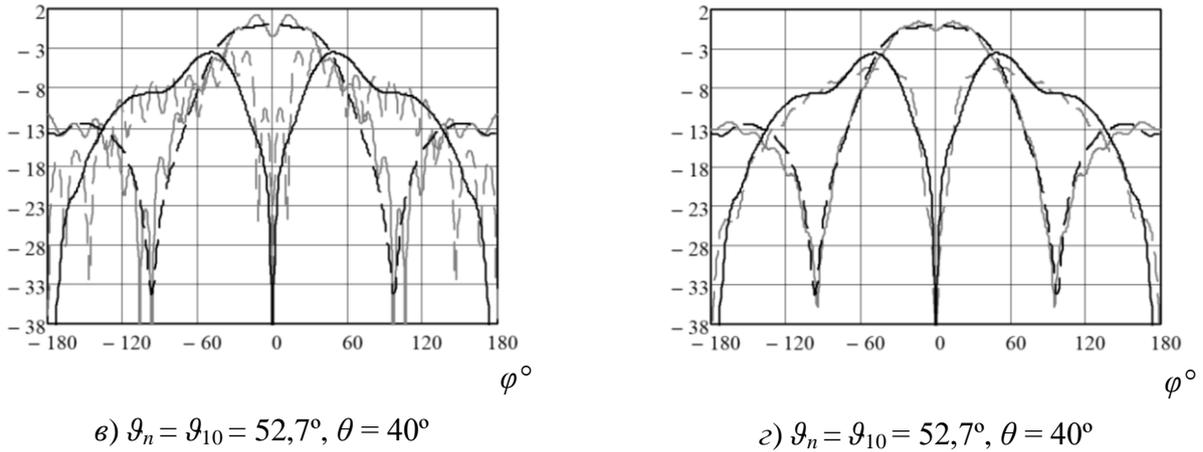


Рис. 20. ПДН азимутальной щели в сферической антенной решетке с треугольной сеткой;

а), б) равномерная асимптотика; в), г) неравномерная асимптотика;  
 ===== ДПФ; ===== асимптотическое интегрирование;  
 ===== основная поляризация; ===== кроссполяризация.

Как видим, равномерная асимптотика приводит к изрезанности частичной диаграммы, неравномерная асимптотика близка к методу ДПФ, дающему наилучшие результаты расчета.

Слияние стационарных точек происходит при условии

$$|l| = kR \sin \vartheta_n \sin \theta. \quad (66)$$

При этом параметр частичного возбуждения  $\tau_0$  (60)

$$\tau_0 = kd_s \sin \vartheta_n \cos \theta. \quad (67)$$

Соответствующий параметр для  $(p, q)$ -й пространственной гармоники определяется по (13), (14) и критическая точка с учетом (20) и  $\gamma_l = \delta_\varphi l$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \sin \theta + \frac{\lambda}{d_{\varphi_n}} p \right)^2 + \left[ \sin \vartheta_n \cos \theta + \frac{\lambda}{d_{s_n}} \left( q - \frac{\varepsilon}{2} p \right) \right]^2 = 1. \quad (68)$$

При  $p = 0, q = 0$  (66) удовлетворяется только при  $\vartheta_n = \pi/2$ , но в этом случае  $\text{Im } \tau_0 = 0$  при всех значениях  $l$ , стационарные точки остаются вещественными и полюса напряжения не пересекаются.

При  $p = 0, q = \pm 1$  критические точки имеют место при

$$\cos \theta \geq \frac{\lambda}{d_{sn}(1 + \sin \vartheta_n)} \quad (69)$$

В общем случае исследование решений уравнения (68) менее наглядно. При шагах антенной решетки менее половины длины волны решения (68) заведомо отсутствуют.

При  $|l| > kR \sin \vartheta_n \sin \theta$  и при условии выполнения (68) для каких-либо значений номеров пространственных гармоник  $(p, q)$ , контур наискорейшего спуска в (31) для одной из двух стационарных точек при изменении  $l$  пересекает полюса напряжения в комплексной плоскости. Это приводит к нарушению условия медленности изменения амплитудной подынтегральной функции, являющегося необходимым условием асимптотического интегрирования.

Решение уравнения (68) является инструментом выявления углов наблюдения  $\theta$  и углов расположения элементов  $\vartheta_n$ , для которых могут возникать некорректные осцилляции парциальной диаграммы элемента при использовании равномерной асимптотики интеграла (38).

**Отраженные волны на входе элементов.** Отраженные волны на входе излучающих элементов при остронаправленном излучении ФАР определяются простым приближенным выражением метода стационарной фазы (53) и более точным соотношением (52) или (62), (64) на основе ряда Фурье.

Рассчитанные двумя методами амплитуды отраженных волн при оптимальном по КУ возбуждении сферической ФАР аксиальных щелей, описанной в начале раздела, приведены на рис. 21.

Видно, что метод стационарной фазы дает удовлетворительное соответствие с более точным методом ряда Фурье. С точки зрения времени вычислений соотношение (52) гораздо эффективнее, так как в нем используется только одно значение действующего коэффициента отражения для рассматриваемого элемента ФАР.

Результаты расчета действующего коэффициента отражения по методу стационарной фазы представлены на рис. 22 в виде линий уровня. По оси  $x$

отложен номер элемента в кольце, по оси  $y$  – номер элемента по образующей.

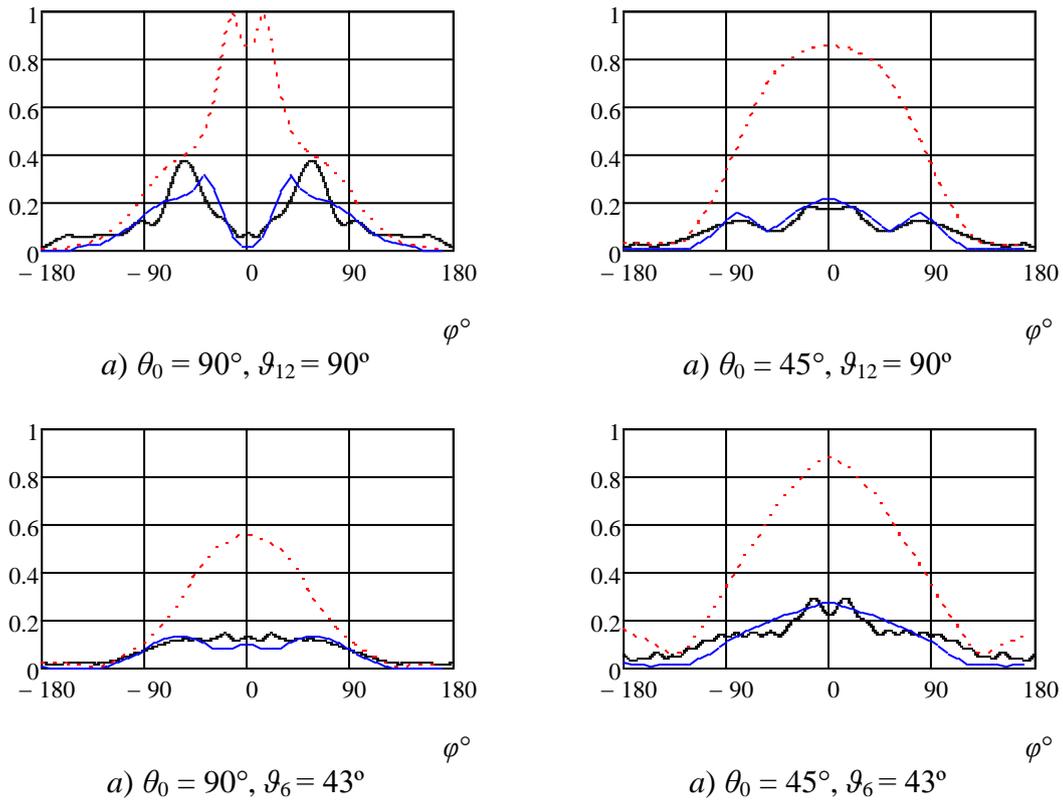


Рис. 21. Падающие (---) и отраженные (—) волны при оптимальном возбуждении по КУ;  $R = 4,103\lambda$ ; — метод стационарной фазы; — ряд Фурье.

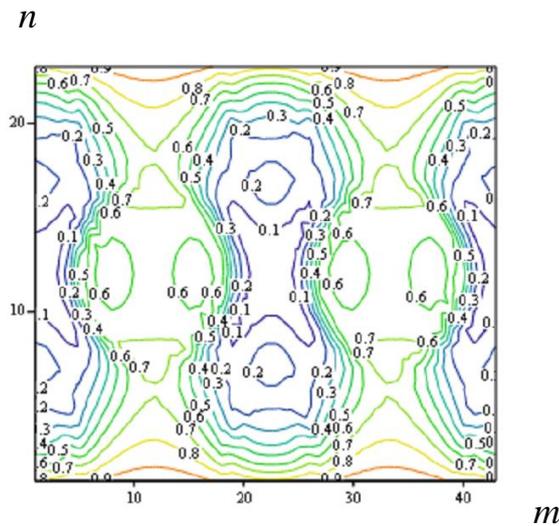


Рис. 22. Линии уровня коэффициента отражения на входе элементов сферической ФАР;  $R = 4,103\lambda, \theta_0 = 90^\circ$ .

### 3. Характеристики сферической ФАР большого размера

#### Парциальные диаграммы аксиальных щелевых излучателей.

Рассмотрим случаи плотного размещения элементов в решетке, необходимого для широкоугольного сканирования с минимальными потерями КУ.

При прямоугольной сетке размещения возьмем значения расстояния между элементами на экваторе  $d_{\varphi\max} = (0,5 - 0,6)\lambda$ ; по образующей  $d_s = 0,5\lambda$ . Радиус поверхности сферы  $R = 13,5\lambda$ . Число элементов таких сферических антенных решеток составляет порядка  $10^4$ .

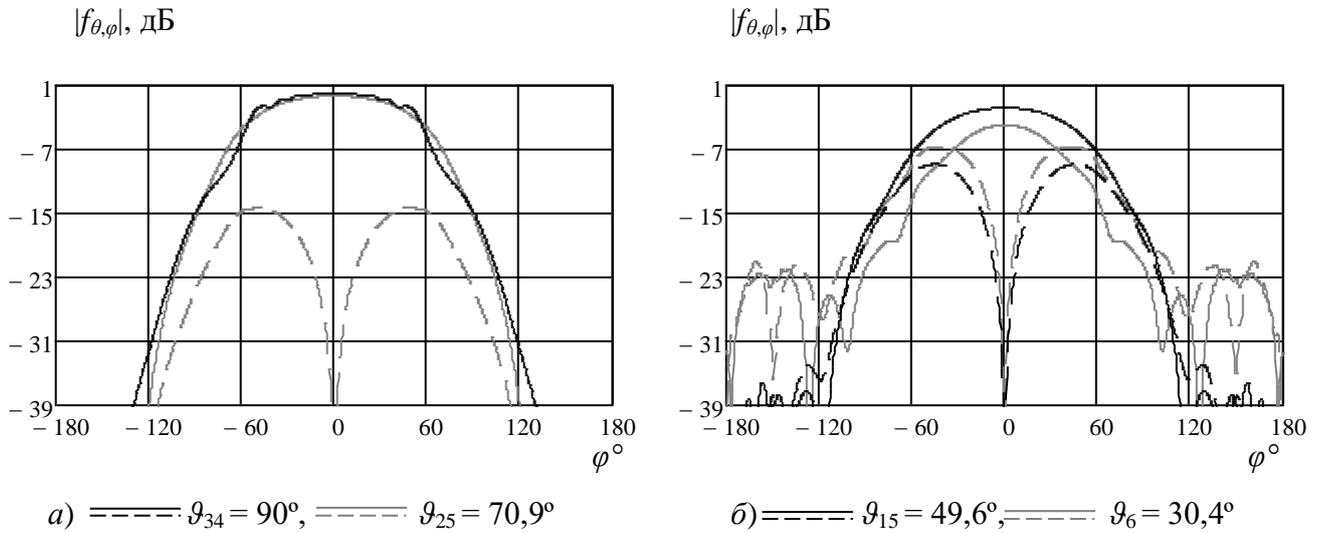


Рис. 23. Парциальные диаграммы аксиальных щелей в сферической антенной решетке с прямоугольной сеткой;  $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda, \theta = 90^\circ$ ;

$\text{-----} \varphi$ -поляризация;  $\text{-----} \theta$ -поляризация.

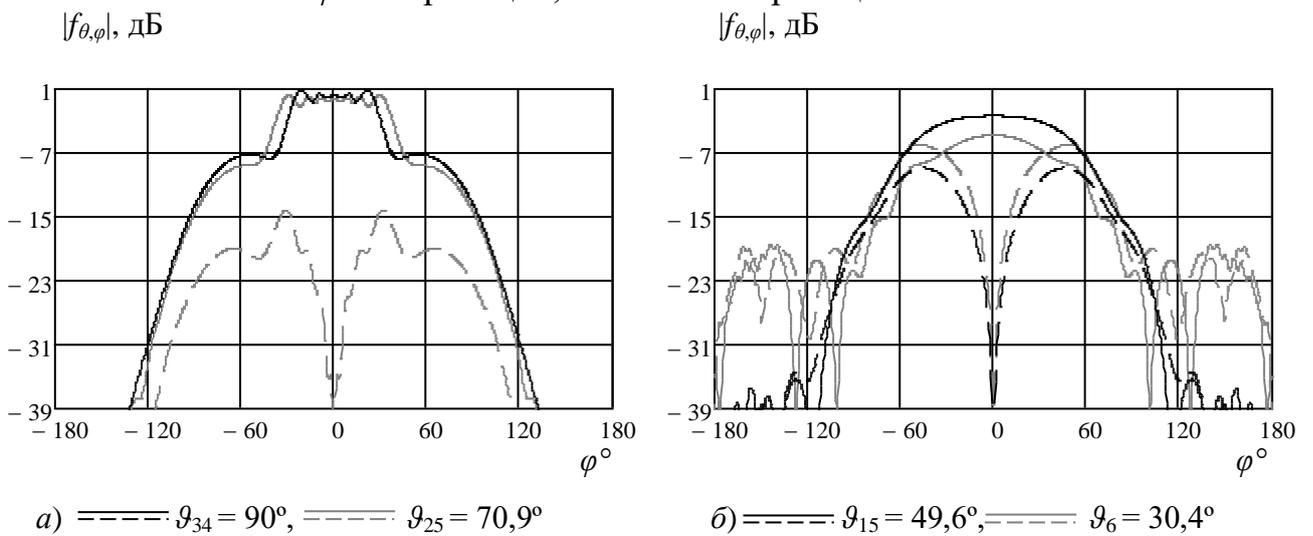


Рис. 24. Парциальные диаграммы аксиальных щелей в сферической антенной решетке с прямоугольной сеткой;  $d_{\varphi\max} = 0,6\lambda, \theta = 90^\circ$ ;

$\text{-----} \varphi$ -поляризация;  $\text{-----} \theta$ -поляризация.

Парциальные диаграммы различных элементов в плоскости  $\theta = 90^\circ$  приведены на рис. 23, 24.

При треугольной сетке размещения расстояние между элементами на экваторе  $d_{\varphi_{\max}} = (1,0 - 1,2)\lambda$ . Шаг колец элементов по образующей  $d_s = 0,271\lambda$  выбран из условия однолучевого сканирования в меридиональной плоскости от 0 до  $60^\circ$  относительно экваториальной плоскости.

Парциальные диаграммы различных элементов в горизонтальной плоскости  $\theta = 90^\circ$  приведены на рис. 25, 26.

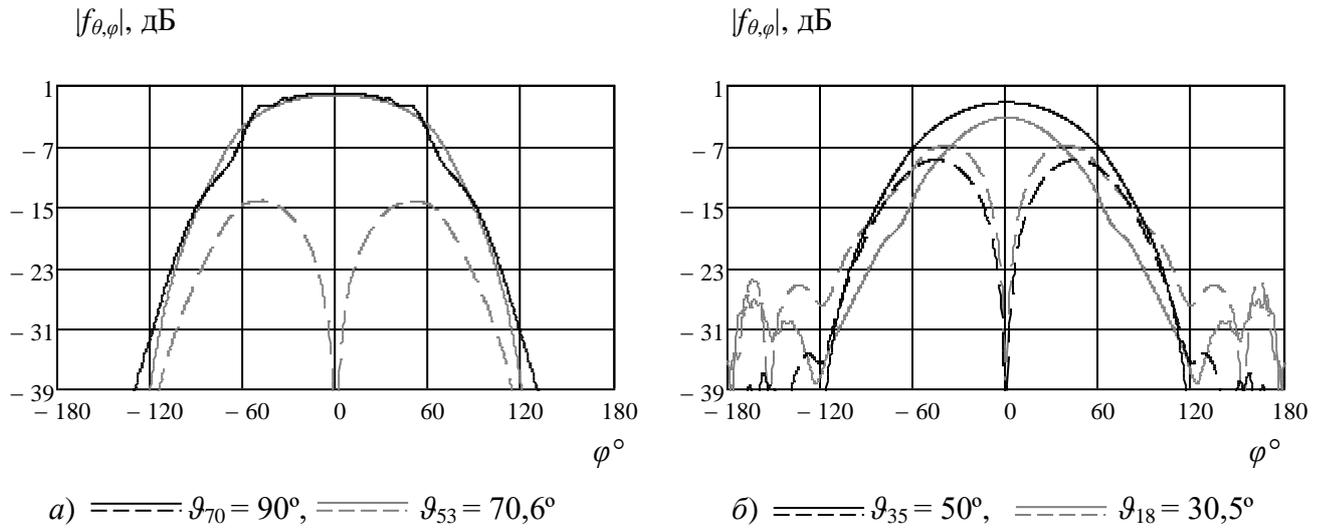


Рис. 25. Парциальные диаграммы аксиальных щелей в сферической антенной решетке с треугольной сеткой;  $d_{\varphi_{\max}} = 1,0\lambda$ ,  $\theta = 90^\circ$ ;  
 ———  $\varphi$ -поляризация; - - - - -  $\theta$ -поляризация.

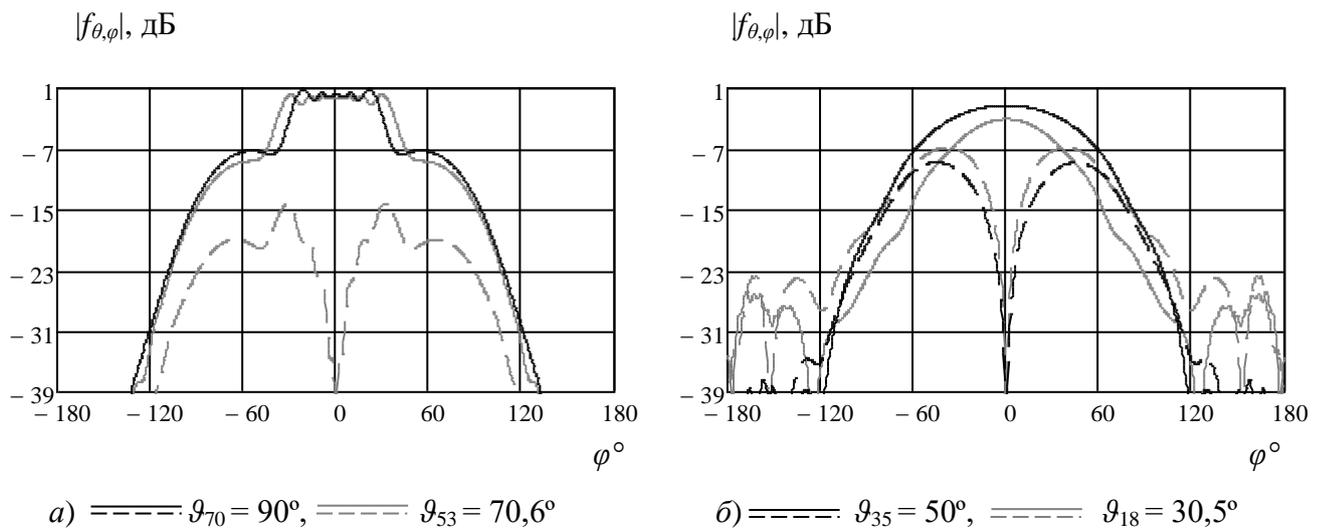


Рис. 26. Парциальные диаграммы аксиальных щелей в сферической антенной решетке с треугольной сеткой;  $d_{\varphi_{\max}} = 1,2\lambda$ ,  $\theta = 90^\circ$ ;  
 ———  $\varphi$ -поляризация; - - - - -  $\theta$ -поляризация.

Как видно из представленных результатов, парциальные диаграммы рассматриваемых антенных решеток с прямоугольной сеткой при  $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda$  и треугольной сеткой при  $d_{\varphi\max} = \lambda$  близки между собой. Аналогично при  $d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$  и  $d_{\varphi\max} = 1,2\lambda$ , соответственно. Это позволяет ограничиться далее рассмотрением антенной решетки с прямоугольной сеткой.

**Диаграмма направленности сферической ФАР.** Диаграммы направленности сферической ФАР рассчитаны для сферической ФАР аксиальных щелевых излучателей с прямоугольной сеткой, радиус поверхности которой составляет  $R = 13,5\lambda$ ; число элементов по образующей  $N_{\theta} = 58$ .

Диаграммы направленности ФАР при  $N_{\varphi} = 170$ , ( $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda$ ) приведены на рис. 27 – 28. На рис. 27 представлена диаграмма направленности в азимутальной плоскости при оптимальном возбуждении по КУ.

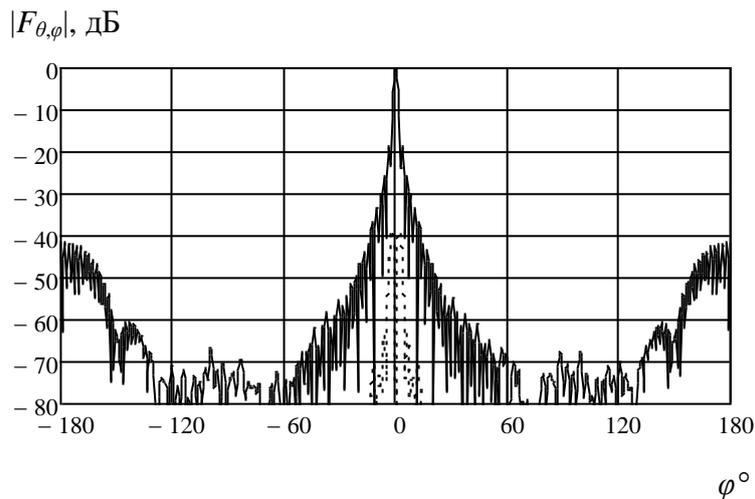


Рис. 27. Диаграмма направленности сферической ФАР с максимальным КУ при  $\theta = 90^{\circ}$ ;  
 —  $\varphi$ -поляризация; ----  $\theta$ -поляризация.

Диаграммы направленности передающей АФАР при оптимальном по потенциалу возбуждении приведены на рис. 28 для двух вариантов: возбуждена вся АФАР, включая «теневую» половину, и только ее передняя («освещенная») половина.

Диаграмма направленности в азимутальной плоскости при возбуждении ФАР с множителем спада (43) ( $\alpha = 0,2$ ,  $p = 4$ ) приведена на рис. 29.

Снижение КУ за счет спадающего распределения (апертурный коэффициент использования поверхности – КИП [3])  $k_a = 0,869$ .

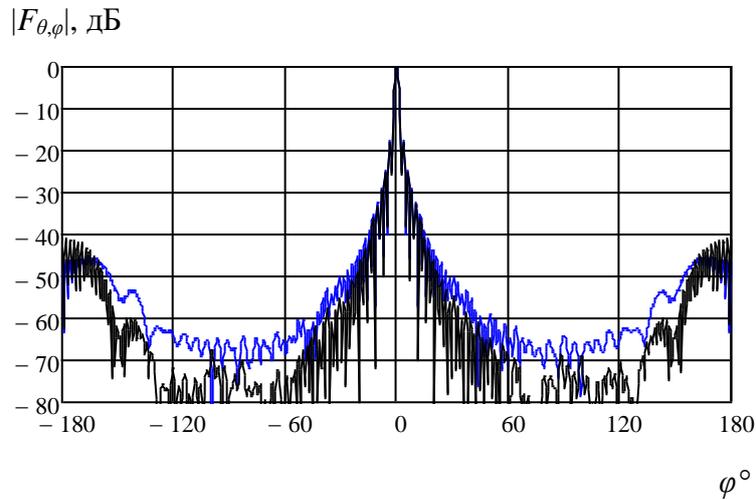


Рис. 28. Диаграмма направленности сферической АФАР с максимальным потенциалом при  $\theta = 90^\circ$ ;  $\varphi$ -поляризация;  
 — активна половина АФАР; — активна АФАР в целом.

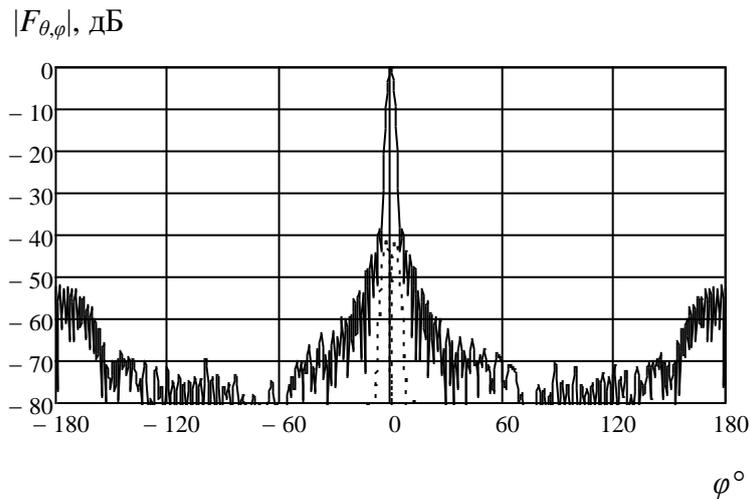


Рис. 29. Диаграмма направленности сферической ФАР со спадающим распределением ( $\alpha = 0,2, p = 4$ ) при  $\theta = 90^\circ$ ;  
 —  $\varphi$ -поляризация; ----  $\theta$ -поляризация.

Диаграмма направленности ФАР в азимутальной плоскости при параметрах распределения  $\alpha = 0,08, p = 4$ , обеспечивающих еще более низкий уровень боковых лепестков, приведена на рис. 30. Снижение КУ за счет спадающего распределения  $k_a = 0,812$ .

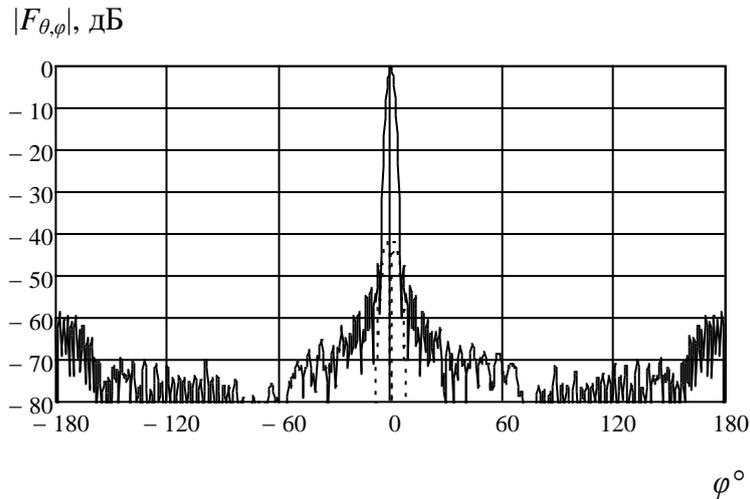


Рис. 30. Диаграмма направленности сферической ФАР со спадающим распределением ( $\alpha = 0,08, p = 4$ ) при  $\theta = 90^\circ$ ;  
 —  $\varphi$ -поляризация; ----  $\theta$ -поляризация.

Как видно из рис. 29, 30, сферическая ФАР с расстоянием между элементами не более половины длины волны позволяет реализовать низкий уровень боковых лепестков. При увеличении шага элементов в диаграмме направленности появляются дифракционные лепестки, как иллюстрируется рис. 31, соответствующим  $N_\varphi = 142, d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$ .

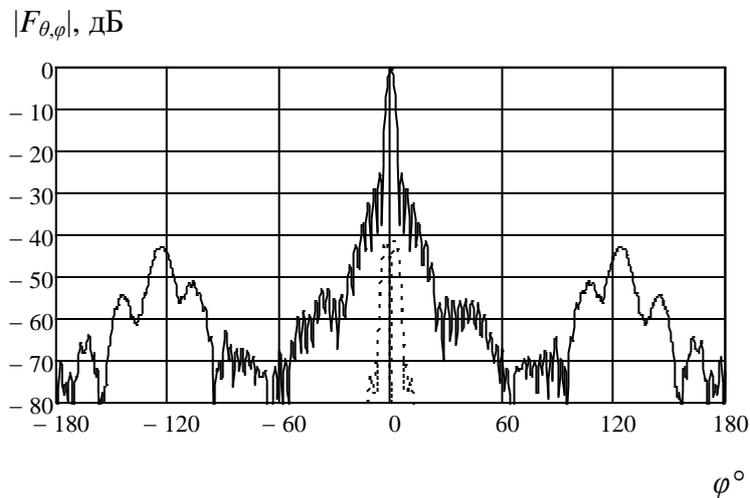


Рис. 31. Диаграмма направленности сферической ФАР со спадающим распределением ( $\alpha = 0,08, p = 4$ ) при  $\theta = 90^\circ; d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$ ;  
 —  $\varphi$ -поляризация; ----  $\theta$ -поляризация.

**Отраженные волны на входе элементов.** Рассмотрим представляющий интерес для передающий АФАР режим оптимального возбуждения по потенциалу, который характеризуется равномерной амплитудой падающих

волн на входе всех активных элементов.

Результаты расчета отраженных волн для сферической ФАР аксиальных щелевых излучателей в зависимости от азимутального угла, определяющего положение излучателя в кольце  $\vartheta = 90^\circ$  на поверхности антенны, приведены на рис. 32 при нескольких углах сканирования.

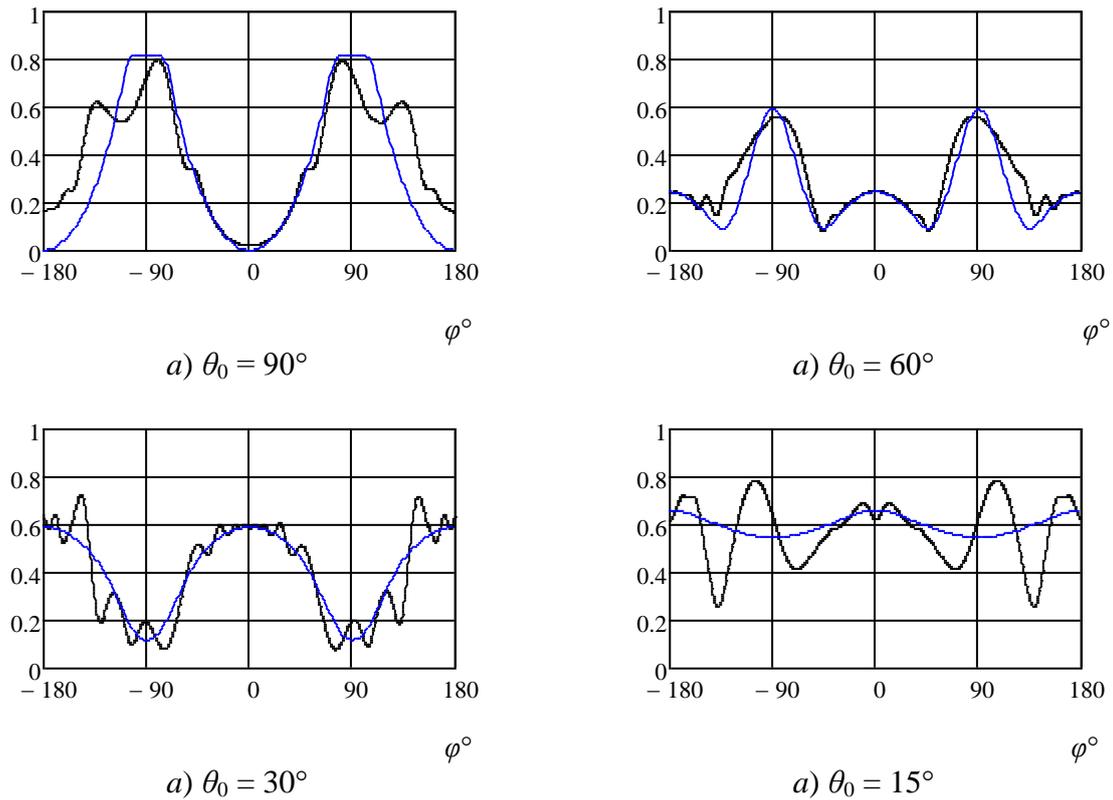


Рис. 32. Отраженные волны при оптимальном возбуждении по потенциалу;  
 $\vartheta_{28} = 90^\circ$   
 — метод стационарной фазы; — ряд Фурье.

**Коэффициент усиления сферической ФАР.** Максимальный КУ антенной решетки определяется по парциальным диаграммам элементов соотношением (42). Расчеты оптимальной поляризации по КУ [3] при всех углах сканирования дают интуитивно ясный результат: для аксиальных щелей –  $\varphi$ -поляризацию, для азимутальных щелей –  $\theta$ -поляризацию.

Относительные КУ сферических ФАР аксиальных и азимутальных щелевых излучателей с прямоугольной сеткой получены нормированием на

максимальный КНД эквивалентного плоского раскрыва  $D_0$  при  $\theta_0 = 90^\circ$  и приведены на рис. 33 в зависимости от угла сканирования от экваториальной плоскости (угла места)  $\varepsilon_0 = \pi/2 - \theta_0$  (иначе, диаграммы сканирования). Активные элементы ФАР располагаются в поясе  $30^\circ \leq \vartheta \leq 120^\circ$ .

Для сравнения на рисунке также приведен относительный максимальный КНД сферической антенны (44), получающийся при оптимальной (управляемой) поляризации [1].

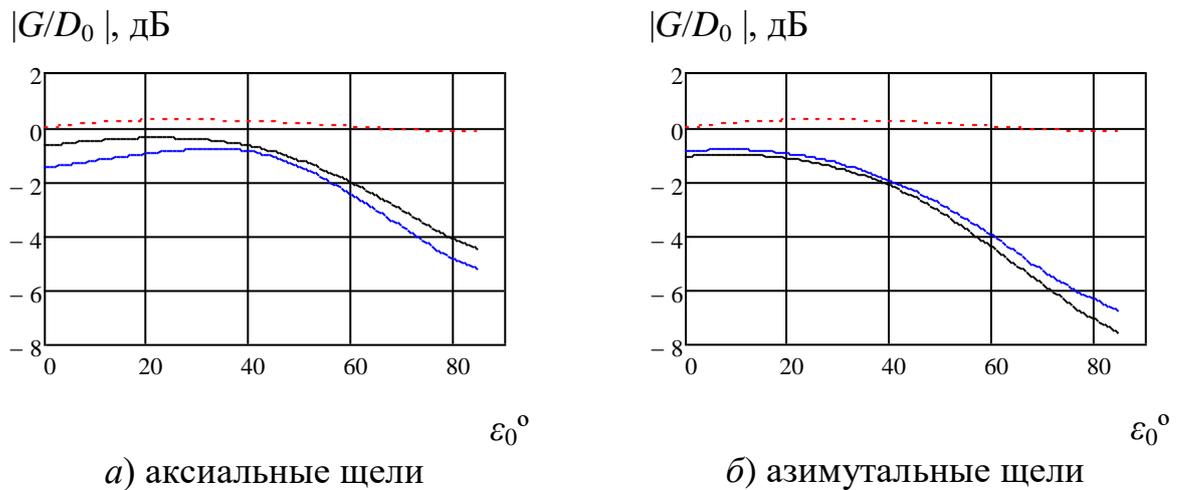


Рис. 33. Диаграммы сканирования сферических ФАР;  
 —  $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda$ ; —  $d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$ ; - - - КНД.

Как видно из представленных результатов, КУ сферической ФАР азимутальных щелей быстрее уменьшается при увеличении угла сканирования в угломестной плоскости, чем для ФАР аксиальных щелей.

Уменьшение КУ ФАР щелевых элементов при сканировании, помимо уменьшения площади эквивалентного плоского раскрыва, связано с отражением части падающей мощности от входов щелевых излучающих элементов (уменьшение КПД), неоптимальной поляризацией части излучающих элементов, что приводит к кроссполаризационным потерям КНД, а также с возможным наличием дифракционных лепестков. Разделение по видам потерь будет исследовано в нижеследующих параграфах.

**КПД и составляющие потерь КУ сферической ФАР.** КПД ФАР щелевых излучателей определяется только мощностями, уносимыми отраженными волнами в фидерах элементов (63).

Зависимости потерь КУ  $\mu$  (46) и КПД ФАР  $\eta$  (63) от угла сканирования  $\varepsilon_0 = \pi/2 - \theta_0$  при оптимальном по КУ возбуждении падающих волн для сферических ФАР аксиальных и азимутальных щелевых излучателей приведены на рис. 34.

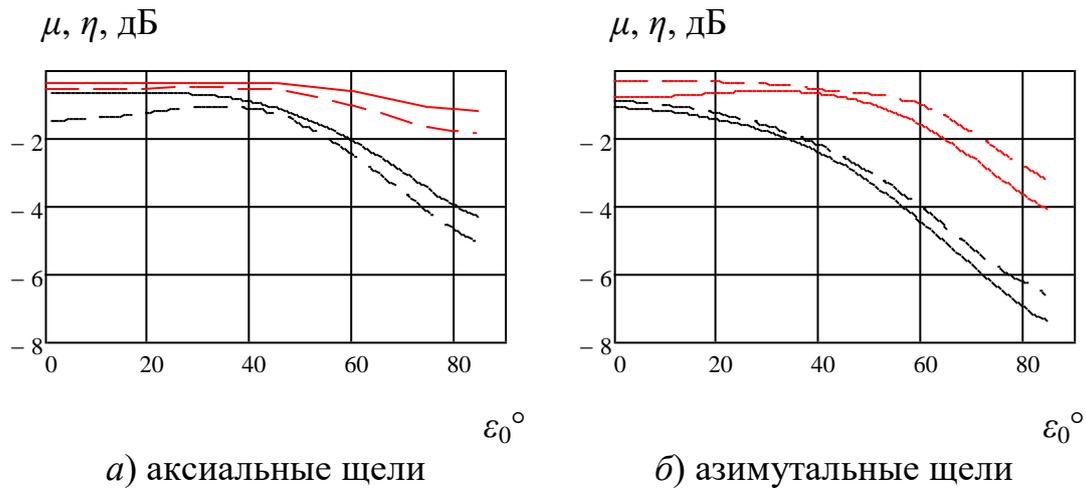


Рис. 34. Потери КУ (—) и КПД (---) сферической ФАР при оптимальном возбуждении по КУ;  
 ———  $d_{\varphi\text{max}} = 0,5\lambda$ ; ---  $d_{\varphi\text{max}} = 0,6\lambda$ .

Потери КУ превышают снижение КПД из-за неоптимальной поляризации излучателей и дифракционных лепестков. Вычислив отношение этих величин  $\chi = \mu/\eta$ , получим потери КНД (из-за неоптимальной поляризации и на дифракционные лепестки). Соответствующие зависимости приведены на рис. 35.

Как следует из анализа этих зависимостей, при углах сканирования  $\varepsilon_0 \leq 40^\circ$  поляризационные потери не велики; при  $d_{\varphi\text{max}} = 0,6\lambda$  преобладают потери на дифракционные лепестки. При  $\varepsilon_0 > 40^\circ$  дифракционные лепестки и связанные с ними потери практически исчезают, а поляризационные потери возрастают с увеличением угла сканирования  $\varepsilon_0$ .

Аналогичные зависимости потерь КУ и КПД от угла сканирования при оптимальном возбуждении АФАР по потенциалу приведены на рис. 36.

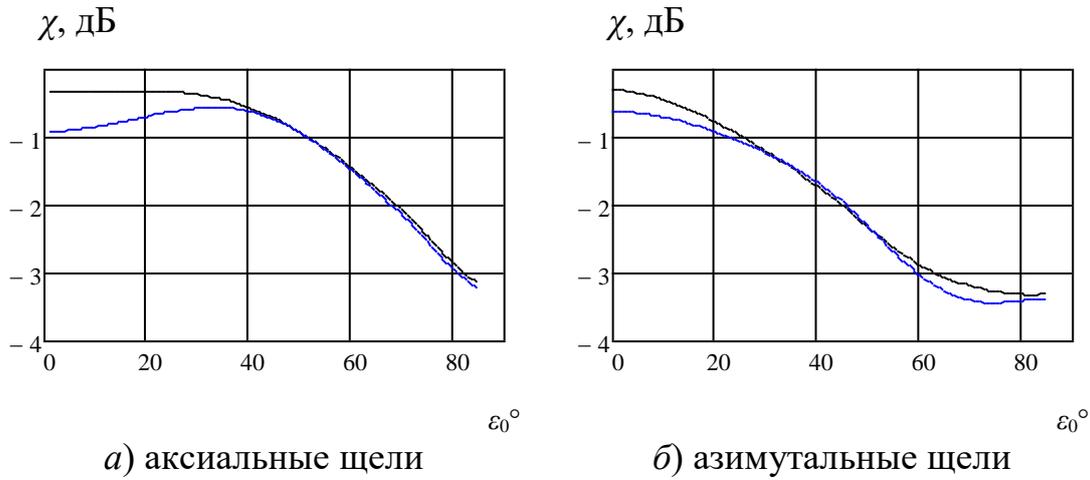


Рис. 35. Потери КНД при оптимальном возбуждении по КУ;

—  $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda$ ; —  $d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$ .

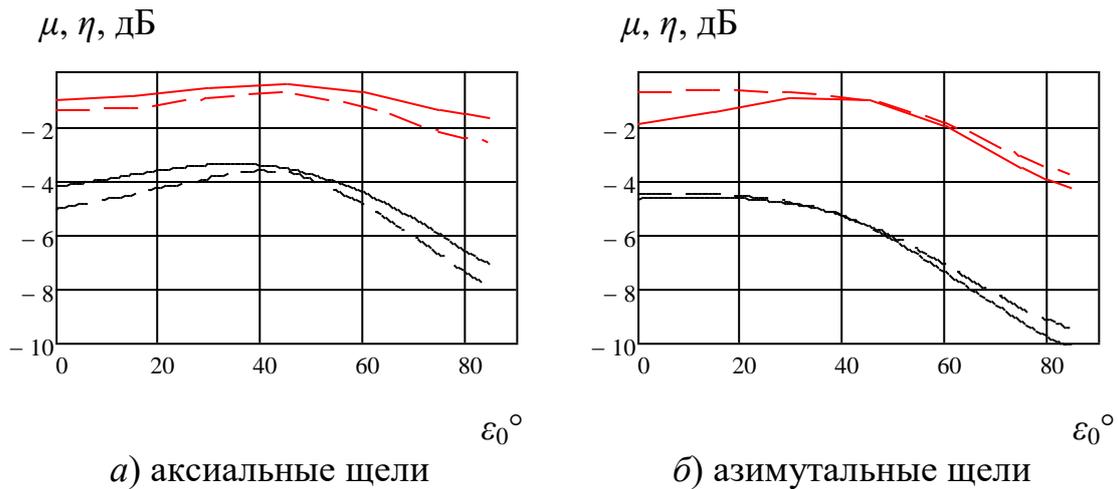


Рис. 36. Потери КУ (-----) и КПД (-----) сферической АФАР при оптимальном возбуждении по потенциалу;

—  $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda$ ; -----  $d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$ .

Значительное снижение КУ по сравнению с максимальным КНД обусловлено кратным увеличением излучаемой мощности за счет возбуждения задней половины АФАР.

Сравнение сферических ФАР аксиальных и азимутальных щелей показывает, что, как потери на рассогласование входов излучателей, так и поляризационные потери, больше для ФАР азимутальных щелей.

Отметим, что поляризационные потери не устранимы в рамках излучателей с фиксированной поляризацией. Для их существенного уменьшения необходимо использовать излучатели с управляемой поляризацией, например в виде двухходовых скрещенных щелевых излучателей.

**Потенциал АФАР.** Потенциал АФАР с оптимальным возбуждением по потенциалу, несмотря на меньший КУ, существенно больше, чем потенциал АФАР с максимальным КУ при равной предельной мощности передающих модулей, как это можно видеть на рис. 37. Нормировка выполнена так, что полная мощность АФАР с максимальным потенциалом равна единице.

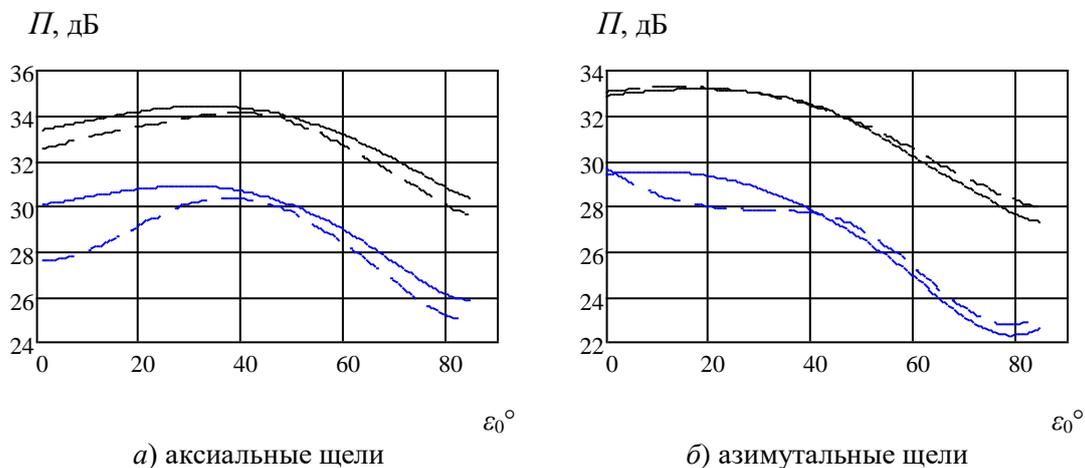


Рис. 37 Потенциал сферической АФАР при оптимальном возбуждении

==== по потенциалу; ---- по КУ;  
 ———  $d_{\varphi\max} = 0,5\lambda$ ; - - - -  $d_{\varphi\max} = 0,6\lambda$ .

**Результат численного исследования.** Мы видим, что сферическая ФАР аксиальных щелей позволяет обеспечить широкоугольное круговое сканирования вплоть до полусферы. При этом потери КУ и потенциала при отклонении луча по углу места  $\varepsilon_0 = 85^\circ$  составляют около 4 дБ (при расстоянии между элементами в пределах половины длины волны). Низкий уровень боковых лепестков может быть получен за счет соответствующего взвешивания принятых сигналов.

Сферическая ФАР азимутальных щелей может использоваться для кругового сканирования в ограниченном секторе углов места относительно экваториальной плоскости.

## Заключение

Получены приближенные асимптотические соотношения для расчета характеристик осесимметричных сферических антенных решеток с учетом взаимодействия щелевых излучателей, пригодные при больших размерах антенны.

Выполнено численное исследование полученных асимптотических решений, их возможностей и ограничений; показано хорошее согласование с расчетами, выполненными строгими методами для сферической антенной решетки радиуса около  $4\lambda$ . Численным исследованием показана практическая применимость наиболее простого приближенного решения, при котором не требуется решения интегрального уравнения для распределения напряжения по поверхности антенной решетки. Данное решение является локальным: значение напряжения определяется параметрами антенной решетки только в точке расположения рассматриваемого излучателя.

Исследованы характеристики сферических ФАР большого электрического размера с радиусом поверхности  $13,5\lambda$  и числом элементов порядка  $10^4$ . Показано, что сферическая ФАР аксиальных щелей позволяет обеспечить круговое широкоугольное сканирование вплоть до полусферы. Сферическая ФАР азимутальных щелей может использоваться для кругового сканирования в ограниченном секторе углов места относительно экваториальной плоскости.

Расчеты выполнены на РС в математической среде MathCad при времени счета представленных на рисунках результатов от единиц секунд до нескольких минут.

## Приложение 1

**Функция Фока.** Преобразование Фурье отношения функции Эйри к ее производной

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} e^{-jxt} dt, \quad (\text{П.1.1})$$

выражается через функцию Фока [11]  $v(x)$

$$W(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\pi x}} \nu(x) , \quad (\text{П.1.2})$$

При  $x < 0$  интегрирование в (П.1.1) может быть выполнено по контуру в комплексной плоскости, представляющему собой вещественную ось, дополненную полуокружностью бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости, поскольку на этой полуокружности значения подынтегральной функции обращаются в нуль. Так как подынтегральная функция аналитическая и не имеет особенностей внутри контура интегрирования, значение интегралов равно нулю

$$W(x) = 0, \quad x < 0 . \quad (\text{П.1.2})$$

При  $x > 0$  контур интегрирования можно деформировать в контур  $\Gamma_1$  [4].

При  $x > \approx 0,6$  интеграл (П.1.1) легко вычисляется как сумма вычетов в нулях производной функции Эйри

$$W(x) = -j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-jt'_m x}}{t'_m} , \quad (\text{П.1.3})$$

при этом достаточно использовать не более пяти членов ряда.

При  $x < 0,6$  [11]

$$\nu(x) \cong 1 - \frac{\sqrt{j\pi}}{4} x^{3/2} + \frac{7j}{60} x^3 + \frac{7\sqrt{-j\pi}}{512} x^{9/2} - 4,241 \cdot 10^{-3} x^6 . \quad (\text{П.1.4})$$

Из (П.1.1) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) e^{jxt} dx = \frac{w_2(t)}{w'_2(t)} . \quad (\text{П.1.5})$$

## Приложение 2

### Равномерная асимптотика интеграла

$$B_l(p) = j^{-l} \int_0^{2\pi} M(\varphi) e^{j(p \cos \varphi - l\varphi)} d\varphi . \quad (\text{П.2.1})$$

Если стационарные точки (36) вещественны и отстоят далеко друг от друга, интеграл асимптотически равен сумме вкладов стационарных точек

$$B_l \cong M_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - l^2}}} e^{j\left(\sqrt{p^2 - l^2} + l \arcsin \frac{l}{p} - \frac{\pi}{4}\right)} + M_2 \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - l^2}}} e^{-j\left(\sqrt{p^2 - l^2} + l \arcsin \frac{l}{p} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (\text{П.2.2})$$

Когда стационарные точки сближаются (П.2.2) становится не справедливым. В этом случае  $|l| \approx p$  и главная область интегрирования лежит вблизи точки слияния  $\varphi_0$ , в которой  $\cos \varphi_0 = 0$ . Вблизи точки слияния можно считать, что

$$M(\varphi) \cong M^{(1)} + M^{(2)} \cos \varphi, \quad (\text{П.2.3})$$

где  $M^{(1)}, M^{(2)}$  – константы.

Тогда, интеграл (П.2.1) с учетом (П.2.3) и интегрального представления для функций Бесселя [12]

$$\begin{aligned} B &\cong M^{(1)} j^{-l} \int_0^{2\pi} e^{j(p \cos \varphi' - l \varphi')} d\varphi' + M^{(2)} j^{-l} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' e^{j(p \cos \varphi' - l \varphi')} d\varphi' = \\ &= 2\pi \left\{ M^{(1)} J_l(p) - j M^{(2)} J'_l(p) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

где  $J_l(p)$   $J'_l(p)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $l$  и ее производная.

Запишем (П.2.3) в стационарных точках

$$M_{1,2} \cong M^{(1)} \pm M^{(2)} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{p}\right)^2}, \quad (\text{П.2.5})$$

откуда следует

$$M^{(1)} = \frac{M_1 + M_2}{2}, \quad M^{(2)} = \frac{M_1 - M_2}{2\sqrt{1 - \left(\frac{l}{p}\right)^2}}. \quad (\text{П.2.6})$$

Подставляя (П.2.6) в (П.2.4), получаем (38).

С помощью приближения функций Бесселя «тангенсами» [12] нетрудно установить, что (П.2.4) переходит в (П.2.2) при  $|l| \ll p$ . При  $|l| \gg p$  (П.2.4) экспоненциально убывает. В результате (П.2.4), (П.2.6), (38) является

равномерной асимптотикой, а точнее главным членом равномерного асимптотического разложения.

### Литература

1. Воскресенский Д.И., Пономарев Л.И., Филиппов В.С. Выпуклые сканирующие антенны. М.: Советское радио. 1978. 304 с.
2. Инденбом М.В., Скуратов С.А. Модальный подход в методе расчета осесимметричных антенных решеток с учетом взаимодействия щелевых излучателей на основе разложения электромагнитного поля по собственным функциям внешней области поверхности антенны // Антенны. 2020. Вып. 4.
3. Инденбом М.В. Антенные решетки подвижных обзорных РЛС. Теория, расчет, конструкции. М.: Радиотехника. 2015. 416 с.
4. Инденбом М.В. Эффекты взаимной связи щелевых излучателей в выпуклой квазипериодической фазированной антенной решетке большого электрического размера // Антенны. 2017. Вып. 3 (235). С. 3-23.
5. Инденбом М.В. Асимптотический метод расчета диаграммы направленности выпуклой осесимметричной антенной решетки с учетом взаимодействия щелевых излучателей. // Антенны. 2018. Вып. 1 (245). С. 9-22.
6. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ ФАР. М.: Мир, 1974. 455 с.
7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. К.: Наукова думка, 1986. 544 с.
8. Инденбом М.В., Курочкин Н.Ю. Кольцевые антенные решетки с максимальным потенциалом и многолепестковой диаграммой направленности // Антенны. 2019. Вып. 1 (255). С. 14-23.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 831 с.
10. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
11. Lee S.-W., Safavi-Naini S. Approximate Asymptotic Solution of Surface Field due to a Magnetic Dipole on a Cylinder. // IEEE Trans. on AP. 1978. Vol. 26. No.4. P.593-598.

12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, Физматгиз, 1971. 1108 с.

**Для цитирования:**

Инденбом М.В. Исследование характеристик сферических осесимметричных фазированных антенных решеток с учетом взаимодействия щелевых излучателей. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.2>