

ВОЛНОВОДЫ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

С. Е. Банков

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН

Получена 3 июня 2008 г.

ВВЕДЕНИЕ

Эквивалентные граничные условия (ЭГУ) импедансного типа широко применяются в электродинамике для описания различных сложных поверхностей. Наиболее известным примером таких граничных условий являются условия Щукина – Леонтовича, которые связывают поля на поверхности металла с конечной проводимостью. Другим примером служат граничные условия на гребенчатой поверхности, показанной на рис. В.1.

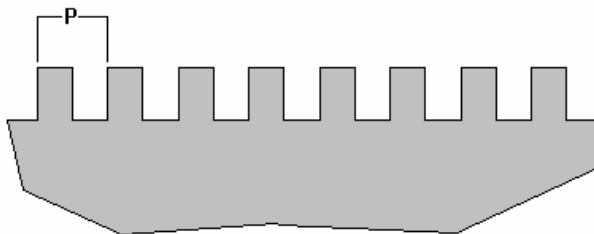


Рис. В.1.

Условное деление поверхностей на сложные и простые состоит в том, что при падении плоской электромагнитной волны на сложную поверхность рассеянное поле является не просто совокупностью отраженной и, быть может, еще прошедшей плоских волн, но содержит дополнительно и некоторое ближнее поле, которое концентрируется около поверхности. Отметим, что простая поверхность, например граница раздела двух диэлектриков ближнего поля не создает.

Во многих практических случаях ближнее поле не играет существенной роли в том смысле, что оно не участвует во взаимодействии с другими телами, так как эти тела расположены достаточно далеко, чтобы «не чувствовать» наличия ближнего поля. Все взаимодействие осуществляется через дальнее поле, которое для плоских границ имеет вид совокупности плоских волн. Такое разделение поля объясняет смысл введения ЭГУ: ЭГУ связывают на анализируемой поверхности компоненты не полного поля, а лишь компоненты дальнего поля, что позволяет в дальнейшем не искать сложное ближнее поле, а интересоваться только дальним. Очевидно, что устранение ближнего поля из анализа делает его намного проще, например, в ряде случаев позволяет свести трехмерную задачу к двумерной.

Процедура вывода ЭГУ основана на решении, так называемых, ключевых задач. В большинстве случаев ключевая задача формулируется как

задача о падении плоской волны на плоскую поверхность. Ее решение ищется в виде отраженных и прошедших плоских волн. В простейшем случае односторонних ЭГУ (к их числу относятся, в том числе, упомянутые выше ЭГУ) имеется только отраженная волна со своим коэффициентом отражения R . С помощью известных соотношения теории цепей СВЧ, можно перейти от коэффициента отражения, связывающего амплитуды отраженной и падающей волн, к импедансу Z , связывающему тангенциальные компоненты электромагнитного поля. В общем случае можно говорить о переходе от матрицы рассеяния к матрице импедансов или адмитансов. Импеданс Z - это и есть искомый импеданс поверхности, входящий в ЭГУ.

Последовательность шагов, описанная выше, укладывается в классическую схему определения ЭГУ только в том случае, если получаемый в результате импеданс не зависит от угла падения плоской волны. Угол падения плоской волны задается проекциями ее волнового вектора на поверхность, на которой устанавливаются ЭГУ. В двумерном случае такая проекция одна. Обозначим ее через β . Таким образом, обычно формулируют дополнительное требование

$$Z \neq Z(\beta), \quad (\text{B.1})$$

которое обеспечивает локальность ЭГУ.

На первый взгляд не совсем понятно, каким образом соотношение (B.1) связано с локальностью ЭГУ. Однако, такая связь существует и она будет разъяснена ниже.

В классическом случае условий Щукина – Леонтовича выполнение соотношения (B.1) обеспечивается за счет того, что волновое число волны в металле k_M удовлетворяет следующему неравенству:

$$|k_M| \gg |\beta|. \quad (\text{B.2})$$

Благодаря соотношению (B.2) удается проекцию волнового вектора плоской волны в металле представить в виде независимом от β :

$$\sqrt{k_M^2 - \beta^2} \approx k_M. \quad (\text{B.3})$$

Вследствие формулы (B.3) поле внутри металла, а вместе с ним и импеданс границы Z оказываются независимыми от β .

Из изложенного выше видно, что ЭГУ Щукина – Леонтовича являются локальными лишь в частном случае металла с большой проводимостью, для которого удовлетворяется неравенство (B.2). При уменьшении проводимости, что имеет место, например, на частотах близких к оптическому диапазону, указанные граничные условия в традиционной локальной форме не могут быть использованы.

Аналогичная ситуация наблюдается и для гребенчатой структуры, для которой локальность ЭГУ достигается только при выполнении неравенства:

$$P \ll \lambda_0, \quad (\text{B.4})$$

где P - период структуры, а λ_0 - длина волны в окружающем ее свободном пространстве.

Поле в периодической структуре можно представить в виде набора, так называемых, пространственных гармоник Флоке. Каждая из них в двумерном случае характеризуется волновым числом γ_n :

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\beta + \frac{2\pi n}{P}\right)^2 - k_0^2}, \quad (\text{B.5})$$

где k_0 - волновое число свободного пространства. Из (B.5) видно, что при выполнении (B.4) и $n \neq 0$ волновые числа γ_n можно приближенно представить в виде, не зависящем от β :

$$\gamma_n = \frac{2\pi n}{P}. \quad (\text{B.6})$$

Если равенство (B.6) справедливо, то ближнее поле, формируемое гармониками Флоке перестает зависеть от β , а ЭГУ на гребенчатой структуре оказываются локальными.

Таким образом, мы снова видим, что локальность ЭГУ это лишь частный случай, соответствующий наличию некоторого малого параметра структуры. Если этот параметр не мал, то и локальность ЭГУ нарушается.

Приведенные выше примеры не исчерпывают класс поверхностей, которые могут быть описаны с помощью нелокальных граничных условий (НГУ). К их числу относятся шероховатые поверхности /1/, граница плазмы с отрицательным волновым числом, фрактальные поверхности /2/ и ряд других.

Среди новых структур, которые могут быть описаны с помощью НГУ, следует отметить, так называемые, метаматериалы /3/. Метаматериал – это искусственная среда, образованная искусственными частицами – метачастицами, которые расположены упорядоченно в узлах решетки или хаотически. Метаматериалы с упорядоченно расположенными частицами формируют класс, так называемых фотонных кристаллов /4/.

Отличительной чертой многих фотонных кристаллов является то, что период их решеток отнюдь не много меньше длины волны в окружающей среде. Благодаря этому уже сама среда становится нелокальной, то есть ее материальные параметры зависят от направления распространения волны в такой среде. Неудивительно, что поверхность раздела фотонного кристалла и свободного пространства также приобретает нелокальные свойства и может быть описана в терминах НГУ.

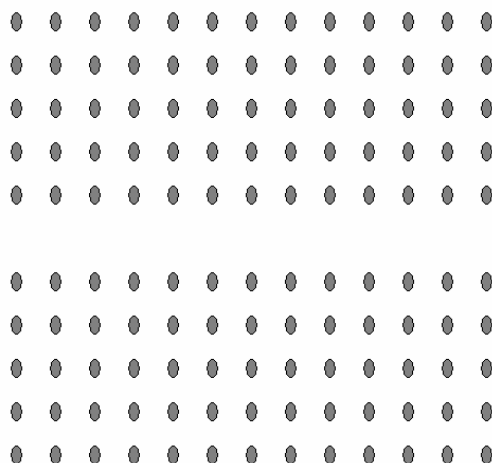


Рис. В.2.

Говоря о фотонных кристаллах, нельзя не отметить, так называемые bandgap кристаллы или PBG (photonic bandgap crystal) структуры /5/. Такие структуры отличаются тем, что в них не существует распространяющихся волн. PBG структуры эффективно используются для создания в них волноводов, которые образуются путем удаления из решетки ряда ее элементов (см. рис. В.2). При этом в фотонном кристалле возникает канал, окруженный средой неспособной пропускать электромагнитные волны. Такой волноведущий канал можно трактовать как полость, ограниченную поверхностью раздела свободного пространства и фотонного кристалла, то есть нелокальной поверхностью.

До сих пор, мы устанавливали НГУ на некоторой физически существующей поверхности, на которую могут падать плоские волны. Известны, однако, структуры, которые хотя и могут быть описаны в терминах НГУ, но эти НГУ устанавливаются на некоторой виртуальной поверхности и волны, падающие на нее не являются в чистом виде плоскими. Мы имеем ввиду границы раздела, так называемых, планарных компонентов. Впервые этот термин, видимо, появился в /6/. Поскольку вывод НГУ для планарных или интегральных компонентов будет подробно рассмотрен ниже, то сейчас мы не будем рассматривать его детали. Отметим только, что речь идет о широком классе планарных линий передачи, для которых может быть построена двумерная модель в виде слоя, ограниченного с двух сторон поверхностями, на которых установлены НГУ. Особенно хочется обратить внимание на то, что использование НГУ позволяет перейти от трехмерной структуры к ее двумерной модели, что делает ее анализ несравнимо более простым.

К числу планарных линий передачи относятся широко известные и имеющие большое практическое значение симметричные полосковые линии (СПЛ) (рис. В.3 а), микрополосковые линии (МПЛ), двусторонний щелевой волновод (ДЩВ) (рис. В. б), отражательный диэлектрический волновод (ОДВ) (рис. В.3 в) и т.д.

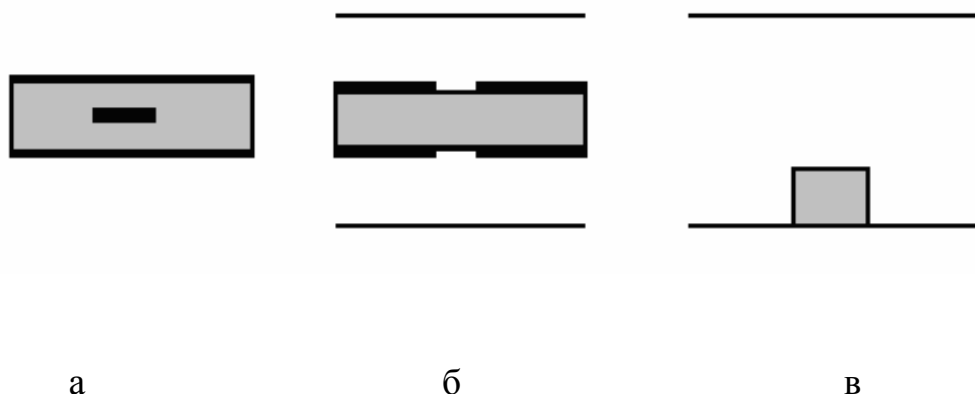


Рис. В3

Отметим, что впервые ключевая задача для полосковых интегральных схем была сформулирована и решена в /7,8/. Аналогичная задача для ДЦВ была решена в /9/.

Таким образом, видно, что НГУ позволяют единым образом рассматривать широкий класс весьма разнородных структур, имеющих весьма большое практическое значение.

Вообще говоря, ценность НГУ была очевидна достаточно давно, однако появление нелокальности в граничных условиях рассматривалось многими авторами как признак невозможности их эффективного использования при решении электродинамических задач /10/. Одна из целей этой книги состоит именно в том, чтобы опровергнуть такое мнение и показать, что НГУ не только не являются препятствием, но, наоборот, способствуют решению многих важных электродинамических задач. Доказательство этого утверждения потребовало пересмотра ряда фундаментальных основ электродинамики структур с НГУ, к числу которых относятся: лемма Лоренца, теорема об активной мощности, теорема единственности. Среди полученных в этой части результатов большой интерес представляет установленная связь между активной мощностью, переносимой ближним полем вдоль границы с НГУ и производной от импеданса $Z(\beta)$. Оказалось, что нелокальность граничных условий однозначно связана с энергетикой ближнего поля.

В данной книге рассматриваются исключительно волноводные структуры и задачи волноводной дифракции. При этом вопросы рассеяния, например, плоских волн на телах с НГУ в данной книге не рассматриваются, что объясняет ее название «Волноводы с нелокальными границами». Следует отметить, что ниже будут рассмотрены не только собственно регулярные волноводы, но также неоднородности тракта, необходимые для создания различных функциональных узлов. Говоря о волноводных структурах и дифракции волноводных волн, хочется обратить внимание читателя на особенности ортогональности собственных волн в структурах с НГУ. Это

понятие было существенно расширено и обобщено благодаря исследованию волноводов с НГУ.

Учитывая большую практическую важность именно планарных линий передачи некоторые вопросы в книге рассмотрены применительно к этим структурам, хотя результаты, соответствующих разделов легко могут быть распространены на другие структуры упомянутые выше.

1. Основные положения метода нелокальных граничных условий

1.1 Нелокальные граничные условий и двумерные граничные задачи для планарных компонентов

Большое практическое значение, которое имеют в технике СВЧ интегральные схемы (ИС) и формирующие их планарные компоненты заставляют нас рассмотреть вывод НГУ для них отдельно от других структур. Это тем более справедливо, что использование НГУ позволяет перейти от исходной трехмерной структуры планарного компонента к его двумерной модели. Такой переход существенно упрощает решение граничной задачи и расширяет круг объектов, для которых решение может быть получено в простой аналитической форме.

Рассмотрим вывод НГУ применительно к ИС на основе СПЛ (рис. В.3 а). Выбор пал на СПЛ по той причине, что в этом типе структур отсутствуют факторы, осложняющие постановку и решение граничных задач по предлагаемой схеме и, в тоже время, не имеющие к самой этой схеме непосредственного отношения. Исключение таких факторов позволяет сосредоточиться только на самом методе. Отметим, однако, что полученные для СПЛ структуры решения без особого труда могут быть распространены на ДЦВ структуры. Что касается элементов на ОДВ, то они отдельно рассмотрены в четвертой главе книги.

Итак, перейдем к основной задаче этого раздела. На рис. 1.1

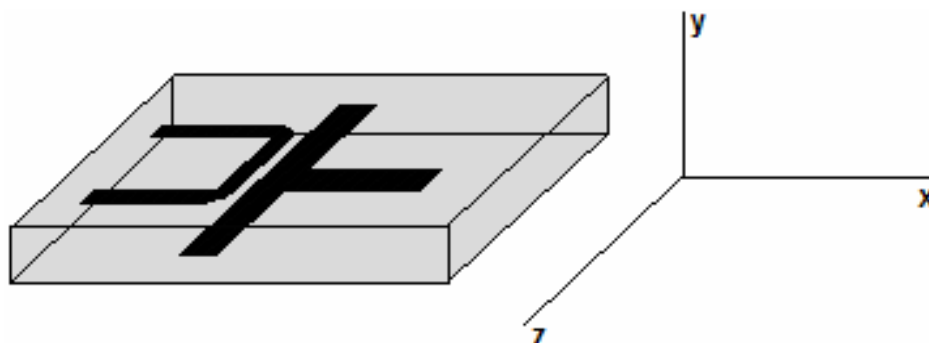


Рис. 1.1

показан пример интегральной структуры на основе СПЛ. Для нас сейчас важно зафиксировать следующее: мы имеем дело со структурой, все свойства

которой определяются топологией (формой) металлизации, расположенной в диэлектрике между двумя экранами. Очевидно, конечно, что все характеристики полосковых элементов зависят от толщины подложки и ее проницаемости. Однако эти параметры не являются формообразующими и играют роль констант (типа проницаемости свободного пространства и его волнового сопротивления) одинаковых для всех элементов схемы. В то же время, отличие одного элемента от другого - только в его топологии.

Можно возразить, что в технике СВЧ используются структуры, нарушающие описанную выше картину, например, отверстия в подложке. Это действительно так, но появление таких элементов все-таки следует отнести к исключениям, поскольку они разрушают главное достоинство ИС - их технологическую однородность. Поэтому на этом этапе мы будем рассматривать только планарные структуры, образованные плоскими проводниками между двумя экранами.

Попытаемся далее дать качественную характеристику поля в таком планарном компоненте (термин взят из [6]). Для этого отметим, что он образован двумя плоскими волноводами (ПВ). Уединенный ПВ - это направляющая структура, однородная в плоскости XOZ (см. рис. 1.2). Простейшим ПВ являются два металлических экрана, пространство между которыми заполнено диэлектриком. Вообще говоря, структура ПВ вдоль оси OY может быть произвольной (любое сочетание слоев), главное, что отличает его от других структур - это однородность в плоскости XOZ , то есть, отсутствие границ. Полосковый элемент - это сочетание двух типов ПВ, показанных на рис. 1.2. Легко понять, что такой объект обретает существование, когда нарушается однородность ПВ и у них появляются границы (рис. 1.3).

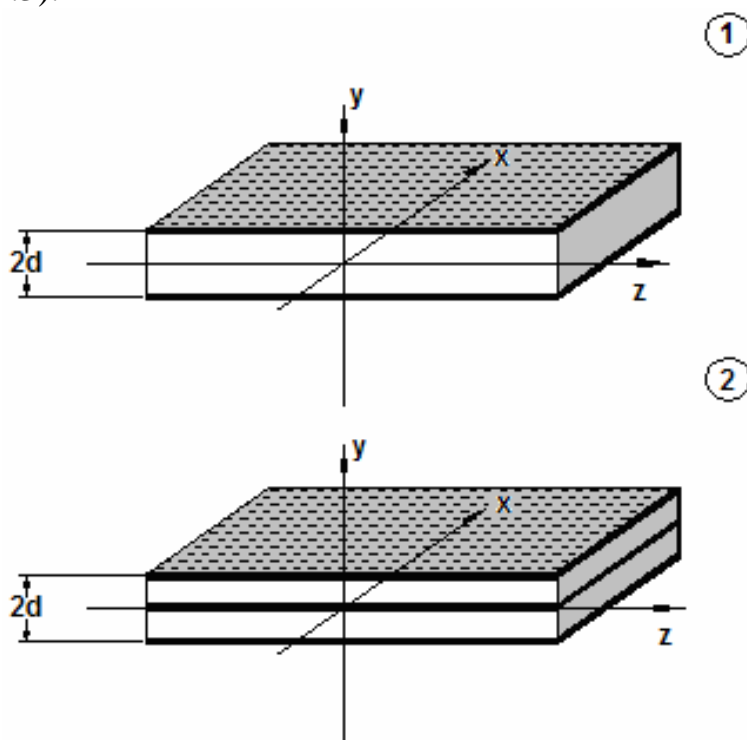


Рис. 1.2

Будем рассматривать поля в планарном компоненте как суперпозицию собственных волн ПВ, его образующих. Известно, что собственные волны ПВ могут быть H - и E - типа, у которых соответственно E_y и H_y -компоненты равны нулю. Далее отметим, что в силу симметрии объекта относительно плоскости XOZ , его поле всегда может быть разделено на две части. Одна соответствует наличию в этой плоскости электрической стенки $E_\tau = 0$, а другая - магнитной $H_\tau = 0$. Если симметрия сохраняется, то эти две части существуют независимо (ортогональны) и могут анализироваться отдельно друг от друга. Нас будет интересовать только решение, соответствующее магнитной стенке. Поэтому далее речь пойдет исключительно о нем.

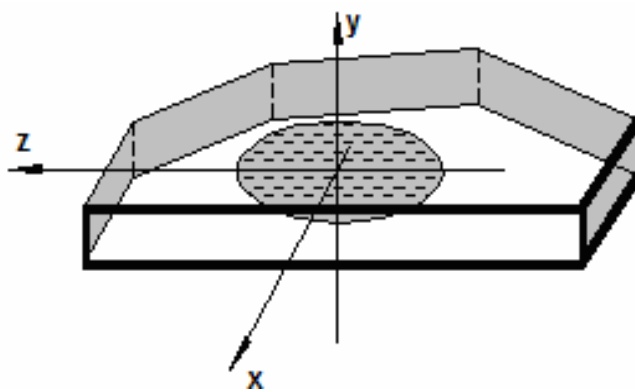


Рис. 1.3

Компоненты однородного ПВ (любого) E_y, H_y могут быть представлены в следующем виде (разложение по собственным волнам):

$$E_y = \sum_n A_n^e \Phi_n^e(x, z) \Psi_n^e(y), \quad (1.1)$$

$$H_y = \sum_n A_n^h \Phi_n^h(x, z) \Psi_n^h(y),$$

где $\Psi_n^e(y), \Psi_n^h(y)$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для поперечного оператора, а γ_n^e, γ_n^h - собственные числа той же задачи, $\Phi_n^e(x, z), \Phi_n^h(x, z)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{e,h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n^{e,h}}{\partial z^2} + (\gamma_n^{e,h})^2 \Phi_n^{e,h} = 0. \quad (1.2)$$

Смысл термина разложение по собственным волнам несколько отличается от принятого для продольно однородных структур. Дело в том, что взятая в общем виде (обычно в литературе рассматривается двумерный случай $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ или $\frac{\partial}{\partial z} = 0$) задача на собственные волны позволяет определить только поперечные функции $\Psi^{e_n(y)}$ или $\Psi^{h_n(y)}$ (см. (1.1)) и собственные значения γ^{e,h_n} . При этом зависимость поля такой волны от x, z не обязательно будет экспоненциальной. Для нее можно лишь записать дифференциальное уравнение, в которое войдет γ_n (см. (1.2)). В частном случае, когда фиксируется двумерность задачи, тогда действительно можно из (1.2) получить для Φ_n экспоненциальное решение, соответствующее уединенной волне, распространяющейся в плоскости XOZ в некотором направлении. В общем же случае решение (1.2) это суперпозиция (непрерывный спектр) волн. Такой спектр волн может быть поставлен в соответствие каждой функции $\Psi_n(y)$, определяющей тип волны. Таким образом, говоря о собственной волне ПВ мы должны помнить, что тем самым мы только определяем зависимость поля этого волнового объекта от координаты y , в то время как в плоскости XOZ его поведение в рамках однородной задачи неопределенно. При этом, говоря о типе волны и ее индексе, имеют ввиду, что ее поперечное (по y) распределение поля такое же как у волны ПВ с тем же индексом в двумерном случае. Поэтому волны ПВ имеют один индекс, отвечающий количеству вариаций y -ых компонент поля. Отметим так же, что знак суммирования в (1.1), в котором отсутствуют пределы означает, что суммирование ведется по всем индексам собственных волн ПВ.

Для нас существенно, что $\Psi^{h,e_n(y)}$ зависят только от свойств ПВ вдоль оси Oy . В тоже время для Φ^{e,h_n} все свойства, определяемые его структурой вдоль оси Oy выражаются лишь числом γ^{e,h_n} . В частных случаях ПВ 1 и 2, показанных на рис. 1.2 собственные функции и числа известны:

$$\Psi_{n1}^e = \sin \left[\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) y}{d} \right], \quad \gamma_{n1}^e = \sqrt{\epsilon k^2 - \left(\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{d} \right)^2},$$

$$\Psi_{n1}^h = \cos \left[\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) y}{d} \right], \quad \gamma_{n1}^h = \sqrt{\epsilon k^2 - \left(\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{d} \right)^2},$$

$$\Psi_{n2}^e = \cos \left[\frac{\pi n y}{d} \right], \quad \gamma_{n2}^e = \sqrt{\epsilon k^2 - \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2},$$

$$\Psi_{n2}^h = \sin \left[\frac{\pi n y}{d} \right], \quad \gamma_{n2}^h = \sqrt{\epsilon k^2 - \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2},$$

везде $n = 0, 1, 2, \dots$, за исключением случая H -волн в области 2, где $n = 1, 2, \dots$

Обычно толщину подложки $2d$ выбирают так, чтобы все γ_n , кроме γ_0 были мнимыми. E -волна с индексом ноль в области 2 соответствует T -волне.

Для того, чтобы найти $\Phi^{e,h}_n(x,z)$ необходимо задать топологию планарного компонента и решить (1.2) с учетом условий на границах ПВ, образующих этот компонент. Однако до всякого решения, исходя только из вида (1.2) можно сделать ряд важных выводов. Для всех запердельных волн $\gamma_n^2 < 0$ и только $\gamma_0^2 > 0$. Следовательно, решение (1.2) для нераспространяющихся волн будет иметь быстро затухающий характер. Если сторонние источники отсутствуют, то единственным местом возбуждения (взаимодействия, связи) собственных волн ПВ является его граница, на которой нарушается регулярность структуры. Таким образом, при любой топологии планарного компонента уравнения (1.2), за исключением случая $n = 0$, описывают поле сосредоточенное вблизи его границы. Нетрудно увидеть, что в такой ситуации только T -волна в области 2 может передавать энергию от одной точки границы ПВ к другой и в конечном счете от внешнего источника к границам ПВ. Иными словами поле в точках удаленных от границы ПВ описывается с точностью до экспоненциально малых слагаемых частным решением (1.2) соответствующим T -волне.

Назовем поле запердельных волн ближним, а поле T -волн дальним, имея ввиду их локализацию относительно границы ПВ. Введем также понятие эффективного размера области, занятого ближним полем ρ_3 (см. рис.1.4), понимая под ней область, в которой сосредоточена основная

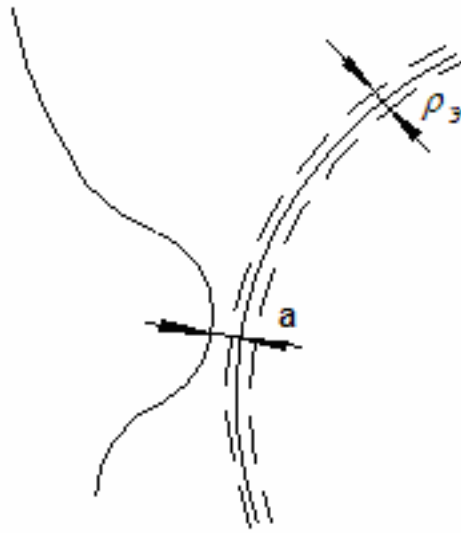


Рис. 1.4

часть его энергии. Из сказанного выше следует, что ближнее поле, возбужденное вблизи одной границы ПВ не "чувствует" присутствия другой границы, если расстояние между ними "а" удовлетворяет неравенству:

$$a > \rho_3. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) не означает, однако, что ближнее поле вообще не меняется от присутствия соседней границы. Оно меняется, но эти изменения обусловлены только изменением дальнего поля. При этом, однако, уравнения, описывающие связь дальнего и ближнего полей, остаются такими же как для уединенной границы. Указанная инвариантность по отношению к свойствам границы означает, что нам достаточно найти для каждого конкретного планарного компонента лишь дальнее поле, после чего ближнее поле может быть сразу восстановлено в силу уже отмеченной инвариантности. Для того, чтобы найти дальнее поле (а в нашем случае оно полностью задается функцией $\Phi_0^e(x,z)$ нам необходимо сформулировать для нее граничную задачу. Дифференциальное уравнение относительно $\Phi_0^e(x,z)$ уже имеется (это уравнение (1.2)). Следовательно, осталось найти только граничные условия.

Для достижения этой цели необходимо решить определенную электродинамическую задачу. Назовем эту задачу ключевой, а структуру, для которой эта задача формулируется - ключевой структурой. Вообще говоря, выбор ключевой структуры не является единственным, поскольку в ходе этого выбора приходится разрешать противоречие между сложностью решения ключевой задачи и точностью полученных граничных условий. Поясним эту мысль на примерах. Наиболее простой геометрией обладает прямолинейная уединенная граница двух ПВ, показанная на рис. 1.5.

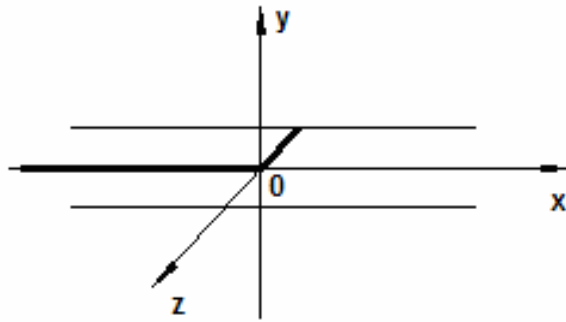


Рис. 1.5

Решение для этого случая приведено в главе 5 настоящей книги. Очевидно, однако, что оно не в состоянии учесть кривизну граничного контура и, следовательно, применение полученных с его помощью граничных условий не будет оправданно для объектов с достаточно малым радиусом кривизны.

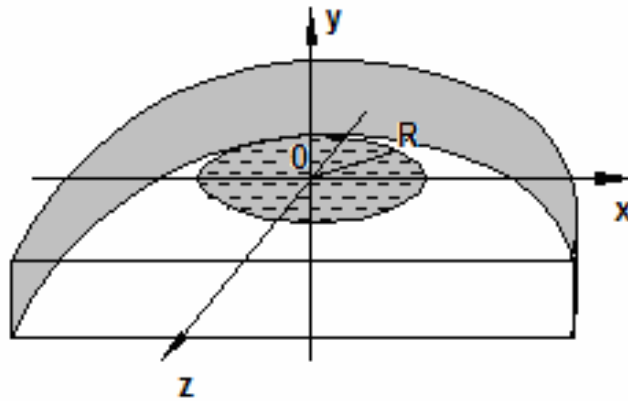


Рис. 1.6

Другая ключевая структура показана на рис. 1.6. Она тоже имеет каноническую геометрию, но с аксиальной симметрией. В этом случае ограничение будет уже не на радиус кривизны, а на скорость его изменения. То есть диапазон объектов, к которым можно применять результаты решения ключевой задачи, расширится. Этот процесс может быть продолжен, например, в направлении учета скорости изменения радиуса кривизны и т.д.

Традиционно в электродинамике отдается предпочтение ключевым структурам с прямолинейной границей. По аналогии с условиями Щукина-Леонтовича, ограничение на радиус кривизны R поверхностей, для которых остаются справедливы результаты, полученные в прямолинейной структуре, может быть записано в следующем виде:

$$R \gg \rho_3. \quad (1.5)$$

Отметим, что учет кривизны скажется только в количественном изменении ряда параметров краевых задач. При этом общая схема их формулировки и решения не зависит от того, была учтена кривизна контура

на этапе вывода граничных условий или нет. Таким образом, эти вопросы можно рассмотреть в общем виде, оставляя учет кривизны граничного контура, а также и все решение ключевой задачи для отдельного анализа. На данном же этапе важна ее принципиальная разрешимость и форма представления решения.

Тем не менее, неравенства (1.4) и (1.5) выражают важные ограничения на круг структур, к которым может быть корректно применен развиваемый подход. Здесь следует сразу оговориться, что элементы, содержащие изломы граничного контура, представляют предмет отдельного анализа. Дело в том, что последнее условие (1.5) к ним отношения не имеет, поскольку в точке излома вообще теряется понятие границы и граничных условий. В то же время угловая область образована двумя прямолинейными отрезками, для которых справедливость граничных условий очевидна. Отмеченное противоречие известно [11] и оно характерно для поверхностей любого вида, в том числе и для идеально проводящих ($E_{\tau} \neq 0$). Это противоречие разрешается путем отдельного анализа поведения поля в угловой области и определения дополнительных ограничений на его поведение (см. известные условия Мейкснера на проводящем ребре). Такой анализ будет представлен ниже. Это позволит нам включить в круг рассматриваемых структур также и те, которые содержат острые кромки, что несомненно расширит возможности нашего метода.

Итак, вернемся к ключевой структуре, показанной на рис. 1.5. Задача о дифракции собственных волн ПВ на обрыве бесконечно тонкой металлизации была неоднократно рассмотрена в литературе [7,9]. Для нас сейчас важно, что она ставилась следующим образом. Из полупространства при $x < 0$ на границу металлизации набегают T -волна ПВ, образованного тремя проводниками. Электрическое поле падающей волны описывается экспонентой:

$$E_y = e^{-j\beta z - j\kappa x}, \quad (1.6)$$

$\kappa = \sqrt{\epsilon k^2 - \beta^2}$, где β - продольное волновое число, задающее в плоскости XOZ угол падения, k - волновое число свободного пространства, ϵ - относительная диэлектрическая проницаемость подложки. Рассеянное поле ищется в виде разложения по собственным волнам ПВ.

Наиболее важная характеристика рассеянного поля - это коэффициент отражения T -волны R , который в общем случае является функцией β ($R=R(\beta)$). Его можно определить как отношение E_y -компонент отраженной и падающей волн:

$$R(\beta) = \frac{E_{y0}}{E_{yn}}. \quad (1.7)$$

Из уравнений Максвелла следует, что компоненты H_x и H_z выражаются через E_y в случае T -волны известными соотношениями:

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (1.8)$$

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$

С помощью (1.1.8) нетрудно найти поверхностный импеданс границы ПВ, связывающий тангенциальные компоненты дальнего поля при $x = 0$:

$$Z = \frac{E_y}{H_z}, \quad (1.9)$$

который равен:

$$Z = -\frac{\omega\mu_a}{\kappa} \frac{1-R}{1+R}. \quad (1.10)$$

В общем случае Z является функцией продольного волнового числа $Z(\beta)$. Соотношения (1.9), (1.10) получены для частного случая возбуждения плоской волной. В общем случае надо взять суперпозицию таких волн с разными β . Тогда первичное поле приобретет следующий вид:

$$E_{\text{уп}} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) e^{-j\beta z - j\kappa x} d\beta, \quad (1.11)$$

где $g(\beta)$ некоторая известная функция, определяющая первичное поле. Вторичное рассеянное поле $E_{\text{увт}}$ выражается через $R(\beta)$:

$$E_{\text{увт}} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\beta) g(\beta) e^{-j\beta z - j\kappa x} d\beta. \quad (1.12)$$

В формулах (1.11) и (1.12) под полем понимается только дальнее поле. Наконец, сумма $E_y = E_{\text{уп}} + E_{\text{увт}}$ задается соотношением:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + R(\beta)) g(\beta) e^{-j\beta z - j\kappa x} d\beta. \quad (1.13)$$

Компонента H_z выражается следующим образом:

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + R(\beta)) Z(\beta)^{-1} g(\beta) e^{-j\beta z - j\kappa x} d\beta. \quad (1.14)$$

Обозначим через $e(\beta)$ спектральную плотность E_y компоненты, а через $h(\beta)$ - H_z компоненты:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} e(\beta) e^{-j\beta z - j\kappa x} d\beta, \quad (1.15)$$

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) e^{-j\beta z - j\kappa x} d\beta,$$

Тогда легко установить из (1.13), (1.14), что

$$e(\beta) = Z(\beta) h(\beta). \quad (1.16)$$

Берем от (1.16) обратное преобразование Фурье:

$$E_y(0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(z - z') H_y(0, z') dz', \quad (1.17)$$

$$Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\beta) e^{-j\beta z} d\beta.$$

Соотношение (1.17) получено для компонент дальнего поля при $x=0$ и является искомым граничным условием. Оно имеет нелокальный характер, поскольку E_y в любой точке z выражается через оператор, применяемый к H_z , заданной на всей границе. Ядро оператора $Z(z - z')$ симметрично относительно точки $z=z'$ и зависит только от разности аргументов.

Нелокальность граничных условий является важнейшим фактором, обуславливающим большинство особенностей рассматриваемых ниже

краевых задач. Поэтому в целом подход, развиваемый в книге получил название метода НГУ.

Может возникнуть вопрос о том какое отношение имеют полученные НГУ (1.17) к граничной задаче для $\Phi^e_0(x,z)$. Действительно, в соотношении (1.17) фигурируют компоненты поля, тогда как $\Phi^e_0(x,z)$ - скалярная функция. В общем случае, то есть тогда когда собственная волна ПВ не является T -волной, связь ее компонент с $\Phi^e_0(x,z)$ не столь очевидна. Однако в нашей ситуации, когда $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ компонента E_y с точностью до множителя совпадает с $\Phi^e_0(x,z)$. Эта константа зависит от нормировки функции $\Psi^e_0(y)$. Пронормируем ее так, чтобы

$$\int_0^d (\Psi_0^e)^2 dy = \frac{1}{2}. \quad (1.18)$$

Из сказанного выше следует, что и компоненты H_x, H_z однозначно связаны с $\Phi^e_0(x,z)$. Нетрудно получить соотношения:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{\sqrt{2d}} \Phi^e_0(x,z), \\ H_x &= \frac{1}{j\omega\mu_a\sqrt{2d}} \frac{\partial}{\partial z} \Phi^e_0(x,z), \\ H_z &= -\frac{1}{j\omega\mu_a\sqrt{2d}} \frac{\partial}{\partial x} \Phi^e_0(x,z). \end{aligned} \quad (1.19)$$

С учетом (1.19) видно, что (1.17) можно понимать как граничные условия для $\Phi^e_0(x,z)$ и ее нормальной производной $\frac{\partial}{\partial x} \Phi^e_0(x,z)$. Не составляет труда также заметить эквивалентность граничной задачи, определяемой уравнениями (1.2), (1.19) и НГУ (1.17) двумерной электродинамической задаче для векторов поля \vec{E}', \vec{H}' , заданных в области, заполненной диэлектриком с проницаемостью равной проницаемости подложки ($\mu = 1$), на границе которой установлены НГУ (1.17), а геометрия этой области полностью совпадает с реальной геометрией полоскового проводника. При этом вектора \vec{E}', \vec{H}' связаны с \vec{E}, \vec{H} , простыми соотношениями:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2d}} \vec{E}', \quad \vec{H} = \frac{1}{\sqrt{2d}} \vec{H}'. \quad (1.20)$$

Таким образом, для дальнего поля можно сформулировать эквивалентную двумерную электродинамическую задачу, решение которой позволит полностью определить на первом этапе дальнее, а затем и ближнее поля. Последнее возможно сделать с помощью ключевой задачи, которая устанавливает связь полей обоих типов на границе ПВ. Следовательно, в рамках принятых приближений имеется полная эквивалентность между трехмерной задачей для реального планарного компонента и двумерной задачей для его модели.

Рассмотрим для примера двумерную модель круглого полоскового резонатора и соответствующую ей граничную задачу (см. рис. 1.7). Согласно схеме описанной выше, круглому полосковому резонатору ставится в соответствие диэлектрический цилиндр с проницаемостью равной проницаемости подложки. Поля в нем не зависят от координаты y , а на образующей цилиндра установлены НГУ, радиус цилиндра равен радиусу полоскового проводника. Здесь мы перешли от прямолинейной границы к искривленной. Запишем в явном виде НГУ для этого случая. Введем на границе локальную систему координат n, u, s , как это показано на рис. 1.7. Пусть нормаль всегда будет направлена из области 1 в область 2, то есть будет внешней относительно области 1. Тогда НГУ переписутся следующим образом:

$$E_s(0, s) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(s - s') H_y(0, s') ds' . \quad (1.21)$$

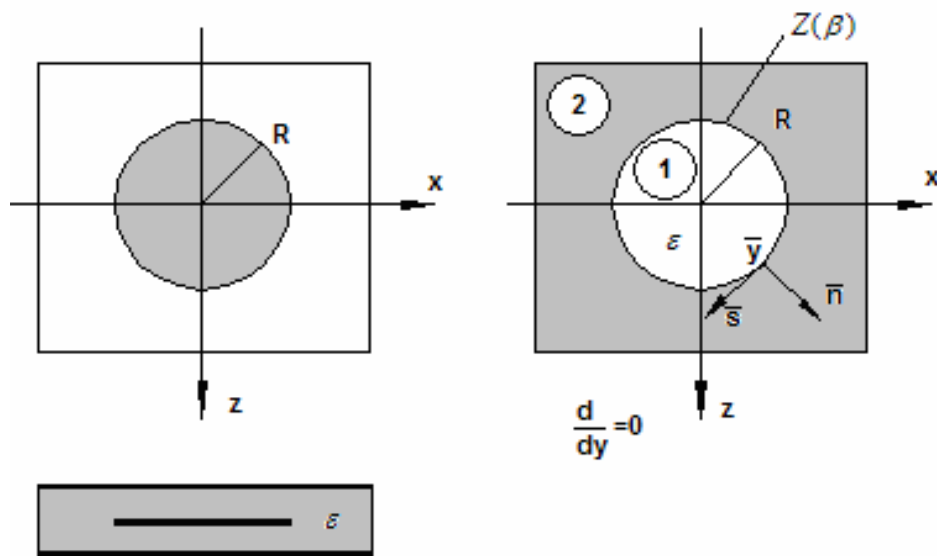


Рис. 1.7

Интегрирование в (1.21) ведется вдоль граничного контура C по всей его длине. Построение модели планарного компонента с произвольной топологией осуществляется совершенно аналогично.

Основную специфику в решение обсуждаемых двумерных задач вносит нелокальность граничных условий. Специфика эта столь существенна, что оказалось необходимым не только разработать методы решения граничных задач для частных структур, но и вернуться к проблемам общего характера, связанных с энергетическими соотношениями, соотношениями взаимности и т.д. Все эти вопросы будут рассмотрены в следующих разделах. Сейчас же мы отметим некоторые важные свойства функции $Z(\beta)$, входящей в НГУ, которые будут существенны для дальнейшего изложения.

Прежде, чем перейти непосредственно к анализу $Z(\beta)$, отметим одно интересное свойство двумерной модели. Оказывается, что она эквивалентна реальной трехмерной структуре не только в смысле тождества распределений поля в плоскости XOZ , но и с точки зрения некоторых энергетических характеристик. Так, мощность, переносимая через цилиндрическую поверхность с произвольной образующей перпендикулярной плоскости XOZ и имеющую по оси Oy размер, превышающий $2d$, совпадает с мощностью, переносимой через контур, имеющий форму образующей в двумерной модели. Этот факт объясняется тем, что отличие двумерной модели и реальной структуры при определении энергетических характеристик усредненных по сечению ПВ (вдоль Oy) сказывается только в интегрировании функции $\Psi^2(y)$, а этот интеграл, согласно (1.18) равен единице. Поскольку он входит везде в качестве множителя, то и отличие в двух результатах отсутствует.

Теперь вернемся собственно к функции $Z(\beta)$. Мы остановимся на ее свойствах, связанных с взаимностью структуры, ее недиссипативностью и отсутствием других распространяющихся волн, кроме T -волны. Все приводимые результаты могут быть доказаны достаточно строго с помощью известного /7,9/ решения ключевой задачи. Однако, мы не стали этого делать, так как этот анализ весьма громоздок, а получаемые в ходе его соотношения достаточно очевидны и могут быть установлены на основе простых физических рассуждений и аналогий.

Итак, взаимность. В данном случае она выражается в четности функции $Z(\beta)$:

$$Z(-\beta) = Z(\beta),$$

которая следует из четности $R(\beta)$. Здесь имеется полная аналогия с теорией цепей СВЧ. Соотношение $Z(-\beta)=Z(\beta)$, впрочем, и без этого очевидно в силу симметрии структуры относительно плоскости YOX . Более подробно с общими закономерностями дифракции волн в продольно однородных структурах можно ознакомиться в /12/.

Отсутствие диссипативных потерь приводит к тому, что величина $Z(\beta)$ чисто мнимая:

$$Z(\beta) = jX(\beta).$$

Наконец, третье, наименее очевидное свойство связано с отсутствием распространяющихся высших типов волн в ПВ при $x > 0$ и $x < 0$. Оказывается, что в этом случае $Z(\beta)$ не имеет точек ветвления на действительной оси комплексной переменной β . Все точки ветвления лежат на мнимой оси. Значения β в этих точках выражаются следующими соотношениями:

$$\beta_n = \begin{cases} \pm j \sqrt{\left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 - \epsilon k^2}, n = 1, 2, \dots \\ \pm j \sqrt{\left(\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}{d}\right)^2 - \epsilon k^2}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.22)$$

Для интерпретации этого факта можно привлечь известную задачу о дифракции плоской волны на границе раздела двух сред. Пока волновые числа в обеих средах действительные, то входной импеданс их границы имеет точку ветвления (условимся, что мы смотрим на границу из среды с проницаемостью ϵ , в то время, как другое полупространство имеет проницаемость $\bar{\epsilon}$; соответственно, и импеданс мы определяем со стороны среды с проницаемостью ϵ) при $\beta^2 = (k\sqrt{\epsilon})^2$. Если мы будем уменьшать $\bar{\epsilon}$, то точки ветвления будут двигаться к началу координат. Наконец, когда $\bar{\epsilon}$ станет меньше нуля, то они перейдут на мнимую ось. Случай $\bar{\epsilon} < 0$ соответствует полупространству, заполненному плазмой. При $\bar{\epsilon} < 0$ волновое число становится мнимым. Проводя аналогию с нашей ситуацией, мы также можем заключить, что при γ_n мнимых для всех волн, кроме T -волны, импеданс, определенный для T -волны, не будет иметь точек ветвления при $\text{Im}\beta = 0$.

Отсутствие точек ветвления на действительной оси является очень важным для дальнейшего изложения фактом. Дело в том, что функция $Z(\beta)$ в любом случае определяется численно, то есть в известной степени приближенно. Поэтому очень удобно иметь для нее аппроксимацию, позволяющую упростить расчеты. Наличие априорной информации о поведении функции позволяет более рационально осуществить процедуру аппроксимации. Вид $Z(\beta)$ при $\text{Im}\beta = 0$ особенно важен, так как функция $Z(z-z')$ определяется через интегрирование $Z(\beta)$ по действительной оси, а точнее, по контуру, лежащему вблизи ее (имеется в виду обход возможных особенностей у $Z(\beta)$ при $\text{Im}\beta = 0$). Таким образом, если нам удастся хорошо аппроксимировать $Z(\beta)$ в некоторой полосе $-j\epsilon \leq \beta \leq j\epsilon$, то автоматически мы получим хорошую аппроксимацию для $Z(z-z')$, входящей в НГУ. Известно,

что функцию, не имеющую точек ветвления на действительной оси, можно сколь угодно точно описать мероморфной функцией [13], то есть функцией, имеющей в качестве своих особенностей только нули и полюса. Число таких особенностей может быть неограниченно. В этом случае аппроксимация может обеспечить равномерное приближение на всей действительной оси, включая и бесконечно удаленные точки. Наоборот, когда число особенностей ограничено (аппроксимация дробно-рациональной функцией), приближение достигается на некотором интервале. Наибольшая погрешность возникает, как правило, при описании поведения $Z(\beta)$ на бесконечности.

В любом случае, переход от функции с точками ветвления к функции, их не имеющей, включает в себе принципиальный момент. Фактически мы переходим от открытой структуры к закрытой. Возникает вопрос: какое отношение имеет аппроксимация $Z(\beta)$ к характеру структуры, которую мы стремимся моделировать? Оказывается, что связь самая непосредственная. Мы уже отмечали, что все волны в ПВ, образующих полосковые элементы, кроме Т-волны не распространяются, энергии не переносят, и поэтому поле такого элемента заперто в пределах области, ограниченной внутренним проводником. Легко видеть, что в его характере наблюдаются все признаки поля закрытой структуры. Тем не менее, формально рассматривая полосковый элемент, легко увидеть, что он не ограничен в плоскости XOZ , если не ограничена подложка и, следовательно, его поле распределено во всем пространстве, если, конечно, не принимать во внимание стремительное уменьшение его амплитуды при удалении от границы металлизации. Неограниченность области, занятой полем уже характерно для открытой структуры. Описанное двойственное поведение поля нашло свое отражение в свойствах функции $Z(\beta)$, которая с одной стороны имеет точки ветвления, как в открытой структуре, а с другой - все они лежат на мнимой оси, что открытым структурам совсем не свойственно. Поэтому правильно рассматривать полосковые элементы как квазизакрытые.

Устранение точек ветвления из функции $Z(\beta)$ окончательно выводит из анализа все особенности, связанные с открытостью полоскового элемента. Тем не менее, это не приводит к искажению результатов для дальнего поля, которому, как уже отмечалось выше, важно только поведение $Z(\beta)$ при $\text{Im}\beta=0$. Необходимо помнить, что все вышесказанное относится только к суммарному полю, то есть полю, полученному в результате интегрирования по параметру β . Если же мы возьмем отдельную спектральную составляющую, соответствующую β с большой мнимой частью, то для нее все выводы, полученные после аппроксимации $Z(\beta)$, окажутся несправедливыми. Это не мешает, однако, надеяться на корректное описание полного поля, образованного “неправильными” спектральными компонентами.

Суммируя сказанное выше, мы можем сделать вывод о том, что с помощью НГУ мы пришли от трехмерной векторной задачи для открытой структуры к двумерной скалярной задаче для закрытой структуры. Очевидно,

что мы совершили этот переход, полагая, что решение последней будет значительно проще.

В заключение раздела 1.1 мы рассмотрим, так называемые, элементы связи и модифицируем для них метод НГУ. До сих пор мы предполагали, что неравенство (1.4) выполняется. Таким образом, мы исключали из анализа близко расположенные полосковые структуры. Не составляет труда, однако, увидеть, что они широко используются в технике СВЧ, когда возникает необходимость организовать связь между двумя элементами. В этом случае металлизации оказываются разделенными зазором (щелью), размеры которого, как правило, много меньше длины волны. По аналогии с уединенной границей ПВ рассмотрим прямолинейную щель в металлизации (рис. 1.8) и установим НГУ для дальнего поля в такой структуре. Их можно будет использовать, не выходя за рамки построенной двумерной модели, в которой появится дополнительный элемент: поверхность с новыми НГУ (очевидно двусторонними).

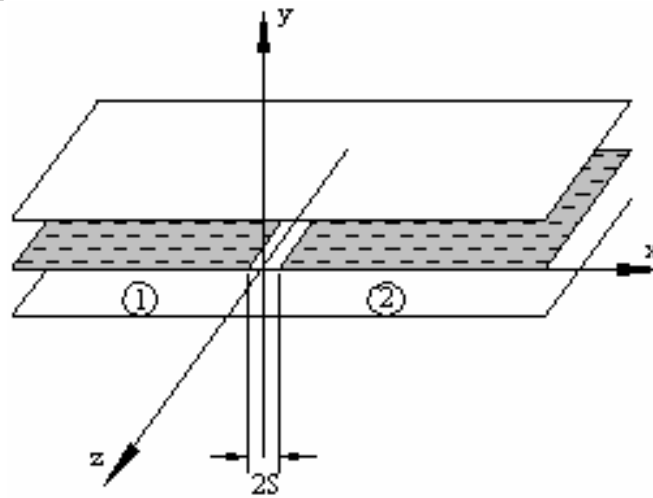


Рис. 1.8

Будем действовать по аналогии со случаем уединенной границы. Рассмотрим наклонное падение T -волны из области $x < 0$ на узкую щель. По-прежнему считаем, что такая задача может быть решена (см. например /14/), а ее решение представлено в виде матрицы рассеяния. Считаем, что падающие волны - это волны, распространяющиеся к щели, а отраженные - от нее. Присвоим волнам при $x < 0$ индекс 1, а при $x > 0$ - 2. Нормировка их амплитуд по-прежнему значения не имеет, так как тип волны при дифракции не меняется, и в определении элементов матрицы рассеяния можно использовать отношение компонент электрического поля E_y . С учетом взаимности, симметрии и отсутствия потерь матрица рассеяния S имеет следующий вид:

$$S = \begin{pmatrix} jR & T \\ T & jR \end{pmatrix}.$$

Считаем, что отсчетная плоскость размещена при $x=0$. Кроме перечисленных выше свойств структуры (взаимность, симметрия и т.д.) мы можем еще использовать условие

$$S \ll \lambda, \quad (1.23)$$

выражающее сосредоточенный характер нерегулярности. Известно, что в этом случае элементы матрицы S связаны дополнительными соотношениями /14/. Поскольку в щели возбуждаются магнитные токи, порождающие разрыв электрического поля (напряжения) и оставляющие непрерывным магнитное поле (ток), то с позиции теории цепей СВЧ такая нерегулярность эквивалентна последовательно включенному сопротивлению (при $\beta=0$ оно имеет емкостной характер /15/). Для R и T тогда можно записать:

$$1 - jR = T \quad (1.24)$$

Дальнее поле при $x < 0$ и $x > 0$ является суммой полей падающих и отраженных волн. При $x = 0$ имеем:

$$E_{y1} = E_{yп} (1 + jR), \quad E_{y2} = T E_{yп}, \quad (1.25)$$

$$H_{z1} = \frac{\kappa}{\omega\mu_a} (1 - jR) E_{yп}, \quad H_{z2} = \frac{\kappa}{\omega\mu_a} T E_{yп},$$

$\kappa = \sqrt{\epsilon k^2 - \beta^2}$, $E_{yп}$ -амплитуда падающей волны. Из (1.25) и (1.24) следует, что $H_{z1} = H_{z2}$. Далее вычислим разность $E_{y1} - E_{y2}$ и выразим $E_{yп}$ через H_z ($H_{z1} = H_{z2} = H_z$). В результате получаем соотношение

$$H_{z1} = H_{z2}, \quad (1.26)$$

$$E_{y1} - E_{y2} = \frac{\omega\mu_a}{\kappa} \frac{1 + jR - T}{T} H_z,$$

или

$$E_{y1} - E_{y2} = \frac{\omega\mu_a}{\kappa} \frac{2jR}{1 - jR} H_z.$$

Формулы (1.26) являются искомыми граничными условиями для случая фиксированного β . Если обозначить:

$$Z_s(\beta) = \frac{\omega\mu_a}{\kappa} \frac{2jR}{1-jR}, \quad (1.27)$$

то они приобретут более привычный вид:

$$E_{y1} - E_{y2} = Z_s(\beta) H_z,$$

$$H_{z1} = H_{z2} = H_z.$$

Аналогично уже проделанному для уединенной границы переходу к полному полю можно получить НГУ для элемента связи:

$$H_{z1}(z,0) = H_{z2}(z,0),$$

$$E_{y1}(z,0) - E_{y2}(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(z-z') H_y(0, z') dz', \quad (1.28)$$

$$Z_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_s(\beta) e^{-j\beta z} d\beta.$$

Наконец, запишем НГУ для случая изогнутой щели. Введем локальную систему координат NYS (рис. 1.9). Нормаль направлена из среды 1 в среду 2. Тогда имеем:

$$E_{y1}(s) - E_{y2}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_s(s-s') H_y(0, s') ds', \quad (1.29)$$

$$H_{s1}(s) = H_{s2}(s).$$

Относительно $Z_s(\beta)$ можно сделать все те же утверждения, что и для $Z(\beta)$. Эта функция четная по β , чисто мнимая при отсутствии диссипативных потерь и не имеет на действительной оси переменной β точек ветвления. Поэтому для нее можно использовать аппроксимацию мероморфной функцией.

Чтобы окончательно закончить с переходом от трехмерных задач к двумерным, приведем несколько примеров двумерных моделей для полосковых элементов. Один из наиболее простых - это регулярная линия, показанная на рис.1.10. Ее модель - это пластина, имеющая толщину, равную

ширине полоски W и диэлектрическую проницаемость ε . На поверхностях пластины установлены НГУ (1.17).

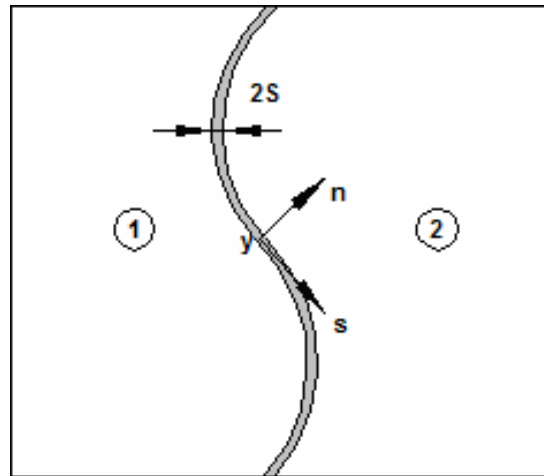


Рис. 1.9

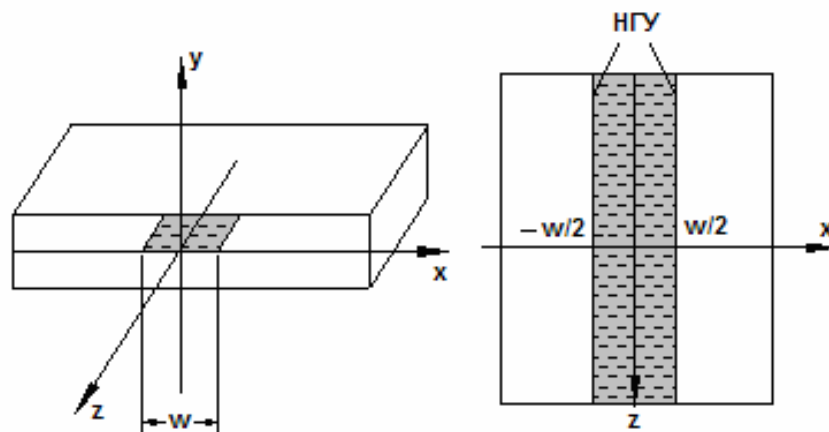


Рис. 1.10

Более сложный элемент - регулярные связанные линии (рис. 1.11). Их модель содержит уже два диэлектрических слоя толщиной $(W+S)$, разделенных бесконечно тонкой пленкой, на которой установлены граничные условия (1.28). На внешних поверхностях слоев выполняются другие НГУ (1.17). Увеличение толщины слоев по сравнению с шириной полосковых проводников связано с тем, что НГУ (1.28) установлены в центре щели.

Аналогично можно построить двумерные модели для других более сложных элементов. Они будут рассмотрены в разделах 1.3, 1.4. В следующем разделе мы сформулируем некоторые теоремы электродинамики для структур, содержащих поверхности с НГУ.

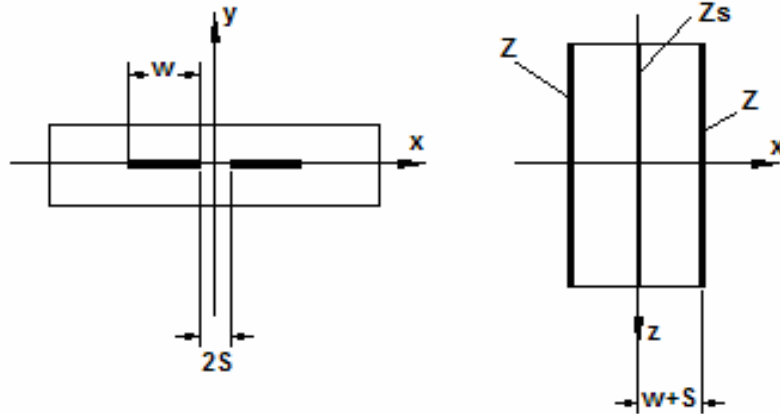


Рис. 1.11

1.2 Основные теоремы электродинамики для структур с НГУ

Применение НГУ как для анализа интегральных структур (раздел 1.1), так и в других случаях порождает новый класс граничных задач электродинамики. Важную роль в электродинамике играет ряд теорем, таких как теорема Умова – Пойнтинга, лемма Лоренца, теорема взаимности, теорема единственности решения и т.д. Наш интерес к этим основам теории поля обусловлен тем, что все они были получены для структур с локальными поверхностями и их использование в новой ситуации без коррекции не может быть оправданно. Ниже будет показано, что ряд этих теорем имеет существенную специфику в структурах с НГУ.

Первая из рассматриваемых теорем - это теорема об активной мощности. Обратимся к прямолинейной границе двух ПВ. Она показана на рис. 1.12. Выделим (см. рис. 1.12) параллелепипед $ABCDEFGH$ и применим к нему теорему об активной мощности [16], предполагая при этом, что сторонние источники отсутствуют, равно как и диссипативные потери. Применение данной теоремы позволяет получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_S (\vec{\Pi} \vec{n}) ds &= 0, \\ \operatorname{Re} \int_{S_{ABCD}} (\vec{\Pi}(x, y, z + \Delta z) \vec{n})_z dx dy - \operatorname{Re} \int_{S_{EFGH}} (\vec{\Pi}(x, y, z) \vec{n})_z dx dy + \\ \operatorname{Re} \int_{S_{DCGH}} (\vec{\Pi}(x_2, y, z))_x dz dy - \operatorname{Re} \int_{S_{ABFE}} (\vec{\Pi}(x_1, y, z))_x dz dy &= 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

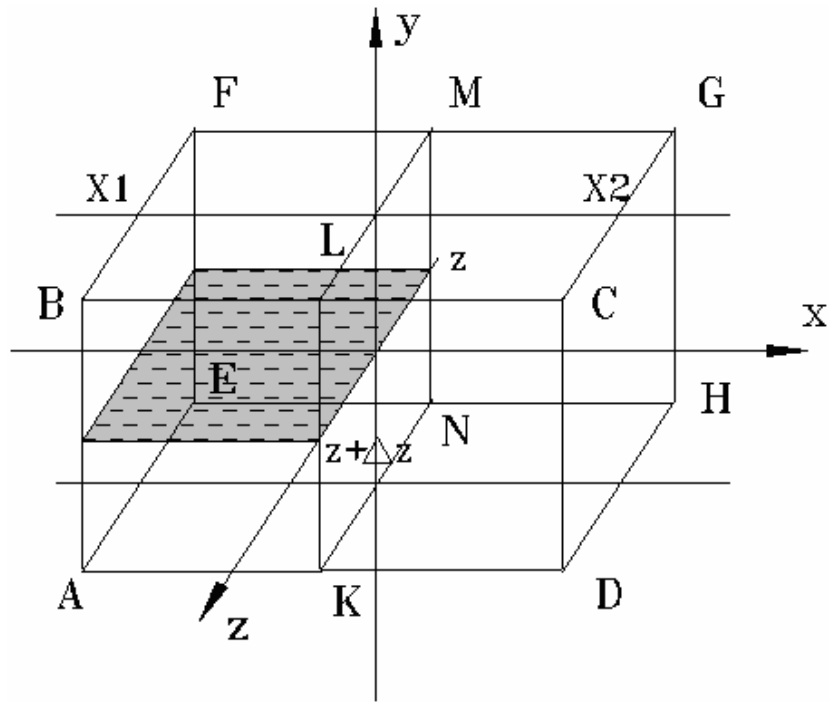


Рис. 1.12

Проделаем с (1.30) следующие преобразования. Устремим Δz к нулю. Далее будем считать, что x_1 и x_2 расположены столь далеко от границы ПВ, что на гранях $DCGH$ и $ABFE$ можно считать полное поле равным дальнему. Поэтому можно положить, что

$$\begin{aligned} \Pi_x(x_1, y, z) &= \Pi_{xd}(x_1, y, z), \\ \Pi_x(x_2, y, z) &= 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

так как при $x > 0$ дальнее поле равно нулю. В результате получаем:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Re} \left(\int_{S_{ABCD}} \Pi_z(x, y, z) dx dy \right) - \operatorname{Re} \left(\int_{S_{ABEF}} \Pi_{xd}(x_1, y, z) dy \right) = 0. \quad (1.32)$$

Применим теперь к параллелепипеду $ABFEKLMN$ теорему об активной мощности, записав ее только относительно дальнего поля. Нетрудно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \operatorname{Re} \left(\int_{S_{ABLK}} \Pi_{z\partial}(x, y, z) dx dy \right) - \operatorname{Re} \left(\int_{S_{ABEF}} \Pi_{x\partial}(x_1, y, z) dy \right) + \\ & + \operatorname{Re} \left(\int_{S_{KLMN}} \Pi_{x\partial}(0, y, z) dy \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Поскольку при $x > 0$ дальнее поле отсутствует, то в (1.33) интеграл по S_{ABLK} равен интегралу по S_{ABCD} . Подставим (1.33) в (1.32):

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Re} \left(\int_{S_{ABCD}} (\Pi_z(x, y, z) - \Pi_{z\partial}(x, y, z)) dx dy \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{S_{KLMN}} \Pi_{x\partial}(0, y, z) dy \right). \quad (1.34)$$

В левой части (1.34) стоит величина, равная удвоенной разности мощностей, полного и дальнего полей, переносимой вдоль оси Oz , то есть мощности, переносимой вдоль границы ПВ ближним полем $P_{z\bar{0}}$. Перепишем (1.34) с учетом нового обозначения:

$$\frac{dP_{z\bar{0}}}{dz} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{S_{KLMN}} \Pi_{x\partial}(0, y, z) dy \right). \quad (1.35)$$

Перейдем теперь в (1.35) от полей реальной структуры к полям двумерной модели. Это несложно сделать с учетом того, что они отличаются лишь постоянным множителем (см. (1.18) - (1.20)). Интегрирование в (1.35) позволяет получить следующий результат:

$$\frac{dP_{z\bar{0}}}{dz} = \frac{1}{2} \Pi_x(0, z), \quad (1.36)$$

где под $\Pi_x(0; z)$ понимается уже вектор Пойнтинга поля двумерной модели.

Важность (1.36) состоит в том, что это соотношение связывает энергетические характеристики поля модели с энергетическими характеристиками ближнего поля, которое казалось было полностью исключено из анализа. Тем не менее (1.36) позволяет, не вычисляя этого поля определить его мощность исключительно через дальнее поле.

Проведем еще несколько преобразований с (1.36). Это соотношение является дифференциальным уравнением относительно $P_{z\bar{0}}$. Его решение

можно получить, если известно значение $P_{z\bar{0}}$ хотя бы в одной точке. Проще всего конечное условие задать при $|x| \rightarrow \infty$. Очевидно, если источник имеет конечную мощность, то $P_{z\bar{0}} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, равно как и $\lim(\Pi_x(0; z)) = 0$. Тогда можно записать для $P_{z\bar{0}}$ следующее:

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^z \Pi_x(0, z) dz \right). \quad (1.37)$$

Раскроем выражение для $\Pi_x(0; z)$ с помощью соотношений (1.15), то есть используем представление компонент поля в виде интегралов Фурье:

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e(\alpha) h(\beta) \Phi(\beta) e^{j(\beta-\alpha)z} d\alpha d\beta dz \right)^*.$$

Используем далее равенство (1.17).

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Z(\beta) h(\alpha) h(\beta) e^{j(\beta-\alpha)z} + \bar{Z}(\beta) h(\beta) h(\alpha) e^{-j(\beta-\alpha)z}) d\alpha d\beta dz \right)^*. \quad (1.38)$$

При выводе (1.38) мы применили соотношение $\operatorname{Re}(x) = \frac{x + x^*}{2}$. Теперь возьмем в (1.38) интеграл по z , понимая его как обобщенную функцию:

$$\int_{-\infty}^z e^{j(\beta-\alpha)z} dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^z e^{j(\beta-\alpha)z + \delta z} dz = \frac{e^{j(\beta-\alpha)z}}{j(\beta-\alpha)}, \quad (1.39)$$

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Z(\beta) h(\alpha) h(\beta) e^{j(\beta-\alpha)z} - \bar{Z}(\beta) h(\beta) h(\alpha) e^{-j(\beta-\alpha)z}) d\alpha d\beta \right)^*.$$

Поменяем во втором слагаемом в (1.39) переменные интегрирования α на β и наоборот. Наконец, учтем, что $Z(\beta)=jX(\beta)$ и, соответственно, $Z(\beta)=-jX(\beta)$. Окончательно получаем:

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X(\beta) - X(\alpha)}{\beta - \alpha} |h(\beta)|^2 \right) d\alpha d\beta \right) \quad (1.40)$$

Формула (1.40) позволяет установить связь между активной мощностью, переносимой ближним полем и нелокальностью граничных условий. Из (1.40) видно, что $P_{z\bar{0}} \neq 0$ лишь в случае $X(\beta)=X(\alpha)$, то есть тогда, когда $X(\beta)=\text{const}$. Однако, при этом условии функция $Z(z-z')$, являющаяся ядром оператора в НГУ вырождается в дельта-функцию, а сами граничные условия становятся локальными, то есть связывающими компоненты поля в одной и той же точке.

Еще более зримо указанная связь видна в частном случае, соответствующем гармонической зависимости поля вдоль оси Oz. Иными словами

$$E_y = E_0 e^{-j\beta_0 z}, \quad e(\beta) = e_0 \delta(\beta - \beta_0), \quad h(\beta) = h_0 \delta(\beta - \beta_0)$$

С учетом соотношения получаем:

$$P_{z\bar{0}} = |h_0|^2 \frac{dX(\beta_0)}{d\beta} \frac{1}{4}, \quad (1.41)$$

Из (1.41) хорошо видно, что при $X(\beta)=\text{const}$ $P_{z\bar{0}}=0$.

Соотношения (1.37), (1.40) выражают теорему об активной мощности для объема, содержащего нелокальную границу. Совершенно аналогично можно получить энергетические соотношения для элемента связи. Мы приведем их без подробного вывода:

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_{-\infty}^z (\Pi_x(-0, z) - \Pi_x(0, z)) dz \right), \quad (1.42)$$

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X_s(\beta) - X_s(\alpha)}{\beta - \alpha} h(\alpha)^* h(\beta) e^{j(\beta - \alpha)z} \right) d\alpha d\beta \right), \quad (1.43)$$

$$P_{z\delta} = |h_0|^2 \frac{dX_S(\beta_0)}{d\beta} \frac{1}{4}, \quad (1.44)$$

где $h(\beta)$ - это спектральная плотность функции $H_z(z)$. Соотношение (1.44) записано для случая гармонической зависимости поля от z .

Перейдем далее к выводу еще одного очень важного квадратичного соотношения для объемов, содержащих поверхности с НГУ - Леммы Лоренца. Для этого вспомним ее общую формулировку [17]:

$$\int_S \bar{Q} \bar{n} ds = 0, \quad \bar{Q} = \bar{E}_1 \times \bar{H}_2 - \bar{E}_2 \times \bar{H}_1. \quad (1.45)$$

В (1.45) интегрирование ведется по поверхности некоторого объема, внутри которого отсутствуют сторонние источники. Индексы 1,2 соответствуют двум полям, порожденным независимыми неодинаковыми источниками, находящимися за пределами объема. Нормаль n - внешняя по отношению к рассматриваемому объему. Запишем (1.45) относительно параллелепипеда $ABCDEFGH$ (см. рис. 1.12):

$$\begin{aligned} & \int_{S_{ABCD}} (Q_z(x, y, z + \Delta z)) dx dy - \int_{S_{EFGH}} (Q_z(x, y, z)) dx dy + \\ & + \int_{S_{DCGH}} (Q_x(x_2, y, z)) dz dy - \int_{S_{ABFE}} (Q_x(x_1, y, z)) dz dy = 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны уже использованным при выводе энергетических соотношений. Затем полагаем, что при x_1 и x_2 :

$$Q_x(x_1, y, z) = Q_{x\partial}(x_1, y, z), \quad Q_x(x_2, y, z) = 0.$$

В результате имеем:

$$\frac{d}{dz} \left(\int_{S_{ABCD}} Q_z(x, y, z) dx dy \right) - \left(\int_{S_{ABFE}} Q_{x\partial}(x_1, y, z) dy \right) = 0. \quad (1.47)$$

Далее применяем лемму Лоренца отдельно к дальнему полю. Повторение несложных преобразований приводит к следующему соотношению:

$$\frac{d}{dz} \left(\int_{S_{ABCD}} (Q_z(x, y, z) - Q_{z\partial}(x, y, z)) dx dy \right) = \left(\int_{S_{KLMN}} Q_{x\partial}(0, y, z) dy \right). \quad (1.48)$$

Обозначим $q_{z\partial} = Q_z(x, y, z) - Q_{z\partial}(x, y, z)$. Получаем из соотношения (1.48) с учетом нового обозначения:

$$\frac{dq_{z\partial}}{dz} = \int_{S_{ABFE}} Q_{x\partial}(0, y, z) dy. \quad (1.49)$$

Перейдем в (1.49) от дальнего поля к полю двумерной модели. Этот переход полностью аналогичен уже рассмотренному для вектора Пойнтинга. Если через $Q(x, z)$ обозначить $\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1$, где \vec{E}, \vec{H} уже поля двумерной модели, то (1.49) переписывается следующим образом:

$$\frac{dq_{z\partial}}{dz} = Q_x(z). \quad (1.50)$$

Решая (1.50) относительно $q_{z\partial}$, получаем:

$$q_{z\partial} = \int_{-\infty}^z Q_x(z) dz. \quad (1.51)$$

Подставим далее в (1.51) выражения для компонент поля в виде интегралов Фурье:

$$q_{z\partial} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_1(\beta)h_2(\alpha) - e_2(\beta)h_1(\alpha)}{j(\alpha + \beta)} e^{-j(\alpha+\beta)z} d\alpha d\beta.$$

При выводе последнего равенства был взят интеграл по z . Выразим $h_{1,2}(\alpha)$ через $e_{1,2}(\alpha)$ с помощью (1.17) и учтем, что $Z(\alpha) = jX(\alpha)$:

$$q_{z\partial}(z) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1(\beta)h_2(\alpha)X(\beta) - h_2(\beta)h_1(\alpha)X(\alpha)}{j(\alpha + \beta)} e^{-j(\alpha+\beta)z} d\alpha d\beta.$$

Наконец поменяем местами переменные интегрирования во втором слагаемом и получим искомое соотношение:

$$q_{z\bar{6}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1(\beta)h_2(\alpha)(X(\beta) - X(\alpha))}{(\alpha + \beta)} e^{-j(\alpha+\beta)z} d\alpha d\beta. \quad (1.52)$$

Если e_1 и e_2 соответствуют двум решениям с гармоническими зависимостями поля от z :

$$e_1(\beta) = e_1 \delta(\beta - \beta_0), h_1(\beta) = h_1 \delta(\beta - \beta_0),$$

$$e_2(\beta) = e_2 \delta(\beta - \beta_0), h_2(\beta) = h_2 \delta(\beta - \beta_0),$$

то

$$q_{z\bar{6}} = h_1 h_2 \frac{X(\alpha_0) - X(\beta_0)}{\alpha_0 + \beta_0} e^{-j(\alpha_0 + \beta_0)z}. \quad (1.53)$$

Следует учесть, что $X(\alpha)$ четная функция своего аргумента. Поэтому при $\alpha_0 \rightarrow -\beta_0$ (1.53) может быть выражено через производную от $X(\alpha)$:

$$q_{z\bar{6}} = h_1 h_2 \frac{dX(\alpha_0)}{d\alpha}. \quad (1.54)$$

Соотношения (1.51)-(1.54) являются разными формулировками леммы Лоренца для двумерных структур, содержащих нелокальные границы. Аналогично могут быть получены соотношения, выражающие лемму Лоренца для элементов связи. Приведем их без вывода:

$$q_{z\bar{6}}(z) = \int_{-\infty}^z (Q_x(-0, z) - Q_x(0, z)) dz,$$

$$q_{z\bar{6}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1(\beta)h_2(\alpha)(X_s(\beta) - X_s(\alpha))}{(\alpha + \beta)} e^{-j(\alpha+\beta)z} d\alpha d\beta, \quad (1.55)$$

$$q_{z\bar{6}}(z) = h_1 h_2 \frac{X_s(\alpha_0) - X_s(\beta_0)}{\alpha_0 + \beta_0} e^{-j(\alpha_0 + \beta_0)z},$$

$$q_{z\bar{0}}(z) = h_1 h_2 \frac{dX_s(\alpha_0)}{d\alpha}.$$

Чтобы завершить этот этап разговора о квадратичных соотношениях отметим, что их формулировка для искривленной границы не составляет труда. Данный переход можно совершить, вводя локальную систему координат n, s (см. вывод НГУ) и заменяя z на s , x на n .

Полученные результаты позволяют сделать важные выводы о свойствах полей в двумерной модели, а именно об их поведении непосредственно на граничном контуре. Рассмотрим контур C , охватывающий участок нелокальной границы (см. рис. 1.13). Попытаемся применить к нему, например теорему об активной мощности. Возникает,

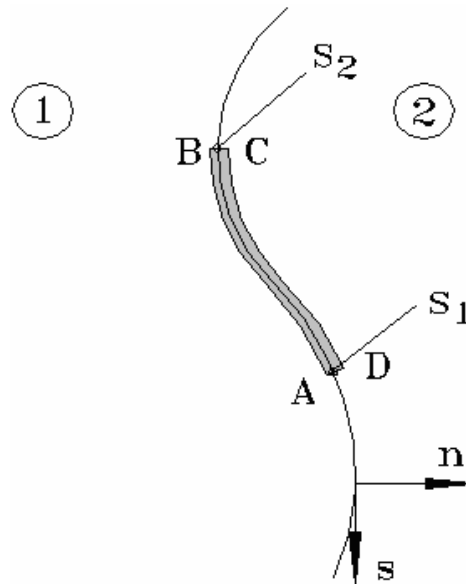


Рис. 1.13

однако, вопрос о поведении полей на отрезках BC и AD . Действительно, уравнения Максвелла, описывающие вектора \vec{E}, \vec{H} справедливы во всех точках пространства за исключением, вообще говоря, точек границы. Поэтому перед нами может встать вопрос о значении вектора Пойнтинга при $n = 0$. Он будет актуальным только в том случае, если интеграл от $\Pi_s(n)$ взятый по отрезку BC (AD) даст конечный результат. Это возможно если $\Pi_s(n)$ при $n \rightarrow 0$ ведет себя как дельта функция $\delta(n)$, поскольку длины отрезков BC и AD бесконечно малы.

Если мы, тем не менее, предположим, что для контура $ABCD$ теорема об активной мощности выполняется, то тогда справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& \int_{AD} \operatorname{Re}(\Pi_s(s_1, n)) dn - \int_{BC} \operatorname{Re}(\Pi_s(s_2, n)) dn = \\
& = \int_{AB} \operatorname{Re}(\Pi_n(s, -0)) ds - \int_{CD} \operatorname{Re}(\Pi_n(s, 0)) ds.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Поскольку при $n > 0$ поле равно нулю, то $\Pi_n(s, 0) = 0$. Далее отнесем точку s_2 (отрезок BC) к минус бесконечности ($s_2 \rightarrow -\infty$) так, чтобы можно было положить $\Pi_s(s_2, n) = 0$. Тогда (1.56) приобретет новый вид:

$$\int_{AD} \operatorname{Re}(\Pi_s(s_1, n)) ds = \int_{-\infty}^{s_1} \operatorname{Re}(\Pi_n(s, -0)) ds. \tag{1.57}$$

Из (1.57) видно, что интеграл от $\Pi_s(s_1, n)$ по бесконечно малому интервалу AD не равен нулю, так как интеграл в правой части нулю не равен (он пропорционален P_{s_6}). Следовательно, нам ничего не остается как допустить, что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \Pi_s(s, n) = \delta(n) \int_{-\infty}^{s_1} \operatorname{Re}(\Pi_n(s, -0)) ds. \tag{1.58}$$

Итак мы пришли к тому, что распространение теоремы об активной мощности на контура, охватывающие участки границы с НГУ требует доопределения тангенциальной к границе компоненты вектора Пойнтинга согласно (1.58).

Совершенно аналогично попытка установить лемму Лоренца для контура C приводит нас к доопределению $Q_s(s, n)$ при $n = 0$:

$$Q_s(s, n) = \delta(n) \int_{-\infty}^{s_1} (Q_s(s, -0)) ds. \tag{1.59}$$

Можно относиться к полученным соотношениям с разных позиций. Первая состоит в том, что они представляют собой удобный формальный прием, облегчающий применение обсуждаемых теорем к контурам, охватывающих участок границы с НГУ. Действительно, если мы хотим рассмотреть контур C , показанный на рис. 1.14, то мы можем вместо него записать теорему об активной мощности или лемму Лоренца для двух контуров C_1 и C_2 . Применение к ним этих теорем не вызывает вопросов, так как ни C_1 ни C_2 границу не пересекают. Легко убедиться, что интегралы по

участкам контуров C_1 и C_2 , расположенным вдоль границы окажутся в точности равными интегралам по бесконечно малым участкам контура C , пересекающим границу, если мы будем использовать для их вычисления (1.58), (1.59). Таким образом, оба подхода оказываются эквивалентными.

Другая позиция основана на связи интегралов из (1.58), (1.59) с соответствующими характеристиками ближнего поля. В рамках этой позиции появление на границе сосредоточенных полей обусловлено особой структурой ближнего поля такой, что $P_{z\delta}$ и $q_{z\delta}$ не равны нулю. Наличие дополнительных слагаемых, появляющихся при пересечении контурами интегрирования границы двух сред, таким образом, учитывает вклад ближнего поля в соответствующие величины. Изложенный подход интересен также тем, что он обращает наше внимание на то, что в рамках двумерной модели мы можем получить некоторую дополнительную информацию о ближнем поле (имеется ввиду определение $P_{z\delta}$ и $q_{z\delta}$), которое казалось бы было полностью исключено из анализа после введения НГУ.

Интересно, что если в локальных граничных условиях сама величина импеданса Z была мерой энергии, запасенной ближним полем, то в НГУ уже производная от Z по β есть мера энергии, переносимой им вдоль границы.

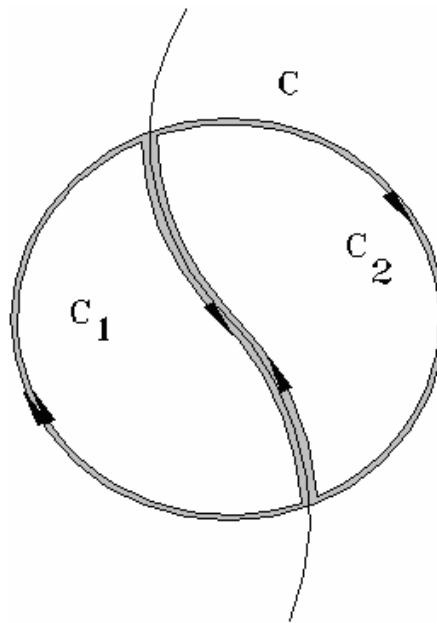


Рис. 1.14

В заключение настоящего раздела рассмотрим доказательство теоремы единственности решения для структур с НГУ. Будем следовать схеме Л.А. Вайнштейна [16]. Отдельно рассмотрим внутреннюю (рис. 1.15а) и внешнюю (рис. 1.15б) задачи. В обоих случаях предположим, что в среде существуют некоторые потери, то есть

$$\varepsilon = \varepsilon' + j \varepsilon'',$$

(1.60)

$$\mu = \mu' + j\mu''.$$

Предположим, что для внутренней задачи существуют два решения, описываемые векторами $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{H}_1, \vec{H}_2$. Образует разностное поле:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2.$$

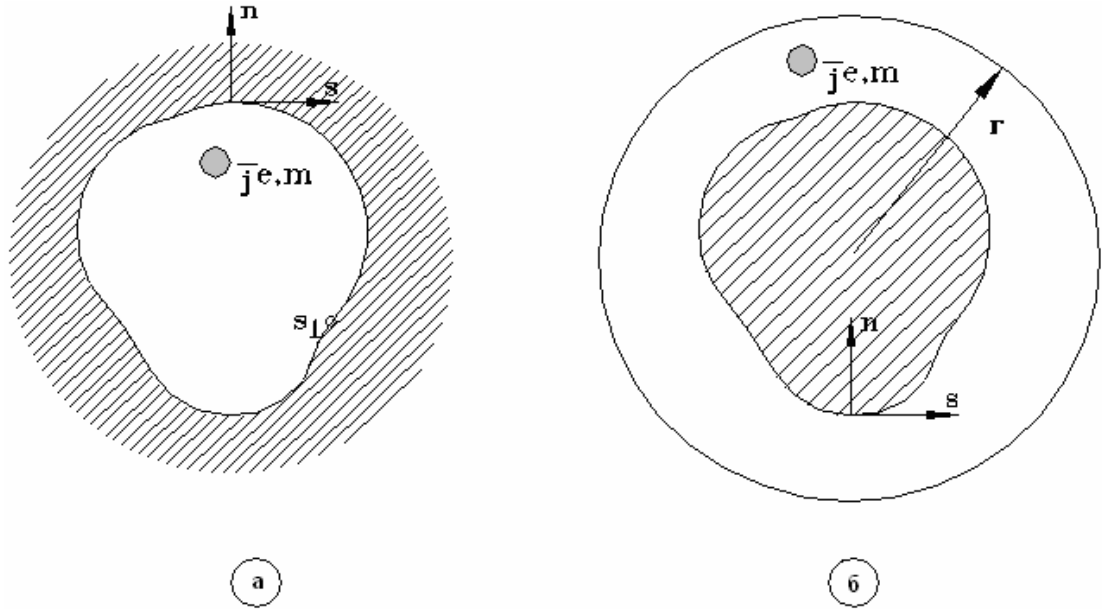


Рис. 1.15

Применим к нему теорему об активной мощности:

$$\int_C \operatorname{Re}(\Pi_n(s)) ds = \omega \varepsilon'' \int_V |E|^2 dv + \omega \mu'' \int_V |H|^2 dv. \quad (1.61)$$

Отличие нашего случая от рассмотренного в /16/ заключается в особенностях левой части (1.61). Дело в том, что стоящее там подынтегральное выражение в общем случае нулю не равно. Вернемся к соотношению (1.36)

$$\frac{dP_{s\bar{\sigma}}}{ds} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\Pi_n(s)). \quad (1.62)$$

Мы имеем замкнутый контур. Поэтому при решении (1.62) относительно $P_{s\bar{\sigma}}$ мы должны наложить условие периодичности, то есть:

$$P_{s\bar{\sigma}}(s) = P_{s\bar{\sigma}}(s + L), \quad (1.63)$$

$$\operatorname{Re}(\Pi_n(s)) = \operatorname{Re}(\Pi_n(s + L)),$$

где L - длина контура границы. Соотношение (1.63) всего лишь устанавливает тождество двух величин, взятых при s и $s + L$ очевидное в силу того, что оба значения соответствуют одной и той же точке на контуре границы.

Интегрируя (1.62), получаем:

$$\int_{s_1}^{s_1+L} \operatorname{Re}(\Pi_n(s)) ds = P_{z\bar{0}}(s_2) - P_{z\bar{0}}(s_1).$$

Если под s_1 понимать произвольную точку на контуре и считать, что $s_2 = s_1 + L$, то нетрудно увидеть, что

$$\int_{s_1}^{s_1+L} \operatorname{Re}(\Pi_n(s)) ds = \int_C \operatorname{Re}(\Pi_n(s)) ds,$$

так как $P_{z\bar{0}}(s_1 + L) = P_{z\bar{0}}(s_1)$.

Таким образом, мы доказали равенство нулю левой части (1.61). Отсюда полностью аналогично с /16/ получаем, что

$$|\vec{E}| = 0, |\vec{H}| = 0.$$

Иными словами мы доказали тождество двух различных решений, то есть единственность.

Доказательство теоремы единственности для внешней задачи можно провести по схеме изложенной выше. Единственное отличие состоит в необходимости формулировки условий излучения на бесконечность. Они имеют привычный для двумерных структур вид:

$$|\vec{E}| < \frac{M}{r^{\frac{1}{2} + \alpha}}, |\vec{H}| < \frac{N}{r^{\frac{1}{2} + \alpha}}. \quad (1.64)$$

где N, M положительные числа, а $\alpha > 0$.

1.3 НГУ для интегральных схем на ОДВ

Как уже говорилось выше в разд. 1.2, речь пойдет о развитии метода НГУ на случай интегральных схем на ОДВ. Как и при анализе полосковых структур, будем рассматривать полубесконечную ключевую структуру, образованную двумя плоскими волноводами (рис. 1.16).

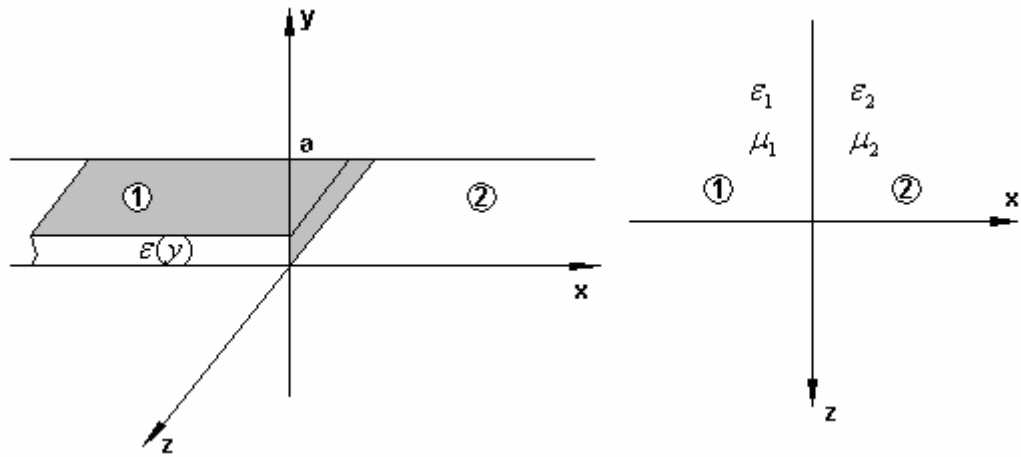


Рис. 1.16

Нашей задачей является вывод дифференциальных уравнений и НГУ в эквивалентной двумерной полубесконечной структуре, моделирующей ее трехмерный прототип (рис. 1.16).

Отличие настоящей ситуации от рассмотренной ранее состоит в том, что теперь распространяющиеся волны могут существовать в рабочем диапазоне параметров по обе стороны от границы раздела ПВ. Причем структура поля волн в области 1 и 2 различна. Очевидно, что в этом случае столь же просто решить вопрос о виде НГУ, как это было для СПЛ, не удастся.

Будем действовать последовательно. Рассмотрим сперва однородный ПВ, не имеющий границ. Вне зависимости от структуры слоев, лежащих между ограничивающими его по оси Oy экранами, поле любой E -волны может быть выражено через компоненту E_y следующим образом:

$$H_z = -\frac{\omega\epsilon_0}{j\gamma^2} \epsilon(y) \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$H_x = \frac{\omega\epsilon_0}{j\gamma^2} \epsilon(y) \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

$$E_y = C e^{-j\beta z \pm j\kappa x} \Phi^e(y), \quad (1.65)$$

$$\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}.$$

Здесь $\epsilon(y)$ - функция, описывающая изменение относительной диэлектрической проницаемости вдоль оси Oy , γ - постоянная распространения волны, а $\Phi^e(y)$ - ее собственная функция.

Функции $\Phi_{1,2}^e(y)$ определены с точностью до постоянного множителя.

Относительно их нормировки мы поговорим позже.

Рассмотрим также E -волну в однородной среде, распространяющуюся в плоскости XOZ . Компоненты H_x и H_z также могут быть выражены через E_y :

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu_{a_m}} \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_{a_m}} \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

$$E_y = C_m e^{-j\beta z \pm j\kappa_m x}, \quad (1.66)$$

$$\kappa_m = \sqrt{k_m^2 - \beta^2}.$$

Индекс m указывает на то, что данная величина относится к двумерной модели. Будем накладывать на ее параметры условия, добиваясь эквивалентности свойств волн в двумерных и трехмерных структурах.

В (1.65) выражение для поля взято для распространяющейся причем в произвольном в плоскости XOZ направлении волны. Вообще говоря, у нее еще есть компоненты E_x и E_z , но они нас не интересуют. Отметим также, что основными волнами при $x > 0$ и $x < 0$ являются именно E -волны, которые имеют нулевые частоты отсечки. Будем сейчас и далее полагать, что оба ПВ при $x > 0$ и $x < 0$ одномодовые. Запишем далее выражения для $\Phi^e(y)$ и $\varepsilon(y)$ для основных волн обоих ПВ:

$$\Phi_1^e(y) = \begin{cases} \cos \sqrt{\varepsilon k^2 - \gamma^2} y \frac{1}{\varepsilon}; & 0 \leq y < d, \\ \cos \sqrt{(\varepsilon k^2 - \gamma^2)} d \frac{sh(\sqrt{(\gamma^2 - \kappa^2)} (y - a))}{sh(\sqrt{(\gamma^2 - \kappa^2)} (d - a))}; & d \leq y < a \end{cases}$$

$$\Phi_2^e(y) = \text{const},$$

$$\varepsilon_1(y) = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq y \leq d, \\ 1, & d \leq y \leq a, \end{cases}$$

$$\varepsilon_2(y) = 1, \quad 0 \leq y \leq a.$$

Положим для определенности диэлектрическую проницаемость ϵ_m равной единице. Тогда, чтобы постоянные распространения обеих волн совпадали должно выполняться равенство:

$$\mu_{a_m} = \frac{\gamma^2}{k_0^2} \mu_0 . \quad (1.67)$$

Потребуем также энергетической эквивалентности волн, понимая ее в смысле выполнения соотношений:

$$\begin{aligned} C &= C_m, \\ P &= P_m. \end{aligned} \quad (1.68)$$

где P и P_m - удельные мощности волн, переносимые через одинаковые элементарные цилиндрические поверхности с образующими параллельными оси Oy .

Из (1.68) следует условие нормировки функций $\Phi^e(y)$:

$$\int_0^a (\Phi^e(y))^2 \epsilon(y) dy = 1. \quad (1.69)$$

При выполнении (1.69) равенство амплитудных множителей C и C_m будет означать равенство мощностей, переносимых волнами в двумерном и трехмерном случаях.

После того как введены условия (1.67) и (1.69) мы можем больше не обращаться к трехмерной полубесконечной структуре, а целиком иметь дело с ее двумерной моделью, изображенной на рис. 1.16. Предположим, что мы знаем решение ключевой задачи о наклонном падении волн ПВ на границу их раздела. Нашей целью является вывод граничных условий для компонент поля в плоскости YOZ .

Решение ключевой задачи может быть представлено в виде матрицы рассеяния. Будем в качестве комплексных амплитуд волн использовать множители типа C (см. (1.65), (1.66)), входящие в выражения для E_y . Обозначим через $V_{1,2п}$ амплитуды волн, набегающих на границу, а через $V_{1,2о}$ убегających от нее. Решение ключевой задачи устанавливает связь следующего вида:

$$[S] \begin{bmatrix} V_{1п} \\ V_{2п} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1о} \\ V_{2о} \end{bmatrix}, \quad (1.70)$$

где S - матрица рассеяния. Запишем через $V_{1,2,п,о}$ компоненты поля в двумерной структуре при $x = 0$. При этом мы предполагаем, что граница в

этом случае обладает такой же матрицей рассеяния, что и реальная граница ПВ. Итак:

$$\begin{aligned} E_{1y} &= V_{1n} + V_{1o} \quad , \quad H_{1z} = \frac{\kappa_1}{\omega\mu_{a_1}} (V_{1n} - V_{1o}), \\ E_{2y} &= V_{2n} + V_{2o} \quad , \quad H_{2z} = -\frac{\kappa_2}{\omega\mu_{a_1}} (V_{2n} - V_{2o}) . \end{aligned} \quad (1.71)$$

Из (1.70) и (1.71) следует, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{1y} \\ E_{2y} \end{bmatrix} &= (S - E)^{-1} (S + E) W \begin{bmatrix} H_{1z} \\ H_{2z} \end{bmatrix} , \\ W &= \begin{bmatrix} \frac{\omega\mu_{a_1}}{\kappa_1} & 0 \\ 0 & \frac{\omega\mu_{a_2}}{\kappa_2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (1.72)$$

Обозначим

$$Z(\beta) = (S - E)^{-1} (S + E) W .$$

Тогда для парциальной плоской волны можно записать граничные условия:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\tau(\beta) &= Z(\beta) \bar{H}_\tau(\beta) \quad , \\ \bar{E}_\tau(\beta) &= \begin{bmatrix} E_{1y} \\ E_{2y} \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{H}_\tau(\beta) = \begin{bmatrix} H_{1z} \\ H_{2z} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (1.73)$$

Здесь индекс τ указывает на то, что в данные вектора входят касательные к плоскости границы компоненты поля.

Полное поле является совокупностью его спектральных компонент:

$$\bar{E}_\tau(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_\tau(\beta) e^{-j\beta z} d\beta \quad ,$$

$$\bar{H}_\tau(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_\tau(\beta) e^{-j\beta z} d\beta ,$$

для которых путем интегрирования по β из (1.73) можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\tau(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Z}(z-z') \bar{H}_\tau(z') dz' , \\ \hat{Z}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Z}(\beta) e^{-j\beta x} d\beta . \end{aligned} \quad (1.74)$$

Это и есть искомые НГУ. Они вполне аналогичны уже использованным выше, но имеют матричную форму. Совершенно аналогично мы их распространим на искривленную границу:

$$\bar{E}_\tau(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Z}(s-s') \bar{H}_\tau(s') ds' . \quad (1.75)$$

Записывая (1.75) мы ввели локальную систему координат nys , как показано на рис. 1.17. Таким образом, мы положили, что нормаль у нас направлена из среды 1 в среду 2.

В заключение данного раздела отметим, что поля в средах 1, 2 удовлетворяют двумерным уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H}_{1,2} &= j\omega\epsilon_0 \bar{E}_{1,2} , \\ \text{rot } \bar{E}_{1,2} &= -j\omega\mu_{a_{1,2}} \bar{H}_{1,2} . \end{aligned} \quad (1.76)$$

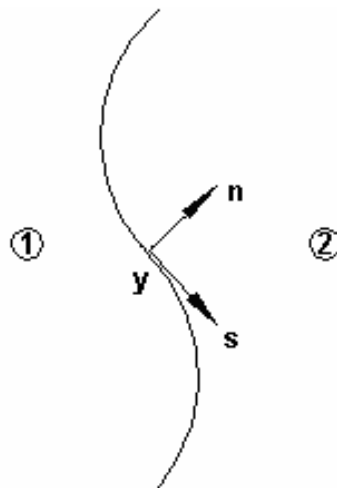


Рис. 1.17

В силу частного вида НГУ (1.75) и двумерности ($\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$) (1.76) связь E и H -волн отсутствует. Поэтому мы всегда можем отдельно рассматривать интересующие нас E -волны.

2. Метод нелокальных граничных условий для закрытых структур

2.1 Адмитансные нелокальные граничные условия

В этом разделе мы рассмотрим адмитансные НГУ, которые для ряда практически важных структур, например, щелевых оказываются более удобными, чем использованные ранее импедансные НГУ.

Отметим также, что нам будет удобнее рассматривать структуры с H -волнами (H_y, E_x, E_z) вместо обсуждавшихся до сих пор структур с E -волнами (E_y, H_x, H_z). Переход от одного типа поля к другому может быть осуществлен с помощью известного [14] принципа Бабинне. Решения для E и H -волн оказываются эквивалентными, если формально произвести следующие замены:

$$\vec{E}_h \text{ на } \vec{H}_e, \vec{H}_h \text{ на } \vec{E}_e, Z_h \text{ на } \frac{1}{Z_e}, \varepsilon_{ah}, \mu_{ah} \text{ на } \mu_{ae}, \varepsilon_{ae}. \quad (2.1)$$

Приведем адмитансные НГУ для H -поляризованного поля:

$$H_y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(s-s') E_s(s') ds', \quad (2.2)$$

$$Y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\beta) e^{-j\beta s} d\beta.$$

В (2.2) под $Y(\beta)$ следует понимать $1/Z(\beta)$, где $Z(\beta)$ обсуждавшийся ранее входной импеданс прямолинейной границы.

Для элементов связи НГУ приобретают следующий вид:

$$\Delta H_y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_s(s-s') E_s(s') ds', \quad (2.3)$$

$$Y_s(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_s(\beta) e^{-j\beta s} d\beta,$$

$$\Delta E_s(s) = 0,$$

где $\Delta H(s) = H(-0, s) - H(0, s)$. При записи (2.3) предполагалось, что нормаль по-прежнему внешняя относительно области, занятой полем, Соотношения (1.37), (1.51) при изменении поляризации сохраняют свою силу. Вместо формул для мощности ближнего поля и параметра q из первой главы можно записать эквивалентные:

$$P_{z\bar{0}} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\beta) - B(\alpha)}{\beta - \alpha} e^{*}(\beta) e(\alpha) e^{j(\beta - \alpha)z} d\beta d\alpha,$$

$$P_{z\bar{0}} = |e_0|^2 \frac{dB(\beta_0)}{d\beta},$$
(2.4)

$$q_{z\bar{0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\beta) - B(\alpha)}{\beta + \alpha} e_1(\beta) e_2(\alpha) e^{j(\beta + \alpha)z} d\beta d\alpha,$$

$$q_{z\bar{0}} = e_1 e_2 \frac{dB(\alpha_0)}{d\alpha}.$$

Наконец, третье замечание связано с поведением функции $Y(\beta)$. Имеются важная особенность справедливая, как для полосковых, так и для щелевых структур. Она связана с поведением $Y(\beta)$ на бесконечности. Анализ решений ключевых задач показывает, что $Y(\beta)$ ведет себя при $\beta \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{|\beta|}$:

$$Y(\beta) = \frac{C}{|\beta|}, \beta \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

где C - константа, не зависящая от β .

Поведение $Y(\beta)$ на бесконечности объясняет нам почему использование адмитанса в НГУ предпочтительнее. В противном случае (импедансная формулировка НГУ) у нас возникли бы определенные проблемы со сходимостью интеграла, определяющего $Z(s)$. В рамках теории обобщенных функций этот интеграл может быть интерпретирован как некоторый дифференциальный оператор и проблема его сходимости будет решена. Тем не менее, это порождает дополнительные трудности. При всем том, в определенных случаях импедансная форма НГУ оказывается более удобной и мы также будем использовать ее.

Из сказанного выше видно, что адмитансные НГУ вместе с H – волнами позволяют моделировать как щелевые, так и полосковые структуры, если использовать соотношения (2.1).

2.2 Собственные волны регулярного волновода

В главе 1 мы рассмотрели уединенную границу с НГУ. Следующей по сложности структурой является комбинация из двух границ, формирующих волновод. Такой волновод служит моделью разных реальных линий передачи: полосковой, щелевой, волновода с гофрированными стенками и т.д. Вследствие указанной инвариантности далее мы не будем конкретизировать тип направляющей структуры, а будем использовать термин волновод, понимая под ним модель, показанную на рис. 2.1.

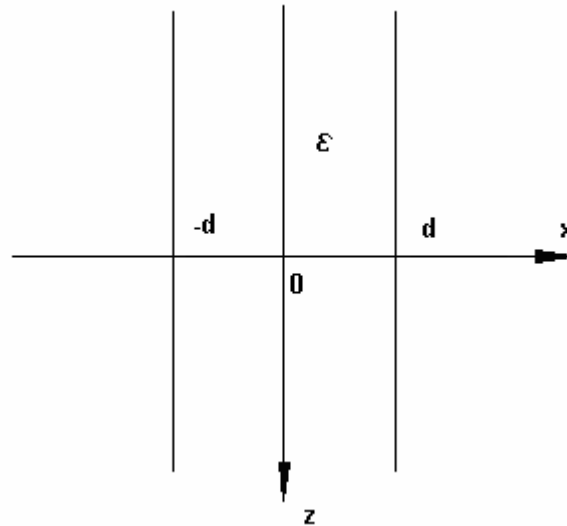


Рис. 2.1

Таким образом, мы имеем диэлектрическую пластину, поверхностях которой выполняются НГУ:

$$H_y(d, z) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(z - z') E_{z_s}(d, z') dz', \quad (2.6)$$

$$H_y(-d, z) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(z - z') E_{z_s}(-d, z') dz'.$$

Поле при $|x| < d$, $-\infty < z < \infty$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 \epsilon H_y = 0. \quad (2.7)$$

Нас интересуют решения (2.6), (2.7), имеющие экспоненциальную зависимость от z . В силу симметрии структуры относительно плоскости YOZ решения граничной задачи распадаются на два класса, соответствующие наличию в этой плоскости электрической и магнитной стенок. В первом случае функция H_y четная, во втором нечетная. В соответствии с этим будем называть волны первого класса четными, а второго нечетными. Рассмотрим четные волны.

Ищем решение в виде интеграла Фурье:

$$H_y(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\kappa) \cos qxe^{-j\kappa z} d\kappa, \quad q = \sqrt{\epsilon k^2 - \kappa^2}, \quad (2.8)$$

где $g(\kappa)$ - неизвестная функция.

Из уравнений Максвелла находим $E_z(x, z)$:

$$E_z(x, z) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \int_{-\infty}^{\infty} g(\kappa) q \sin qxe^{-j\kappa z} d\kappa. \quad (2.9)$$

Использование интегралов Фурье для описания поля позволяет свести интегральный оператор в НГУ к алгебраическому. Подставляя (2.8), (2.9) в (2.6) получаем дисперсионное уравнение относительно κ , описывающее постоянные распространения собственных волн:

$$\cos(qd) + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \sin(qd) = 0. \quad (2.10)$$

Аналогично можно вывести дисперсионное уравнение для нечетных волн:

$$\sin(qd) - \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \cos(qd) = 0. \quad (2.11)$$

Даже беглого взгляда на (2.10), (2.11) достаточно, чтобы убедиться в том, какое принципиальное значение имеет вопрос о существовании точек ветвления у функции $Y(\kappa)$. Если они есть, то спектр собственных значений имеет непрерывную составляющую, что характерно для открытых волноводов. В противном случае спектр сугубо дискретный, то есть равенство нулю, например (2.10) достигается на счетном множестве точек κ_n , которые в силу четности функции, стоящей в левой части (2.10) расположены при условии отсутствия потерь в волноводе либо на действительной, либо на мнимой оси плоскости комплексной переменной κ .

Будем далее исходить из того, что $Y(\kappa)$ мероморфная функция. В этом случае можно записать выражения для полей собственных волн:

$$\begin{aligned}
 H_{yn} &= \begin{pmatrix} \cos(q_n x) \\ \sin(q_n x) \end{pmatrix} e^{-\gamma_n z}, \\
 E_{zn} &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \begin{pmatrix} -\sin(q_n x) \\ \cos(q_n x) \end{pmatrix} e^{-\gamma_n z}, \\
 E_{xn} &= \frac{\gamma_n}{j\omega\epsilon_a} \begin{pmatrix} \cos(q_n x) \\ \sin(q_n x) \end{pmatrix} e^{-\gamma_n z}, \\
 \gamma_n &= \sqrt{\kappa_n^2 - \epsilon k^2}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Верхние строчки относятся к четным волнам, а нижние к нечетным.

Исследуем свойства собственных волн. Одним из принципиальных вопросов теории направляющих структур является определение системы функций, по которым может быть разложено поле в любом сечении волновода. Для того, чтобы ответить на него в нашем случае, необходимо убедиться, что решения, описываемые (2.12) отвечают понятию собственной волны. Его фундаментальной чертой является ортогональность. Если функции (2.12) будут ортогональны, то тогда вопрос о разложении по ним поля в волноводе решится элементарно. Соотношение ортогональности обычно получается как следствие леммы Лоренца. Применим ее к контуру, показанному на рис.2.2:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{Q}_{nm} \vec{n} d\vec{l} &= 0, \\
 \vec{Q}_{nm} &= \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1, \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_n, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_m, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_n, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_m, \\
 \vec{E}_{n,m} &= \vec{e}_{n,m}(x) e^{-\gamma_{n,m} z}, \quad \vec{H}_{n,m} = \vec{h}_{n,m}(x) e^{-\gamma_{n,m} z}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

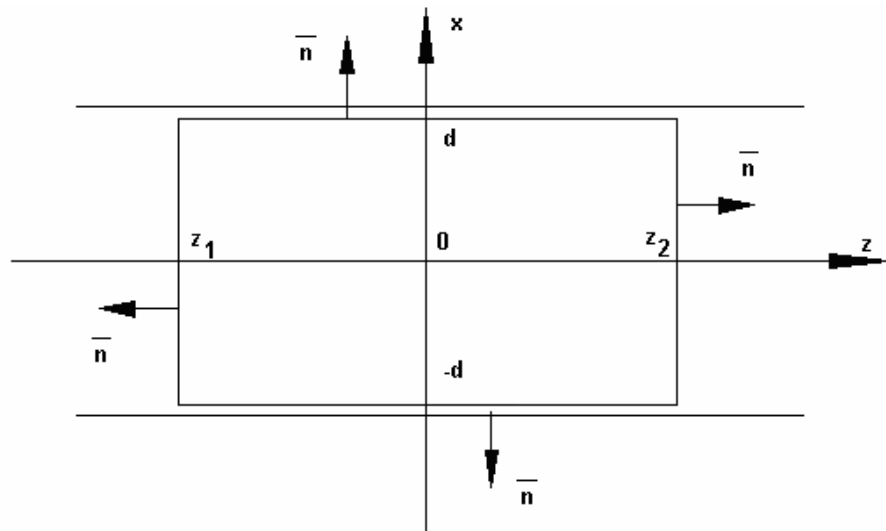


Рис. 2.2

Из (2.13) видно, что под полем с первого типа понимается волна с индексом n , а под полем второго типа с индексом m . Проекция (2.13) на оси координат приводит к следующей формуле:

$$\int_{-(d)}^{(d)} Q_z(x, z_1) - Q_z(x, z_2) dx + \int_{z_1}^{z_2} Q_x(d, z) - Q_x(x, z) dz = 0.$$

Пределы интегрирования от $-(d)$ до (d) означают, что точки $-d, d$ не входят в интервал интегрирования. Учтем, что зависимость $Q(z)$ известна:

$$\bar{Q}(x, z) = \bar{Q}_x(x) e^{-(\gamma_n + \gamma_m)z}.$$

Теперь можно записать:

$$\int_{-(d)}^{(d)} Q_{znm} dx + \frac{Q_{xnm}(d) - Q_{xnm}(-d)}{\gamma_n + \gamma_m} = 0. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) верна для всех n, m кроме $n = -m$, если учесть, что $\gamma_n = -\gamma_{-n}$.

Соотношение (2.14) представляет одну из форм условия ортогональности волн. Нетрудно заметить, что из-за присутствия внеинтегрального слагаемого оно имеет непривычный вид. Для приведения его к стандартной форме можно воспользоваться (1.59). В этом случае необходимо включить в интервал интегрирования точки $d, -d$, то есть пересечь нелокальную границу. Тогда можно получить следующее:

$$\int_{-d}^d Q_{znm} dx = 0, n \neq m. \quad (2.15)$$

При $n=m$ интеграл в левой части (2.15) не равен нулю и называется, как это обычно принято, нормой собственной волны:

$$\int_{-d}^d Q_{zn(-n)} dx = N_n. \quad (2.16)$$

Для четных и нечетных волн нормы $N_{ne,o}$ описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} N_{ne} &= \frac{2\gamma_n}{j\omega\epsilon_a} \left[d + \frac{\sin(2q_n d)}{2q_n} + \frac{(q_n \sin(q_n d))^2}{\omega\epsilon_a \gamma_n} \frac{dY(j\gamma_n)}{d\kappa} \right], \\ N_{no} &= \frac{2\gamma_n}{j\omega\epsilon_a} \left[d - \frac{\sin(2q_n d)}{2q_n} + \frac{(q_n \cos(q_n d))^2}{\omega\epsilon_a \gamma_n} \frac{dY(j\gamma_n)}{d\kappa} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Формулы (2.17) получены непосредственно подстановкой (2.12) в (2.16) с учетом четвертой формулы из (1.55).

Сделаем некоторые выводы. Нам удалось получить соотношения ортогональности для собственных волн. Привести его к стандартному виду можно только включив в интервал интегрирования по x граничные точки. Далее, функции $\cos(q_n x), \sin(q_n x)$ неортогональны, так как приписать некоторое значения при $-d, d$ (доопределить) мы можем только функции $Q_z(x)$, а относительно компонент поля, взятых по отдельности мы ничего сказать не можем.

Норма собственной волны содержит дополнительное слагаемое пропорциональное $\frac{dY}{d\kappa}$, которое не может быть получено интегрированием

(2.12). Норма собственной волны любой направляющей структуры пропорциональна мощности, переносимой вдоль продольной оси. Сравнивая (2.17) и (1.41) легко сделать вывод, что дополнительное слагаемое, учитывает вклад ближнего поля в мощность, переносимую собственной волной.

Возникает вопрос: достаточны ли полученные результаты для решения проблемы представления поля в волноводе в виде разложения по собственным волнам? Ответ на этот вопрос будет утвердительным. Чтобы окончательно в этом убедиться, рассмотрим задачу возбуждения нашего волновода сторонними источниками. Если мы сможем получить решение в виде такого разложения, то тогда все вопросы окончательно отпадут.

Для достижения поставленной цели предположим, что в волноводе находятся сторонние источники \vec{J}_e, \vec{J}_m , распределенные в некоторой области пространства. Проведем контур C так как показано на рис. 2.3 и применим к нему теорему взаимности.

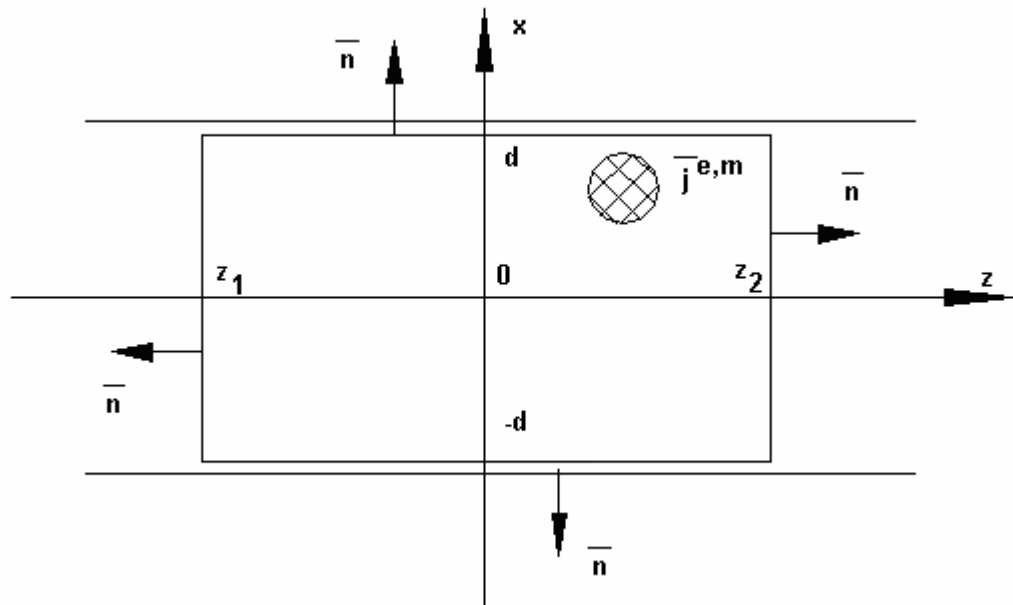


Рис. 2.3

Отметим, что лемма Лоренца является следствием этой теоремы в случае $\vec{j}_e, \vec{j}_m = 0$. Считаем, что поле второго типа \vec{E}_2, \vec{H}_2 представляет собой поле одной из собственных волн $\vec{E}_2 = \vec{E}_m, \vec{H}_2 = \vec{H}_m$, в то время как поле первого типа, порождаемое сторонними источниками представим в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \sum_n A_n \vec{E}_n(x) e^{-\gamma_n z}, \\ \vec{H}_1 &= \sum_n A_n \vec{H}_n(x) e^{-\gamma_n z}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Договоримся понимать в (2.18) под \vec{E}_n, \vec{H}_n только функции, описывающие зависимость от x , а экспоненты выделим отдельно. Суммирование в (2.18) справа от источников ведется по положительным n , а слева по отрицательным. Применение к контуру C теоремы взаимности дает следующий результат:

$$\begin{aligned} & \int_{(d)}^{(d)} Q_z(x, z_1) - Q_z(x, z_2) dx + \int_{z_1}^{z_2} Q_x(d, z) - Q_x(x, z) dz = \\ & = \int_V \vec{j}_e \vec{E}_2 - \vec{j}_m \vec{H}_2 dV, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где V - объем занятый источниками. Используя (1.50) можно показать, что второе слагаемое в левой части (2.19) равно следующей величине:

$$q_{z\bar{0}}(z_2, d) - q_{z\bar{0}}(z_1, d) - q_{z\bar{0}}(z_2, -d) + q_{z\bar{0}}(z_1, -d),$$

где аргумент $-d$ указывает на то, что данная характеристика ближнего поля соответствует нижней границе волновода, а d верхней.

При $z = z_{1,2}$ поле представляется в виде суммы слагаемых, имеющих экспоненциальную зависимость от z . Пусть также поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 есть поле волны с индексом $-m$. Тогда согласно (1.51) $q_{z\bar{0}}$ может быть представлено следующим образом:

$$q_{z\bar{0}}(z_1, d) - q_{z\bar{0}}(z_1, -d) = \sum_n A_{-n} e^{-\gamma_{-n} z_1} \frac{Q_{x,-n,-m}(d) - Q_{x,-n,-m}(-d)}{\gamma_{-n} + \gamma_{-m}},$$

$$q_{z\bar{0}}(z_2, d) - q_{z\bar{0}}(z_2, -d) = \sum_n A_n e^{-\gamma_n z_2} \frac{Q_{x,n,-m}(d) - Q_{x,n,-m}(-d)}{\gamma_n + \gamma_{-m}}.$$

(2.20)

В (2.20) \bar{Q}_{nm} имеет тот же смысл, что и ранее. Подставляя (2.20) в (2.19) и сравнивая полученные выражения с условием ортогональности (2.14) легко увидеть, что

$$A_m = \frac{1}{N_m} \int_V \vec{j}_e \vec{E}_{-m} - \vec{j}_m \vec{H}_{-m} dV \quad (2.21)$$

Следующим шагом надо повторить все описанные выше преобразования, но уже для поля второго типа в виде волны с индексом m . Аналогично получаем A_{-m} описывается той же формулой (2.21), в которой m заменено на $-m$.

Небольшое замечание относительно (2.20). Это соотношение получено с помощью (1.51) путем интегрирования по z . Если $\text{Re}(\gamma_n + \gamma_m) < 0$, то его реализация в пределах от $-\infty$ до z не вызывает труда. Однако если $\text{Re}(\gamma_n + \gamma_m) > 0$, то непосредственное применение (1.51) затруднено из-за расходимости интеграла. Эту сложность можно обойти, записывая решение исходного дифференциального уравнения для $q_{z\bar{0}}(z)$ через интеграл от z , взятый в пределах от z до ∞ :

$$q_z(z) = - \int_z^{\infty} Q_x(0, z) dz,$$

которое полностью эквивалентно, полученному ранее. Теперь уже вычисление $q_{z\bar{0}}(z)$ в нашем случае при любом сочетании n, m не вызывает

труда в силу возможности использовать оба соотношения для $q_{z\sigma}(z)$ в зависимости от знака $\operatorname{Re}(\gamma_n + \gamma_m)$.

Таким образом, нам удалось определить коэффициенты A_m и, следовательно, решить задачу о представлении поля в виде разложения по собственным волнам.

Продолжая разговор о собственных волнах интегрального волновода, получим еще несколько полезных соотношений. Будем рассматривать функцию $Y(\kappa)$ в виде отношения двух полиномов:

$$Y(\kappa) = \frac{P_N(\kappa)}{Q_M(\kappa)}. \quad (2.22)$$

В силу того, что $Y(-\kappa) = Y(\kappa)$ полиномы P_N и Q_M должны содержать только четные степени κ . Кроме того, как мы это уже отмечали выше, при $|\kappa| \rightarrow \infty$ функция $Y(\kappa)$ убывает и, следовательно, с учетом первого утверждения должно выполняться неравенство:

$$M - N > 2.$$

Известно [18], что мероморфную функцию, убывающую на бесконечности можно представить в следующем виде:

$$Y(\kappa) = \sum_{i=1}^M \frac{C_i}{\kappa^2 + \kappa_i^2}, \quad (2.23)$$

где $\pm j\kappa_i$ - нули полинома Q_M (мы специально так записали (2.23), чтобы действительные κ_i соответствовали нулям Q_M , расположенным на мнимой оси, так как дальше мы увидим, что все нули, кроме одного именно там и находятся), C_i связаны с $Y(\kappa)$ следующим образом:

$$C_i = \operatorname{Res}(Y(j\kappa_i))2j\kappa_i.$$

Соотношение (2.23) верно и для бесконечных M .

Пусть теперь мы имеем некоторую функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-d, d)$ рядом по функциям $\cos(q_n x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos q_n x. \quad (2.24)$$

Если бы функции $\cos(q_n x)$ были бы ортогональны, то связь между $f(x)$ и коэффициентами разложения находилась бы элементарно. В отсутствие ортогональности указать способ однозначного определения B_n невозможно. Тем не менее, ниже мы получим несколько полезных соотношений, позволяющих определять B_n через $f(x)$ с точностью до конечного числа констант, определение которых требует использования дополнительных условий.

Умножим (2.24) на $\cos(q_m x)$ и проинтегрируем полученное выражение по x от $-d$ до d :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty(m)} \frac{A_n 2q_n q_m \sin q_n d \sin q_m d}{j\omega \epsilon_a} \left[\frac{Y(j\gamma_m) - Y(j\gamma_n)}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \right] + A_m \left(d + \frac{\sin 2q_m d}{2q_m} \right) = \\ & = \int_{-d}^d f(x) \cos(q_m x) dx, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где символ $\sum_{n=1}^{\infty(m)}$ означает суммирование по всем индексам, кроме $n = m$.

Формула (2.25) получена путем интегрирования (2.24) и использования дисперсионного уравнения (2.10). Будем далее считать, что

$$\lim_{n \rightarrow m} \frac{Y(j\gamma_m) - Y(j\gamma_n)}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} = \frac{1}{2j\gamma_m} \frac{dY(j\gamma_m)}{d\kappa}. \quad (2.26)$$

Тогда (2.25) можно переписать:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n 2q_n q_m \sin q_n d \sin q_m d}{j\omega \epsilon_a} \left[\frac{Y(j\gamma_m) - Y(j\gamma_n)}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \right] + A_m N_m = \\ & = \int_{-d}^d f(x) \cos(q_m x) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$N_m = d + \frac{\sin(2q_m d)}{2q_m} + \frac{(q_m \sin(q_m d))^2}{\omega \epsilon_a \gamma_m} \frac{dY(j\gamma_m)}{d\kappa}$$

Уравнение (2.27) очень похоже на обычное соотношение, задающее A_n , когда мы имеем дело с системой ортогональных функций. Отличие только в присутствии ряда, не позволяющего выразить A_n через $f(x)$. Хорошо

видно, что ряд исчезнет, если импеданс будет локальным, то есть $Y(\kappa) = \text{const}$. Величина N_n очень похожа по структуре на норму собственной волны. Будем называть ее нормой функции $\cos(q_n x)$. Следующим шагом подставим в (2.27) представление $Y(\kappa)$ в виде разложения на элементарные дроби (2.23). После ряда преобразований можно получить:

$$-\frac{2}{j\omega\epsilon_a} \sum_{i=1}^M \frac{C_i q_m \sin q_m d}{\kappa_i^2 - \gamma_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n q_n \sin q_n d}{\kappa_i^2 - \gamma_n^2} + A_m N_m = \int_{-d}^d f(x) \cos(q_m x) dx.$$

Обозначим:

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n q_n \sin q_n d}{\kappa_i^2 - \gamma_n^2}, \quad (2.28)$$

тогда

$$A_m = \frac{1}{N_m} \int_{-d}^d f(x) \cos(q_m x) dx + \frac{2}{j\omega\epsilon_a} \sum_{i=1}^M \frac{C_i \mu_i \sin(q_m d)}{\kappa_i^2 - \gamma_m^2}. \quad (2.29)$$

Итак, мы выразили A_m через интеграл от $f(x)$ и M постоянных μ_i , которые неизвестны, так как сами определяются через неизвестные A_m . Соотношения (2.28), (2.29) мы используем позже в ходе анализа волноводных неоднородностей.

В одном частном случае удастся выразить μ_i через $f(x)$. Это случай $M = 1$, соответствующий $Y(\kappa)$ с особенностью в виде двух полюсов. Ниже мы убедимся, что, несмотря на свою простоту, это весьма важный частный случай, представляющий практический интерес. Итак, мы имеем дело со следующей функцией $Y(\kappa)$:

$$Y(\kappa) = \frac{C}{\kappa^2 + \kappa_0^2}. \quad (2.30)$$

Умножим (2.28) на C и затем вернемся опять с помощью дисперсионного уравнения к функциям $\cos(q_n x)$. При этом мы примем во внимание, что

$$\frac{C}{\kappa^2 + \gamma_n^2} = Y(j\gamma_n).$$

Не составляет труда теперь увидеть, что для единственной константы μ справедливо следующее соотношение:

$$C\mu = j\omega\epsilon_a \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos q_n d.$$

Ряд в правой части последней формулы есть ни что иное, как $f(d)$, то есть

$$\mu = \frac{j\omega\epsilon_a}{C} f(d). \quad (2.31)$$

Таким образом, в этом частном случае нам удалось выразить A_m через $f(x)$.

Отметим еще одно интересное свойство функций $\cos(q_n x)$ при $M = 1$. Оказывается и в этом легко убедиться простой подстановкой, что эти функции ортогональны с весом:

$$V(x) = 1 + \frac{j\omega\epsilon_a}{C} \delta(x-d) + \frac{j\omega\epsilon_a}{C} \delta(x+d), \quad (2.32)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. То есть верно следующее соотношение:

$$\int_{-d}^d \cos(q_n x) \cos(q_m x) V(x) dx = \delta_{nm} N_n, \quad (2.33)$$

где δ_{nm} символ Кронекера.

Аналогичные результаты, включая и ортогональность с весом $V(x)$ могут быть получены для нечетных функций $\sin(q_n x)$.

В заключение раздела о собственных волнах получим некоторые полезные энергетические соотношения. Во-первых, это выражения для мощности, переносимой волной вдоль оси волновода P_c . Его легко получить, если учесть ее связь с вектором Пойнтинга:

$$P_c = \frac{1}{2} \int_{-(d)}^{(d)} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) dx + P_{z\bar{0}}(d) + P_{z\bar{0}}(-d). \quad (2.34)$$

В (2.34) появились дополнительные слагаемые, учитывающие вклад ближнего поля в P_c . Для определения $P_{z\bar{0}}$ можно воспользоваться соотношением (1.41). Подстановка (2.12) в (2.34) дает следующий результат:

$$P_c = \begin{cases} \frac{\beta_n}{2\omega\epsilon_a} \left[d + \frac{\sin(2q_n d)}{2q_n} + \frac{(q_n \sin(q_n d))^2}{\omega\epsilon_a \beta_n} \frac{dB(\beta_n)}{d\kappa} \right], \\ \frac{\beta_n}{2\omega\epsilon_a} \left[d - \frac{\sin(2q_n d)}{2q_n} + \frac{(q_n \cos(q_n d))^2}{\omega\epsilon_a \beta_n} \frac{dB(\beta_n)}{d\kappa} \right]. \end{cases} \quad (2.35)$$

Верхняя формула в (2.35) соответствует четным волнам, а нижняя нечетным. Выражение (2.35) записано для распространяющихся волн $\gamma_n = j\beta_n$. Интересной энергетической характеристикой является также погонное затухание. Для его вычисления удобно воспользоваться дисперсионными уравнениями (2.12), (2.13). Прежде чем приступить к их преобразованиям, следует определить, каким образом диссипативные потери в реальной структуре могут проявить себя в двумерной модели, в которой имеются всего два параметра ϵ и $Y(\beta)$. Относительно ϵ вопрос решается очень просто. Действительно, величина $k\sqrt{\epsilon}$ должна равняться постоянной распространения одной из волн ПВ (основной). В случае ИС на СПЛ это T -волна. Если в структуре есть потери, то эта постоянная становится комплексной и, следовательно, комплексной будет проницаемость среды в двумерной модели:

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''. \quad (2.36)$$

Аналогичное утверждение может быть сделано относительно $Y(\beta)$. В ситуации с потерями:

$$Y(\beta) = jB(\beta) + g(\beta). \quad (2.37)$$

Однако если для ϵ можно указать простой способ определения действительной и мнимой частей, то в случае с $Y(\beta)$ для определения B и g нам необходимо вновь вернуться к ключевой задаче и решить ее для структуры с потерями.

В случае относительно малых потерь, когда можно считать, что $\epsilon'' \ll \epsilon'$, $g \ll |B|$ для определения мнимой части постоянной распространения волны можно применить метод последовательных приближений. Для этого разложим (2.12) и (2.13) в ряд Тейлора в окрестности точки $\kappa = \kappa_0$, $\epsilon' = 0$, $g = 0$. Причем κ_0 - это корень дисперсионного уравнения, описывающего волновод без потерь. В результате получаем:

$$\Delta\kappa \frac{dD(\kappa_0)}{d\kappa} + g \frac{dD(jB)}{dY} - j \operatorname{Im}(\epsilon) \frac{dD(\operatorname{Re}(\epsilon))}{d\epsilon} = 0.$$

Отсюда

$$\Delta\kappa = -\frac{1}{\frac{dD(\kappa_0)}{d\kappa}} \left(g \frac{dD(jB)}{dY} - j \operatorname{Im}(\varepsilon) \frac{dD(\operatorname{Re}(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right), \quad (2.38)$$

где

$$\frac{dD(\kappa_0)}{d\kappa} = \begin{cases} \frac{2\omega\varepsilon_a}{q \sin(qd)} P_c \\ -\frac{2\omega\varepsilon_a}{q \cos(qd)} P_c \end{cases}, \quad \frac{dD(jB)}{dY} = \begin{cases} -\frac{jq \sin(qd)}{\omega\varepsilon_a} \\ \frac{jq \cos(qd)}{\omega\varepsilon_a} \end{cases},$$

$$\frac{dD(\operatorname{Re}(\varepsilon))}{d\varepsilon} = \begin{cases} -\frac{k^2 d}{2q \sin(qd)} + \frac{\cos(qd)}{q} \left(\frac{q}{\varepsilon} - \frac{k^2}{2q} \right), \\ \frac{k^2 d}{2q \cos(qd)} + \frac{\sin(qd)}{q} \left(\frac{q}{\varepsilon} - \frac{k^2}{2q} \right). \end{cases}$$

В (2.38) верхняя строчка соответствует четным, а нижняя нечетным волнам.

На этом раздел, посвященный анализу волновода заканчивается. Дополнительно можно отметить, что доказательство возможности представления поля в нем в виде набора собственных волн вызвало определенные сложности, обусловленные специфической формой условия ортогональности последних. Этих сложностей можно было бы избежать, используя другую схему решения задачи о возбуждении волновода, основанную на представлении компонент поля в виде интегралов Фурье. Преобразование таких интегралов в сумму вычетов в точках, соответствующих нулям дисперсионного уравнения привело бы нас к формуле (2.21). Тем не менее, мы сознательно избрали описанный выше путь, во - первых, чтобы были ясны все сложности, встречающиеся в ходе применения этой схемы и, во - вторых, чтобы получить ряд полезных формул.

Следующий раздел посвящен краткому анализу связанных волноводов. В этом разделе мы ограничимся только выводом дисперсионных уравнений для случая одинаковых волноводов. Решение граничной задачи здесь мало

отличается от уже рассмотренной и представляет интерес только как пример использования НГУ для элементов связи.

2.3 Связанные волноводы

На рис. 2.4 показана модель двух одинаковых связанных волноводов. В силу симметрии структуры относительно плоскости YOZ ее анализ распадается на две задачи в зависимости от типа стенки, помещаемой в плоскости симметрии.

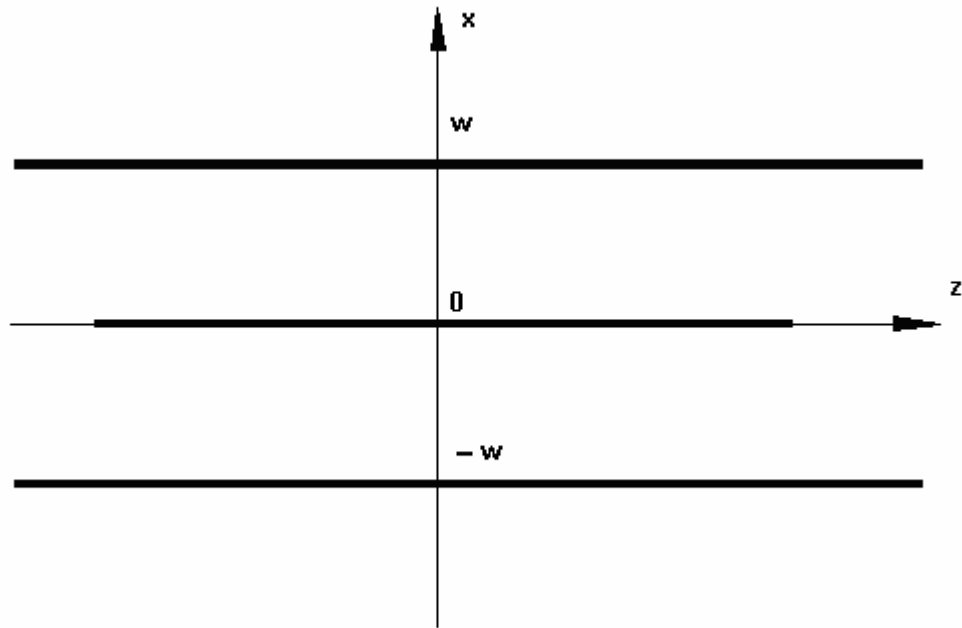


Рис. 2.4

Так как мы рассматриваем H - волны (H_y, E_x, E_z) , то имеет смысл определять четность или нечетность волны в зависимости от поведения поперечных компонент H_y, E_x . При таком подходе наличие электрической стенки в плоскости YOZ отвечает четным волнам, а магнитной нечетным.

Граничные условия для элементов связи изменяются в зависимости от четности рассматриваемого поля. Если при YOZ размещается электрическая стенка ($E_z = 0$), то из (2.3) видно, что в этом случае наряду с равенством $E_{1z} = E_{2z}$ ($\Delta E_z = 0$) выполняется еще соотношение $H_{1y} = H_{2y}$ ($\Delta H_y = 0$). Иными словами, поле четных волн “не замечает” элемента связи (полупрозрачной пленки при $x = 0$). Очевидно, что дисперсионное уравнение, описывающее постоянные распространения четных волн в такой ситуации совпадает с дисперсионным уравнением четных волн уединенного волновода шириной $2w$:

$$\cos(qw) + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \sin(qw) = 0. \quad (2.39)$$

В случае нечетных волн ситуация иная. В НГУ для элементов связи могут быть внесены следующие изменения:

$$H_{1y} = -H_{2y}, E_{1z} = E_{2z},$$

вытекающие из нечетности функции $H_y(x)$. С учетом этих дополнений НГУ можно видоизменить:

$$H_{2y}(0, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Y_s(z - z') E_{2z}(0, z') dz'. \quad (2.40)$$

Таким образом, мы свели решение задачи для нечетных волн к анализу волновода, у которого на одной поверхности (при $x = 0$; см. рис.2.4) выполняется условие (2.40), а на другой ($x = w$) условие

$$H_y(w, z) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Y(z - z') E_z(w, z') dz'. \quad (2.41)$$

Решение для нечетных волн будем искать, как и ранее, в виде интеграла Фурье:

$$H_y(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\kappa) \cos qx + B(\kappa) \sin qx) e^{-j\kappa z} d\kappa,$$

$$E_z(x, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \int_{-\infty}^{\infty} (B(\kappa) q \sin qx - A(\kappa) q \cos qx) q e^{-j\kappa z} d\kappa,$$

где A, B неизвестные функции. Граничные условия при $x = 0, x = w$ приводят к системе алгебраических уравнений относительно A, B , равенство нулю определителя которой дает искомое дисперсионное уравнение :

$$\left(\sin(qw) + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \cos(qw) \right) + \frac{Y_s(\kappa)}{2j\omega\epsilon_a} \left(q \cos(qw) - \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \sin(qw) \right) = 0. \quad (2.42)$$

Если Y_s равно $2Y$, то (2.42) вырождается в произведение двух сомножителей $De(w, \kappa), D_0(w, \kappa)$:

$$\begin{aligned}
 D_e(w, \kappa)D_o(w, \kappa) &= 0, \\
 D_e(x, \kappa) &= \cos(qx) - \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \sin(qx), \\
 D_o(x, \kappa) &= \sin(qx) + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \cos(qx).
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Из (2.43) видно, что $D_e(w, \kappa), D_o(w, \kappa)$ есть ни что иное как левые части дисперсионных уравнений четных и нечетных волн волновода шириной w . Таким образом, постоянные распространения нечетных волн в системе связанных волноводов не отличаются от постоянных распространения уединенного волновода.

При некотором отличии Y_s от $2Y$, то есть когда

$$Y_s = Y + \Delta Y$$

дисперсионное уравнение приобретает иной вид:

$$2D_e(w, \kappa)D_o(w, \kappa) + \frac{q\Delta Y}{j\omega\epsilon_a} D_e(w, \kappa) = 0. \tag{2.44}$$

Из (2.44) легко определить приращение постоянной распространения $\Delta\kappa$ для случая малых ΔY :

$$\Delta\kappa = - \frac{q\Delta Y(\kappa_0)D_e(2w, \kappa_0)}{j\omega\epsilon_a 2D_e(2w, \kappa_0) \frac{dD_o(2w, \kappa_0)}{d\kappa}}. \tag{2.45}$$

Соотношение (2.45) верно для κ_0 , являющегося корнем уравнения $D_e(2w, \kappa_0) = 0$. Оно описывает влияние слабой связи на четную волну уединенного волновода и будет нами использовано ниже.

2.4 Круглый резонатор

Особенность этой структуры в том, что в ней мы впервые сталкиваемся с замкнутым граничным контуром. До сих пор мы имели дело с границами, имеющими бесконечную длину, в том числе и тогда когда выводили НГУ. Можно ли их применить в новой ситуации? Постараемся ответить на этот вопрос.

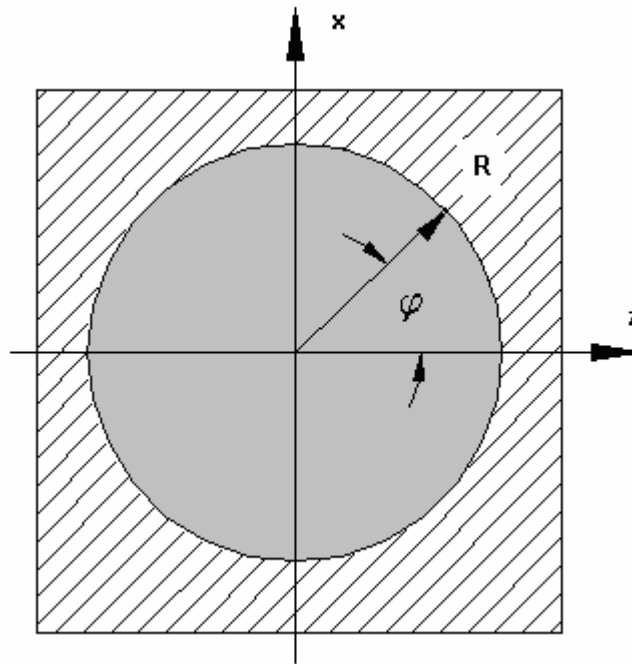


Рис. 2.5

Воспользуемся следующим приемом. Будем считать, что переменная φ меняется не в пределах от 0 до 2π , а от минус до плюс бесконечности. В тоже время, поле на бесконечном интервале периодически с периодом 2π повторяет свое поведение при $0 < \varphi < 2\pi$.

В таком случае НГУ при $r = R$ можно записать следующим образом:

$$H_y(R, \varphi) = R \int_{-\infty}^{\infty} Y(\varphi - \varphi') E_\varphi(R, \varphi') d\varphi', \quad (2.46)$$

В (2.46) учтено, что $s = R \varphi$. Интеграл по бесконечному интервалу можно представить суммой интегралов от $2\pi n$ до $2\pi(n+1)$:

$$H_y(R, \varphi) = R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} Y(\varphi - \varphi') E_\varphi(R, \varphi') d\varphi'.$$

Введем новую переменную $\varphi_m = \varphi_0 + 2\pi n$. Тогда с учетом того, что $E_\varphi(R, \varphi_0 + 2\pi n) = E_\varphi(R, \varphi_0)$ получаем:

$$H_y(R, \varphi) = R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} Y(\varphi - \varphi_m - 2\pi n) E_\varphi(R, \varphi_m) d\varphi_m. \quad (2.47)$$

Воспользуемся представлением $Y(s - s')$ в виде интеграла Фурье:

$$Y(\varphi - \varphi_m - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\kappa) e^{-j\kappa R(\varphi - \varphi_m - 2\pi n)} d\kappa.$$

Известно [19], что ряд по экспонентам может быть выражен через бесконечную сумму δ -функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\kappa R 2\pi n} = \frac{2\pi}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\kappa - \frac{n}{R}).$$

Подстановка последнего соотношения дает следующий результат:

$$H_y(R, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} Y\left(\frac{n}{R}\right) E_\varphi(R, \varphi_m) d\varphi_m. \quad (2.48)$$

Выражение (2.48) может быть использовано в качестве искомого граничного условия при $r = R$, $0 < \varphi < 2\pi$. Отметим дополнительно, что если при $r = R$ ввести представление для компонент поля в виде рядов Фурье:

$$E_\varphi(R, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{\varphi, m} e^{-jm\varphi},$$

$$H_y(R, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{y, m} e^{-jm\varphi},$$

то (2.48) может быть записано отдельно для каждого члена ряда:

$$Y\left(\frac{m}{R}\right) E_{\varphi, m} = H_{y, m}. \quad (2.49)$$

Теперь не составляет труда решить граничную задачу. Общее решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах для области $r < R$ имеет следующий вид:

$$H_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\varphi} J(n, k\sqrt{\epsilon}r),$$

$$E_{\phi} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\phi} \frac{dJ(n, k\sqrt{\epsilon}r)}{dr}, \quad (2.50)$$

$$E_r = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n n e^{-jn\phi} J(n, k\sqrt{\epsilon}r),$$

где $J(n, x)$ функция Бесселя аргумента x и индекса n .

С помощью (2.49) получаем характеристическое уравнение для определения собственных частот колебаний круглого резонатора:

$$J(n, k\sqrt{\epsilon}R) + \frac{Y\left(\frac{n}{R}\right)W_0}{j\sqrt{\epsilon}} J'(n, k\sqrt{\epsilon}R) = 0, \quad (2.51)$$

где W_0 - волновое сопротивление свободного пространства. В (2.51) для более компактной записи можно ввести еще величину $W_{\epsilon} = W_0/\sqrt{\epsilon}$, имеющего смысл волнового сопротивления среды, заполняющей резонатор. При $Y = jB$ (2.51) преобразуется к окончательному виду:

$$J(n, k\sqrt{\epsilon}R) + B\left(\frac{n}{R}\right)WJ'(n, k\sqrt{\epsilon}R) = 0. \quad (2.52)$$

Уравнения типа (2.52) характерны для закрытых, недиссипативных резонансных структур. Все корни (2.52) по частоте f лежат на действительной оси. При наличии потерь они незначительно сдвигаются в область мнимых f . Таким образом, резонатор приобретает конечную добротность.

На этом раздел, посвященный анализу круглого резонатора мы завершим. К похожим структурам с аксиальной симметрией мы еще вернемся, когда будем рассматривать дисковый диэлектрический резонатор (открытый вариант круглого резонатора).

2.5 Полубесконечный волновод

Следующая структура, анализу которой посвящен настоящий раздел изображена на рис. 2.6. Это полубесконечный волновод. На его поверхностях установлены НГУ (2.2). В области $z < 0$, $|x| \leq d$ поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла, а на контуре

$$z < 0, |x| = d; z = 0, |x| \leq d$$



Рис. 2.6

они удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$H_y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(s-s')E_s(s')ds', \quad (2.53)$$

$$s = \begin{cases} z-d; & \text{при } z < 0, x = d \\ -x; & \text{при } z = 0, |x| \leq d \\ -z+d; & \text{при } z < 0, x = -d \end{cases}$$

$$E_s = \begin{cases} -E_z; & \text{при } z < 0, x = d \\ E_x; & \text{при } z = 0, |x| \leq d \\ E_z; & \text{при } z < 0, x = -d \end{cases}$$

Пусть из области $z < 0$ на нерегулярность набегают основная волна с наименьшим индексом $n = 1$. Наша задача состоит в определении амплитуд рассеянных волн. Мы предполагаем, что поле в структуре может быть записано следующим образом:

$$H_y = e^{-\alpha_1 z} \cos q_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n z} \cos q_n x,$$

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left[e^{-\alpha_1 z} \alpha_1 \cos q_1 x - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n z} \alpha_n \cos q_n x \right], \quad (2.54)$$

$$E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left[e^{-\alpha_1 z} q_1 \sin q_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n z} q_n \sin q_n x \right],$$

где α_n решения дисперсионного уравнения для четных волн (постоянные распространения), $q_n = \sqrt{\epsilon k^2 + \alpha_n^2}$, A_n - неизвестные коэффициенты.

Нам необходимо удовлетворить НГУ (2.53). Запишем их в спектральной форме. Для этого нам необходимо ввести следующие функции:

$$h(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} H_y(s) e^{j\kappa s} ds, \quad (2.55)$$

$$e(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} E_s(s) e^{j\kappa s} ds,$$

а также учесть связь $Y(s - s')$ и $Y(\kappa)$ (см. (2.2)). В результате НГУ приобретают следующий вид:

$$h(\kappa) = Y(\kappa) e(\kappa). \quad (2.57)$$

Непосредственная подстановка (2.54) в (2.55) с учетом связи s с x, z (2.53) позволяет получить выражения для $h(\kappa)$ и $e(\kappa)$:

$$h(\kappa) = h_0(\kappa) + e^{-j\kappa d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos q_n d}{\alpha_n + j\kappa} + e^{j\kappa d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos q_n d}{\alpha_n - j\kappa} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin(q_n + \kappa)d}{q_n + \kappa} + \frac{\sin(q_n - \kappa)d}{q_n - \kappa} \right), \quad (2.58)$$

$$e(\kappa) = e_0(\kappa) + \frac{e^{-j\kappa d}}{j\omega \epsilon_a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n q_n \sin q_n d}{\alpha_n + j\kappa} + \frac{e^{j\kappa d}}{j\omega \epsilon_a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n q_n \sin q_n d}{\alpha_n - j\kappa} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \alpha_n}{j\omega \epsilon_a} \left(\frac{\sin(q_n + \kappa)d}{q_n + \kappa} + \frac{\sin(q_n - \kappa)d}{q_n - \kappa} \right).$$

В формулах (2.58) под h_0 и e_0 понимаются преобразования Фурье от компонент поля падающей волны. Пока мы не будем раскрывать их, так как

при определении этих функций возникают сложности, которые будут рассмотрены ниже. Подстановка (2.58) в (2.57) дает следующий результат:

$$h_0(\kappa) - Y(\kappa)e_0(\kappa) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n(\alpha_n \cos \kappa d - \kappa \sin \kappa d)}{\alpha_n^2 + \kappa^2} \left(\cos q_n d - \frac{Y(\kappa)}{j\omega \epsilon_a} q_n \sin q_n d \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 + \frac{Y(\kappa)\alpha_n}{j\omega \epsilon_a} \right) \left(\frac{\sin(q_n + \kappa)d}{q_n + \kappa} + \frac{\sin(q_n - \kappa)d}{q_n - \kappa} \right) = 0. \quad (2.59)$$

Введем вместо адмитанса $Y(\kappa)$ импеданс $Z(\kappa)$:

$$Z(\kappa) = \frac{1}{Y(\kappa)}.$$

Кроме того, введем следующее обозначение:

$$D_0(\kappa) = h_0(\kappa)Z(\kappa) - e_0(\kappa). \quad (2.60)$$

Тогда домножая (2.59) на $Z(\kappa)$ получаем:

$$D_0(\kappa) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n(\alpha_n \cos \kappa d - \kappa \sin \kappa d)}{\alpha_n^2 + \kappa^2} \left(Z(\kappa) \cos q_n d - \frac{1}{j\omega \epsilon_a} q_n \sin q_n d \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(Z(\kappa) + \frac{\alpha_n}{j\omega \epsilon_a} \right) \left(\frac{\sin(q_n + \kappa)d}{q_n + \kappa} + \frac{\sin(q_n - \kappa)d}{q_n - \kappa} \right) = 0. \quad (2.61)$$

Функция, стоящая в левой части (2.61) является мероморфной функцией переменной κ . Нам необходимо найти коэффициенты A_n такие, чтобы она тождественно обратилась в нуль. Из-за присутствия в (2.61) тригонометрических функций это выражение может иметь бесконечно много нулей. Известен результат [20], что две мероморфные функции тождественно равны друг другу, если они равны друг другу в N точках, где $N = \max(N_1, N_2)$, N_1, N_2 - число нулей первой и второй функций на всей комплексной плоскости. Причем расположение точек, в которых достигается равенство несущественно. Важно только, чтобы они отличались друг от друга. Если N как в нашем случае стремится к бесконечности, то и совпадение функций должно обеспечиваться в бесконечно большом числе точек. Следовательно, мы можем исходя из достаточно произвольных соображений выбрать бесконечную систему точек κ_m , приравнять в них (2.61) нулю, получить

бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, решить ее относительно A_n и найденные A_n будут обеспечивать выполнение равенства (2.61) уже при любых κ . В этих рассуждениях учтено, что в правой части (2.61) стоит константа, равная нулю, то есть тоже мероморфная функция κ .

Удобной системой точек оказалась система $\kappa_m = q_m$ (определение q_m см. в комментариях к (2.54)). Приравнивая в них соотношение (2.61), получаем искомый результат:

$$D_0(q_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n(\alpha_n \cos q_m d - q_m \sin q_m d)}{\alpha_n^2 + q_m^2} \left(Z(q_m) \cos q_n d - \frac{1}{j\omega\epsilon_a} q_n \sin q_n d \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(Z(q_m) + \frac{\alpha_n}{j\omega\epsilon_a} \right) \left(\frac{\sin(q_n + q_m)d}{q_n + q_m} + \frac{\sin(q_n - q_m)d}{q_n - q_m} \right) = 0. \quad (2.62)$$

Проведем некоторые преобразования с (2.62). С учетом того, что α_n - корни дисперсионного уравнения, то есть выполняется равенство

$$Z(j\alpha_n) \cos(q_n d) - \frac{q_n \sin(q_n d)}{j\omega\epsilon_a} = 0, \quad (2.63)$$

можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\sin(q_n + q_m)d}{q_n + q_m} + \frac{\sin(q_n - q_m)d}{q_n - q_m} =$$

$$= 2j\omega\epsilon_a \cos(q_n d) \cos(q_m d) \frac{Z(j\alpha_n) - Z(j\alpha_m)}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2}, \text{ при } n \neq m \quad (2.64)$$

$$= d + \frac{\sin(2q_m d)}{2q_m d}, \text{ при } n = m.$$

Обозначим также

$$N_n = \left(d + \frac{\sin(2q_m d)}{2q_m d} \right) - j\omega\epsilon_a \frac{\cos^2(q_m d)}{\alpha_m} \frac{dZ(j\alpha_m)}{d\kappa}. \quad (2.65)$$

Подставим (2.64), (2.65) в (2.62) и получим новую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& D_0(q_m) + A_m N_m \left(Z(q_m) + \frac{\alpha_m}{j\omega\epsilon_a} \right) - \tag{2.66} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n (\alpha_n - j\omega\epsilon_a Z(j\alpha_m))}{\alpha_n^2 + q_m^2} (Z(j\alpha_n) - Z(q_m)) \cos q_n d \cos q_m d + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n (\alpha_n + j\omega\epsilon_a Z(q_m))}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2} (Z(j\alpha_n) - Z(j\alpha_m)) \cos q_n d \cos q_m d = 0.
\end{aligned}$$

Покажем, что (2.66) это система уравнений с вырожденным ядром, то есть ее можно представить в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^Q A_n C_{nk} D_{mk} + A_m B_m = f_m, \tag{2.67}$$

где A_n - неизвестны, а C_{nk}, D_{mk}, B_m, f_m известные величины, Q - конечное число.

Для этого необходимо учесть свойства $Z(\kappa)$. Поскольку

$$Z(\kappa) = \frac{1}{Y(\kappa)},$$

а $Y(\kappa)$ представляется отношением двух полиномов (2.22), то в силу условия ($M - N \geq 2$) (см. (2.22), (2.23)) при $\kappa \rightarrow \infty$ $Z(\kappa)$ ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned}
Z(\kappa) & \rightarrow b\kappa^2 + a + f(\kappa), \\
f(\kappa) & \rightarrow 0, \kappa \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Функция $f(\kappa)$ мероморфная и ограниченная на бесконечности. Поэтому, согласно /18/ ее можно представить по аналогии с $Y(\kappa)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\begin{aligned}
f(\kappa) & = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\kappa^2 + \kappa_k^2}, \\
a_k & = 2j\kappa_k \operatorname{Re} s(f(\kappa_k)),
\end{aligned}$$

где κ_k - корни полинома P_N (2.22). Следовательно, для $Z(\kappa)$ верно следующее представление:

$$Z(\kappa) = b\kappa^2 + a + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\kappa^2 + \kappa_k^2}, \quad (2.68)$$

В (2.68) имеются два члена, которые на первый взгляд препятствуют представлению (2.67). Это

$$\frac{Z(j\alpha_n) - Z(j\alpha_m)}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2} \text{ и } \frac{Z(j\alpha_n) - Z(q_m)}{\alpha_n^2 + q_m^2}.$$

Подставим в них (2.68):

$$\frac{Z(j\alpha_n) - Z(q_m)}{\alpha_n^2 + q_m^2} = -b + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{(\kappa_k^2 - \alpha_n^2)(\kappa_k^2 - \alpha_m^2)},$$

$$\frac{Z(j\alpha_n) - Z(q_m)}{\alpha_n^2 + q_m^2} = -b + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{(\kappa_k^2 - \alpha_n^2)(\kappa_k^2 + q_m^2)}.$$

Из последних формул видно, что указанные слагаемые также приобрели требуемую форму.

В общем случае для C_{nk}, D_{mk}, B_m, f_m получаются весьма громоздкие соотношения. Мы не будем приводить их. Отметим только, что бесконечная система (2.67) рядом преобразований может быть сведена к конечной системе, имеющей порядок Q .

Рассмотрим подробно частный случай $f(\kappa) = 0$, соответствующий квадратичной функции $Z(\kappa)$:

$$Z(\kappa) = b\kappa^2 + a.$$

При этом условии система алгебраических уравнений приобретает более простой вид:

$$\begin{aligned} D_0(q_m) &= \\ &= -A_m N_m \left(Z(q_m) + \frac{\alpha_m}{j\omega\epsilon_a} \right) + 2bj\omega\epsilon_a (2a + bk^2) \cos q_m d \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos q_n d. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ее решение не составляет труда. Умножим (2.68) на $\cos q_m d$ и просуммируем по m . Введем обозначение:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos q_n d. \quad (2.70)$$

С учетом (2.70) получаем:

$$X = - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_0(q_n) \cos q_n d}{N_n \left(Z(q_n) + \frac{\alpha_n}{j\omega\epsilon_a} \right)}}{1 - 2j\omega\epsilon_a b(2a + bk^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 q_n d}{N_n \left(Z(q_n) + \frac{\alpha_n}{j\omega\epsilon_a} \right)}}.$$

Теперь можно определить A_n :

$$A_n = - \frac{D_0(q_n) \cos(q_n d)}{N_n \left(Z(q_n) + \frac{\alpha_n}{j\omega\epsilon_a} \right)} + 2j\omega\epsilon_a b(2a + bk^2) \cos(q_n d) X. \quad (2.71)$$

Дальнейший анализ потребует от нас явного выражения для $D_0(q_m)$. Получим его. Для этого придется рассмотреть вспомогательную задачу о возбуждении бесконечного волновода заданным источником. Это необходимо для преодоления трудностей, связанных с интегрированием по s первичного поля от $-\infty$ до $-d$ и от d до ∞ при вычислении (2.55). Дело в том, что если считать, что падающая волна не имеет точки возбуждения, находящейся на конечном расстоянии от точки $z = 0$, то интегралы

$$\int_{-\infty}^d (H_y(s), E_s(s)) e^{jk_s s} ds, \quad \int_{-\infty}^{-d} (H_y(s), E_s(s)) e^{jk_s s} ds,$$

бесконечны.

Будем считать, что источник возбуждения, например точечный источник, находится при $z = -z_0$, $x = 0$. Пусть z_0 столь велико, что при $z = 0$

все волны кроме основной затухли настолько, что полное поле можно заменить полем волны с индексом $n = 1$. Это как раз соответствует нашей ситуации, когда нерегулярность при $z = 0$ возбуждается основной волной.

Решение задачи о возбуждении волновода заданным источником получить нетрудно (см. выше раздел об интегральном волноводе). Для нас сейчас важно, что полученное решение будет удовлетворять НГУ при $x = +d, -d$ и $-\infty < z < \infty$. Таким образом, будет выполняться соотношение:

$$h(\kappa) - Y(\kappa)e(\kappa) = 0,$$

где $h(\kappa), e(\kappa)$ суть преобразования Фурье от полного поля (H_y и E_z соответственно) взятого при $x = d$:

$$h(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} H_y(d, z) e^{j\kappa z} ds, \quad (2.72)$$

$$e(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(d, z) e^{j\kappa z} ds.$$

Представим (2.72) следующим образом:

$$h(\kappa) = \int_{-\infty}^0 H_y(d, z) e^{j\kappa z} ds + \int_0^{\infty} H_y(d, z) e^{j\kappa z} ds, \quad (2.73)$$

$$e(\kappa) = \int_{-\infty}^0 E_z(d, z) e^{j\kappa z} ds + \int_0^{\infty} E_z(d, z) e^{j\kappa z} ds..$$

Мы уже говорили, что при $z > 0$ полное поле можно заменить полем основной волны:

$$\begin{aligned} H_y &= e^{-\alpha_1 z} \cos(q_1 d), \\ E_z &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} e^{-\alpha_1 z} \cos(q_1 d). \end{aligned} \quad (2.74)$$

С учетом (2.74) интегралы от 0 до ∞ легко вычисляются. Подставим теперь (2.74) в НГУ. Нетрудно получить:

$$\int_{-\infty}^0 H_y(d, z) e^{j\kappa z} ds - Y(\kappa) \int_0^{\infty} E_z(d, z) e^{j\kappa z} ds =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_1 - j\kappa} \left(\cos(q_1 d) + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} \sin(q_1 d) \right). \quad (2.75)$$

Легко увидеть, что левая часть (2.75) совпадает с теми слагаемыми из D_0 , которые получаются путем интегрирования на полубесконечных интервалах.

Таким образом, нам удалось выразить интегралы от $-\infty$ до 0 через интегралы от 0 до ∞ . Следовательно, главная сложность, связанная с нахождением D_0 преодолена.

С учетом изложенной выше схемы и несложных преобразований для D_0 , а следовательно и для $D_0(q_m)$ можно получить:

$$D_0(q_m) = 2 \left(Z(q_m) \cos(q_1 d) - \frac{q_1}{j\omega\epsilon_a} \sin(q_1 d) \right) \frac{\alpha_1 \cos(q_m d) + q_m \sin(q_m d)}{\alpha_1^2 + q_m^2} -$$

$$- \left(Z(q_m) - \frac{\alpha_1}{j\omega\epsilon_a} \right) \left(\frac{\sin(q_1 + q_m)d}{q_1 + q_m} + \frac{\sin(q_1 - q_m)d}{q_1 - q_m} \right). \quad (2.76)$$

Для $D_0(q_m)$ можно проделать преобразования аналогичные уже сделанным при переходе от (2.62) к (2.76). В результате выражение, описывающее $D_0(q_m)$ приобретает окончательный вид:

$$D_0(q_m) = \begin{cases} 2j\omega\epsilon_a b(2a + bk^2) \cos(q_1 d) \cos(q_m d), & m \neq 1 \\ N_1 \left(\frac{\alpha_1}{j\omega\epsilon_a} - Z(q_1) \right) + 2j\omega\epsilon_a b(2a + bk^2) \cos^2(q_1 d), & m = 1 \end{cases} \quad (2.77)$$

2.6 Линейный волноводный тройник

Следующее устройство, показанное на рис. 2.7 открывает серию структур, содержащих элементы связи. В волноводной технике такое устройство получило название линейный волноводный тройник. Мы будем использовать этот же термин.

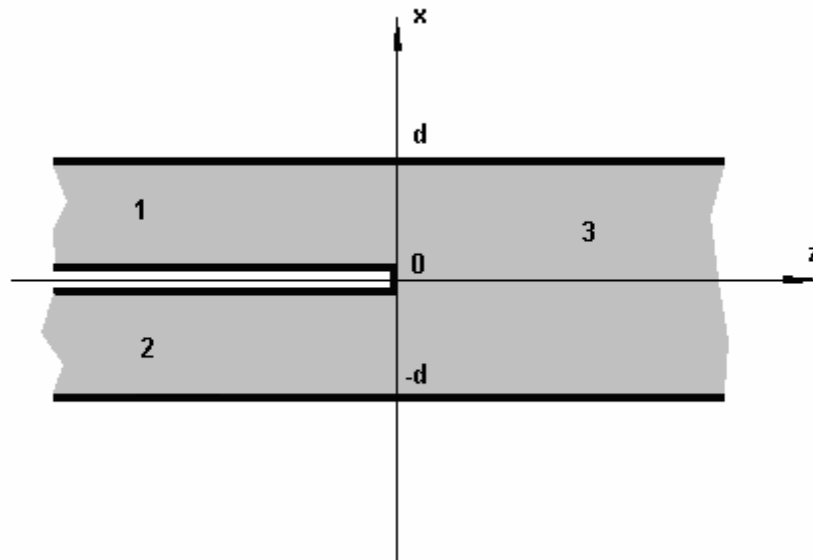


Рис. 2.7

Рассмотрим симметричный случай, когда боковые плечи тройника образованы одинаковыми волноводами. Его анализ менее громоздок, чем при произвольных ширинах волноводов и, в то же время, включает в себя все необходимые этапы.

Ещё раз отметим, что симметрия структуры позволяет отдельно решать задачу для четного и нечетного возбуждения. В первом случае мы помещаем в плоскости YOZ электрическую, а во втором — магнитную стенку. Мы уже отмечали, что (см. раздел о связанных волноводах) при чётном возбуждении элемент связи не влияет на поле, т.к. разрыв магнитного поля при $x = 0$ в силу граничных условий равен нулю. Следовательно, токи на элементе связи не наводятся и он не вносит нерегулярность в волновод (рис. 2.10а).

Наоборот, при наличии в плоскости YOZ магнитной стенки токи при $x < 0$ существуют и, следовательно, волны при переходе через точку $z = 0$ возмущаются (рис. 2.10б).

Таким образом, для четырехполюсника чётного возбуждения матрицу рассеяния можно записать сразу:

$$S_{11e} = S_{22e} = 0, \quad S_{12e} = S_{21e} = 1.$$

Здесь и далее для определения величин, относящихся к четным и нечетным волнам мы будем использовать индексы e и o от английских слов *even*, *odd* (четный, нечетный).

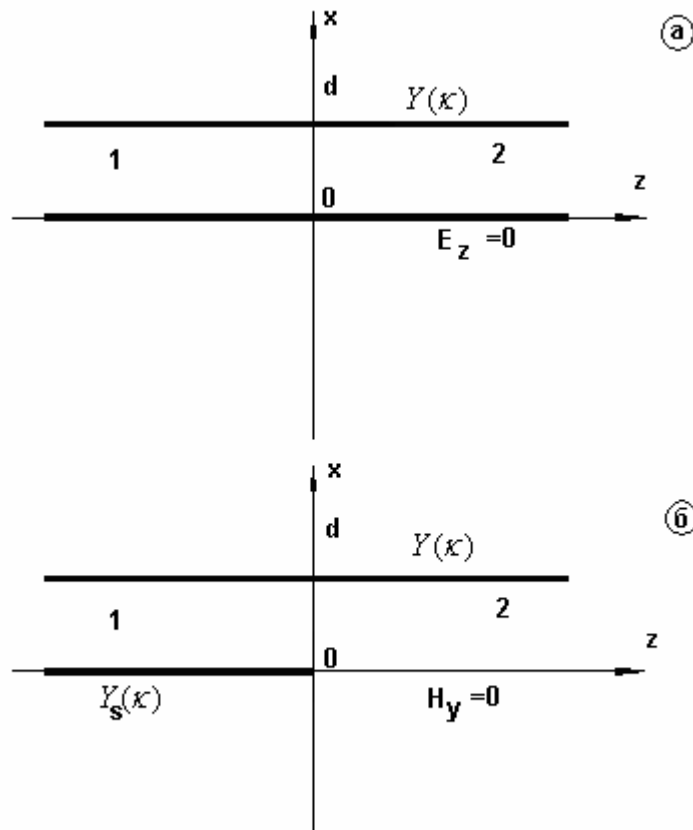


Рис. 2.8

Для определения S_{ij0} следует решить дифракционную задачу. Прежде чем перейти к её формулировке запишем известные [21] соотношения для матрицы рассеяния всего шестиполюсника:

$$\begin{aligned}
 S_{11} = S_{22} &= \frac{1}{2} S_{11}, & S_{13} = S_{23} = S_{31} = S_{32} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 S_{12} = S_{21} &= -S_{11}, & S_{33} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$

Итак, рассмотрим возбуждение структуры основной волной, набегающей из области $z < 0$. Поле при $x = d$ удовлетворяет НГУ:

$$H_y(z) = - \int_{-\infty}^{\infty} Y(z - z') E_z(z') dz' .
 \tag{2.79}$$

При $x = 0$, $z < 0$ граничные условия удобнее записать с помощью импеданса $Z(z)$:

$$E_z(z) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} Z_s(z - z') H_y(z') dz' , \quad z < 0 .
 \tag{2.80}$$

Появление двойки в (2.80) связано с тем, что мы заменили полупрозрачную пленку с НГУ на стенку с НГУ (2.80). Пределы интегрирования в (2.80) взяты бесконечными поскольку при $z > 0$ $H_y(z)=0$.

Начнем формулировку граничной задачи с представления компоненты $H_y(x;z)$ в виде интеграла Фурье:

$$H_y(x; z) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\kappa) \cos qx + B(\kappa) \sin qx) e^{-j\kappa z} d\kappa ,$$

$$q = \sqrt{k^2 - \kappa^2} . \quad (2.81)$$

Из (2.81) получается выражение для $E_z(x;z)$:

$$E_x(x; z) = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \int_{-\infty}^{\infty} q(B(\kappa) \cos qx - A(\kappa) \sin qx) e^{-j\kappa z} d\kappa . \quad (2.82)$$

Подставим (2.81), (2.82) в НГУ и возьмем от них преобразование Фурье:

$$A \cos qd + B \sin qd = -\frac{qY(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} (B \cos qd - A \sin qd) ,$$

что позволяет найти связь между A и B :

$$B = -A \frac{\cos qd - \frac{q \sin qd}{j\omega\epsilon_a} Y(\kappa)}{\sin qd + \frac{q \cos qd}{j\omega\epsilon_a} Y(\kappa)} ,$$

$$B(\kappa) = A(\kappa)\Phi(\kappa) , \quad (2.83)$$

$$\Phi(\kappa) = -\frac{\cos qd - \frac{q \sin qd}{j\omega\epsilon_a} Y(\kappa)}{\sin qd + \frac{q \cos qd}{j\omega\epsilon_a} Y(\kappa)} .$$

Далее на основании (2.80) введём функцию $f(z)$:

$$f(z) = \begin{cases} E_z(z) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} Z_s(z-z') H_y(z') dz' , & z > 0, \\ 0 , & z < 0 . \end{cases} \quad (2.84)$$

Подставим теперь (2.81), (2.82) вместе с (2.83) в (2.84) и выразим $A(\kappa)$ через $f(z)$:

$$A(\kappa) = \frac{j\omega\epsilon_a}{2\pi} \frac{D_1(\kappa)}{D_2(\kappa)} \int_0^{\infty} f(z) e^{j\kappa z} dz ,$$

$$D_1(\kappa) = \sin qd + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \cos qd , \quad (2.85)$$

$$D_2(\kappa) = q \left(\frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \sin qd - \cos qd \right) - 2Z_s(\kappa) j\omega\epsilon_a \left(\sin qd + \frac{Y(\kappa)}{j\omega\epsilon_a} q \cos qd \right).$$

Отметим, что, выражая $A(\kappa)$ и, следовательно, все компоненты поля через $f(z)$, определенную согласно (2.84), мы тем самым удовлетворяем граничным условиям при $z < 0$. Таким образом, нам осталось удовлетворить последним граничным условиям при $x = 0, z > 0$ ($H_y = 0$) поскольку при $x = d$ они уже удовлетворены за счет связи $A(\kappa)$ и $B(\kappa)$ (2.83).

Полное поле в структуре образовано первичным полем падающей волны и вторичным полем, порожденным обрывом элемента связи. Последнее выражается через $f(z')$. Приравнявая нулю при $x = 0, z > 0$ полное магнитное поле, получаем искомое интегральное уравнение относительно $f(z)$:

$$\frac{j\omega\epsilon_a}{2\pi} \int_0^{\infty} f(z') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_1(\kappa)}{D_2(\kappa)} e^{-j\kappa(z-z')} d\kappa dz' = -H_{y0}(z), \quad z > 0,$$

$$H_{y0}(z) = e^{-\alpha_1 z} , \quad (2.86)$$

где α_1 - постоянная распространения падающей волны.

Применим к (2.86) преобразование Фурье:

$$j\omega\epsilon_a F_+(\kappa) \frac{D_1(\kappa)}{D_2(\kappa)} = -\frac{1}{\alpha_1 - j\kappa} + H_-(\kappa), \quad (2.87)$$

где $F_+(\kappa)$ - Фурье образ функции $f(z)$.

Уравнение (2.87) получено из (2.86) путём доопределения его левой части при $z > 0$. Мы положили её равной некоторой неизвестной функции $h(z)$, имеющей преобразование Фурье $H_-(\kappa)$. Обозначим

$$G(\kappa) = j\omega\epsilon_a \frac{D_1(\kappa)}{D_2(\kappa)}. \quad (2.88)$$

Тогда (2.87) приводится к следующему виду:

$$F_+(\kappa)G(\kappa) = -\frac{1}{\alpha_1 - j\kappa} + H_-(\kappa). \quad (2.89)$$

Поясним смысл индексов \pm . Известно [22], что функция отличная от нуля на полуоси физической координаты z (при $z > 0$ или $z < 0$) и экспоненциально убывающая при $z \rightarrow \pm\infty$ имеет преобразование Фурье в виде регулярной функции (т.е. не имеющей особенностей) соответственно в верхней и нижней полуплоскостях переменной κ .

В нашем случае функция $f(z)$ отлична от нуля при $z > 0$ и при наличии потерь в структуре экспоненциально убывает при $z \rightarrow \infty$. Следовательно её Фурье - образ $F_+(\kappa)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости. Аналогично функция $h(z)$ имеет Фурье - образ регулярный при $\text{Im } \kappa < 0$.

Функциональное уравнение (2.89) хорошо изучено [22,23] и может быть решено методом Винера - Хопфа. Решение выражается через вспомогательные функции $G_{\pm}(\kappa)$, получающиеся в результате факторизации $G(\kappa)$, т.е. её представления в виде сомножителей:

$$G(\kappa) = G_+(\kappa) G_-(\kappa), \quad (2.90)$$

где G_+ и G_- регулярны соответственно при $\text{Im } \kappa > 0$ и $\text{Im } \kappa < 0$.

Для G_{\pm} известны [23] интегральные представления, выражающие их через $G(\kappa)$:

$$G_+(\kappa) = e^{\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\alpha)}{\alpha - \kappa} d\alpha}, \quad (2.91)$$

$$G_-(\kappa) = G_+(-\kappa).$$

Знание $G_{\pm}(\kappa)$ позволяет перейти к решению функционального уравнения (2.89).

Разделим его на $G_-(\kappa)$:

$$F_+(\kappa)G_+(\kappa) = -\frac{1}{G_-(\kappa)(\alpha_1 - j\kappa)} + \frac{H_-(\kappa)}{G_-(\kappa)}. \quad (2.92)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.92) так, чтобы оно распалось на два слагаемых, каждое из которых содержало бы только + или – функции:

$$\begin{aligned} F_+(\kappa)G_-(\kappa) + \frac{1}{G_-(-j\alpha_1)(\alpha_1 - j\kappa)} &= \\ &= \frac{H_-(\kappa)}{G_-(\kappa)} + \frac{G_-^{-1}(-j\alpha_1) - G_-^{-1}(\kappa)}{\alpha_1 - j\kappa}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

В левой части (2.93) стоят только плюс функции, а в правой — минус. Рассмотрим их поведение при $|\kappa| \rightarrow \infty$ в соответствующей полуплоскости.

Поведение функции $G(\kappa)$ зависит от поведения $Z_s(\kappa)$ и $Y(\kappa)$. Пусть при $\kappa \rightarrow \infty$ имеют место асимптотики:

$$Y(\kappa) \rightarrow y\kappa^\nu, \quad Y_s(\kappa) \rightarrow y_s\kappa^\mu, \quad (2.94)$$

где $Y_s(\kappa) = Z_s^{-1}(\kappa)$. Тогда при $\kappa \rightarrow \infty$ для $G(\kappa)$ справедлива асимптотическая формула:

$$G(\kappa) = -\frac{j\omega\epsilon_a}{\kappa} \left(1 + \frac{2}{y_s\kappa^{\mu+1}}\right)^{-1}. \quad (2.95)$$

Мы рассматриваем два варианта поведения нелокального импеданса на бесконечности. когда $\mu = -1$ и $\mu = -2$. Первый случай соответствует аппроксимации $Y(\kappa)$ целой функцией с бесконечным числом нулей и полюсов, второй с конечным. При $\mu = -1$

$$G(\kappa) = C_1\kappa^{-1},$$

а при $\mu = -2$

$$G(\kappa) = C_2\kappa^{-2}. \quad (2.96)$$

Известно [22], что такое поведение $G(\kappa)$ соответствует следующему поведению $G_\pm(\kappa)$:

$$G_{\pm}(\kappa) \approx \begin{cases} \kappa^{-1/2}, & \mu = -1, \\ \kappa^{-1}, & \mu = -2. \end{cases} \quad (2.97)$$

Относительно функции $f(z)$ можно сказать, что она выражается через компоненты поля, которые в окрестности ребра не имеют права возрастать быстрее чем $r^{-1/2}$, в соответствии с законом сохранения энергии /22/, где r - расстояние от кромки ребра до точки наблюдения.

Обозначим через $E(\kappa)$ преобразование Фурье от $E_z(0; z)$. Из (2.81) и (2.85) следует, что

$$E(\kappa) = G(\kappa) f_+(\kappa) \Phi(\kappa) q.$$

Ограничения на поведение $E_z(x; z)$ в окрестности ребра накладывают ограничения на скорость убывания $E(\kappa)$ при $|\kappa| \rightarrow \infty$. Из теории преобразования Фурье /25/ известно, что функция $E(z)$ непрерывная везде кроме точки $z = 0$, в окрестности которой она растёт не быстрее чем $z^{-1/2}$, имеет Фурье-образ $E(\kappa)$ убывающий при $|\kappa| \rightarrow \infty$ не медленнее чем $\kappa^{1/2}$. Таким образом, получаем, что $f_+(\kappa)$ при $|\kappa| \rightarrow \infty$ должна убывать не медленнее, чем $\kappa^{1/2}$ при $\mu = -1$ и $\kappa^{1/2}$ при $\mu = -2$. Аналогично, анализируя поведение спектральных плотностей функций, входящих в левую часть (2.86), убеждаемся, что $H_-(\kappa) = f_-(\kappa)G(\kappa)$ и, следовательно, $H_-(\kappa)$ должна убывать на бесконечности не медленнее $\kappa^{3/2}$ при любом μ .

С учетом сделанных выше замечаний относительно поведения на бесконечности функций, входящих в (2.93), можно сделать вывод о том, что обе части этого уравнения стремятся к нулю при $|\kappa| \rightarrow \infty$. На основании обобщенной теоремы Лиувилля /22/ можно сделать вывод о том, что они тождественно равны нулю по отдельности, то есть:

$$F_+(\kappa) = -\frac{1}{G_+(\kappa)G_-(-j\alpha_1)(\alpha_1 - j\kappa)}, \quad (2.98)$$

$$H_-(\kappa) = \frac{G_-(\kappa)}{(\alpha_1 - j\kappa)} \left(\frac{1}{G_-(\kappa)} - \frac{1}{G_-(-j\alpha_1)} \right).$$

Интересно сравнить поведение функций, стоящих в (2.98) с ограничениями, полученными выше. Из (2.98) видно, что

$$F_+(\kappa) \approx \begin{cases} \kappa^{-1/2} \\ \kappa^0 \end{cases} \begin{cases} \mu = -1 \\ \mu = -2 \end{cases}, \quad (2.99)$$

$$H_-(\kappa) \approx \begin{Bmatrix} \kappa^{-3/2} \\ \kappa^{-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu = -1 \\ \mu = -2 \end{Bmatrix}.$$

Следовательно, полученное решение удовлетворяет условию конечности запасённой энергии при любом μ . Получим теперь выражения для элементов матрицы рассеяния. Подставим с этой целью (2.98) в (2.81), (2.82) при $x = 0$:

$$H_y(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-(\kappa) e^{-j\kappa z} d\kappa}{G_-(-j\alpha_1)(\kappa + j\alpha_1)}, \quad (2.200)$$

$$F_z(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-(\kappa)}{G_-(-j\alpha_1)(\kappa + j\alpha_1)} \left(2Z_s(\kappa) + \frac{1}{G(\kappa)} \right) e^{-j\kappa z} d\kappa.$$

Замкнём контур интегрирования в выражении для $H_y(z)$ в верхней полуплоскости переменной κ и выделим вычет в точке $\kappa = j\alpha_1$, описывающей H_y компоненту поля отражённой волны:

$$H_{y\text{отр}} = -\frac{\text{Re } s G_-(j\alpha_1)}{2j\alpha_1 G_-(-j\alpha_1)} e^{\alpha_1 z}, \quad z < 0. \quad (2.201)$$

Падающая волна имела при $x = 0$ единичную амплитуду. Поэтому для S_{11o} имеет место следующая формула:

$$S_{11o} = -\frac{1}{2j\alpha_1} \frac{\text{Re } s G_-(j\alpha_1)}{G_-(-j\alpha_1)}. \quad (2.202)$$

Чтобы найти коэффициент передачи в плечо 2 надо взять вычет в точке $-j\beta_1$ в интеграле для E_z . Здесь под $-j\beta_1$ понимается постоянная распространения нечетной волны в области 2 с наименьшим индексом, которая, вообще говоря, может быть и запредельной. Вычет в точке $\kappa = -j\beta_1$ имеет функция $1/G(\kappa)$ поскольку $D_1(\kappa)$ в этой точке обращается в нуль. Итак, для E_z компоненты основной нечётной волны при $z > 0$ имеем:

$$E_{z\text{прош}} = \frac{e^{-\beta_1 z}}{G_-(-j\alpha_1)(\kappa + j\alpha_1)} \text{Re } s \left(\frac{1}{G_+(-j\beta_1)} \right). \quad (2.203)$$

Чтобы найти элемент матрицы рассеяния S_{21o} необходимо коэффициент при экспоненте умножить на нормировочный сомножитель, равный отношению мощностей отражённой и падающей волн. Мы его вычислять не будем, поскольку при проектировании подобных устройств плечо 2 делают

запредельным для нечётной волны. В этом случае многополюсник нечётного возбуждения оказывается двухполюсником, характеризующимся S_{11o} ($S_{21o} = 0$).

Итак, задача анализа линейного волноводного тройника решена. Далее перейдем к ещё одной структуре, содержащей неоднородные элементы связи: волноводам, связанным через щель.

2.7. Волноводы, связанные через щель

Это название структуры, изображенной на рис. 2.9 весьма условно, поскольку разрыв элемента связи, вообще говоря, соответствует щели только в случае щелевых ИС. Если речь идет о полосковых устройствах, то он моделирует, как раз наоборот перемычку в щели. Помня об этом, мы будем использовать этот термин.

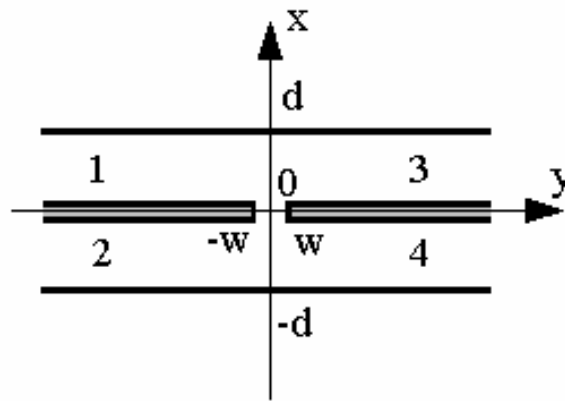


Рис. 2.9

Подход к анализу обсуждаемой структуры весьма похож на тот, что был развит выше, по крайней мере, на этапе вывода интегрального уравнения. Также как и раньше будем рассматривать два случая чётного и нечётного возбуждения, которым соответствуют два четырёхполюсника (см. рис. 2.10 а). При $E_z = 0$ ($x = 0$) четырёхполюсник представляет отрезок регулярного волновода удвоенной ширины (по отношению к ширине волноводов, образующих плечи многополюсника). Поэтому мы без труда можем записать матрицу рассеяния:

$$S_{11e} = S_{22e} = 0, \quad S_{12e} = S_{21e} = e^{-2\alpha_e W}, \quad (2.204)$$

где $\alpha_e = j\beta_e$, β_e - постоянная распространения основной волны волновода удвоенной ширины (мы по-прежнему предполагаем, что все плечи многополюсника одномодовые).

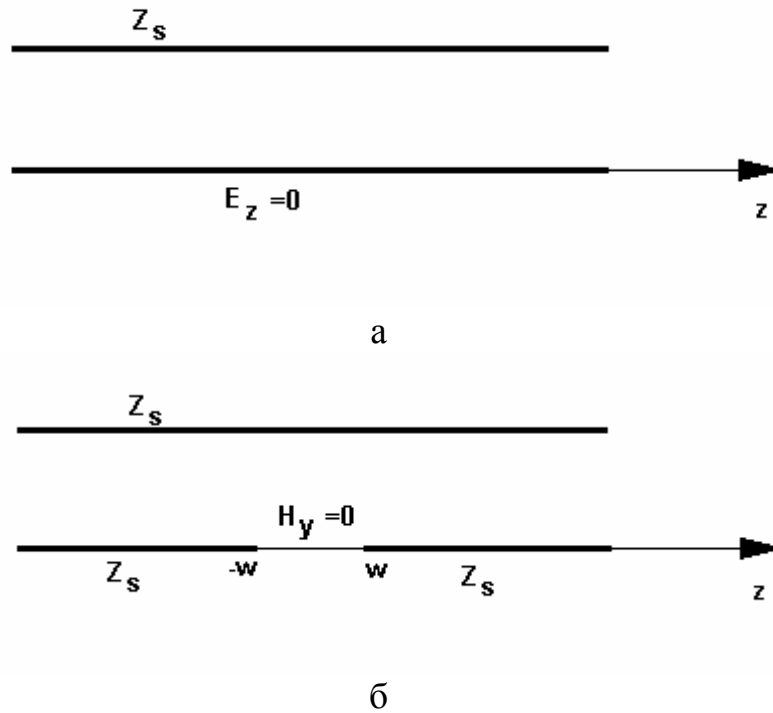


Рис. 2.10

Матрица рассеяния всего устройства выражается через матрицы рассеяния четырёхполюсников чётного и нечётного возбуждения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} &= \frac{S_{11e} + S_{11o}}{2}, \\
 S_{21} = S_{12} = S_{34} = S_{43} &= \frac{S_{11e} - S_{11o}}{2}, \\
 S_{31} = S_{13} = S_{24} = S_{42} &= \frac{S_{21e} + S_{21o}}{2}, \\
 S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32} &= \frac{S_{21e} - S_{21o}}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.205}$$

Таким образом, для определения S_{ij} нам не хватает знания S_{ijo} .

При нечётном возбуждении структуры дифракционная задача может быть сформулирована следующим образом. На нерегулярность слева набегают основная нечётная волна системы двух связанных волноводов с постоянной распространения β_o . Нам необходимо найти амплитуды рассеянных волн и как следствие элементы матрицы рассеяния S_{ijo} .

Как уже отмечалось выше, подход к выводу интегрального уравнения не отличается от уже изложенного в разделе о волноводном тройнике. Отметим, не вдаваясь детали, основные моменты.

Граничные условия при $x = d$ и $x = 0$ берутся в форме (2.79) и (2.80) за исключением того, что при $x = 0$ они выполняются на интервале $|z| > W$, а не $z < 0$. Далее вводится функция $f(z)$:

$$f(z) = \begin{cases} E_z - 2 \int_{-\infty}^{\infty} Z_s(z - z') H_y(z') dz', & |z| < w, \\ 0, & |z| > w, \end{cases} \quad (2.206)$$

с помощью которой выражаются все компоненты поля. Наконец приравняется нулю при $|z| < w$ магнитное поле, что позволяет получить искомое интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w f(z') \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa) e^{-j\kappa(z-z')} dz' d\kappa = -H_{y0}(z), \quad (2.207)$$

$$H_{y0}(z) = e^{-\alpha_0 z}, \quad \alpha_0 = j\beta_0.$$

Если ввести обозначение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa) e^{-j\kappa(z-z')} d\kappa = K(z; z'),$$

то (2.207) можно записать более компактно:

$$\int_{-w}^w f(z') K(z; z') dz' = -H_{y0}(z). \quad (2.208)$$

Решим (2.208) для случая малых w ($w \ll \lambda$). Будем считать, что $Z_s(\kappa)$ описывается более точной функцией с $\mu = 1$. Это означает, что функция $G(\kappa)$ ведёт себя при $|\kappa| \rightarrow \infty$ как $1/\kappa$, а точнее как $(1/|\kappa|) e^{-j\kappa(z-z')}$. Такое поведение $G(\kappa)$ отвечает функции $K(z; z')$ содержащей логарифмическую особенность при $(z - z') \rightarrow 0$. Иными словами в окрестности точки $z = z'$ $K(z; z')$ можно представить в виде следующего разложения:

$$K(z; z') = a \ln|z - z'| + a_0 + a_2 (z - z')^2 + \dots \quad (2.209)$$

С учётом условия $w \ll \lambda$ мы можем в (2.209) удерживать, например, только первые два слагаемых.

С другой стороны, первичное поле, описываемое функцией $e^{-\alpha_0 z}$ тоже можно упростить, заменяя экспоненту её разложением в ряд Тейлора:

$$e^{-\alpha_0 z} \approx 1 - \alpha_0 z \approx 1.$$

Можно убедиться, что при чётной функции $f(z)$ линейное слагаемое в разложении экспоненты не внесёт своего вклада в решение. Поэтому в рамках нулевого приближения допустимо её считать равной единице.

Таким образом, вместо (2.208) мы получаем новое интегральное уравнение:

$$\int_{-w}^w f(z') \ln|z - z'| dz' + a_0 \int_{-w}^w f(z') dz' = -1.$$

Продифференцируем его по z :

$$\int_{-w}^w \frac{f(z') dz'}{z - z'} = 0. \quad (2.210)$$

Уравнение (2.210) относится к классу сингулярных интегральных уравнений [24]. Его общее решение известно:

$$f(z) = \frac{C}{\sqrt{w^2 - z^2}}, \quad (2.211)$$

C - некоторая константа.

Знание статического, по существу решения (2.211) позволяет нам использовать его в качестве хорошего приближения для $f(z)$ в более общем случае, т.е. и при не очень малых w . Последнее оправданно если нам удалось выразить элементы матрицы рассеяния через вариационно устойчивые функционалы, записанные относительно $f(z)$. Поэтому далее приступим к решению именно этой задачи.

Найдем амплитуды отражённой и прошедшей через нерегулярность волн (имеются в виду основные волны с постоянными рассеяния $\pm j\beta_0$). Поскольку все плечи рассматриваемого многополюсника идентичны, то проблем с нормировкой амплитуд не возникает, так что в этом качестве может выступать просто амплитуда некоторой компоненты поля, например

H_y при $x = 0$. Отметим, что в этом случае падающая волна имеет единичную амплитуду.

Рассеянное магнитное поле $H_y(z)$ выражается следующим образом:

$$H_y(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w f(z') \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa) e^{-j\kappa(z-z')} d\kappa dz' . \quad (2.212)$$

Амплитуды волн можно определить, выделяя в интеграле по κ вычеты в точках $\pm j\alpha_0$ или $\pm \beta_0$. В результате нетрудно получить следующее:

$$H_{y0} = j \operatorname{Re} sG(j\alpha_0) e^{\alpha_0 z} \int_{-w}^w f(z') e^{-\alpha_0 z'} dz', \quad (2.213)$$

$$H_{yn} = -j \operatorname{Re} sG(-j\alpha_0) e^{-\alpha_0 z} \int_{-w}^w f(z') e^{\alpha_0 z'} dz',$$

Теперь положим, что $f(z)$ равна константе, умноженной на некоторую пробную функцию $F(z)$, которая известна (это и есть та самая аппроксимация $f(z)$). Константу C можно определить из (2.208), домножая уравнение на $f(z)$ и интегрируя по z от $-w$ до w :

$$C = \frac{\int_{-w}^w f(z) e^{-\alpha_0 z} dz}{\int_{-w}^w \int_{-w}^w F(z) F(z') K(z, z') dz dz'} . \quad (2.214)$$

Не составит теперь труда на основе (2.213) и (2.214) найти S_{11o} , S_{12o} :

$$S_{11o} = j \operatorname{Re} sG(j\alpha_0) \frac{\left(\int_{-w}^w f(z) e^{-\alpha_0 z} dz \right)^2}{\int_{-w}^w \int_{-w}^w F(z) F(z') K(z, z') dz dz'}$$

$$S_{21o} = 1 - j \operatorname{Re} sG(-j\alpha_0) \frac{\left(\int_{-w}^w f(z) e^{-\alpha_0 z} dz \right)^2}{\int_{-w}^w \int_{-w}^w F(z) F(z') K(z, z') dz dz'}. \quad (2.215)$$

Нетрудно убедиться с помощью исходного интегрального уравнения, что (2.214) устойчивы относительно малых вариаций $F(z)$. Для $F(z)$, как уже отмечалось выше удобно воспользоваться формулой (2.211).

На этом анализ структур методом НГУ заканчивается. Далее мы рассмотрим связь последнего с широко известным эвристическим методом Олинера /25/. Это необходимо нам по той причине, что, с одной стороны, интересно понять в каком отношении они находятся и, с другой стороны, ряд структур довольно интересных с практической точки зрения удастся проанализировать с помощью комбинированного подхода, основанного на сочетании методов Олинера и НГУ.

3. Методы на основе метода нелокальных граничных условий

3.1 Метод Олинера

Напомним кратко идею Олинера, лежащую в основе предложенного им подхода к моделированию устройств на СПЛ /25/, который позднее был развит для случаев МПЛ и щелевых структур /14/.

Будем рассматривать регулярную СПЛ (рис.2.12). О характере поля в ней уже подробно говорилось в разделе 1, где было показано, что взаимодействие границ осуществляется преимущественно через дальнее поле, тогда как ближнее сосредоточено около кромок проводников. Также уже отмечалось, что дальнее поле удовлетворяет двумерному волновому уравнению для однородной среды.

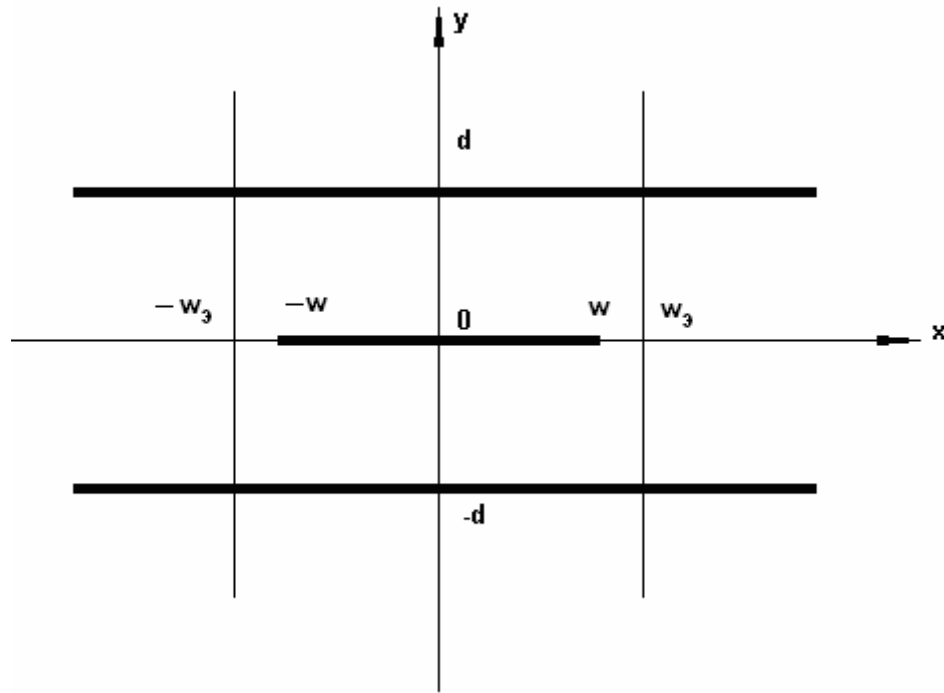


Рис. 3.1

Предложение Олинера сводится к следующему. Если мы поместим при $x = \pm (w + \Delta l_3)$ магнитные стенки, и продлим центральную полосу до этих стенок, то

а) мы получим волновод (точнее, два изолированных волновода) с Т-волной, имеющей такую же постоянную распространения, как и основная волна СПЛ;

б) выбором W_3 мы можем сделать волновые сопротивления исходной СПЛ и полученного волновода равными друг другу;

в) формулировка и решение граничных задач для структур на основе такого волновода много проще чем для структур на основе СПЛ.

Как уже видно из пункта (в) Олинер расширил границы эквивалентности СПЛ и волновода, распространив ее на нерегулярные структуры, что позволило поставить каждой из них в соответствие ее модель Олинера. Очень важно также, что в большинстве случаев для модельной структуры удалось получить простое решение, как правило, в аналитической форме.

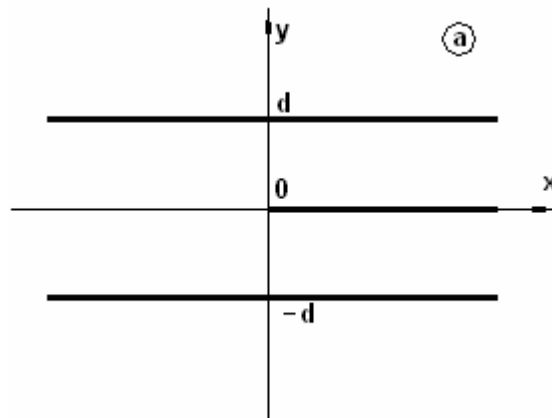
Очевидно, что в рамках описанных выше рассуждений как-либо обосновать переход от структуры полосковой к волноводной невозможно. Ясно только, что вместо, например, сочленения полосковых линий мы получаем сочленение волноводов с теми же волновыми сопротивлениями. Очевидно, что в статическом режиме ($f \rightarrow 0$) их свойства неизбежно близки, так как они определяются только значениями волновых сопротивлений. Что же касается паразитных реактивностей, то адекватность их описания основывается только на физической интуиции А. Олинера. Следует отдать

должное последней, поскольку много десятилетий решения, полученные в оригинальной работе /25/ служили и служат едва ли не единственным инструментом проектировщика.

Постараемся взглянуть на подход А. Олинера с позиций развитого выше подхода НГУ. Возможно, это позволит как-то обосновать его или, по крайней мере, провести между ними какие-то аналогии.

Мы уже говорили, что с точки зрения дальнего поля реальная граница области занятой им в виде кромки центральной полосы эквивалентна стенке с НГУ. Еще раз повторим, что однородность стенки вдоль оси OY вместе с двумерными волновыми уравнениями, которым удовлетворяет дальнее поле, позволяет заменить реальную структуру ее двумерным аналогом. В частности, мы можем перейти от полубесконечной трехмерной структуры, показанной на рис. 3.1а к полубесконечной двумерной (рис. 3.1б).

При переходе от реальной схемы к модели Олинера мы совершаем аналогичные действия, то есть заменяем реальную структуру двумерным аналогом. Это момент весьма существенен, так как, вообще говоря, модель Олинера трехмерна, но эта трехмерность иллюзорна. Действительно, заменив острые кромки идеально проводящими стенками мы автоматически удалили ближнее поле, оставив только дальнее, а оно подчиняется двумерным уравнениям и т.д. Не случайно, что почти для всех полосковых нерегулярностей потом (см. например /14/) были сформулированы именно двумерные задачи. Конечно, в оригинальных работах Олинера рассуждения подобные приведенным отсутствуют. Тем не менее, преобразования совершаемые при переходе от полосковой нерегулярности к ее модели Олинера, по существу есть преобразования описанные в разделе 1 при формулировке двумерной граничной задачи.



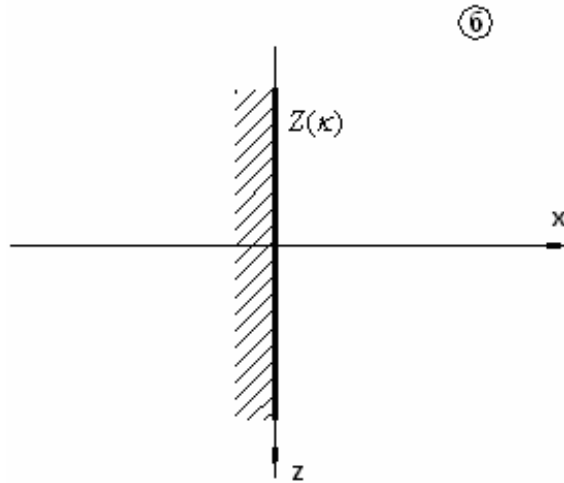


Рис. 3.1

Разница, однако имеется. Она состоит в способе учета вклада ближнего поля. Если в случае, рассмотренном в разделе 1 мы ввели НГУ непосредственно на границе области, занятой дальним полем, то в модели Олинера мы упрощаем вид граничных условий, но положение поверхности, на которой они заданы, изменяем. Отсюда и разница между w и w_3 .

Интересно посмотреть какому импедансу эквивалентна магнитная стенка, фигурирующая в методе Олинера и сдвинутая на расстояние Δl_3 относительно плоскости, в которой установлены НГУ. Такой импеданс для парциальной плоской волны с проекцией волнового вектора на ось OZ равной κ найти не составляет труда:

$$Z(\kappa) = -j\omega\mu_a \frac{\text{ctg}q\Delta l_3}{q}, \quad q = \sqrt{k^2 - \kappa^2}. \quad (3.1)$$

Если мы с помощью принципа Бабине перейдем от E -волны к H -волне, то (3.1) заменится адмитансом $Y(\kappa)$. Поведение функции $Z(\kappa)$ ($Y(\kappa)$) очень похоже на поведение функции $Z(\kappa)$, полученной из строгого решения ключевой задачи (см. главу 5). Во-первых, обе они при $|\kappa| \rightarrow \infty$ ведут себя как $1/|\kappa|$. Во-вторых, обе они имеют полюса на действительной оси в точках $\pm k\sqrt{\varepsilon}$. Наконец, если говорить уже об аппроксимации строгого результата, то она как и (3.1) мероморфная функция. Таким образом, по крайней мере, качественно импеданс границы, получаемый по методу Олинера близок к импедансу реальной границы. Близость, однако, не означает полного совпадения. В рамках метода Олинера мы имеем только один свободный параметр, варьируя который мы можем приблизить (3.1) к точной функции. Этого явно недостаточно, чтобы равенство обеспечивалось при любом κ , или

хотя бы в сколь угодно большом числе точек, как это имеет место при аппроксимации импеданса мероморфной функцией достаточно общего вида.

А. Олинер выбирает Δl , так, чтобы совпадали волновые сопротивления исходной линии и ее модели. Не вдаваясь в детали обоснования, скажем, что это эквивалентно равенству производных при $k = k\sqrt{\varepsilon}$ точной функции $Z(k)$ и ее аппроксимации (3.1).

Сразу же становится ясно почему метод Олинера дает менее точные результаты (см. /15/) когда один из волноводов, образующих нерегулярность попадает в многомодовый режим или в режим близкий к отсечке высших типов волн. Это связано с неспособностью (3.1) правильно описать $Z(k)$ в области $k \approx 0$ и, следовательно, с невозможностью корректно определить критические частоты высших типов волн в рамках модели Олинера. Нетрудно также убедиться, что эта сложность для метода НГУ не существует.

Суммируя сказанное выше, можно сделать вывод, что методы Олинера и НГУ принадлежат к одной группе, причем большей общностью обладает метод НГУ. Метод Олинера вытекает из него, если вместо точного выражения для $Z(k)$ используется функция (3.1).

Далее рассмотрим две нерегулярности в интегральном волноводе, содержащие элементы связи. Особенность их анализа заключается в том, что сам волновод мы заменим его моделью Олинера или волноводной моделью, в то время как элемент связи по-прежнему будет описываться с помощью НГУ.

3.2 Нерезонансные переемычки в волноводе

На рис. 3.2 показаны полосковая (а) и щелевая (б) нерегулярности, моделируемые с помощью структуры (в). В случае (а) мы имеем дело с емкостным зазором, в случае (б) с индуктивными переемычками. Их модель (в) — это плоский металлический волновод шириной $2d$, (реальная ширина линии $2d$) заполненный диэлектриком с относительной проницаемостью ε .

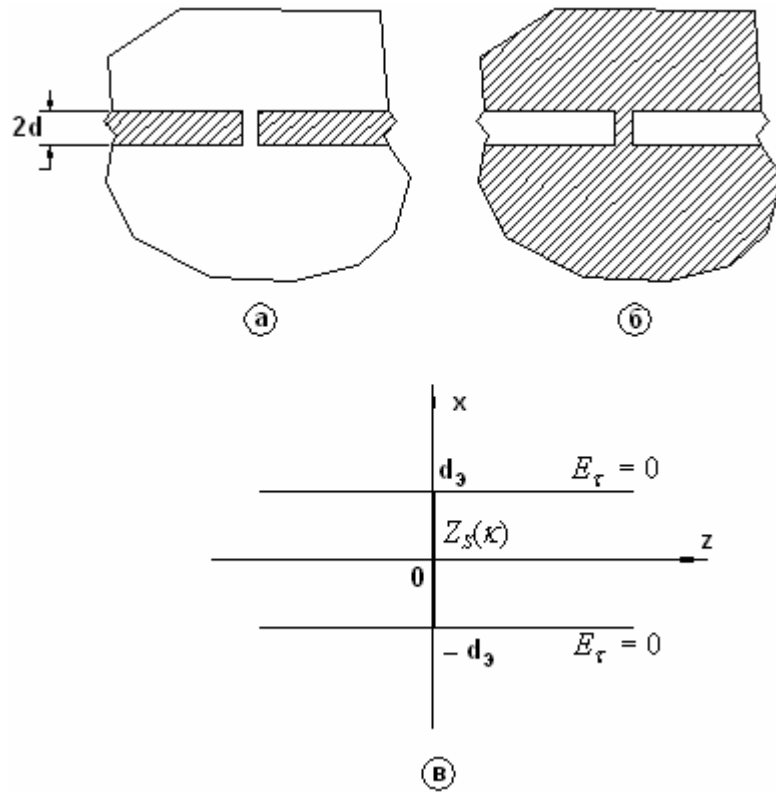


Рис. 3.2

При анализе такой структуры возникает проблема записи НГУ на конечном интервале. Она решается аналогично рассмотренному уже случаю круглого резонатора, когда конечный интервал был преобразован в бесконечный путем периодического продолжения поля на бесконечности. Для структуры рис. 3.2 в это нетрудно сделать, если использовать принцип зеркального изображения. В частности, если на нерегулярность набегают основная волна плоского волновода, не имеющая зависимости поля от x , то ее дифракцию можно эквивалентно описать в терминах дифракции плоской волны, нормально падающей на полупрозрачную пленку, характеризующуюся нелокальным импедансом $Z_s(k)$ (рис.3.2).

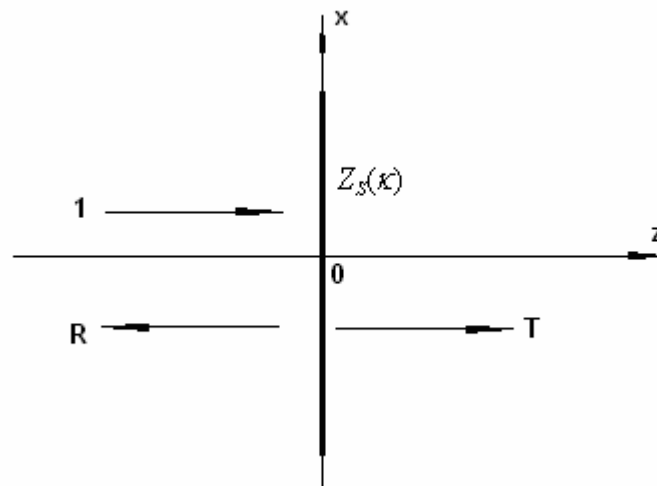


Рис. 3.2

Ситуация еще более упростится, если мы вспомним, что для плоской волны НГУ становятся локальными, поскольку κ фиксируется. В нашем случае $\kappa = 0$.

Таким образом, исходная задача свелась к дифракции плоской волны, нормально падающей на пленку с граничными условиями:

$$\begin{aligned} E_z \Big|_{z=-0} &= E_z \Big|_{z=+0} , \\ E_z(0) &= Z_S(0) \Delta H_y , \\ \Delta H_y &= H_y \Big|_{z=-0} - H_y \Big|_{z=+0} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение этой задачи элементарно и мы не будем вдаваться в его детали, а приведем сразу окончательные выражения для коэффициентов отражения \dot{R} и прохождения \dot{T} :

$$\dot{R} = -\frac{W}{W + 2Z_S(0)} , \quad \dot{T} = 1 + \dot{R} , \quad (3.3)$$

где W — волновое сопротивление среды с проницаемостью равной ϵ .

Более трудной структурой с точки зрения ее анализа является интегральный волновод с резонансными перемычками. Мы рассмотрим эту нерегулярность в рамках комбинированного подхода изложенного выше.

3.3 Волновод с резонансными перемычками

На рис. 3.3 а, б, в показаны полосковая и щелевая структуры и их двумерная модель. Усложнение в сравнении с нерезонансными перемычками связано с появлением в них зазора, нарушающего непрерывность элемента связи.

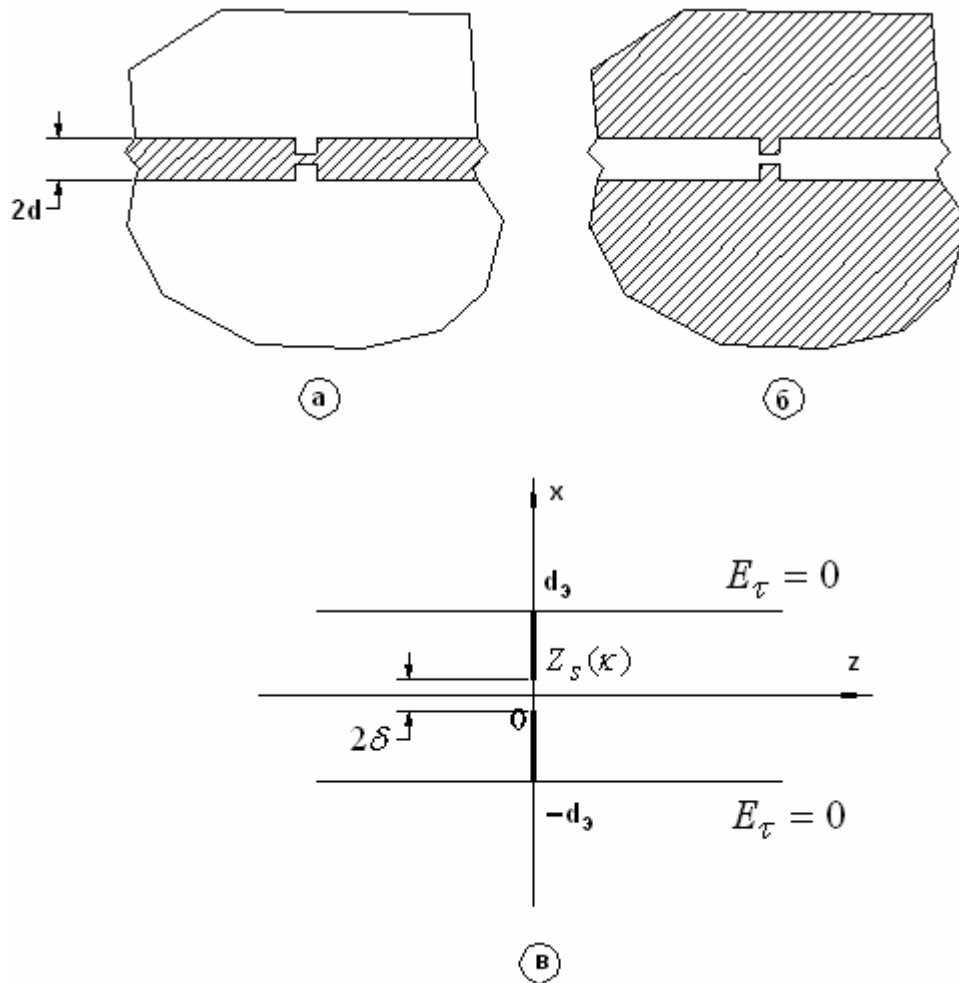


Рис. 3.3

Данная нерегулярность симметрична относительно плоскости XOY . По этой причине, как мы это уже неоднократно отмечали, ее анализ сводится к решению двух задач — для четного и нечетного возбуждения. В первом случае в плоскости симметрии размещается магнитная, а во втором случае — электрическая стенка. В разделе о связанных через щель волноводах показано, что в случае размещения электрической стенки элемент связи не возбуждается и не влияет на дифракцию волн. Тогда единственный элемент матрицы рассеяния многополюсника нечетного возбуждения (в нашей ситуации двухполюсника) - коэффициент отражения R_o определяется элементарно:

$$R_o = -1 . \quad (3.4)$$

При четном возбуждении нерегулярности она вырождается в полубесконечную структуру, показанную на рис. 3.4.

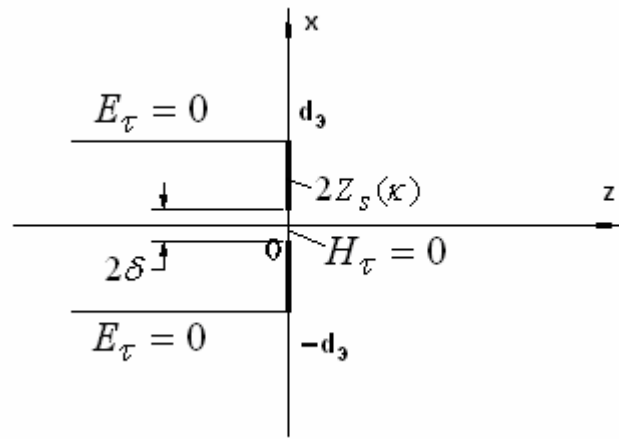


Рис. 3.4

Запишем граничные условия при $z = 0$ в следующей форме:

$$E_x(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} H_y(x') Z_S(x-x') dx' , \quad (3.5)$$

$$\delta \leq |x| \leq d_3 .$$

При записи (3.5) мы совершили два шага, требующих обоснования. Во-первых, мы включили в интервал интегрирования область $|x| < \delta$. Во-вторых, вышли за пределы волновода, то есть области $|x| < d_3$. Справедливость первого шага обоснована тем, что при $|x| < \delta$ $H_y = 0$ и, следовательно, расширяя пределы интегрирования, мы ничего не меняем. Частично справедливость второго преобразования уже обсуждалась выше. То есть записывая (3.5) мы предполагаем, что при $|x| > d_3$ поле периодически повторяет свое поведение при $|x| < d_3$ (по крайней мере E_x и H_y компоненты). Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$H_y(x+2d_3 n) = H_y(x) ,$$

$$E_x(x+2 d_3 n) = E_x(x) , \quad (3.6)$$

$$n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Запишем далее поля в виде разложений по собственным волнам:

$$H_y = e^{-\alpha_0 z} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n x}{d_3} e^{\alpha_n z} ,$$

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left(\alpha_0 e^{-\alpha_0 z} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha_n e^{\alpha_n z} \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta} \right), \quad (3.7)$$

$$\alpha_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{d_\vartheta} \right)^2 - k^2}.$$

При $z = 0$ из (3.7) получаем:

$$H_y = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta}, \quad H_n = \delta_n + A_n,$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta}, \quad E_n = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} (\alpha_0 \delta_n - \alpha_n A_n), \quad (3.8)$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Подставим формулы (3.8) в НГУ (3.5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta} = \frac{1}{\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos \frac{\pi n x'}{d_\vartheta} Z_S(\kappa) e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa dx'. \quad (3.9)$$

Здесь мы сразу использовали представление $Z_S(x-x')$ в виде интеграла Фурье. Рассмотрим теперь отдельно интеграл по x' :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{\pi n x'}{d_\vartheta} e^{j\kappa x'} dx' = \pi \left(\delta\left(\kappa - \frac{\pi n}{d_\vartheta}\right) + \delta\left(\kappa + \frac{\pi n}{d_\vartheta}\right) \right).$$

Подставим этот результат обратно и вычислим интеграл по κ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n Z_S\left(\frac{\pi n}{d_\vartheta}\right) \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta}, \quad \delta \leq |x| \leq d_\vartheta. \quad (3.10)$$

Теперь на основе равенства (3.10), выражающего граничные условия при $z = 0$, введем новую неизвестную функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(E_n - 2H_n Z_S \left(\frac{\pi n}{d_{\text{э}}} \right) \right) \cos \frac{\pi n x}{d_{\text{э}}}, & |x| \leq \delta, \\ 0, & \delta \leq |x| \leq d_{\text{э}}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.11) с (3.10), мы можем убедиться, что равенство $f(x)$ нулю при $\delta \leq |x| \leq d_{\text{э}}$ обеспечивает выполнение на этом интервале граничных условий.

Не составляет труда выразить коэффициенты разложений A_n через $f(x)$:

$$A_0 = \frac{\alpha_0 - 2j\omega\epsilon_a Z_S(0)}{\alpha_0 + 2j\omega\epsilon_a Z_S(0)} - \frac{j\omega\epsilon_a}{2d_{\text{э}}(\alpha_0 + 2j\omega\epsilon_a Z_S(0))} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx,$$

$$A_n = - \frac{j\omega\epsilon_a}{d_{\text{э}} \left(\alpha_n + 2j\omega\epsilon_a Z_S \left(\frac{\pi n}{d_{\text{э}}} \right) \right)} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) \cos \frac{\pi n x}{d_{\text{э}}} dx. \quad (3.12)$$

Для того, чтобы получить интегральное уравнение относительно $f(x)$ осталось сделать последний шаг, а именно приравнять нулю при $|x| \leq \delta$ $H_y(x)$, выраженную через $f(x)$:

$$H_y(x) = \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 2j\omega\epsilon_a Z_S(0)} - \frac{j\omega\epsilon_a}{d_{\text{э}}} \int_{-\delta}^{\delta} f(x') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n \cos \frac{\pi n x}{d_{\text{э}}} \cos \frac{\pi n x'}{d_{\text{э}}}}{\left(\alpha_n + 2j\omega\epsilon_a Z_S \left(\frac{\pi n}{d_{\text{э}}} \right) \right)} dx',$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0. \end{cases}$$

Окончательно интегральное уравнение имеет следующий вид:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) K(x, x') dx' = F_0,$$

$$K(x; x') = \frac{j\omega\epsilon_a}{d_\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta} \cos \frac{\pi n x'}{d_\vartheta}}{\alpha_n + 2j\omega\epsilon_a Z_S \left(\frac{\pi n}{d_\vartheta} \right)}, \quad (3.13)$$

$$F_0 = \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 2j\omega\epsilon_a Z_S(0)}.$$

На основе (3.13) нетрудно записать вариационно устойчивый функционал для интересующего нас коэффициента отражения или входной проводимости (импеданса).

Вычтем из $K(x; x')$ слагаемое, соответствующее $n = 0$ и перенесем его в правую часть (3.13). Учтем также (3.12). Тогда приходим к новому виду интегрального уравнения:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x') \tilde{K}(x; x') dx' = 1 + A_0, \quad (3.14)$$

$$\tilde{K}(x; x') = \frac{j\omega\epsilon_a}{d_\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n \cos \frac{\pi n x}{d_\vartheta} \cos \frac{\pi n x'}{d_\vartheta}}{\left(\alpha_n + 2j\omega\epsilon_a Z_S \left(\frac{\pi n}{d_\vartheta} \right) \right)}.$$

Умножим (3.14) на $f(x)$ и проинтегрируем уравнение по x . Учтем также следующее равенство, вытекающее из (3.14):

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = -\frac{2d_\vartheta}{j\omega\epsilon_a} (\alpha_0 + 2j\omega\epsilon_a Z_S(0)) A_0 + \frac{(\alpha_0 + 2j\omega\epsilon_a Z_S(0)) 2d_\vartheta}{j\omega\epsilon_a}.$$

После несложных преобразований получаем:

$$Z = 2 \frac{j\omega\epsilon_a}{\alpha_0} Z_S(0) + \frac{j\omega\epsilon_a}{2d_3\alpha_0} \frac{\left\{ \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx \right\}^2}{\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)f(x')K(x;x') dx dx'}$$

$$Z = \frac{1 - A_0}{1 + A_0} . \quad (3.15)$$

Здесь Z - входной импеданс нерегулярности. Коэффициент отражения записывается следующим образом:

$$R_e = \frac{Z - 1}{Z + 1} . \quad (3.16)$$

Полная матрица рассеяния имеет следующий вид:

$$S_{11} = S_{22} = -\frac{1}{Z + 1} , \quad S_{12} = S_{21} = \frac{Z}{1 + Z} . \quad (3.17)$$

Относительно функции $f(x)$ можно сказать, что она вполне аналогична функции рассмотренной в ходе анализа волноводов с разрывным элементом связи. Поэтому и в нашем случае для нее можно использовать аппроксимацию:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta^2 - x^2}} .$$

На этом месте мы закончим изложение метода НГУ для закрытых структур. Рассмотрены наиболее типичные волноводные регулярности и продолжение этого ряда не внесет каких-либо существенных особенностей в понимание метода и специфики его применения в разных ситуациях. В тоже время, набор проанализированных структур достаточно широк.

Основываясь на полученных результатах, можно подвести некоторые итоги. Следует сказать, что применение НГУ несомненно в ряде случаев делает постановку и решение граничной задачи более простыми, чем при непосредственном анализе трехмерной структуры. Тем не менее, специфика, вносимая нелокальностью границы достаточно существенна и для некоторых структур вопрос о решении уже двумерной задачи нетривиален. Поэтому актуальной проблемой здесь является развитие методов решения двумерных нелокальных задач. Простое их заимствование в готовом виде,

встречающееся в методе Олинера здесь не проходит. Несмотря на все эти проблемы, нам все-таки удалось найти достаточно простые и компактные решения, в том числе и для наиболее сложных структур - сочленений интегральных волноводов.

В изложенном выше материале никак не обсуждался вопрос об адекватности полученных результатов, их сопоставлении с экспериментом и с расчетом по другим методам. Эти проблемы, насколько это возможно, будут рассмотрены в последней главе книги. Пока для нас главными вопросами были формулировка граничных задач и их решения, то есть методическая часть исследования.

В следующем разделе, будут рассмотрены, так называемые открытые структуры, то есть объекты, хотя и волноводного типа, но допускающие возможность излучения электромагнитной энергии на бесконечность. К их числу относятся интегральные устройства на основе ОДВ.

4. Метод нелокальных граничных условий для открытых структур

4.1. Собственные волны открытого волновода

На рис. 4.1 показан регулярный ОДВ и его двумерная модель. Далее, говоря о двумерном волноводе, показанном на рис. 4.1 б, будем использовать термин открытый волновод (ОВ). Известно [26], что в волноведущих структурах не ограниченных в поперечном сечении поле может быть представлено в виде суммы (конечной или бесконечной) волн дискретного спектра и интеграла по волнам непрерывного спектра. Наличие в разложении по собственным волнам интегрального слагаемого представляет собой основное отличие открытых линий передачи от закрытых, с которыми мы до сих пор имели дело.

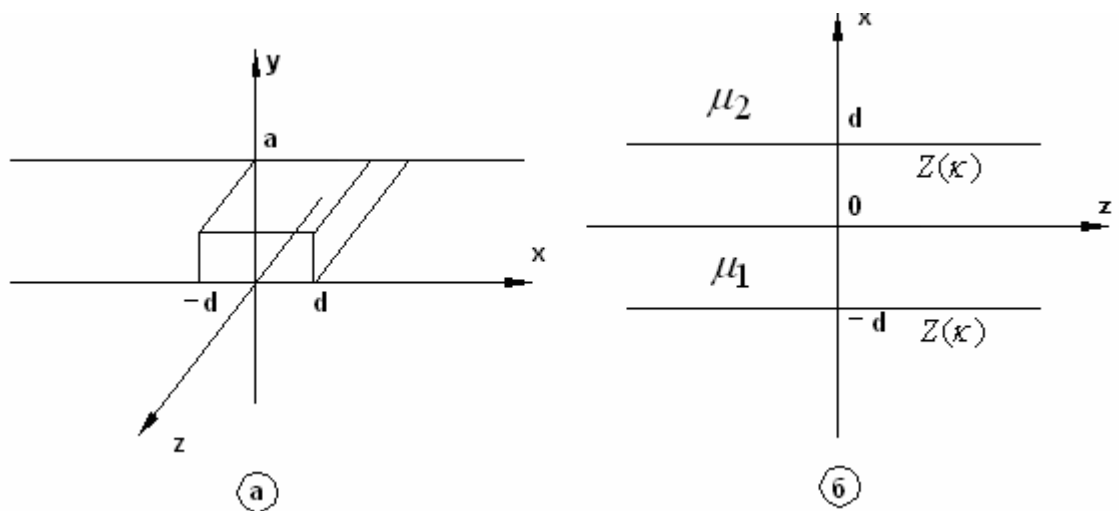


Рис. 4.1

Будем действовать по следующей схеме. В первую очередь получим дисперсионные уравнения и выражения для полей собственных волн дискретного спектра. Затем найдем поля волн непрерывного спектра. Далее рассмотрим вопрос об ортогональности тех и других волн, который, как мы уже знаем, имеет в случае НГУ серьезную специфику.

Задача о собственных волнах решается вполне элементарно. Опишем основные этапы решения для случая волн дискретного спектра. В силу того, что граница регулярного волновода прямолинейна и бесконечна, то НГУ могут быть записаны для каждого экспоненциального ($\sim e^{-j\gamma_n z}$) решения отдельно без привлечения интегрального оператора. Здесь под γ_n понимается постоянная распространения волны дискретного спектра с индексом $n = 1, 2, \dots$.

В силу симметрии структуры волны распадаются на четные ($H_z = 0$ при $x = 0$) и нечетные ($E_y = 0$ при $x = 0$). Поле волн дискретного спектра должно убывать при $|x| \rightarrow \infty$ и, следовательно, решение в области $|x| \geq d$ должно быть взято в виде затухающей на бесконечности экспоненты:

$$E_{yn} = \begin{cases} A_n \cos q_n x, & |x| \leq d, \\ B_n e^{-p_n(|x|-d)}, & |x| \geq d, \end{cases} \text{ - четные волны,}$$

$$E_{yn} = \begin{cases} A_n \sin q_n x, & |x| \leq d, \\ B_n e^{-p_n(|x|-d)} \operatorname{sgn} x, & |x| \geq d, \end{cases} \text{ - нечетные волны,} \quad (4.1)$$

$$q_n = \sqrt{\mu_1 k^2 - \gamma_n^2}, \quad p_n = \sqrt{\gamma_n^2 - \mu_2 k^2}, \quad \mu_2 = 1.$$

Остальные компоненты поля выражаются через E_{yn} .

Следующим шагом подставляем (4.1) в НГУ (1.74). После этого решаем систему линейных алгебраических уравнений относительно A и B . Условие существования ее нетривиальных решений дает нам дисперсионные уравнения для четных и нечетных волн относительно неизвестной постоянной распространения γ_n :

$$\left(1 - \frac{p_n \tilde{x}_{22}}{k}\right) \left(\cos q_n d + \frac{\tilde{x}_{11}}{k\mu_1} q_n \sin q_n d\right) + \frac{\tilde{x}_{12}^2 p_n q_n}{k^2 \mu_1} \sin q_n d = 0,$$

$$B_n = -A_n \frac{\tilde{x}_{21} q_n \sin q_n d}{k \mu_1 \left(1 - \frac{P_n \tilde{x}_{22}}{k}\right)}, \quad \text{для четных волн,} \quad (4.2)$$

$$\left(1 - \frac{P_n \tilde{x}_{22}}{k}\right) \left(\sin q_n d - \frac{\tilde{x}_{11}}{k \mu_1} q_n \cos q_n d\right) - \frac{\tilde{x}_{12}^2 P_n q_n \cos q_n d}{k^2 \mu_1} = 0,$$

$$B_n = A_n \frac{\tilde{x}_{21} P_n \cos q_n d}{\left(1 - \frac{P_n \tilde{x}_{22}}{k}\right) k \mu_1}, \quad \text{для нечетных волн,} \quad (4.3)$$

$$Z_{i,j} = j x_{i,j}(\gamma_n), \quad \tilde{x}_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{W_0}, \quad i, j = 1, 2.$$

W_0 - волновое сопротивление свободного пространства.

Уравнения (4.2), (4.3) записаны для волновода без потерь. Они имеют структуру уравнений связанных волн. В них присутствует слагаемое, состоящее из произведения дисперсионных уравнений несвязанных областей. Второе слагаемое содержащее \tilde{x}_{12} учитывает их взаимную связь.

Перейдем теперь к волнам непрерывного спектра. Будем следовать схеме описанной в [26]. Для этого мы должны допустить, что собственные волны на бесконечности не убывают, но лишь ограничены. Тогда при $|x| \geq d$ решения, удовлетворяющие уравнениям Максвелла и ограниченные при $|x| \rightarrow \infty$ имеют вид тригонометрических функций. Запишем их для случаев четных и нечетных волн:

$$E_{y\kappa} = \begin{cases} A \cos qx, \\ B \cos \kappa(|x| - d) + C \sin \kappa(|x| - d), \end{cases} \quad \text{четные волны,} \quad (4.4)$$

$$E_{y\kappa} = \begin{cases} A \sin qx, \\ [B \cos \kappa(|x| - d) + C \sin \kappa(|x| - d)] \operatorname{sgn} x, \end{cases} \quad \text{нечетные волны}$$

здесь $q = \sqrt{\kappa^2 + k^2(\mu_2 - \mu_1)}$, $\operatorname{sgn}(x) = 1, x > 0, \operatorname{sgn}(x) = -1, x < 0$.

Подстановка (4.4) в НГУ дает следующие соотношения между коэффициентами A, B и C :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = A \left(\frac{Z_{22}}{Z_{12}} \cos qd + \frac{q \sin qd}{j\omega\mu_{a_1}} \left(\frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}} - Z_{21} \right) \right), \\ C = -A \frac{j\omega\mu_0}{\gamma Z_{12}} \left(\cos qd + \frac{Z_{11}q \sin qd}{j\omega\mu_{a_1}} \right), \end{array} \right. \quad \text{- четные волны,}$$

(4.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} B = A \left(\frac{q \cos qd}{j\omega\mu_{a_1}} \left(Z_{21} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}} \right) + \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \sin qd \right), \\ C = A \frac{j\omega\mu_0}{Z_{12}\gamma} \left(\frac{Z_{11}q \cos qd}{j\omega\mu_{a_1}} - \sin qd \right). \end{array} \right. \quad \text{- нечетные волны.}$$

В формулах (4.5) под Z_{ij} понимаются $Z_{ij}(\gamma_{\kappa})$, $\gamma_{\kappa} = \sqrt{k^2 - \kappa^2}$.

Перейдем теперь к исследованию вопроса об ортогональности собственных волн (здесь мы употребляем термин ОДВ, имея в виду его двумерную модель).

Будем исходить из того, что поле в волноводе может быть представлено в виде совокупности собственных волн дискретного и непрерывного спектров:

$$\bar{E} = \sum_{-N}^N C_n \bar{E}_n(x) e^{-j\gamma_n z} + \int_0^{\infty} C_{\kappa} \bar{E}_{\kappa}(x) e^{-j\gamma_{\kappa} z} d\kappa, \quad (4.6)$$

$$\bar{H} = \sum_{-N}^N C_n \bar{H}_n(x) e^{-j\gamma_n z} + \int_0^{\infty} C_{\kappa} \bar{H}_{\kappa}(x) e^{-j\gamma_{\kappa} z} d\kappa.$$

Здесь под $\bar{H}_n(x)$, $\bar{E}_n(x)$ - понимаются полученные выше векторные функции дискретного спектра, а под $\bar{H}_{\kappa}(x)$, $\bar{E}_{\kappa}(x)$ - непрерывного. Входящие в них функции Z_{ij} имеют своим аргументом γ_n в первом случае и γ_{κ} во втором. C_n и C_{κ} - коэффициенты спектрального разложения.

Для того, чтобы исследовать вопрос об ортогональности нам необходимо применить к волноводу лемму Лоренца. Мы уже знаем, что в случае НГУ пересекать контуром интегрирования границу невозможно (см. раздел 1). Поэтому сразу проведем его как показано на рис. 4.2. Пусть для начала под полем первого типа \bar{E}_1, \bar{H}_1 мы будем понимать волну с индексом

n и под полем второго типа волну с индексом m . Лемма Лоренца в общем случае может быть записана следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty(d)} \bar{Q}_z(z_2; x) dx - \int_{-\infty}^{\infty(d)} \bar{Q}_z(z_1; x) dx + \int_{z_1}^{z_2} \bar{Q}_x(z; d-0) dz - \int_{z_1}^{z_2} \bar{Q}_x(z; d+0) dz + \int_{z_1}^{z_2} \bar{Q}_x(z; -d-0) dz - \int_{z_1}^{z_2} \bar{Q}_x(z; -d+0) dz = 0,$$

$$\bar{Q} = [\bar{E}_1 \bar{H}_2] - [\bar{E}_2 \bar{H}_1]. \quad (4.7)$$

В (4.7) под символом $\int_{-\infty}^{\infty(d)}$ понимается оператор интегрирования по всему бесконечному интервалу кроме точек $\pm d$.

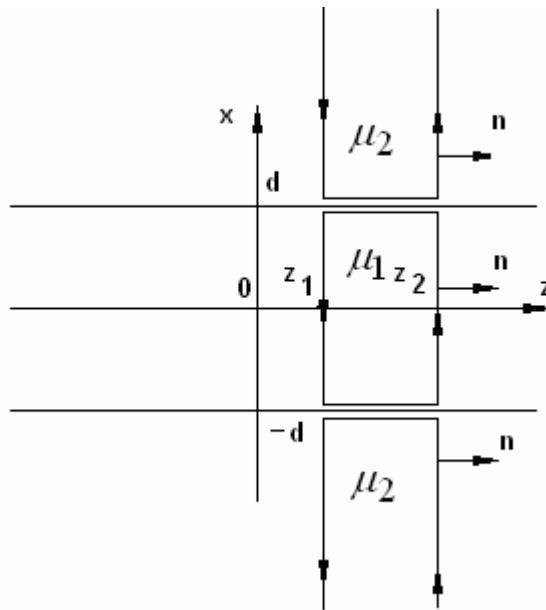


Рис. 4.2

Последующие преобразования аналогичны уже рассмотренным в разделе 1. Выделяем в явном виде зависимость \bar{E}, \bar{H} от z и вычисляем интегралы по этой переменной аналитически. Итог этих операций следующий:

$$\int_{-\infty}^{\infty(d)} \bar{Q}_{z_{nm}} dx + \frac{j}{\gamma_n + \gamma_m} \left[\bar{Q}_{x_{nm}}(d-0) - \bar{Q}_{x_{nm}}(d+0) + \bar{Q}_{x_{nm}}(-d-0) - \bar{Q}_{x_{nm}}(-d+0) \right] = 0,$$

$$\bar{Q}_{x_{nm}} = [\bar{E}_n \bar{H}_m] - [\bar{E}_m \bar{H}_n].$$

Доопределим $\bar{Q}_{z_{nm}}$ в точках $x = \pm d$.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{z_{nm}}(d) &= \frac{j\delta(x-d)}{\gamma_n + \gamma_m} (\bar{Q}_{x_{nm}}(d-0) - \bar{Q}_{x_{nm}}(d+0)), \\ \bar{Q}_{z_{nm}}(-d) &= \frac{j\delta(x+d)}{\gamma_n + \gamma_m} (\bar{Q}_{x_{nm}}(-d-0) + \bar{Q}_{x_{nm}}(-d+0)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тогда условие ортогональности собственных волн дискретного спектра примет обычную форму:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_{z_{nm}} dx = \delta_{nm} N_n.$$

Формулы (4.8) могут быть преобразованы, если мы воспользуемся введенными ранее векторами \bar{E}_τ и \bar{H}_τ . В нашем случае они приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\tau(d) &= \begin{bmatrix} E_y(d+0) \\ E_y(d-0) \end{bmatrix}, & \bar{H}_\tau(d) &= \begin{bmatrix} H_z(d+0) \\ -H_z(d-0) \end{bmatrix}, \\ \bar{E}_\tau(-d) &= \begin{bmatrix} E_y(-d-0) \\ E_y(-d+0) \end{bmatrix}, & \bar{H}_\tau(-d) &= \begin{bmatrix} H_z(-d-0) \\ -H_z(-d+0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

С учетом (4.9) можно записать:

$$Q_{x_{nm}}(d-0) - Q_{x_{nm}}(d+0) = (\bar{E}_{\tau_m}(d)\bar{H}_{\tau_n}(d)) - (\bar{E}_{\tau_n}(d)\bar{H}_{\tau_m}(d)), \quad (4.10)$$

$$Q_{x_{nm}}(-d-0) - Q_{x_{nm}}(-d+0) = (\bar{E}_{\tau_n}(-d)\bar{H}_{\tau_m}(-d)) - (\bar{E}_{\tau_m}(-d)\bar{H}_{\tau_n}(-d))$$

Здесь, как и ранее, индексы n, m указывают на принадлежность к волне соответствующего индекса.

Вектора \bar{E}_τ и \bar{H}_τ связаны граничными условиями:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\tau_{n,m}}(d) &= Z(\gamma_{n,m})\bar{H}_{\tau_{n,m}}(d), \\ \bar{E}_{\tau_{n,m}}(-d) &= -Z(\gamma_{n,m})\bar{H}_{\tau_{n,m}}(-d).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Подставим (4.11) в (4.10) и воспользуемся соотношением $Z^t(\gamma_n) = Z(\gamma_n) = Z(-\gamma_n)$. Тогда не трудно получить, что

$$Q_{z_{mm}}(\pm d) = j\delta(x \mp d) \left(\bar{H}_{\tau_n}(\pm d)(Z(\gamma_m) - Z(-\gamma_n))\bar{H}_{\tau_m}(\pm d) \right). \quad (4.12)$$

При $n = m$ мы можем получить компактную формулу для добавки к интегралу в выражении для нормы:

$$Q_{z_{mm}}(\pm d) = j\delta(x \mp d) \bar{H}_{\tau_m}(\pm d) \frac{dZ(\gamma_m)}{d\gamma} \bar{H}_{\tau_m}(\pm d). \quad (4.13)$$

Аналогично могут быть рассмотрены два других случая, отличающиеся видом полей первого и второго типов: первое поле - волна дискретного спектра, второе непрерывного и оба поля представляют собой волны непрерывного спектра. В любом варианте сочетаний мы приходим к обычной для открытых волноводов форме условия ортогональности:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Q_{z_{n\kappa}} dx &= 0, \\ Q_{z_{n\kappa}}(\pm d) &= \frac{j\delta(x \mp d)}{\gamma_n + \gamma_\kappa} \bar{H}_{\tau_n}(\pm d)(Z(\gamma_\kappa) - Z(\gamma_n))\bar{H}_{\tau_\kappa}(\pm d), \\ \int_{-\infty}^{\infty} Q_{z_{\kappa\alpha}} dx &= \delta(\kappa + \alpha)N(\kappa), \\ Q_{z_{\kappa\alpha}}(\pm d) &= \frac{j\delta(x \mp d)}{\gamma_\alpha + \gamma_\kappa} \bar{H}_{\tau_\alpha}(\pm d)(Z(\gamma_\kappa) - Z(\gamma_\alpha))\bar{H}_{\tau_\kappa}(\pm d).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Очевидно, что при вычислении $N(\kappa)$ возникнут определенные трудности, связанные с интегрированием тригонометрических функций на бесконечном интервале. Пути их преодоления подробно изложены в книге В.В. Шевченко /26/. Наш случай не вносит каких-либо существенных особенностей.

4.2 Возбуждение ОВ заданными источниками и плоской волной

Задача возбуждения открытого волновода заданными электрическими и магнитными токами решается аналогично случаю закрытого волновода, рассмотренному в разделе 2.2. Поэтому мы выпишем окончательные формулы без вывода:

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int_V \left[(J^e \bar{E}_{-n}) - (J^m \bar{H}_{-n}) \right] dV,$$

$$C_\kappa = \frac{1}{N(\kappa)} \int_V \left[(J^e \bar{E}_{-\kappa}) - (J^m \bar{H}_{-\kappa}) \right] dV, \quad (4.15)$$

$$N_n = \int_{-\infty}^{\infty(d)} Q_{z(-nn)}(x) dx + Q_{z(-nn)}(d) + Q_{z(-nn)}(-d),$$

$$N(\kappa) \delta(\kappa + \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\kappa} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty(d)} Q_{z(-\alpha\kappa)}(x) dx + Q_{z(-\alpha\kappa)}(d) + Q_{z(-\alpha\kappa)}(-d) \right\}.$$

Возбуждение волновода плоской волной также необходимо рассмотреть, поскольку решение этой задачи будет использовано позднее при анализе системы волновод - круглый резонатор.

Геометрия структуры изображена на рис. 4.3.

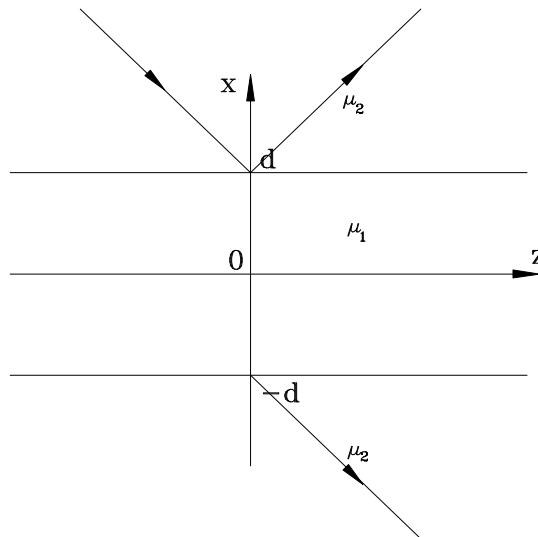


Рис. 4.3

Запишем E_y компоненту поля падающей волны в следующей форме:

$$E_{y\Pi} = e_0(\beta) e^{-j\beta z + p(x-d)}. \quad (4.16)$$

Вторичное поле может быть представлено следующим образом:

$$E_{yB} = e^{-j\beta z} \begin{cases} A(\beta)e^{-p(x-d)}, & x > d, \\ B(\beta)\cos qx + C(\beta)\sin qx, & |x| \leq d, \\ D(\beta)e^{p(x+d)}, & x < -d, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Таким образом, наша задача состоит в определении неизвестных коэффициентов A, B, C, D , зависящих от β , что подчеркнута в (4.17). Подставим выражения для компонент полного поля в НГУ, взятые при $x = \pm d$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно A, B, C, D . Запишем ее решение для одного из коэффициентов, а именно $A(\beta)$, имеющего смысл коэффициента отражения плоской волны. Обозначим его как R :

$$R(\beta) = \frac{1}{2} \left[\left(\cos qd + \frac{Z_{11}q \sin qd}{j\omega\mu_{a_1}} \right) \frac{1}{\Delta_q(\beta)} + \left(\sin qd - \frac{Z_{11}q \cos qd}{j\omega\mu_{a_1}} \right) \frac{1}{\Delta_H(\beta)} \right], \quad (4.18)$$

$$\Delta_q(\beta) = \frac{Z_{12}Z_{21}pq \sin qd}{\omega^2 \mu_{a_1} \mu_0} + \left(\frac{Z_{22}p}{j\omega\mu_0} - 1 \right) \left(\cos qd + \frac{Z_{11}q \sin qd}{j\omega\mu_{a_1}} \right),$$

$$\Delta_H(\beta) = \frac{Z_{21}Z_{12}pq \cos qd}{\omega^2 \mu_{a_1} \mu_0} - \left(\frac{Z_{22}p}{j\omega\mu_0} - 1 \right) \left(\sin qd - \frac{Z_{11}q \cos qd}{j\omega\mu_{a_1}} \right).$$

Соотношений (4.18) достаточно для дальнейшего анализа системы волновод – резонатор, которая рассматривается в разделе 4.4.

4.3 Круглый резонатор

Следующая структура, которую мы рассмотрим, будет круглый резонатор (КР), который является, в частности, моделью дискового диэлектрического резонатора (ДДР), показанного на рис. 4.4. Его двумерная модель - магнитный цилиндр с НГУ на его образующей показана на рис. 4.5.

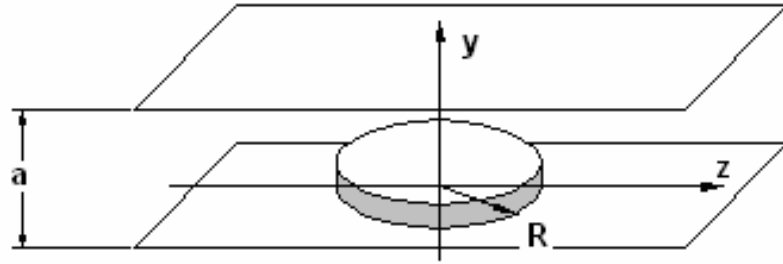


Рис. 4.4

Из анализа аналогичной закрытой структуры нам уже известно, что НГУ могут быть записаны отдельно для каждой азимутальной гармоники. Поэтому мы не будем вновь доказывать это положение для КР, а воспользуемся им как готовым результатом.

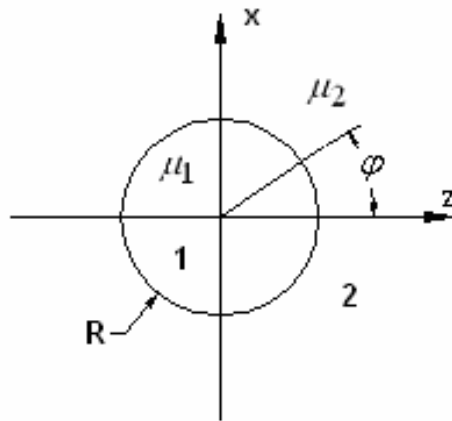


Рис. 4.5

Получим, в первую очередь, характеристическое уравнение КР, позволяющее определить его резонансные частоты и добротность.

Будем искать поле в виде разложения по упоминавшимся выше азимутальным гармоникам:

$$\begin{cases} E_{y1} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\varphi} J_n(k_1 r), & r \leq R, \\ E_{y2} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{-jn\varphi} H_n^{(2)}(k_2 r), & r \geq R, \end{cases}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial E_y}{\partial r}, \quad (4.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\varphi_1} = \frac{1}{j\omega\mu_{a_1}} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n k_1 e^{-jn\varphi} J'_n(k_1 r), \quad r \leq R, \\ H_{\varphi_2} = \frac{1}{j\omega\mu_{a_2}} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n k_2 e^{-jn\varphi} H_n^{(2)}(k_2 r), \quad r \geq R, \end{array} \right.$$

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_{a_1}}, \quad k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

A_n , B_n здесь неизвестные коэффициенты, $J_n(x)$ - функции Бесселя, а $H_n^{(2)}(x)$ - функция Ханкеля второго рода, индекс 1 соответствует полям внутри цилиндра, а 2 вне его. При $r = R$ каждый n -й член ряда удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{bmatrix} E_{y1n} \\ E_{y2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}\left(\frac{n}{R}\right) & Z_{12}\left(\frac{n}{R}\right) \\ Z_{21}\left(\frac{n}{R}\right) & Z_{22}\left(\frac{n}{R}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H_{1\varphi n} \\ H_{2\varphi n} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Индекс n в (4.20) указывает на принадлежность данной величины к n -ой гармонике.

Подставим (4.19) в (4.20) и получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n , B_n . Приравнявая ее определитель нулю, находим искомое характеристическое уравнение:

$$\left(H_h^{(2)}(k_2 R) + \frac{Z_{22} H_n^{(2)}(k_2 R)}{jW_2} \right) \left(J_n(k_1 R) - \frac{Z_{11} J'_h(k_1 R)}{jW_1} \right) - \frac{Z_{12} Z_{21} J'_n(k_1 R) H_n^{(2)}(k_2 R)}{W_1 W_2} = 0,$$

$$W_1 = \sqrt{\frac{\mu_{a_1}}{\varepsilon_0}}, \quad W_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (4.21)$$

Отметим следующее. Даже при $Z_{nm} = jX_{nm}$ уравнение (4.21) является комплексным поскольку функции Ханкеля $H_n^{(2)}(x)$ имеют действительную и

мнимую части /27/. Следовательно, решения (4.21) относительно частоты f также будут комплексными:

$$f = f' + if'',$$

что соответствует конечной добротности собственных колебаний, которая обусловлена потерями на излучение. В реальной трехмерной структуре это излучение происходит путем преобразования энергии, запасенной в диэлектрике в Т-волны плоского металлического волновода при $r \geq R$.

Известно (см. напр. /28/), что с ростом азимутального индекса n добротность колебаний цилиндрического резонатора резко возрастает. Этот эффект проявляется при любых значениях проницаемости диэлектрика, но более ярко выражен при $\varepsilon \geq 10$.

Каждому n может соответствовать множество решений (4.21), которые отличаются разным числом вариаций поля вдоль радиуса. Колебания, имеющие наименьший радиальный индекс (m) равный единице получили название колебаний шепчущей галереи. В рамках двумерной модели третий индекс, соответствующий числу вариаций поля по оси Oy отсутствует. Поэтому колебания описываются двумя индексами азимутальным - n и радиальным m . Поскольку в рамках нашей двумерной модели мы рассматриваем поле в виде электрических волн, то колебания КР естественно обозначить как колебания типа E_{nm} .

Пусть теперь на наш резонатор набегают плоская волна, поле которой, как и раньше запишем в следующем виде:

$$E_{y0} = e_0 e^{-j\beta z - px}. \quad (4.22)$$

Для рассеянного резонатором поля будем использовать разложения (4.19). Чтобы воспользоваться граничными условиями (4.20) нам необходимо в (4.22) перейти к координатам r, φ , связанным с x, y следующими формулами:

$$x = r \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi. \quad (4.23)$$

Кроме того, от переменной β перейдем к переменной ψ :

$$\beta = k_2 \cos \psi, \quad \sqrt{k_2^2 - \beta^2} = k_2 \sin \psi. \quad (4.24)$$

Тогда (4.22) приобретет новый вид /17/:

$$E_{y0} = e_0 e^{-jk_2 r \cos(\varphi - \psi)} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-j)^n e^{-jn(\varphi - \psi)} J_n(k_2 r),$$

$$H_{\varphi_0} = \frac{1}{jW_2} \sum_{-\infty}^{\infty} (-j)^n e^{-jn(\varphi-\psi)} J_n(k_2 R). \quad (4.25)$$

Поскольку первичное поле теперь тоже представлено в виде суммы азимутальных гармоник, то мы в состоянии воспользоваться формулой (4.20). Подстановка выражений (4.25), (4.19) в (4.20) позволяет получить систему уравнений (теперь уже неоднородную) относительно A_n, B_n :

$$B_n \left(H_n^{(2)}(k_2 R) + \frac{Z_{22} H_n'^{(2)}(k_2 R)}{jW_2} \right) - A_n \frac{Z_{21} J_n'(k_1 R)}{jW_1} = e_0 (-j)^{n+1} e^{jn\psi} \left(J_n(k_2 R) + \frac{Z_{22} J_n'(k_2 R)}{jW_2} \right), \quad (4.26)$$

$$B_n Z_{12} \frac{H_n'^{(2)}(k_2 R)}{jW_2} + A_n \left(J_n(k_1 R) - Z_{11} \frac{J_n'(k_1 R)}{jW_1} \right) = e_0 Z_{12} (-j)^{n+1} e^{jn\psi} \frac{J_n'(k_2 R)}{jW_2}.$$

Здесь Z_{ij} ($i, j=1, 2$)- функции аргумента $\frac{n}{R}$. Решение (4.26) находится элементарно:

$$B_n = \frac{\Delta_{Bn}}{\Delta_n}, \quad A_n = \frac{\Delta_{An}}{\Delta_n}, \quad (4.27)$$

$$\Delta_n = \left(H_n^{(2)}(k_2 R) + \frac{Z_{22} H_n'^{(2)}(k_2 R)}{jW_2} \right) \left(J_n(k_1 R) - Z_{11} \frac{J_n'(k_1 R)}{jW_1} \right) - \frac{Z_{12} Z_{21} J_n'(k_1 R) H_n'^{(2)}(k_2 R)}{W_1 W_2},$$

$$\Delta_{Bn} = e_0(-j)^n e^{jn\psi} \left[\frac{Z_{12}Z_{21}J'_n(k_1R)J'_n(k_2R)}{W_1W_2} - \left(J_n(k_2R) + \frac{Z_{22}}{jW_2} J'_n(kR_2) \right) \left(J_n(k_1R) - \frac{Z_{11}J'_n(k_1R)}{jW_1} \right) \right],$$

$$\Delta_{An} = e_0(-j)^n e^{jn\psi} \left[\left(H_n^{(2)}(k_2R) + \frac{Z_{22}H_n^{(2)'}(k_2R)}{jW_2} \right) \left(Z_{12} \frac{J'_n(k_2R)}{jW_2} \right) - \frac{Z_{12}H_n^{(2)'}(k_2R)}{jW_2} \left(J_n(k_2R) + \frac{Z_{22}}{jW_2} J'_n(kR_2) \right) \right]$$

Отметим одно полезное для последующего анализа свойство (4.27). Спектральный параметр β , задающий угол падения волны, входит только в функции e_0 и ψ : $e_0 = e_0(\beta)$, $\psi = \psi(\beta)$. Поэтому в (4.27) зависимость от β можно выделить в явном виде:

$$B_n = \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)},$$

$$A_n = \frac{\tilde{\Delta}_{An}}{\Delta_n} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)},$$

$$e^{jn\psi} \tilde{\Delta}_{Bn} e_0(\beta) = \Delta_{Bn}, \quad \tilde{\Delta}_{An} e_0(\beta) e^{jn\psi} = \Delta_{An}. \quad (4.28)$$

С учетом (4.28) рассеянное резонатором поле при $r > R$ может быть представлено следующим рядом:

$$E_{y_2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} e^{-jn\varphi + jn\psi(\beta)} H_n^{(2)}(k_2r) e_0(\beta). \quad (4.29)$$

Соотношение (4.29) дает решение задачи о возбуждении КР плоской волной.

4.4 Система ОВ - КР

Анализируемая структура показана на рис. 4.6. Дифракционная задача ставится следующим образом. Пусть по волноводу распространяется из минус бесконечности одна из его собственных волн дискретного спектра. Поскольку ее поле вне волновода не равно нулю, оно будет возмущаться резонатором, что приведет к возникновению вторичного рассеянного поля и,

в частности, к появлению отраженных волноводных волн и изменению амплитуды прошедшей волны. Наша задача состоит в определении указанного рассеянного поля и, в частности, его наиболее интересных параметров – элементов матрицы рассеяния резонатора.

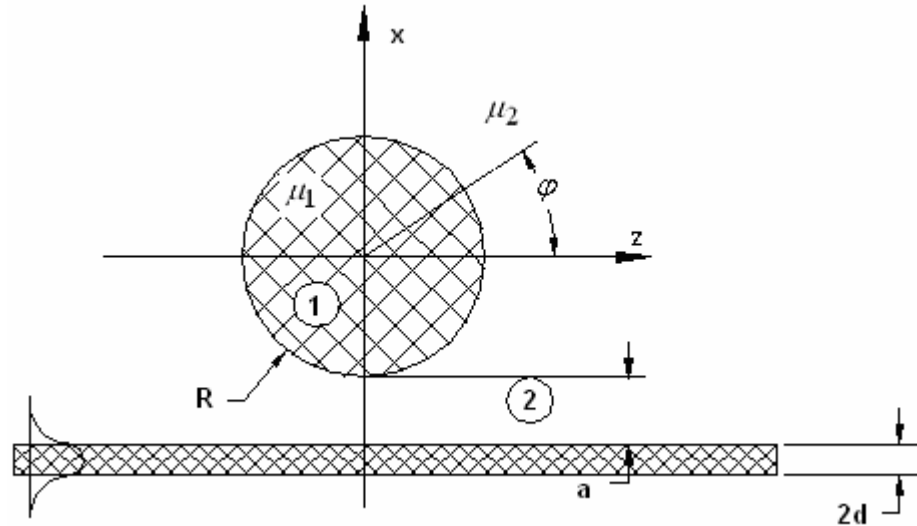


Рис. 4.6

Для достижения указанной цели будем исходить из следующей модели взаимодействия резонатора и волновода. Будем полагать, что резонатор возбуждается спектром плоских волн, распространяющихся из нижнего полупространства ($x < 0$) в верхнее ($x > 0$). В свою очередь, на волновод воздействует спектр плоских волн, порожденных дифракцией на КР и распространяющихся из верхнего полупространства в нижнее. Нам необходимо связать спектральные плотности волн, распространяющихся в противоположных направлениях с помощью уже полученных выше результатов решения задач о возбуждении уединенного волновода и резонатора. Это позволит нам получить интегральное уравнение относительно спектральной плотности волн.

Мы имеем соотношение (4.29), полученное для случая возбуждения резонатора одной парциальной волной. Чтобы распространить это решение на случай произвольного спектра необходимо проинтегрировать (4.29) по β :

$$E_{y2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta} B_n}{\Delta_n} e^{-jn\varphi} H_n^{(2)}(k_2 R) \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)} d\beta. \quad (4.30)$$

Формула (4.30) по-прежнему представляет поле в цилиндрических координатах. Чтобы перейти к декартовым координатам воспользуемся следующим известным соотношением [29]:

$$H_n^{(2)}(k_2 r) e^{-jn\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\kappa) e^{-j\kappa z \pm px} d\kappa,$$

$$g_n(\kappa) = -\frac{j^{n-1}}{\pi\gamma} e^{\pm jn\psi(\kappa)}. \quad (4.31)$$

Знак плюс берется при $x < 0$, а минус при $x > 0$.

Подставим (4.31) в (4.30):

$$E_{y_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\beta) \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} g_n(\kappa) e^{-j\kappa z \pm px + jn\psi(\beta)} d\kappa d\beta. \quad (4.32)$$

Спектральная плотность рассеянного при $x < 0$ поля $e_R(\kappa)$ может быть записана с помощью соотношения (4.32):

$$e_R(\kappa) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} e^{p(x-(R+a+d))} g_n(\kappa) \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)} d\beta. \quad (4.33)$$

Сравним (4.33) с (4.16). Для этого перепишем (4.33) в системе координат, связанной с волноводом:

$$e_R(\kappa) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} e^{-p(R+a)+p(x-d)} g_n(\kappa) \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)} d\beta. \quad (4.34)$$

Мы видим, что спектральную плотность поля, отраженного от волновода можно получить из сопоставления (4.16) и (4.34). Результат имеет следующий вид:

$$e_w(\kappa) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} e^{-p(R+a)-p(x-d)} R(\kappa) g_n(\kappa) \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)} d\beta. \quad (4.35)$$

Перейдем вновь в систему координат, связанную с резонатором:

$$e_w(\kappa) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} g_n(\kappa) R(\kappa) e^{-2p(R+a)-px} \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\beta) e^{jn\psi(\beta)} d\beta. \quad (4.36)$$

Теперь обсудим вопрос о связи $e_w(\kappa)$ и $e_0(\kappa)$. Во-первых, $e_0(\beta)$ это спектральная плотность поля, возбуждающего резонатор при $x = 0$ (см. (4.22)). Во-вторых, полное поле, действующее на КР состоит из первичного поля собственной волны ОВ и рассеянного или дифракционного поля. То есть

$$e(\beta) = e_{\Pi}(\beta) + e_w(\beta), \quad (4.37)$$

где $e_{\Pi}(\beta)$ есть спектральная плотность первичного поля падающей волны, а $e_w(\beta)$ имеет тот же смысл, что и функция в левой части (4.36), которая с самого начала определялась через рассеянное на волноводе поле.

Поскольку $e_{\Pi}(\beta)$ описывает поле распространяющейся по волноводу волны с гармонической зависимостью по z : $e^{-j\beta_0 z}$, то его спектральная плотность имеет характер δ -функции:

$$e_{\Pi}(\beta) = e_{\Pi} \delta(\beta - \beta_0) e^{-p_0(R+a)},$$

$$p_0 = \sqrt{\beta_0^2 - k_2^2}. \quad (4.38)$$

Подставим (4.38), (4.37) в (4.36):

$$e_w(\kappa) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta} B_n}{\Delta_n} g_n(\kappa) R(\kappa) e^{-2p(R+a) - p_0(R+a) + jn\psi(\beta_0)} +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta} B_n}{\Delta_n} g_n(\kappa) R(\kappa) e^{-2p(a+R)} \int_{-\infty}^{\infty} e_w(\beta) e^{jn\psi(\beta)} d\beta. \quad (4.39)$$

Это и есть искомое интегральное уравнение относительно $e_w(\beta)$. Его можно привести к более симметричному виду введя новую неизвестную функцию $\varphi(\beta)$:

$$\varphi(\beta) = e_w(\beta) e^{p(\beta)(a+R)}, \quad (4.40)$$

$$p(\kappa) = \sqrt{\kappa^2 - k_2^2}.$$

Тогда окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(\kappa) = & \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} g_n(\kappa) R(\kappa) e^{-(p(\kappa)+p_0)(R+a)+jn\psi(\beta_0)} + \\ & + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} R(\kappa) e^{-p(\kappa)(R+a)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta) e^{jn\psi(\beta)-p(\beta)(R+a)} d\beta. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Введем новые обозначения:

$$\varphi_0(\kappa) = \sum_{-\infty}^{\infty} e_n \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} g_n(\kappa) R(\kappa) e^{-(p(\kappa)+p_0)(R+a)+jn\psi(\beta_0)},$$

$$F_n(\kappa) = \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n} g_n(\kappa) R(\kappa) e^{-p(\kappa)(R+a)}, \quad (4.42)$$

$$\Phi_n(\beta) = e^{jn\psi(\beta)-p(\beta)(R+a)}.$$

Тогда (4.41) можно переписать в компактной форме:

$$\varphi(\kappa) = \varphi_0(\kappa) + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n(\kappa) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta) \Phi_n(\beta) d\beta. \quad (4.43)$$

Нетрудно увидеть, что интегральное уравнение (4.43) – это уравнение второго рода с вырожденным ядром. Такой вид ядра допускает возможность редукции (4.43) к системе линейных алгебраических уравнений, вообще говоря, бесконечной. Умножим (4.43) на $\Phi_m(\kappa)$ и проинтегрируем по κ . Обозначим получившиеся в результате интегралы следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta) \Phi_n(\beta) d\beta = X_n, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(\kappa) F_n(\kappa) d\kappa = A_{nm}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\kappa) \Phi_m(\kappa) d\kappa = \varphi_{0m}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

С учетом (4.44) нетрудно получить искомую систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_m = \varphi_{0m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nm} X_n. \quad (4.45)$$

В общем случае (4.45) можно решить только численно. Существует, однако, частный случай, когда (4.45) сводится к системе из двух уравнений. Это, так называемое, резонансное приближение. Его можно использовать, когда рабочая частота близка к одной из резонансных частот КР - f_{nm} . Нетрудно увидеть, что в знаменателях $\varphi_0(\kappa)$ и $F_n(\kappa)$ стоят функции Δ_n . Сравнивая их с характеристическим уравнением уединенного резонатора, можно убедиться, что при $f \rightarrow f_{nm}$ они стремятся к весьма малой величине. Если бы потери на излучение в КР отсутствовали, то мы бы наблюдали строгое равенство Δ_n нулю при $f = f_{nm}$. Однако в силу конечной добротности такого равенства рабочей частоты f и решения характеристического уравнения добиться невозможно в силу комплексного характера последнего. Тем не менее, если колебание высокодобротное ($Q \gg 1$), то мнимая часть мала и мы можем говорить о приблизительном равенстве f и комплексной резонансной частоты, при котором Δ_n остается конечной, но очень малой величиной пропорциональной $1/Q$, где Q - добротность КР.

Опираясь на приведенные выше соображения, можно в рядах (4.43) оставить слагаемые с индексами $n = N$ и $n = -N$, где N - азимутальный индекс резонирующего колебания. В результате (4.45) упрощается:

$$\begin{cases} X_N = \varphi_{0N} + A_{N,N} X_N + A_{-N,N} X_{-N}, \\ X_{-N} = \varphi_{-0N} + A_{N,-N} X_N + A_{-N,-N} X_{-N}. \end{cases} \quad (4.46)$$

Рассмотрим для начала физический смысл решения однородной системы уравнений, получаемой из (4.46) обнулением φ_{0N} и $\varphi_{0(-N)}$. Это соответствует $e_n = 0$. Иными словами мы рассматриваем собственные колебания системы волновод-резонатор. Характеристическое уравнение в этом случае имеет следующий вид:

$$(A_{N,N} - 1)(A_{-N,-N} - 1) - A_{N,-N} A_{-N,N} = 0. \quad (4.47)$$

Оно имеет форму типичную для характеристического уравнения связанных колебаний. Имеется два сомножителя $A_{N,N}-1$ и $A_{-N,-N}-1$, определяющие собственные частоты колебаний в отсутствие связи. Имеется также параметр $(A_{N,-N} A_{-N,N})$ задающий уровень связи.

Логично задаться вопросом о каких колебаниях и о какой связи идет речь. Из всего спектра азимутальных гармоник мы сохранили в решении только вклад гармоник с индексами N и $-N$. Им отвечает зависимость от φ вида $e^{-jN\varphi}$ и $e^{jN\varphi}$, которая может быть интерпретирована как

распространение некоторой волны бегущей вдоль образующей резонатора. Причем одной волне ($e^{-jN\varphi}$) соответствует движение против часовой стрелки, а другой ($e^{jN\varphi}$) по часовой. В отсутствие волновода, очевидно оба вида колебаний, соответствующих волнам с разными направлениями вращения вырождены, поскольку структура азимутально однородна.

Появление волновода снимает это вырождение, поскольку его присутствие вносит азимутальную неоднородность, которая может приводить к следующим эффектам: дополнительным потерям (затуханию волн), дополнительному фазовому сдвигу и, наконец, к отражению волн с разными направлениями вращения одна в другую. Таким образом, только третий эффект приводит к взаимной связи двух колебаний. Первые два только лишь меняют их свойства - добротность и резонансную частоту, не вызывая обмена энергией.

Рассмотрим теперь, как описанные выше качественные представления проявляются в уравнениях (4.47). Для этого предварительно отметим наличие следующих из (4.27), (4.31) соотношений:

$$\frac{\tilde{\Delta}_{B(-n)}}{\Delta_{-n}} = \frac{\tilde{\Delta}_{Bn}}{\Delta_n},$$

$$g_n(\kappa)e^{-jn\psi(\kappa)} = g_{-n}(\kappa)e^{jn\psi(\kappa)},$$

$$\psi(-\kappa) = -\psi(\kappa). \quad (4.48)$$

С их помощью нетрудно убедиться, что $A_{N,N} = A_{-N,-N}$, а также, что

$$A_{N,N} = \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} \int_{-\infty}^{\infty} g_N(\kappa)R(\kappa)e^{-2p(R+a)+jN\psi(\kappa)} d\kappa. \quad (4.49)$$

Отсюда следует, что в отсутствии взаимной связи колебания с индексами N и $-N$ имеют одинаковые частоты, задаваемые характеристическим уравнением:

$$\Delta_N = \tilde{\Delta}_{BN} \int_{-\infty}^{\infty} g_N(\kappa)R(\kappa)e^{-2p(R+a)+iN\psi(\kappa)} d\kappa. \quad (4.50)$$

В отсутствие волновода ($a \rightarrow \infty$) интеграл в правой части обращается в нуль и мы получаем уравнение уединенного резонатора

$$\Delta_N = 0.$$

Если же правая часть конечна, то интеграл в (4.50) имеет действительную и мнимую части, присутствие которых вызывает изменение комплексной резонансной частоты.

Наконец, полное решение (4.47) имеет следующий вид:

$$(A_{N,N} - 1) = \pm (A_{N,-N} A_{-N,N})^{1/2}. \quad (4.51)$$

Используя те же соотношения (4.48) можно доказать, что $A_{N,-N} = A_{-N,N}$ и упростить формулу (4.51):

$$A_{N,N} - 1 = \pm A_{N,-N},$$

$$A_{N,-N} = \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} \int_{-\infty}^{\infty} g_N(\kappa) R(\kappa) e^{-2p(\kappa)(R+a) - jN\psi(\kappa)} d\kappa. \quad (4.52)$$

Как видно из (4.52), (4.49) $A_{N,N}$ и $A_{N,-N}$ отличаются только знаком перед $\psi(\kappa)$. Тем не менее, это приводит к весьма большой количественной разнице. Поясним это подробнее. Из определения ψ следует:

$$e^{jN\psi} = \left(\frac{\kappa}{k_2} + j \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{k_2} \right)^2} \right)^N.$$

При $\kappa > k_2$ имеется соотношение

$$j \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{k_2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\kappa}{k_2} \right)^2 - 1},$$

используя которое, получаем:

$$e^{jN\psi} = \left(\frac{\kappa}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa}{k_2} \right)^2 - 1} \right)^N. \quad (4.53)$$

При $\kappa > k_2$ и достаточно больших N выражение, стоящее в правой части (4.53) много больше единицы. Следовательно

$$e^{iN\psi} \gg 1, e^{-iN\psi} \ll 1.$$

С другой стороны, именно область $|\kappa| > k_2$ вносит основной вклад при интегрировании по κ . Это связано с тем, что все распространяющиеся, то есть поверхностные волны ОВ порождают в функции $R(\kappa)$ вычеты на действительной оси, расположенные в диапазоне $|\kappa| > k_2$. Именно эти вычеты, в основном определяют $A_{N,N}$ и $A_{N,-N}$.

Таким образом, мы на качественном уровне можем установить, что

$$A_{N,N} \gg A_{N,-N}.$$

Последнее неравенство означает, что эффекты сдвига частот колебаний и изменения их добротности преобладают над эффектом расщепления собственных частот, так как последний определяется $A_{N,-N}$.

Далее перейдем к неоднородной системе (4.46). Она легко разрешается относительно $X_{\pm N}$:

$$X_N = \frac{\varphi_{0_{-N}} A_{N,-N} - \varphi_{0_N} (A_{N,N} - 1)}{(A_{N,N} - 1)^2 - A_{N,-N}^2}, \quad (4.54)$$

$$X_{-N} = \frac{\varphi_{0_N} A_{N,-N} - \varphi_{-0_n} (A_{N,N} - 1)}{(A_{N,N} - 1)^2 - A_{N,-N}^2}.$$

Несколько замечаний относительно $\varphi_{\pm 0_N}$. Во-первых, в выражении для $\varphi_0(\kappa)$ также можно сохранить из всего ряда только слагаемые с $n = \pm N$:

$$\varphi_0(\kappa) \approx 2e_n \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} g_N(\kappa) R(\kappa) e^{jN\psi(\kappa)} \cos N(\psi(\beta_0) - \psi(\kappa)) \cdot e^{-(p(\kappa)+p_0)(R+a)}. \quad (4.55)$$

Отсюда для φ_{0_N} имеем:

$$\varphi_{0N} = 2e_{\Pi} \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} \times \int_{-\infty}^{\infty} g_N(\kappa) R(\kappa) e^{2jN\psi(\kappa) - 2p(\kappa)(R+a) - p_0(R+a)} \cos N(\psi(\beta_0) - \psi(\kappa)) d\kappa, \quad (4.56)$$

$$\varphi_{0(-N)} = 2e_{\Pi} \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} \times \int_{-\infty}^{\infty} g_N(\kappa) R(\kappa) e^{-2p(\kappa)(R+a) - p_0(R+a)} \cos N(\psi(\beta_0) - \psi(\kappa)) d\kappa,$$

Выше было показано, что $e^{-i2N\psi(\kappa)} \gg 1$ при $|\kappa| \geq k_2$ и, следовательно

$$\varphi_{0N} \gg \varphi_{0(-N)}. \quad (4.57)$$

Неравенству (4.57) существует очень простое объяснение. Известно [30], что распределенная связь двух волн, бегущих в одном направлении много больше распределенной связи волн, бегущих в разные стороны. В данном случае распространяющаяся по волноводу волна слева направо сильнее возбуждает в резонаторе волну бегущую против часовой стрелки, так как направления их движения на участке максимального сближения КР и ОВ совпадают.

Теперь нам не составляет труда записать выражение для $\varphi(\kappa)$ в резонансном приближении:

$$\varphi(\kappa) = f_{0N}(\kappa) + f_{-0N}(\kappa) + F_N(\kappa)X_N + F_{-N}(\kappa)X_{-N},$$

$$f_{0N}(\kappa) = e_n \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} g_N(\kappa) R(\kappa) e^{-(p(\kappa)+p_0)(R+a)+jN\psi(\beta_0)}, \quad (4.58)$$

$$f_{0(-N)}(\kappa) = e_n \frac{\tilde{\Delta}_{BN}}{\Delta_N} g_N(\kappa) R(\kappa) e^{-(p(\kappa)+p_0)(R+a)+jN\psi(\beta_0)+2jN\psi(\kappa)}.$$

С помощью (4.40) мы можем перейти к исходной функции $e_w(\kappa)$

$$e_w(\kappa) = e^{-p(\kappa)(R+a)} \varphi(\kappa).$$

Наконец, чтобы найти E_y компоненту поля при $x = -(R+a)$ нам необходимо умножить $e_w(\kappa)$ на $e^{p(\kappa)(R+a)}$ и взять преобразование Фурье по κ . Умножение на $e^{p(\kappa)(R+a)}$ связано с тем, что мы исходно определили $e_w(\kappa)$ как спектральную плотность поля при $x = 0$. Для перехода в новую плоскость (на поверхность волновода) необходима указанная операция. Итак:

$$E_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_{0N}(\kappa) + f_{-0N}(\kappa) + F_N(\kappa) + F_{-N} X_{-N}) e^{j\kappa z} d\kappa. \quad (4.59)$$

Нетрудно убедиться, что все слагаемые в (4.59) содержат функцию $R(\kappa)$, которая в свою очередь, имеет полюса в точках, совпадающих с постоянными распространения собственных волн дискретного спектра волновода. Если мы для определенности зафиксируем одномодовость ОВ, то тогда для определения матрицы рассеяния нашего четырехполюсника нам будет достаточно взять из (4.59) слагаемые пропорциональные вычетам в точках $\pm \beta_0$, где β_0 - постоянная распространения основной волны (она же и возбуждает резонатор). В результате имеем:

$$S_{22} = S_{11} = 2\pi j \operatorname{Res}_{\kappa = -\beta_0} \xi(\kappa) \frac{1}{e_{\Pi}},$$

$$S_{12} = S_{21} = 1 - 2\pi j \operatorname{Res}_{\kappa = \beta_0} \xi(\kappa) \frac{1}{e_{\Pi}},$$

$$\xi(\kappa) = f_{0N}(\kappa) + f_{-0N}(\kappa) + F_N(\kappa) X_n + F_{-N}(\kappa) X_{-N}. \quad (4.60)$$

Символ Res означает операцию взятия вычета в полюсе.

Для элементов матрицы рассеяния можно получить более подробные и физически прозрачные соотношения. Для этого отметим следующее свойство функций $\varphi_{0(\pm N)}$. Их можно выразить через коэффициенты $A_{N,N}$ и $A_{N,-N}$:

$$\varphi_{0N} = -\tilde{\epsilon}_{\Pi} \left(A_{N,N} e^{-jN\psi(\beta_0)} + A_{N,-N} e^{-jN\psi(\beta_0)} \right),$$

$$\varphi_{0(-N)} = -\tilde{\varepsilon}_{\Pi} \left(A_{N,-N} e^{-jN\psi(\beta_0)} + A_{N,N} e^{-jN\psi(\beta_0)} \right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\Pi} = e_{\Pi} e^{-p_0(R+a)}. \quad (4.61)$$

Тогда не составляет труда получить новые формулы для $X_{\pm N}$:

$$X_N = -\tilde{\varepsilon}_{\Pi} \left[\frac{\cos N\psi(\beta_0)(A_{N,N} + A_{N,-N})}{A_{N,N} + A_{N,-N} - 1} + \frac{j \sin N\psi(\beta_0)(A_{N,N} - A_{N,-N})}{A_{N,N} - A_{N,-N} - 1} \right], \quad (4.62)$$

$$X_{-N} = -\tilde{\varepsilon}_{\Pi} \left[\frac{\cos N\psi(\beta_0)(A_{N,N} + A_{N,-N})}{A_{N,N} + A_{N,-N} - 1} - \frac{j \sin N\psi(\beta_0)(A_{N,N} - A_{N,-N})}{A_{N,N} - A_{N,-N} - 1} \right].$$

Подставим теперь (4.62) в (4.43):

$$\varphi(\kappa) = \tilde{\varepsilon}_{\Pi} \left[\frac{j \sin N\psi(\beta_0)(f_{-N}(\kappa) - f_N(\kappa))}{A_{N,N} - A_{N,-N} - 1} \right] - \left[\frac{\cos N\psi(\beta_0)(f_{-N}(\kappa) - f_N(\kappa))}{A_{N,N} + A_{N,-N} - 1} \right] \quad (4.63)$$

Для $f_N(\kappa)$ и $f_{-N}(\kappa)$ имеется следующая связь (см. (4.58)):

$$f_{-N}(\kappa) = f_N e^{-2jN\psi(\kappa)},$$

с помощью которой получаем:

$$\varphi(\kappa) = -\tilde{\varepsilon}_{\Pi} e^{-jN\psi(\kappa)} 2f_N(\kappa) \times \left[-\frac{\sin N\psi(\beta_0) \sin N\psi(\kappa)}{A_{N,N} - A_{N,-N} - 1} + \frac{\cos N\psi(\beta_0) \cos N\psi(\kappa)}{A_{N,N} + A_{N,-N} - 1} \right]. \quad (4.64)$$

Особенности в точках $\pm\beta_0$ имеет функция $f_N(\kappa)$. Вычисляя вычеты при $\kappa = \pm\beta_0$, получаем новые формулы для S_{ij} :

$$S_{11} = S_{22} = -4\pi j e^{jN\psi(\beta_0)} \operatorname{Re} s f_N(-\beta_0) e^{-p_0(R+a)} \times \left[\frac{\sin^2 N\psi(\beta_0)}{A_{N,N} - A_{N,-N} - 1} + \frac{\cos^2 N\psi(\beta_0)}{A_{N,N} + A_{N,-N} - 1} \right],$$

(4.65)

$$S_{12} = S_{21} = 1 + 4\pi j e^{-jN\psi(\beta_0)} \operatorname{Re} s f_N(-\beta_0) e^{-p_0(R+a)} \times \\ \times \left[\frac{\sin^2 N\psi(\beta_0)}{A_{N,N} - A_{N,-N} - 1} + \frac{\cos^2 N\psi(\beta_0)}{A_{N,N} + A_{N,-N} - 1} \right].$$

Нетрудно увидеть теперь, что элементы матрицы рассеяния носят четко выраженный резонансный характер, причем в формулах имеются два резонирующих слагаемых, соответствующих расщепленным частотам, о которых говорилось выше.

Подведем итоги проведенного исследования. Нам удалось свести дифракционную задачу для резонатора связанного с волноводом к системе интегральных уравнений второго рода с вырожденным ядром. В резонансном приближении для нее удастся получить аналитическое решение и найти элементы матрицы рассеяния.

Решение представленное выше строилось по схеме приведенной в работе /31/, в которой рассматривалась двумерная система диэлектрическая пластина – диэлектрический цилиндр. Использование НГУ дает возможность применить результаты, полученные для двумерной модели к трехмерным структурам, таким как ОДВ и ДДР.

4.5 Плавные нерегулярности в ОВ. Система интегро-дифференциальных уравнений

Плавные нерегулярности распространены в устройствах на диэлектрических волноводах по той причине, что они оказываются практически единственно возможными из-за потерь на излучение. В открытой линии передачи любое резкое нарушение однородности сопровождается преобразованием волн дискретного спектра в волны непрерывного и излучением энергии в свободное пространство. Избежать этого можно, делая изменение параметров волновода плавным. Плавность здесь понимается, как и обычно в таких ситуациях (см. /32/), как малость изменения параметров волновода на длине волны.

Мы рассмотрим два вида плавных нерегулярностей: изгиб волновода и медленное изменение его ширины. При решении соответствующих граничных задач будем следовать методу малых неоднородностей, подробно рассмотренному в работе /32/.

Напомним основные этапы применения этого метода. Плавная нерегулярность, например, медленное изменение ширины волновода (рис. 4.7) аппроксимируется последовательностью, вообще говоря, бесконечно малых ступенчатых неоднородностей, соединенных бесконечно малыми отрезками регулярных волноводов. Прохождение волн через неоднородность сопровождается их взаимным преобразованием, причем амплитуды

падающих и рассеянных волн могут быть связаны матричным соотношением наподобие матрицы рассеяния.

Если матрица рассеяния (будем употреблять этот термин, хотя он не вполне соответствует принятому в технике СВЧ определению) элементарной неоднородности известна, то задача о прохождении волн через нерегулярность сводится к учету вкладов от большого числа (в пределе бесконечного) элементарных неоднородностей. Последняя задача решается путем вывода системы дифференциальных уравнений относительно амплитуд волн, распространяющихся вдоль плавно изменяющегося волновода. Примечательно, что такая система может быть получена в общем виде безотносительно к виду элементарной неоднородности. При этом необходимо совершить предельный переход при $\Delta z \rightarrow 0$ (см. рис. 4.7, 4.8).

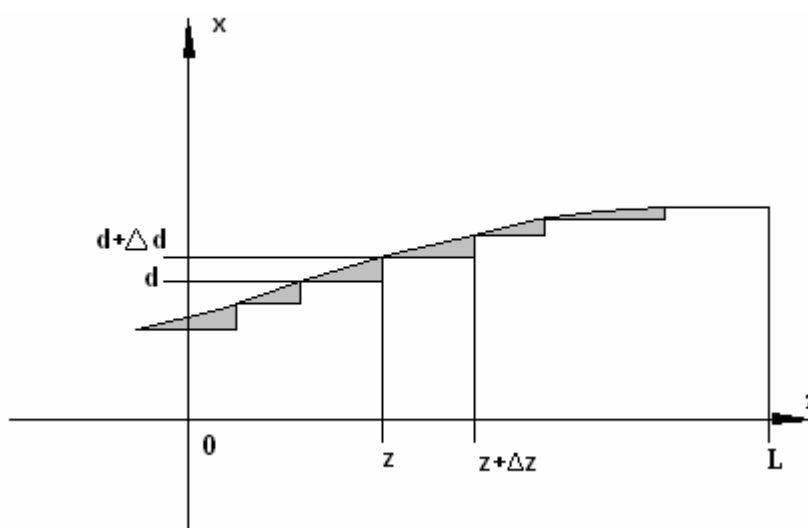


Рис. 4.7

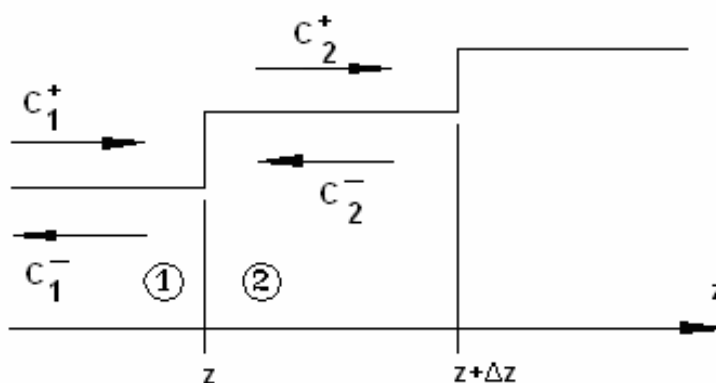


Рис. 4.8

Таким образом, полный анализ плавного перехода (еще один термин, обозначающий отрезок волновода с медленно меняющимися параметрами) распадается на два относительно независимых этапа. Первый - это вывод системы дифференциальных уравнений (для открытого волновода интегро-

дифференциальных) относительно амплитуд волн. Второй - определение коэффициентов этой системы на основе решения дифракционной задачи для элементарной неоднородности.

Приступим к решению первой проблемы. Сделаем некоторые предварительные замечания. Мы уже говорили, что поле в ОВ представляется как сумма волн дискретного и непрерывного спектров следующего вида:

$$\bar{E}(x; z) = \sum_{-N}^N C_n \bar{E}_n(x) e^{-j\gamma_n z} + \int_{-\infty}^{\infty} C_\kappa \bar{E}_\kappa(x) e^{-j\gamma_\kappa z} d\kappa. \quad (4.67)$$

В (4.67) мы распространили пределы интегрирования на весь бесконечный интервал, полагая, что

$$\gamma_{-\kappa} = -\gamma_\kappa,$$

а также помня, что $\gamma_{-n} = -\gamma_n$.

Отметим также, что если речь идет конкретно об ОДВ, то вектор \bar{E} вырождается в единственную компоненту E_y , так, что допустимо пользоваться скалярными функциями. Тем не менее, для общности можно считать, что речь идет о векторных величинах.

Введем далее обобщенный индекс собственной волны μ , считая, что он пробегает все значения от минус до плюс бесконечности по действительной оси и принимает ряд дискретных значений в точках

$$\mu_n = \pm j\sqrt{\gamma_n^2 - k^2}, \quad (4.68)$$

соответствующих волнам дискретного спектра.

Будем понимать под суммированием по индексу μ реальное суммирование по дискретной части μ и интегрирование по непрерывной. В этом случае поле с помощью обобщенного суммирования по индексу μ может быть записано полностью аналогично полю в закрытой линии передачи:

$$\bar{E}(x; z) = \sum_{\mu} C_\mu \bar{E}_\mu(x) e^{-j\gamma_\mu z}. \quad (4.69)$$

Тем не менее, мы должны помнить, что смысл символа \sum_{μ} не совпадает с обычным символом суммирования и подразумевает также и интегрирование по непрерывной части индекса. Использование записи (4.69)

позволит нам существенно упростить запись всех формул и до поры оперировать с (4.69) по аналогии с разложением поля по собственным волнам закрытого волновода. Об отличиях можно вспомнить лишь на заключительном этапе после вывода системы дифференциальных уравнений.

Итак, рассмотрим показанную рис. 4.9 элементарную ячейку нерегулярного волновода в виде неоднородности и отрезка регулярного волновода длиной Δz .

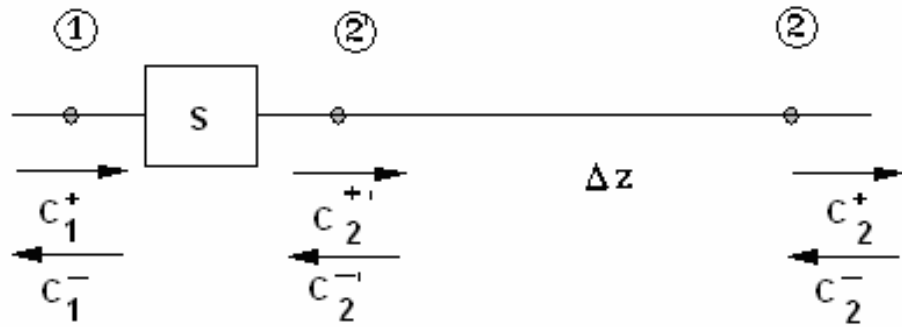


Рис. 4.9

Будем понимать под амплитудой волны коэффициент S_{μ} , стоящий перед собственной функцией в разложении (4.69). В этом случае рассеяние волн на элементарной неоднородности может быть представлено в виде следующего матричного соотношения:

$$S \begin{bmatrix} \bar{C}_1^+ \\ \bar{C}_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^- \\ C_2^+ \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

где S мы назовем матрицей рассеяния, а смысл $\bar{C}_{1,2}^{\pm}$ - векторов падающих и отраженных от неоднородности волн поясняется на рис. 4.9. Запишем определение $\bar{C}_{1,2}^{\pm}$:

$$\bar{C}_{1,2}^{\pm} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ C_{\pm 1,2} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Знак $+$ соответствует волнам, распространяющимся в сторону положительных z , а $-$ в сторону отрицательных. В правой части (4.70)

находятся амплитуды отраженных волн, а в левой падающих на неоднородность.

Будем пока предполагать, что матрица S известна. Связь ее элементов с геометрическими параметрами конкретных нерегулярностей будет получена на этапе анализа элементарных неоднородностей.

Найдем далее соотношение между амплитудами волн в сечениях 1 и 2 ((4.70) дает связь в сечениях 1 и 2'). Точки 2' и 2 связаны отрезком регулярной линии. Поэтому амплитуды волн в этих точках отличаются только экспоненциальными множителями:

$$\begin{aligned}\bar{C}_2^+ &= \exp(-j\gamma\Delta z)\bar{C}_{2'}^+, \\ \bar{C}_{2'}^- &= \exp(-j\gamma\Delta z)\bar{C}_2^-. \end{aligned} \quad (4.72)$$

где γ - это диагональная матрица следующего вида:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & 0 & \\ & & \gamma_V & \\ & 0 & & \cdot \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Символ $\exp(\)$ означает функцию от матрицы /33/. В (4.73) присутствуют только положительные индексы $\gamma > 0$. Далее представим S в блочном виде:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdot & S_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{21} & \cdot & S_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

С учетом (4.72) и (4.74) можно записать следующую систему уравнений:

$$S_{11}\bar{C}_1^+ + S_{12}\exp(-j\gamma\Delta z)\bar{C}_2^- = C_1^-,$$

$$S_{21} \exp(-j\gamma\Delta z)C_1^+ + S_{22} \exp(-2j\gamma\Delta z)\bar{C}_2^- = \bar{C}_2^+ . \quad (4.75)$$

Основной предпосылкой последующего анализа является малость возмущения, вносимого элементарной неоднородностью, Предполагая, что это так и есть, мы запишем следующие соотношения:

$$S_{11} = \Delta S_{11}, \quad S_{22} = \Delta S_{22}, \quad S_{12} = E + \Delta S_{12}, \quad S_{21} = E + \Delta S_{21},$$

$$\bar{C}_2^+ = \bar{C}_1^+ + \Delta\bar{C}^+, \quad \bar{C}_2^- = \bar{C}_1^- + \Delta\bar{C}^-. \quad (4.76)$$

Здесь E - единичная матрица, а символ Δ указывает на то, что в пределе, когда разница в свойствах волноводов справа и слева от неоднородности станет равной нулю, то и все величины, имеющие символ Δ тоже обратятся в нуль. Наконец, используя малость Δz мы можем матрицу типа $\exp(-j\gamma\Delta z)$ приближенно записать следующим образом:

$$\exp(-j\gamma\Delta z) \approx E - j\gamma\Delta z .$$

Подставим это соотношение в (4.75):

$$\Delta S_{11}\bar{C}_1^+ + (E + \Delta S_{12})(E - j\gamma\Delta z)(\bar{C}_1^- + \Delta\bar{C}^-) = \bar{C}_1^- ,$$

$$(E + \Delta S_{21})(E - j\gamma\Delta z)\bar{C}_1^+ + \Delta S_{22}(E - 2j\gamma\Delta z)(\bar{C}_1^- + \Delta\bar{C}^-) = \bar{C}_1^+ + \Delta\bar{C}^+ .$$

Здесь мы выразили C_2^\pm через C_1^\pm . Оставим в приведенных выше формулах только величины первого порядка малости. Затем разделим его на Δz и совершим предельный переход при $\Delta z \rightarrow 0$. Окончательно получаем:

$$\begin{cases} \frac{dC_1^-}{dz} + j\gamma C_1^- - \frac{dS_{11}}{dz} C_1^+ - \frac{dS_{12}}{dz} C_1^- = 0, \\ \frac{dC_1^+}{dz} - j\gamma C_1^+ - \frac{dS_{21}}{dz} C_1^+ - \frac{dS_{22}}{dz} C_1^- = 0. \end{cases} \quad (4.77)$$

Система (4.77) может быть записана в разных формах, например в векторной:

$$\frac{d\bar{C}}{dz} + j\gamma\bar{C} + F\bar{C} = 0. \quad (4.78)$$

Здесь мы объединили в один вектор \bar{C} вектора, содержащие только амплитуды волн, движущихся в одном направлении, то есть

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ C_{-v} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_v \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Матричный оператор F состоит из элементов $F_{\mu\nu}$, определяемых следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \begin{cases} -\frac{dS_{21}}{dz} \mu\nu & \mu > 0, \nu > 0, \\ -\frac{dS_{22}}{dz} \mu\nu & \mu < 0, \nu > 0, \\ -\frac{dS_{12}}{dz} \mu\nu & \mu < 0, \nu < 0, \\ -\frac{dS_{11}}{dz} \mu\nu & \mu > 0, \nu < 0. \end{cases} \quad (4.79)$$

Можно выделить в (4.78) ν -ю строку:

$$\frac{dC_\nu}{dz} + j\gamma_\nu C_\nu + \sum_{\mu} F_{\mu\nu} C_\mu = 0. \quad (4.80)$$

Индекс ν пробегает все свои значения дискретные и непрерывные. Наконец, запишем развернутое дифференциальное уравнение для C_ν с учетом специфического смысла индекса ν :

$$\frac{dC_n}{dz} + j\gamma_n C_n + \sum_{-N}^N F_{mn} C_m + \int_{-\infty}^{\infty} F_{\kappa n} C_\kappa d\kappa, \quad (4.81)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dz} + j\gamma_\alpha C_\alpha + \sum_{-N}^N F_{m\alpha} C_m + \int_{-\infty}^{\infty} F_{k\alpha} C_k dk .$$

Здесь m, n - дискретные индексы, а α, k - непрерывные.

Полученные формулы (4.78)-(4.81) дают нам искомую систему уравнений, позволяющую на основе известных $F_{\mu\nu}$ определить амплитуды рассеянных на нерегулярности волн.

Следующий шаг нашего исследования состоит в определении коэффициентов $F_{\mu\nu}$, имеющих смысл коэффициентов связи между волнами.

4.6 Коэффициенты связи волн

Рассмотрим элементарную неоднородность в виде малого скачка ширины волновода (рис. 4.10). Будем сразу полагать, что деформироваться могут обе его границы. Построим анализ этой структуры по следующей схеме. Получим эквивалентные граничные условия, связывающие поля на линии недеформированной границы с полями на искривленной границе. Это позволит нам анализировать однородный волновод, а его деформацию учесть в изменении граничных условий на стенках, то есть в появлении дополнительных разрывов компонент поля, имеющих смысл поверхностных токов. Затем мы выразим эти токи в первом приближении через поле падающей на неоднородность волны. И, наконец, найдем амплитуды рассеянных волн, решив задачу о возбуждении волновода найденными ранее заданными источниками. Последовательно повторив эту процедуру для всех возможных типов падающих волн, мы определим матрицу F .

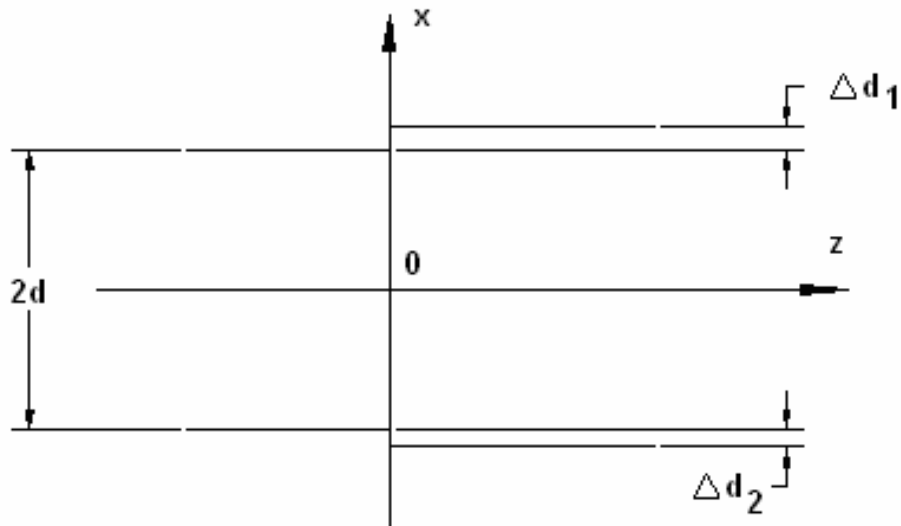


Рис. 4.10

Приступим в выполнении описанной выше программы. Для этого, в первую очередь, рассмотрим структуру изображенную на рис. 4.11. Нам

необходимо связать поле $\bar{H}_{12}, \bar{E}_{12}$ на истинной границе с полем $\bar{H}'_{12}, \bar{E}'_{12}$ на фиктивной прямолинейной границе. Сделаем это с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.



Рис. 4.11

Для начала выделим в плоскости XOZ контур, как это показано на рис. 4.11 и применим к нему первое уравнение Максвелла:

$$\oint_C \bar{H} d\bar{l} = j\omega\epsilon_a \int_S \bar{E} d\bar{s}. \quad (4.82)$$

Конкретно для нашего контура (4.82) преобразуется

$$\begin{aligned} \Delta z (H'_{2z}(z) - H_{2z}(z)) + H_{x2}(z + \Delta z) \Delta d(z + \Delta z) - \\ - H_{x2}(z) \Delta d(z) = j\omega\epsilon_a \Delta d(z) \Delta z E_{y2}(z). \end{aligned} \quad (4.83)$$

При записи (4.83) мы учли, что Δz и Δd малые величины. Поэтому интегралы по малым отрезкам контура мы вправе были заменить на произведение длины отрезка на значение функции в любой точке на отрезке, а интеграл по S также на произведение площади, вычисленной с точностью до членов второго порядка малости, на значение E_y на истинной границе. Далее учтем, что при $z \rightarrow 0$

$$\Delta d(z + \Delta z) = \Delta d(z) + \Delta z \Delta d'(z),$$

$$H_{x2}(z + \Delta z) = H_{x2}(z) + \Delta z H'_{x2}(z).$$

Подставим последнее равенство в (4.83) и получим искомую связь компонент поля:

$$H'_{2z} - H_{2z} = j\omega\epsilon_{a_2}\Delta d(z)E_{y2}(z) - \frac{d\Delta d(z)H_{x2}(z)}{dz}. \quad (4.84)$$

Уравнения Максвелла позволяют выразить H_{x2} через E_{y2} :

$$H_{x2} = \frac{1}{j\omega\mu_{a_2}} \frac{\partial E_{y2}}{\partial z}.$$

Тогда окончательно получаем:

$$H'_{2z} - H_{2z} = j\omega\epsilon_{a_2}\Delta d(z)E_{y2}(z) - \frac{d}{dz} \left(\Delta d(z) \frac{dE_{y2}}{dz} \right) \frac{1}{j\omega\mu_{a_2}}. \quad (4.85)$$

Выделим теперь контур, лежащий в плоскости ХОУ (рис. 4.12) и применим к нему второе уравнение Максвелла в интегральной форме.

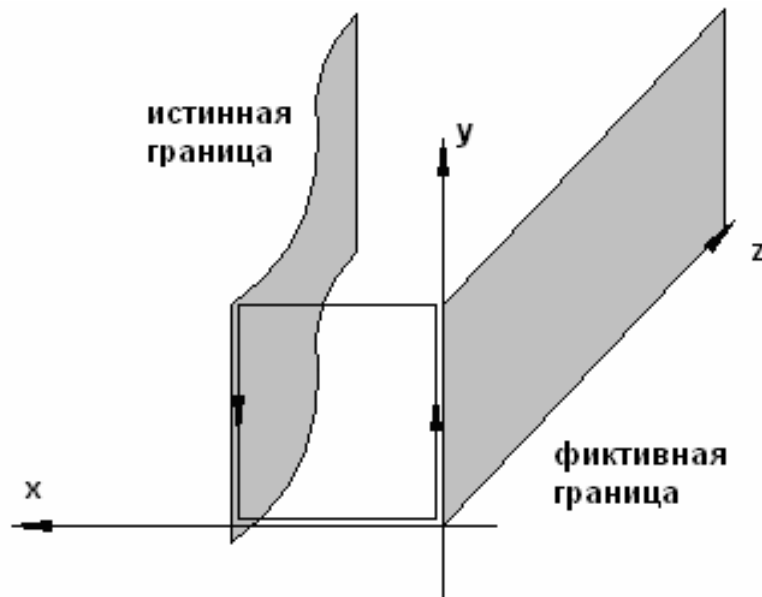


Рис. 4.12

В результате получаем:

$$E_{y2} - E'_{y2} = -j\omega\mu_{a_2}\Delta d(z)H_{z2}. \quad (4.86)$$

Абсолютно аналогичная процедура, примененная к полю с индексом 1 позволяет установить следующие соотношения:

$$H'_{1z} - H_{1z} = j\omega\epsilon_{a_1}\Delta d(z)E_{y1}(z) - \frac{1}{j\omega\mu_{a_1}}\frac{d}{dz}\left(\Delta d\frac{dE_{y2}}{dz}\right),$$

$$E_{y1} - E'_{y1} = -j\omega\mu_{a_1}\Delta dH_{z1}. \quad (4.87)$$

Из (4.85)-(4.87) видно, что перемещение плоскости, в которой установлены граничные условия (вообще говоря, любые) сопровождается появлением дополнительных разрывов тангенциальных компонент поля, пропорциональных величине смещения Δd . Определим эквивалентные этим разрывам электрические и магнитные токи:

$$I_{zM1} = -j\omega\mu_{a_1}\Delta dH_{z1},$$

$$I_{y\mathcal{E}1} = -j\omega\epsilon_{a_1}\Delta dE_{y1} + \frac{1}{j\omega\mu_{a_1}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta d\frac{\partial E_{y1}}{\partial z}\right),$$

$$I_{zM2} = j\omega\mu_{a_2}\Delta dH_{z2},$$

$$I_{y\mathcal{E}2} = j\omega\epsilon_{a_2}\Delta dE_{y2} - \frac{1}{j\omega\mu_{a_2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta d\frac{\partial E_{y2}}{\partial z}\right). \quad (4.88)$$

Формулы для эквивалентных токов были получены для случая, когда среда с индексом 1 находится сверху относительно среды, обозначенной индексом 2. Если они расположены в обратном порядке, что имеет место на нижней границе волновода, то в (4.88) надо только поменять местами индексы 1 и 2. При этом, однако, следует помнить, что положительным смещением по-прежнему считается смещение границы вверх.

Сделаем одно замечание относительно того, какое поле следует подставлять в (4.88) для определения токов. Нам необходимо помнить, что мы хотим найти рассеянное поле с точностью до малых величин первого порядка, то есть пропорциональных Δd . Это поле порождается токами и, очевидно, пропорционально их порядку малости. Мы видим, что $I_{\mathcal{E},M}$ пропорциональны Δd . Поэтому, компоненты поля, через которые выражаются токи следует определять в нулевом порядке малости ($\sim (\Delta d)^0$), так как учет слагаемых более высокого порядка превышает точность определения рассеянного поля, к которой мы должны стремиться. Если мы

теперь вспомним, что задача дифракции на ступеньке формулируется как задача рассеяния поля одной из собственных волн волновода (при $z < 0$ или $z > 0$) падающей на элементарную неоднородность, то не составит труда сделать вывод, что нулевой порядок малости имеет только поле падающей волны. Это означает, как раз, что токи в (4.88) могут быть заданы известным полем падающей волны, то есть, по существу, они известны (конечно с точностью до несущественного амплитудного множителя).

Таким образом, определение амплитуд рассеянных волн свелось к тривиальной задаче о возбуждении регулярного волновода заданными источниками.

В формулах (4.88) под действие оператора дифференцирования попадает функция $\Delta d(z)$, которая может быть определена следующим образом

$$\Delta d(z) = \begin{cases} \Delta d, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

если мы считаем, что волновод справа возмущен относительно волновода слева.

Если же мы, наоборот, полагаем возмущенным левый волновод, то

$$\Delta d(z) = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ -\Delta d, & z < 0. \end{cases} \quad (4.90)$$

Итак, $\Delta d(z)$ - это функция, имеющая при $z = 0$ разрыв. Функции $E_{y1,2}$, также находящиеся под действием оператора дифференцирования, непрерывны, если определить их в нулевом приближении равными соответствующей компоненте поля падающей волны. Таким образом, соотношение для токов может быть переписано с учетом того, что производная от $\Delta d(z)$ имеет слагаемое в виде дельта-функции:

$$\begin{aligned} I_{zM1} &= -j\omega\mu_{a1} \Delta d H_{z1}, \\ I_{y\Delta 1} &= -j\omega\varepsilon_{a1} \Delta d E_{y1} + \frac{1}{j\omega\mu_{a1}} \left[\Delta d \delta(z) \frac{\partial E_{y1}}{\partial z} + \Delta d \frac{\partial^2 E_{y1}}{\partial z^2} \right], \\ I_{zM2} &= j\omega\mu_{a2} \Delta d H_{z2}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$I_{y\partial 2} = j\omega\epsilon_{a_2}\Delta d E_{y2} - \frac{\Delta d}{j\omega\mu_{a_2}} \left[\delta(z) \frac{\partial E_{y2}}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_{y2}}{\partial z^2} \right].$$

Формулы (4.91) соответствуют (4.89).

Итак, пусть на нашу неоднородность слева из области $z < 0$ набегают одна из собственных волн. При этом не существенно принадлежит ли она дискретному или непрерывному спектру, так как мы можем воспользоваться обобщенным индексом. Пусть у падающей волны он будет равен μ . Ее поле можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}_\mu(x) e^{-j\gamma_\mu z}, \\ \bar{H} &= \bar{H}_\mu(x) e^{-j\gamma_\mu z}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

С учетом (4.92) получаем выражения для токов, текущих на обеих границах волновода:

$$x = d + 0$$

$$I_{zM} = -j\omega\mu_{a_1}\Delta d_1 H_{z\mu}(d+0) e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$\begin{aligned} I_{y\partial} &= -j\omega\epsilon_{a_1}\Delta d_1 E_{y\mu}(d+0) e^{-j\gamma_\mu z} + \\ &+ \frac{\Delta d_1}{j\omega\mu_{a_1}} \left[-j\delta(z) E_{y\mu}(d+0) \gamma_\mu - \gamma_\mu^2 E_{y\mu}(d+0) \right] e^{-j\gamma_\mu z}, \\ x &= d - 0 \end{aligned}$$

$$I_{zM} = j\omega\mu_{a_2}\Delta d_1 H_{z\mu}(d-0) e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\partial} = \Delta d_1 E_{y\mu}(d-0) e^{-j\gamma_\mu z} + \frac{\Delta d_1}{j\omega\mu_{a_1}} \left[+j\omega\epsilon_{a_2} + \frac{j\gamma_\mu \delta(z) + \gamma_\mu^2}{j\omega\mu_{a_2}} \right],$$

$$x = -d + 0$$

$$I_{zM} = -j\omega\mu_{a_2}\Delta d_2 H_{z\mu}(-d+0) e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\mathcal{E}} = -\frac{\Delta d_2}{j\omega\mu_{a_2}} E_{y\mu}(-d+0)e^{-j\gamma_\mu z} \left[j\gamma_\mu \delta(z) + \gamma_\mu^2 - k_2^2 \right]$$

$$x = -d-0$$

$$I_{zM} = j\omega\mu_{a_1} \Delta d_2 H_{z\mu}(-d-0)e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\mathcal{E}} = \frac{\Delta d_2}{j\omega\mu_{a_1}} E_{y\mu}(-d-0)e^{-j\gamma_\mu z} \left[j\gamma_\mu \delta(z) + \gamma_\mu^2 - k_1^2 \right].$$

Амплитуды рассеянных волн определяются по формуле (4.15). В первую очередь определим амплитуды отраженных волн C_{-v} :

$$\begin{aligned} C_{-v} = & \frac{1}{N_{-v}} \frac{1}{j(\gamma_\mu + \gamma_\nu)} \Delta d_1 \left\{ j\omega\mu_{a_2} H_{z\mu}(d-0)H_{z\nu}(d-0) - \right. \\ & - j\omega\mu_{a_1} H_{z\mu}(d+0)H_{z\nu}(d+0) + \\ & + \left(\gamma_\mu^2 - k_2^2 - \gamma_\mu(\gamma_\nu + \gamma_\mu) \right) \frac{E_{y\mu}(d-0)E_{y\nu}(d-0)}{j\omega\mu_{a_2}} - \\ & \left. - \left(\gamma_\mu^2 - k_1^2 - \gamma_\mu(\gamma_\nu + \gamma_\mu) \right) \frac{E_{y\mu}(d+0)E_{y\nu}(d+0)}{j\omega\mu_{a_1}} \right\} - \\ & - \frac{\Delta d_2}{jN_{-v}(\gamma_\nu + \gamma_\mu)} \left\{ j\omega\mu_{a_2} H_{z\mu}(-d+0)H_{z\nu}(-d+0) - \right. \\ & - j\omega\mu_{a_1} H_{z\mu}(-d-0)H_{z\nu}(-d-0) + \\ & + \left(\gamma_\mu^2 - k_2^2 - \gamma_\mu(\gamma_\nu + \gamma_\mu) \right) \frac{E_{y\mu}(-d+0)E_{y\nu}(-d+0)}{j\omega\mu_{a_2}} - \\ & \left. - \left(\gamma_\mu^2 - k_1^2 - \gamma_\mu(\gamma_\nu + \gamma_\mu) \right) \frac{E_{y\mu}(-d-0)E_{y\nu}(-d-0)}{j\omega\mu_{a_1}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

При записи (4.93) использовано соотношение

$$\int_0^\infty e^{-j(\gamma_\mu + \gamma_{-\nu})z} dz = \frac{1}{j(\gamma_\mu + \gamma_{-\nu})}, \quad \nu < 0, \quad \mu > 0. \quad (4.94)$$

Теперь перейдем к определению амплитуд рассеянных в волноводе при $z > 0$ волн. Здесь мы столкнемся с одной трудностью, связанной с интегрированием по z функций типа:

$$e^{-j(\gamma_\mu - \gamma_\nu)z},$$

интеграл от которых в полубесконечных пределах сходится лишь в случае

$$\operatorname{Re}(-j(\gamma_\mu - \gamma_\nu)) < 0, \quad (4.95)$$

что выполняется не для всех комбинаций μ и ν . Для обхода этой трудности мы воспользуемся следующим приемом. Положим, что возмущен у нас волновод при $z < 0$. Тогда интегрирование по z будет вестись уже от $-\infty$ до 0. Поэтому для тех волн, у которых (4.95) не выполняется проблем возникнуть не должно в силу того, что положительная действительная часть выражения, стоящего в скобках, как раз и обеспечивает сходимость интеграла на отрицательной полуоси. Изменение пределов интегрирования в сочетании с изменением знака Δd приводит к тому, что для определения C_ν можно пользоваться тем же соотношением (4.93), изменяя в нем знак перед ν на противоположный, то есть $C_\nu = C_{-\nu}(-\nu)$.

Таким образом, мы можем найти амплитуды всех рассеянных на неоднородности волн. Однако, имеется одна сложность, связанная с определением коэффициента C_μ , имеющего индекс, совпадающий с индексом падающей волны. Действительно, при $\nu = \mu$ знаменатель в (4.93) обращается в нуль, а C_μ , соответственно в бесконечность, что очевидно не может соответствовать физическому содержанию задачи. Попытаемся разобраться с этим эффектом.

Как мы уже только что отметили, устремление C_μ в бесконечность связано с равенством постоянных распространения рассеянной и возбуждающей неоднородность волн. В действительности они имеют отличие пропорциональное Δd . Для волн других типов разницей в постоянных распространения порядка Δd можно было пренебречь, поскольку она вносила вклад в C_μ порядка Δd^2 . В случае же $\nu = \mu$ этого делать нельзя.

Постараемся определить величину $\Delta\gamma_\mu$ - приращение к γ_μ , вызванное деформацией волновода. Для этого рассмотрим бесконечный волновод, стенки которого смещены относительно некоторого условного состояния на величины $\Delta d_{1,2}$ также как в нашей неоднородности. Рассмотрим процесс распространения волны в таком волноводе. Будем, как и прежде полагать, что размер волновода остался прежним, но на его стенках появились эквивалентные токи, которые пропорциональны $\Delta d_{1,2}$ и могут быть определены по формулам (4.88). Таким образом, нам надо решить задачу об амплитуде волны, бегущей вдоль описанной структуры (рис. 4.13) и

возбуждаемой токами, которые, в свою очередь, порождаются током этой волны.

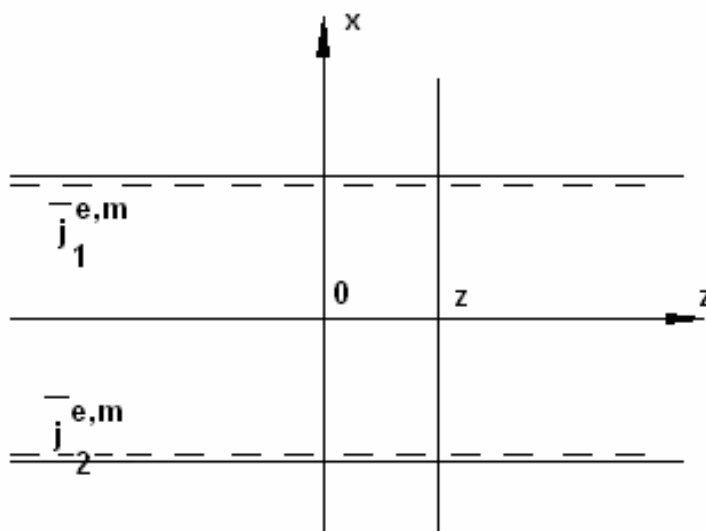


Рис. 4.13

Будем искать поле интересующей нас волны в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{Bmatrix} = C_\mu(z) e^{-j\gamma_\mu z} \begin{Bmatrix} \bar{E}_\mu(x) \\ \bar{H}_\mu(x) \end{Bmatrix}, \quad (4.96)$$

где γ_μ - это постоянная распространения невозмущенного волновода, а $C_\mu(z)$ - неизвестная функция.

Для того, чтобы связать амплитуду волны с токами мы воспользуемся приемом, описанным в /16/. Для этого в некотором сечении z условно введем бесконечно малый зазор в области, занятой токами (рис. 4.13) так, чтобы в этой области можно было корректно найти амплитуду волны. Она для $\mu > 0$ может быть найдена по следующей формуле:

$$C_\mu = \frac{1}{N_\mu} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} \left[(j^e \bar{E}_{-\mu}) - (j^m \bar{H}_{-\mu}) \right] e^{j\gamma_\mu z'} dx' dz'. \quad (4.97)$$

Продифференцируем (4.97) по z :

$$\frac{dC_\mu}{dz} = \frac{1}{N_\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(j^e \bar{E}_{-\mu}) - (j^m \bar{H}_{-\mu}) \right] e^{j\gamma_\mu z'} dx'. \quad (4.98)$$

В первом приближении токи $\bar{j}^{e,m}$ могут быть определены через поле самой распространяющейся волны. Выделим в них зависимость от z :

$$\bar{j}^{e,m} = C_\mu(z) e^{-j\gamma_\mu z} \bar{J}^{e,m}(x). \quad (4.99)$$

При подстановке (4.99) в (4.98) экспоненциальные множители в правой части сократятся и мы получим дифференциальное уравнение для C_μ :

$$\frac{dC_\mu}{dz} = \frac{1}{N_\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\bar{J}^e \bar{E}_{-\mu} \right) - \left(\bar{J}^m \bar{H}_{-\mu} \right) \right] dx' C_\mu. \quad (4.100)$$

Оно имеет простое экспоненциальное решение:

$$C_\mu = e^{\lambda z}, \quad (4.101)$$

$$\lambda = \frac{1}{N_\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\bar{J}^e \bar{E}_{-\mu} \right) - \left(\bar{J}^m \bar{H}_{-\mu} \right) \right] dx'.$$

Сравнивая (4.101) и (4.96) мы можем сделать вывод о том, что постоянная распространения γ_μ получила приращение $\Delta\gamma_\mu$, определяемое следующей формулой:

$$\Delta\gamma_\mu = \frac{j}{N_\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\bar{J}^e \bar{E}_{-\mu} \right) - \left(\bar{J}^m \bar{H}_{-\mu} \right) \right] dx'. \quad (4.102)$$

Выразим далее $\Delta\gamma_\mu$ через собственные функции $(E, H)_\mu$:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_\mu &= \\ &= j \sum_{k=1}^2 \frac{\Delta d_k (-1)^{k+1}}{N_\mu} \left\{ j\omega\mu_{a_2} H_{z\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) H_{-z\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) - \right. \\ &\quad \left. - j\omega\mu_{a_1} H_{z\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) H_{-z\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) \right\} + \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\gamma_{\mu}^2 - k_2^2 \right) \frac{E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) E_{-y\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right)}{j\omega\mu a_2} - \\
& - \left(\gamma_{\mu}^2 - k_1^2 \right) \frac{E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) E_{-y\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right)}{j\omega\mu a_1} \}.
\end{aligned}$$

Теперь мы в состоянии скорректировать формулу (4.103) так, чтобы она была верна и при $\nu = \mu$. Для этого в этом случае мы должны положить

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \mu} (\gamma_{\nu} - \gamma_{\mu}) &= \Delta\gamma_{\mu}, \\
\nu &\rightarrow \mu
\end{aligned} \tag{4.104}$$

где $\Delta\gamma_{\mu}$ определяется по (4.103).

Нетрудно заметить, что при этом C_{μ} имеет уже не первый, а нулевой по Δd порядок, что впрочем объяснимо, так как в C_{μ} входит и поле падающей волны тоже имеющее нулевой порядок. Запишем окончательное выражение для C_{μ} :

$$C_{\mu} = 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\Delta d_k (-1)^{k+1} \gamma_{\mu}}{\omega\mu a_2 N_{\mu}} E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) E_{-y\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right). \tag{4.105}$$

Чтобы окончательно покончить с данной задачей нам необходимо от амплитуд рассеянных волн перейти к коэффициентам связи $F_{\mu\nu}$, входящим в систему интегро-дифференциальных уравнений. Отметим, что падающая волна у нас имела единичную амплитуду. Поэтому найденные C_{ν} просто равны элементам матрицы рассеяния неоднородности $S_{ij\mu\nu}$. Кстати, амплитуды рассеянных волн при возбуждении неоднородности справа могут быть определены с помощью той же формулы (4.93), но с заменой μ на $-\mu$.

Таким образом мы можем записать следующие соотношения:

$$C_{\nu} = \begin{cases} dS_{\mu\nu 21}, & \mu > 0, \nu > 0, \mu \neq \nu, \\ dS_{\mu\nu 11}, & \mu > 0, \nu < 0, \\ -dS_{\mu\nu 12}, & \mu < 0, \nu < 0, \mu \neq \nu, \\ -dS_{\mu\nu 22}, & \mu < 0, \nu > 0, \end{cases} \tag{4.106}$$

$$C_{\mu} - 1 = dS_{\mu\mu 21}, \quad 1 - C_{\mu} = dS_{\mu\mu 12}.$$

Далее мы должны найти предел отношений типа $\frac{dS_{\mu\nu}}{dz}$ при $dz \rightarrow 0$.

Обратимся к рис. 4.14. Из него хорошо видно, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta z} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.107)$$

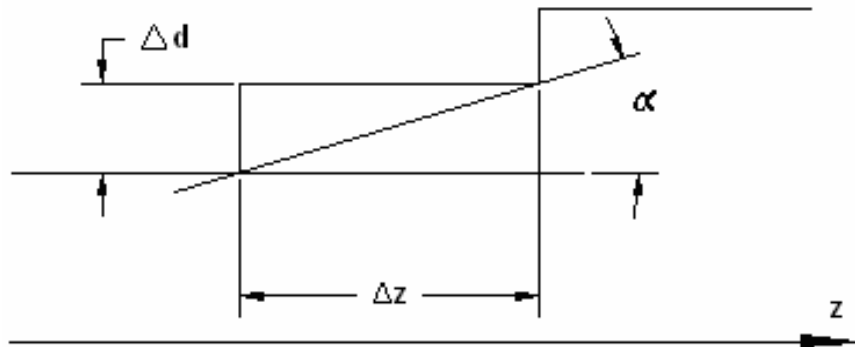


Рис. 4.14

Таким образом, чтобы найти выражения для $F_{\mu\nu}$ нам достаточно в уже полученных формулах заменить $\Delta d_{1,2}$ на $\operatorname{tg} \alpha_{1,2}$. Здесь α - это угол наклона границы волновода относительно оси Oz в точке z .

Итак, мы завершили вывод необходимых соотношений для волновода с

плавно изменяющейся шириной. На очереди теперь стоит изгиб волновода.

На рис. 4.15 показана аппроксимация изогнутого участка ОВ последовательностью изломов на малый угол $d\theta$. Таким образом, наша задача состоит в анализе элементарной неоднородности - изгиб на малый угол, показанной на рис. 4.16

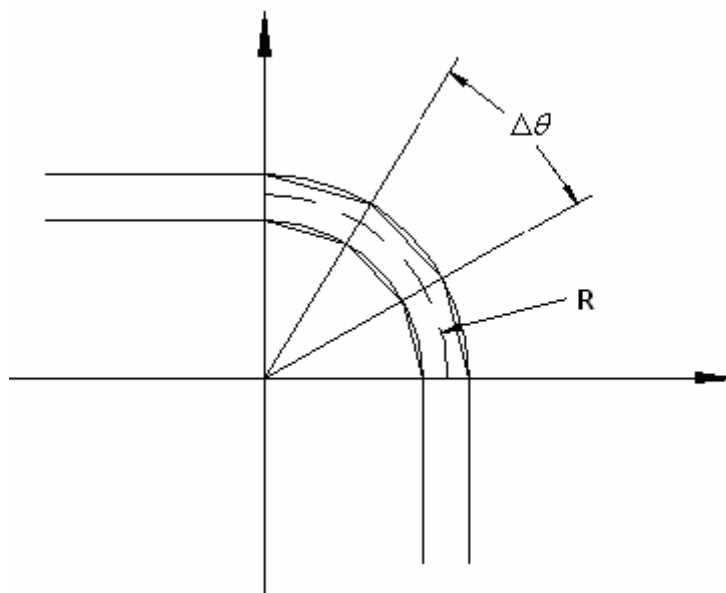


Рис. 4.15

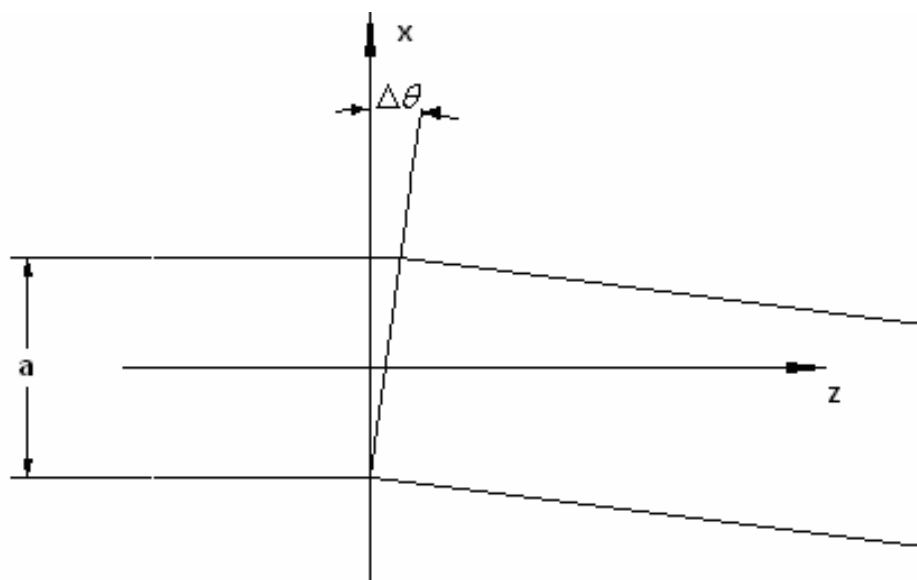


Рис. 4.16

Будем решать эту задачу используя ту же схему, что и в случае скачка ширины. Заменяем волновод с изломанной осью прямолинейным волноводом (рис. 4.16), на стенках которого текут эквивалентные электрические и магнитные токи. Токи найдем с помощью тех же соотношений (4.88). Изменение состоит только в виде функции $\Delta d(z)$, которая теперь определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta d_1 &= (z - a\Delta\theta)\Delta\theta, \\ \Delta d_2 &= z\Delta\theta. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Здесь индекс 1 говорит о том, что данная величина соответствует верхней границе волновода, 2 - нижней. Буквой a обозначена ширина ОВ: $a = 2d$.

Запишем теперь выражения для токов:

$$x = d + 0,$$

$$I_{zm1} = j\omega\mu_{a_1} z\Delta\theta H_{z\mu}(d+0)e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\partial 1} = -\Delta\theta e^{-j\gamma_\mu z} \left\{ -j\omega\epsilon_{a_1} zE_{y\mu}(d+0) - \frac{1}{j\omega\mu_{a_1}} (j\gamma_\mu + z\gamma_\mu^2) E_{y\mu}(d+0) \right\},$$

$$I_{zm2} = -j\omega\mu_{a_2} z\Delta\theta H_{z\mu}(d-0)e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\partial 2} = \Delta\theta e^{-j\gamma_\mu z} \left\{ -j\omega\epsilon_{a_2} zE_{y\mu}(d-0) - \frac{1}{j\omega\mu_{a_2}} (j\gamma_\mu + z\gamma_\mu^2) E_{y\mu}(d-0) \right\},$$

$$x = -d,$$

$$I_{zm2} = j\omega\mu_{a_2} z\Delta\theta H_{z\mu}(-d+0)e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\partial 2} = \Delta\theta e^{-j\gamma_\mu z} \left\{ j\omega\epsilon_{a_2} zE_{y\mu}(-d+0) + \frac{(j\gamma_\mu + \gamma_\mu^2 z)}{j\omega\mu_{a_2}} E_{y\mu}(-d+0) \right\},$$

$$I_{zm1} = -j\omega\mu_{a_1} z\Delta\theta H_{z\mu}(-d-0)e^{-j\gamma_\mu z},$$

$$I_{y\partial 1} = -\Delta\theta e^{-j\gamma_\mu z} \left\{ j\omega\epsilon_{a_1} zE_{y\mu}(-d-0) + \frac{(j\gamma_\mu + \gamma_\mu^2 z)}{j\omega\mu_{a_2}} E_{y\mu}(-d-0) \right\}.$$

(4.109)

При записи (4.109) были учтены следующие обстоятельства. Неоднородность возбуждается слева волной с индексом равным μ . Удержаны при записи токов только линейные по $\Delta\theta$ слагаемые. Учтено, что обе границы при $x = d$ и $x = -d$ смещены в одну сторону.

Дальнейшие преобразования во многом повторяют проделанные ранее в ходе анализа скачка ширины волновода. Существенное отличие кроется в двух моментах. Первый это присутствие в зависимости токов от z линейных слагаемых. При этом, очевидно, должны возникнуть определенные сложности, связанные с вычислением интегралов типа

$$\int_0^{\infty} z e^{-j(\gamma_V + \gamma_\mu)z} dz.$$

Будем пока рассматривать ситуацию когда $\operatorname{Re} [j(\gamma_V + \gamma_\mu)] > 0$. Тогда допустимо рассмотреть следующий предельный переход:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} z e^{-j(\gamma_V + \gamma_\mu)z - \delta z} dz.$$

Очевидно, что последний интеграл при $\delta > 0$ всегда сходится. Вычислить его нетрудно. Он равен

$$-\frac{1}{(\gamma_V + \gamma_\mu + \delta)^2}.$$

Следовательно при $\delta = 0$ получаем:

$$\int_0^{\infty} z e^{-j(\gamma_V + \gamma_\mu)z} dz = -\frac{1}{(\gamma_V + \gamma_\mu)^2}. \quad (4.110)$$

Случай $\operatorname{Re} [j(\gamma_V + \gamma_\mu)] < 0$ обходится также как и раньше. То есть рассматривается деформация волновода при $z < 0$ относительно волновода при $z > 0$. Опять же при этом получается, что окончательные выражения для амплитуд рассеянных волн, полученные для случая $\operatorname{Re} [j(\gamma_V + \gamma_\mu)] > 0$ сохраняют свою силу.

Второе важное отличие состоит в том, что токи на разных границах волновода оказались, по крайней мере, с точностью до членов порядка $\Delta\theta$ противофазными, то есть

$$\bar{I}^{e,m}(d) = -\bar{I}^{e,m}(-d). \quad (4.111)$$

Это очень существенно с точки зрения вычисления амплитуды рассеянной волны с индексом, равным индексу падающей волны μ . Дело в том, что при выполнении (4.111) четные волны не возбуждают четных, а нечетные нечетных. Связываются на неоднородностях только волны разной четности. Отсюда сразу следует, что

$$C_\mu = C_{-\mu} = 1. \quad (4.112)$$

Для остальных амплитуд справедливо соотношение:

$$\begin{aligned}
C_\nu = & \Delta\theta \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[j\omega\mu_{a_1} H_{z\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) H_{-z\nu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) + \right. \\
& + \frac{\gamma_\mu^2 - k_1^2}{j\omega\mu_{a_1}} E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) E_{-y\nu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) \frac{1}{(\gamma_\mu - \gamma_\nu)^2} + \\
& + \left. \frac{\gamma_\mu}{j\omega\mu_{a_1} (\gamma_\mu - \gamma_\nu)} E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) E_{-y\nu} \left((-1)^{k+1} (d+0) \right) \right] - \\
& - \Delta\theta \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[j\omega\mu_{a_2} H_{z\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) H_{-z\nu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) + \right. \\
& + \frac{\gamma_\mu^2 - k_2^2}{j\omega\mu_{a_2}} E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) E_{-y\nu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) \frac{1}{(\gamma_\mu - \gamma_\nu)^2} + \\
& + \left. \frac{\gamma_\mu}{j\omega\mu_{a_2} (\gamma_\mu - \gamma_\nu)} E_{y\mu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) E_{-y\nu} \left((-1)^{k+1} (d-0) \right) \right].
\end{aligned} \quad (4.113)$$

Нам теперь необходимо найти производные от элементов матрицы рассеяния излома. Отметим при этом, что поскольку амплитуда падающей волны единичная, то сами элементы матрицы S просто равны соответствующим амплитудам C_μ . Чтобы правильно осуществить вычисление производных нам надо учесть связь между линейной координатой z и угловой θ .

$$z = R \theta. \quad (4.114)$$

Из (4.114) следует, что

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta}.$$

На основании последнего равенства мы можем записать следующее соотношение:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{R} \left\{ \begin{array}{l} B_{\mu\nu}, \quad \mu < 0, \\ -B_{\mu\nu}, \quad \mu > 0, \end{array} \right\} \quad (4.115)$$

$$C_\nu = \Delta\theta B_{\mu\nu}.$$

Таким образом, мы определили интересовавшие нас коэффициенты системы интегро-дифференциальных уравнений. Ее решение ничем не отличается от случаев рассмотренных в книгах /26,32/. Поэтому нам не имеет смысла заострять свое внимание на этих хорошо изученных вопросах.

5. Ключевые задачи

5.1. Ключевая задача для полосковых структур

В этом разделе мы рассмотрим решение ключевой задачи для ИС на основе СПЛ. С точки зрения сложности математических преобразований этот случай является наиболее простым. В тоже время, решение содержит все принципиальные этапы, присутствующие в случаях МПЛ и ДЦВ. Отличие состоит только в более сложной записи некоторых функций. Поэтому наиболее интересные результаты данного раздела могут быть достаточно легко использованы для анализа ключевых структур микрополоскового и щелевого типов.

Геометрия ключевой структуры показана на рис. 5.1.

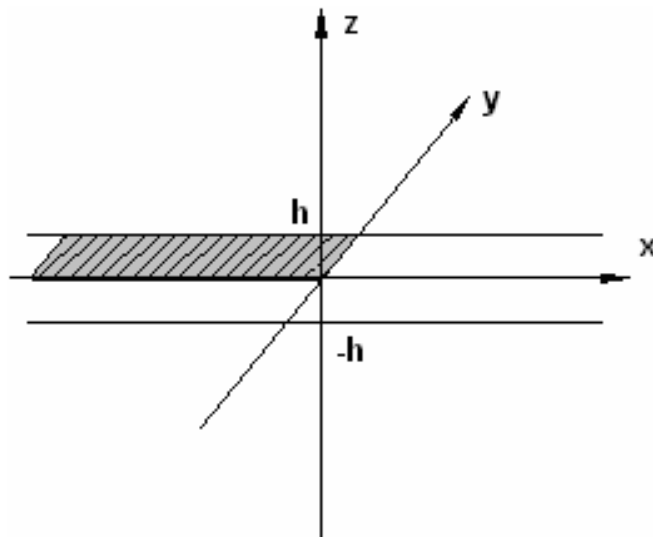


Рис. 5.1

Пусть из отрицательного полупространства ($x < 0$) на обрыв металлизации при $z=0$ набежит основная Т-волна плоского металлического волновода расположенного при $x < 0$. При этом имеется ввиду, что поперечная

компонента электрического поля падающей волны является нечетной функцией z . Иными словами, плоские волноводы при $y > 0$ и $y < 0$ возбуждаются противофазно. Последнее обстоятельство типично для схем на основе СПЛ и эквивалентно размещению при $x > 0$, $z = 0$ магнитной стенки, введение которой позволяет рассматривать поле только в верхнем полупространстве, имея ввиду, что при $z < 0$ оно находится элементарно из соображений симметрии.

Предполагается, что угол падения волны произвольный, то есть зависимость ее компонент поля от x и y имеет следующий вид:

$$e^{-j\beta y - j\kappa_0 x}, \quad \kappa_0 = \sqrt{\epsilon k^2 - \beta^2}, \quad (5.1)$$

где ϵ относительная диэлектрическая проницаемость среды между металлическими экранами, k - волновое число свободного пространства, β - проекция волнового вектора волны на ось Oy , определяющая ее угол падения.

Наша задача состоит в определении поля рассеянного на обрыве центральной металлизации. Для формулировки граничной задачи выразим электромагнитное поле через тангенциальное электрическое поле при $z = 0$ и $x > 0$. Такой подход эквивалентен введению в указанной выше полуплоскости магнитных токов, которые возбуждают бесконечный по оси Ox плоский волновод при $z > 0$. Поле возбужденное такими токами будет удовлетворять граничным условиям на металлических поверхностях при $z = h$, $z = -h$, $z = 0$ ($x < 0$), но не будет удовлетворять граничному условию на эквивалентной магнитной стенке при $z = 0$ ($x > 0$), которое требует обращения в нуль тангенциальных компонент магнитного поля. Таким образом, нам необходимо выразить через указанные выше тангенциальные компоненты электрического поля соответствующие компоненты магнитного поля и приравнять последние нулю в правой полуплоскости. В результате мы получим систему интегральных уравнений, которая впоследствии будет решена методом Винера - Хопфа.

Процедура выражения магнитного поля через электрическое достаточно стандартна, хотя и весьма громоздка. Поэтому мы не будем ее подробно описывать, а приведем сразу окончательные формулы:

$$H_x = \int_0^{\infty} E_x(x') K_{xx}(x, x') dx' + \int_0^{\infty} E_y(x') K_{xy}(x, x') dx',$$

$$H_y = \int_0^{\infty} E_x(x') K_{yx}(x, x') dx' + \int_0^{\infty} E_y(x') K_{yy}(x, x') dx',$$

$$\begin{aligned}
K_{xx}(x, x') &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa\beta}{\kappa^2 + \beta^2} \operatorname{ctg}(qh) \left(\frac{\omega\varepsilon_a}{jq} + \frac{jq}{\omega\mu_a} \right) e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa, \\
K_{xy}(x, x') &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 + \beta^2} \operatorname{ctg}(qh) \left(\frac{jq\kappa^2}{\omega\mu_a} - \frac{\omega\varepsilon_a\beta^2}{jq} \right) e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa, \\
K_{yy}(x, x') &= -K_{xx}(x, x'), \\
K_{yx}(x, x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 + \beta^2} \operatorname{ctg}(qh) \left(\frac{jq\beta^2}{\omega\mu_a} - \frac{\omega\varepsilon_a\kappa^2}{jq} \right) e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$q = \sqrt{\varepsilon\kappa^2 - \kappa^2 - \beta^2},$$

где ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды при $|z| < h$, а ε_a, μ_a - ее абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

В формулах (5.2) зависимость от y опущена, так как она одинакова для всех компонент поля и ее учет не дает никакой новой информации.

Можно, введя следующие обозначения переписать (5.2) в обобщенной форме:

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{\omega\varepsilon_a}{jq}, \quad f_2 = \frac{jq}{\omega\mu_a}, \quad \varphi = \operatorname{ctg}(qh), \\
K_{xx}(x, x') &= -\frac{1}{2\pi W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa\beta\varphi}{\kappa^2 + \beta^2} \frac{(f_1 - f_2)}{f_1 f_2} e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa, \\
K_{xy}(x, x') &= \frac{1}{2\pi W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi}{\kappa^2 + \beta^2} \frac{(f_2\kappa^2 + f_1\beta^2)}{f_1 f_2} e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa, \\
K_{yy}(x, x') &= -K_{xx}(x, x'), \\
K_{yx}(x, x') &= -\frac{1}{2\pi W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi}{\kappa^2 + \beta^2} \frac{(f_1\kappa^2 + f_2\beta^2)}{f_1 f_2} e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где $W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ - волновое сопротивление среды в области $|z| < h$.

Отметим, что запись (5.3) удобна с той точки зрения, что использование ее для микрополосковых и ДЦВ структур потребует только лишь изменения вида функций $f_{1,2}, \varphi$ без изменения структуры формулы.

Как уже было сказано выше, суммарное магнитное поле касательное к плоскости $z=0$ должно при $x>0$ равняться нулю. Выполнение этого условия дает нам искомую систему интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} G(x-x') \bar{E}(x') dx' + \bar{H}_0(x) = 0,$$

$$\bar{E}(x) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \bar{H}_0(x) = \begin{bmatrix} \beta \\ -\kappa_0 \end{bmatrix} e^{-j\kappa_0 x},$$

$$G(x) = \frac{1}{2\pi W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi}{(\kappa^2 + \beta^2) f_1 f_2} \begin{bmatrix} -\kappa\beta(f_1 - f_2) & -(\kappa^2 f_1 + \beta^2 f_2) \\ (\beta^2 f_1 + \kappa^2 f_2) & \kappa\beta(f_1 - f_2) \end{bmatrix} e^{-j\kappa x} d\kappa. \quad (5.4)$$

Соотношение (5.4) записано в матричной форме. Система (5.4) может быть решена методом Винера-Хопфа. Для этого необходимо применить к уравнению (5.4) преобразование Фурье. Для этого нам потребуется доопределить данное равенство на всем бесконечном интервале по оси $0x$. С этой целью положим, что при $x < 0$ интеграл, стоящий в левой части (5.4) равен некоторой неизвестной вектор-функции $F(x)$. Теперь к (5.4) можно применить преобразование Фурье, сопряженное с интегрированием по всей оси $0x$. Результат имеет следующий вид:

$$Z(\kappa) \bar{e}_+(\kappa) = \bar{f}_-(\kappa) - \bar{h}_0(\kappa),$$

$$\bar{e}_+(\kappa) = \int_0^{\infty} \bar{E}(x) e^{j\kappa x} dx,$$

$$\bar{f}_-(\kappa) = \int_{-\infty}^0 \bar{F}(x) e^{j\kappa x} dx,$$

$$\bar{h}_0(\kappa) = \int_0^{\infty} \bar{H}_0(x) e^{j\kappa x} dx,$$

$$Z(\kappa) = \frac{1}{W^2} \frac{\varphi}{(\kappa^2 + \beta^2) f_1 f_2} \begin{bmatrix} -\kappa\beta(f_1 - f_2) & -(\kappa^2 f_1 + \beta^2 f_2) \\ (\beta^2 f_1 + \kappa^2 f_2) & \kappa\beta(f_1 - f_2) \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Система (5.5) - это система функциональных уравнений, решаемая методом Винера-Хопфа. Основным этапом решения является представление матрицы Z в виде произведения двух сомножителей (факторизация):

$$Z(\kappa) = Z_-(\kappa) Z_+(\kappa), \quad (5.6)$$

где индексы плюс и минус свидетельствуют о том, что данная матрица функций не имеет особенностей и ее определитель не имеет нулей

соответственно в верхней и в нижней полуплоскостях комплексной переменной κ . Отметим, что если такие индексы принадлежат не матрице, а просто функции, то это означает, что она не имеет в соответствующей полуплоскости особых точек: нулей, полюсов, точек ветвления.

Факторизации функции является стандартной процедурой, описанной во многих источниках (см. например /22/). Поэтому далее мы будем полагать, что функции с индексами плюс и минус известны. В тоже время общий алгоритм факторизации матрицы функций до сих пор не найден. Поэтому в каждом конкретном случае нахождение разложения типа (5.6) является самостоятельной задачей. Для матрицы функций типа (5.5) такое представление, по-видимому впервые было найдено в ходе решения ключевой задачи для микрополосковой структуры /14/. К сожалению авторы данной работы не привели его в явном виде, а ограничились только окончательными результатами. В полном объеме факторизация обсуждаемой матрицы изложена в /9/. Ниже приводятся выражения для Z_+ и Z_- :

$$Z_-(\kappa) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\kappa}{\theta_-} + j \frac{\beta\psi}{\Phi_-} \right) (\kappa - j\beta) & \frac{\kappa\beta(\nu+1)}{\theta_-} + \frac{\beta\psi(j\beta\nu - \kappa)}{\Phi_-} \\ \left(\frac{\beta}{\theta_-} - j \frac{\kappa\psi}{\Phi_-} \right) (\kappa - j\beta) & \frac{\beta^2(\nu+1)}{\theta_-} - \frac{\kappa\psi(j\beta\nu - \kappa)}{\Phi_-} \end{bmatrix} \frac{W}{\psi(\kappa^2 + \beta^2)\sqrt{\varepsilon}},$$

$$Z_+(\kappa) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta(j\beta\nu - \kappa)}{\theta_+} + \frac{\kappa\beta\psi(1-\nu)}{\Phi_+} \right) \psi & - \frac{\kappa\psi(\kappa - j\beta\nu)}{\theta_+} - \frac{\beta^2\psi^2(1-\nu)}{\Phi_+} \\ \left(\frac{j\psi\beta}{\theta_+} + \frac{\kappa}{\Phi_+} \right) (\kappa - j\beta) & \left(\frac{\beta}{\Phi_+} - \frac{j\kappa\psi}{\theta_+} \right) (\kappa - j\beta) \end{bmatrix} *$$

$$* \frac{W}{(\kappa^2 + \beta^2)\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\Phi(\kappa) = \frac{f_1(\kappa)}{\varphi(\kappa)}, \quad \theta(\kappa) = \frac{f_2(\kappa)}{\varphi(\kappa)}, \quad \psi = \frac{\Phi_+(j\beta)}{\theta_+(j\beta)}, \quad \nu = \frac{\psi^2 - 1}{\psi^2 + 1}.$$

(5.7)

Теперь мы можем перейти к решению системы функциональных уравнений (5.5). Для этого представим вектор-функцию $\vec{h}_0(\kappa)$ в явном виде. Это не составит труда, так как для первичного поля преобразование Фурье вычисляется аналитически:

$$\vec{h}_0(\kappa) = \frac{1}{j(\kappa - \kappa_0)} \begin{bmatrix} \beta \\ -\kappa_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{j(\kappa - \kappa_0)} \vec{h}. \quad (5.8)$$

Теперь систему функциональных уравнений можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_+(\kappa)\bar{e}_+(\kappa) + Z^{-1}_-(\kappa_0)\bar{h}_0(\kappa) = \\ = Z^{-1}_-(\kappa)\bar{f}_-(\kappa) - \left(Z^{-1}_-(\kappa) - Z^{-1}_-(\kappa_0) \right)\bar{h}_0(\kappa). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из (5.8) видно, что единственной особенностью вектора $\bar{h}_0(\kappa)$ является полюс в точке κ_0 . В случае $\beta^2 < \varepsilon k$ и отсутствия потерь в структуре этот полюс лежит на действительной оси. Поэтому могут возникнуть затруднения в определении принадлежности $\bar{h}_0(\kappa)$ к плюс или минус функциям. Эти затруднения легко снимаются, если предположить наличие небольших потерь в структуре, которые смещают полюс в нижнюю полуплоскость комплексной переменной. Таким образом, мы убеждаемся, что $\bar{h}_0(\kappa)$ является плюс функцией. Следовательно, в левой части (5.9) находятся плюс функции, а в правой минус. В соответствии с теоремой Лиувилля /22/ функции в правой и левой частях должны равняться целой вектор-функции $P(\kappa)$. Функция $P(\kappa)$ не имеет на всей комплексной плоскости никаких особенностей и, как это будет показано ниже имеет алгебраическое поведение на бесконечности. Такими свойствами обладает только полиномиальная функция. Таким образом, для однозначного определения левой и правой частей (5.9) нам осталось только определить степень и коэффициенты полинома $P(\kappa)$.

Порядок $P(\kappa)$ определяется на основе анализа поведения вектор-функций, стоящих в (5.9) на бесконечности. Это достаточно стандартная процедура и мы не будем ее детализировать. Отметим только, что для проведения такого анализа нам необходимо учесть условия Мейкснера /22/, определяющие поведение компонент поля вблизи кромки бесконечно тонкой металлизации. Эти условия показывают, что при $x \rightarrow 0$ компоненты E_x и E_y ведут себя следующим образом:

$$E_x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad E_y \rightarrow \sqrt{x}. \quad (5.10)$$

В соответствии с теоремой Абеля /22/ преобразования Фурье от функций, заданных на полубесконечном интервале и имеющих в начале координат поведение, определяемое (5.10), имеют следующее поведение на бесконечности:

$$e_{x+}(\kappa) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa}}, \quad e_{y+}(\kappa) \rightarrow \frac{1}{\frac{3}{\kappa^2}}. \quad (5.11)$$

Знание асимптотического поведения преобразований Фурье (5.11) позволяет показать, что как правая, так и левая части (5.9) стремятся к нулю на бесконечности. Отсюда следует, что полином $P(\kappa)$ тождественно равен нулю. Таким образом, мы однозначно определили правую и левую части (5.9) и можем найти неизвестную вектор-функцию $\vec{e}_+(\kappa)$:

$$\vec{e}_+(\kappa) = -Z_+^{-1}(\kappa)Z_-^{-1}(\kappa_0)\vec{h}_0(\kappa). \quad (5.12)$$

Наиболее интересной для нас величиной является коэффициент отражения T -волны от обрыва металлизации. Поскольку отраженное поле существует при $x < 0$, то, следовательно нам следует перейти от магнитного тока при $x > 0$ например к электрическому току, текущему по металлизации при отрицательных x . Преобразование Фурье от вектор-функции электрических токов $I(\kappa)$ определяется следующей формулой:

$$\vec{I}_-(\kappa) = -Z_-(\kappa)Z_-^{-1}(\kappa_0)\vec{h}_0(\kappa). \quad (5.13)$$

Чтобы найти собственно компоненты токов, нам надо применить к (5.13) обратное преобразование Фурье:

$$\vec{J}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{I}_-(\kappa) e^{-j\kappa x} d\kappa. \quad (5.14)$$

Подынтегральная функция в (5.14) содержит полюса исключительно в верхней полуплоскости комплексной переменной κ . Вычеты в этих полюсах описывают поле собственных волн плоского волновода при $x < 0$, затухающих при удалении от обрыва металлизации. Вычет в точке $-\kappa_0$ описывает отраженную T -волну. Беря отношение амплитуд иксовых компонент токов отраженной и падающей волн, получаем выражение для коэффициента отражения R , который совпадает с коэффициентом отражения по электрическому полю:

$$R = -\frac{1}{\epsilon \kappa^2} \left(\frac{\beta^2 - \kappa_0^2}{2\kappa_0} - j\beta \frac{\psi^2 - 1}{\psi^2 + 1} \right) \theta_-(\kappa_0) \operatorname{res} \left(\frac{1}{\theta_-(-\kappa_0)} \right). \quad (5.15)$$

Формула (5.15) с небольшими модификациями справедлива для случаев МПЛ и ДЦВ структур. В случае полсковой структуры она может быть существенно упрощена, если учесть, что $\Phi_+(j\beta) = \theta_+(j\beta)$, а следовательно $\psi=1$. С учетом этих обстоятельств запишем для R другое соотношение:

$$R = -\frac{1}{2\kappa_0} \theta_-(\kappa_0) \operatorname{res} \left(\frac{1}{\theta_-(-\kappa_0)} \right). \quad (5.16)$$

Нам осталось получить в явном виде выражение для функции $\theta_-(\kappa)$ или $\theta_+(\kappa)$ (они связаны соотношением $\theta_-(-x) = \theta_+(x)$). Как уже говорилось выше, эта процедура стандартна и многократно описана в литературе. Поэтому ограничимся только окончательным результатом:

$$\theta_+(\kappa) = \sqrt{\frac{\theta(0)}{\pi}} \frac{\left(1 - \frac{\kappa}{k\sqrt{\varepsilon}}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa h}{j\pi}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\kappa h}{j\pi}\right)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\kappa}{j\kappa_{2n}}\right) \left(1 + \frac{\kappa}{j\alpha_{1n}}\right)}{\left(1 + \frac{\kappa}{j\alpha_{2n}}\right) \left(1 + \frac{\kappa}{j\kappa_{1n}}\right)}, \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{1n} &= \sqrt{\left(\frac{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}{h}\right)^2 + \beta^2 - \varepsilon k^2}, \\ \kappa_{2n} &= \sqrt{\left(\frac{\pi(n+1)}{h}\right)^2 + \beta^2 - \varepsilon k^2}, \\ \alpha_{1n} &= \frac{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}{h}, \quad \alpha_{2n} = \frac{\pi(n+1)}{h}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Под $\Gamma(x)$ понимается гамма-функция. Импеданс, зависящий от постоянной распространения β и входящий в НГУ выражается через коэффициент отражения:

$$Z(\beta) = \frac{kW}{\kappa_0} \frac{1 + R(\beta)}{1 - R(\beta)}. \quad (5.19)$$

Таким образом, ключевая задача в необходимом объеме может считаться решенной. В следующем разделе будут рассмотрены вопросы, связанные с аппроксимацией $Z(\beta)$ мероморфными функциями.

5.2 Аппроксимация функции $Z(\beta)$

Как уже говорилось выше, нашей задачей является аппроксимация функции $Z(\beta)$ мероморфной функцией. Особенностью рассматриваемого случая полосковой ключевой структуры является то, что мы имеем возможность получить аппроксимацию $Z(\beta)$ не только как функции β , но и как функции волнового числа k (частоты) и проницаемости ε . Очевидно, что это весьма удобно, так как избавляет нас от необходимости использовать многомерные аппроксимирующие функции. Для реализации этой идеи нам необходимо еще раз проанализировать выражения (5.16)-(5.19).

Легко увидеть, что в формулу для $R(\beta)$ переменные β , ε , k , h входят в следующей комбинации

$$x = \sqrt{\varepsilon k^2 - \beta^2} h. \quad (5.20)$$

Видно, что новая переменная x совпадает с проекцией волнового вектора падающей волны на ось $Ox - \kappa_0$. Из формулы (5.19) также видно, что в первом сомножителе k входит не в форме (5.20). Однако, это не может нарушить ход наших действий, поскольку на первом этапе мы можем аппроксимировать функцию

$$Z' = \frac{Z}{kh},$$

из которой легко получить в простой форме искомую аппроксимацию для Z .

Будем далее рассматривать обратную Z' функцию Y' :

$$Y' = \frac{1}{Z'},$$

которая в отличие от Z не имеет на действительной оси полюсов по переменной x и поэтому более для нас удобна.

В первых разделах уже говорилось о том, что в структуре без потерь Y' не имеет действительной части и может быть представлена в следующем виде:

$$Y' = jB'.$$

На рис. 5.2 показана зависимость B' от переменной $y=x^2$. Отметим, что x меняется в отличие от β не от $-\infty$ до ∞ , а от $\pi/2$ до $j\infty$. Причем значение $\pi/2$ достигается при $\beta=0$ на критической частоте, после превышения которой плоские волноводы, образующие ключевую структуру становятся многоволновыми. Соответственно y меняется от $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ до $-\infty$.

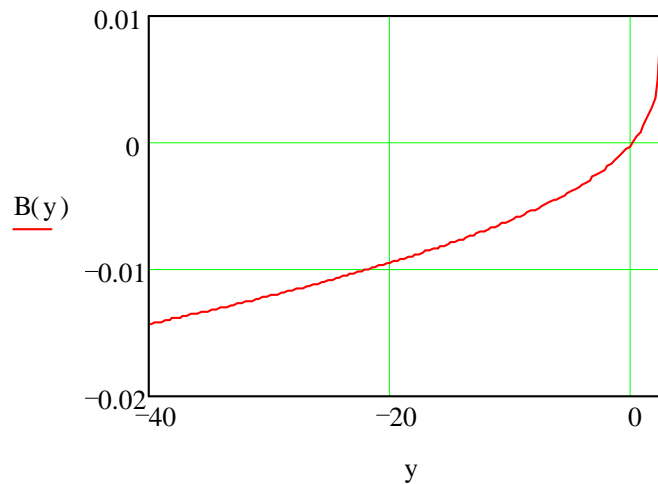


Рис. 5.2

Из рис. 5.2 видно, что вблизи точки $\pi/2$ кривая имеет бесконечную производную. При больших отрицательных y она похожа на прямую. Очевидно, что найти хорошую аппроксимацию вблизи точки $\pi/2$ будет весьма непросто. Поэтому имеет смысл ограничить верхнее значение интервала, на котором ищется аппроксимация, например величиной $0.9\pi/2$. Это вполне оправданно с практической точки зрения также запрещающей функционирование устройств на частотах непосредственно примыкающих к критической.

Основой для построения аппроксимирующей функции была выбрана следующая функция:

$$F(x) = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ctg}(\beta x), \quad (5.21)$$

которая сама по себе достаточно хорошо описывает $B'(x)$. Постоянные α и β выбираются из условий совпадения асимптотического поведения двух функций при $x \rightarrow j\infty$ и равенства их производных при $x=0$. Для удовлетворительной аппроксимации в промежуточных точках $F(x)$ умножается на дробно - рациональную функцию конечного порядка,

стремящуюся к единице на бесконечности. В окончательной форме аппроксимация для $B'(x)$ имеет следующий вид:

$$B'(x) = \frac{\prod_{n=0}^4 \left(1 - \frac{x^2}{q_n^2} \right)}{\prod_{n=0}^4 \left(1 - \frac{x^2}{(\pi(n+1))^2} \right)} \frac{x^2 - 1.705^2}{x^2 - 1.63^2} 0.93 \quad (5.22)$$

где вектор q имеет следующий вид:

$$q = \begin{bmatrix} 10.464829 + 11.2133161i \\ 10.464829 - 11.2133161i \\ 91.3856959 - 85.8403076i \\ 91.385696 + 85.8403075i \\ 339.1271922 \end{bmatrix}$$

Выражение (5.22) дает приближение для $B'(x)$ на всем интервале от 1.5 до $j\infty$ с относительной погрешностью меньшей 2%.

Таким образом, формула (5.22) определяет функцию, аппроксимирующую $B'(x)$ равномерно на всем полубесконечном интервале. Для нас также представляет интерес аппроксимация дробно - рациональной функцией конечного порядка, которая в отличие от (5.22) не в состоянии правильно описать поведение $B'(x)$ на бесконечности.

В качестве такой функции можно воспользоваться следующим отношением двух полиномов четвертого и второго порядков:

$$B'(x) = \alpha x^2 \frac{1 - \left(\frac{x}{3.45} \right)^2}{\left(\frac{x}{1.94} \right)^2}, \quad (5.23)$$

которое также с относительной погрешностью не более 2% описывает исходную зависимость $B'(x)$, но уже на интервале от 1.5 до $j4$.

5.3 Элементы связи полосковых интегральных схем

В разделе 1.3 были введены НГУ для, так называемых элементов связи. Они неоднократно встречались также и в других разделах. При этом

предполагалось, что поперечные размеры элемента связи много меньше длины волны. Это позволило упростить вид его матрицы рассеяния и НГУ, описывающие элемент связи. Структура, анализ которой позволяет получить НГУ для полосковых элементов связи показана на рис. 5.3.

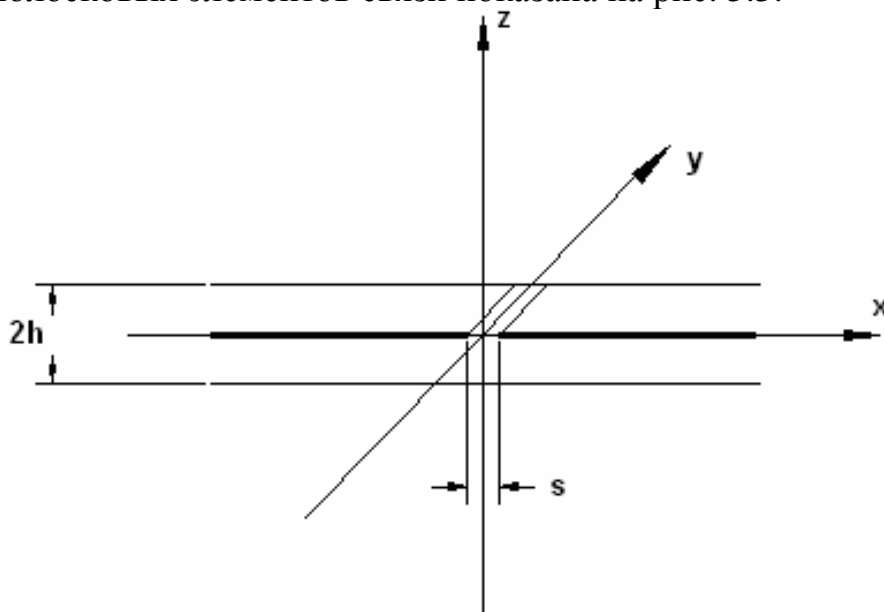


Рис. 5.3

Дифракционная задача в данном случае ставится также как и в разделе 5.1. Совершенно аналогично ее решение сводится к решению системы интегральных уравнений относительно тангенциальных компонент электрического поля, которые теперь уже отличны от нуля в области щели ($-s/2 < x < s/2$). Вид этой системы приводится ниже:

$$\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} G(x-x') \bar{E}(x') dx' + \bar{H}_0(x) = 0. \quad (5.24)$$

Вид всех функций, входящих в (5.24) тот же, что и ранее (см. раздел 5.1). Отличие (5.24) от (5.2) только лишь в пределах интегрирования и в размерах области, в которой задано (5.24).

Решение (5.24) удобно осуществить методом Галеркина, задавая аппроксимацию для тангенциальных компонент электрического поля в щели. Малость электрического размера щели позволяет сделать ряд обоснованных допущений о характере электрического поля в щели. Во-первых, его можно считать поперечным, то есть положить $E_y = 0$. Во-вторых, аппроксимировать E_x функцией Максвелла:

$$E_x = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - x^2}}, \quad (5.25)$$

где C – неизвестная постоянная. Вывод о поперечном характере электрического поля сводит систему (5.24) к единственному интегральному уравнению:

$$\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} E_x(x') K_{yx}(x, x') dx' - \kappa_0 e^{-j\kappa_0 x} = 0, \quad (5.26)$$

$$K_{yx}(x, x') = -\frac{1}{2\pi W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 + \beta^2} \frac{(f_1 \kappa^2 + f_2 \beta^2)}{f_1 f_2} e^{-j\kappa(x-x')} d\kappa.$$

Решение подобных уравнений хорошо известно и рассматривалось в том числе в разделе 2.9. Приведем основные его этапы. Умножение (5.26) на функцию (5.25) и последующее интегрирование по x дает следующую формулу для C :

$$C = \frac{\kappa_0 J_0\left(\kappa_0 \frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\kappa \frac{s}{2}\right) (f_2 \kappa^2 + f_1 \beta^2)}{\kappa^2 + \beta^2} \frac{1}{f_1 f_2} d\kappa}, \quad (5.27)$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Для элементов матрицы рассеяния: коэффициента отражения R и прохождения T имеются соотношения, получаемые из формул аналогичных (5.2) вычислением интеграла по κ как суммы вычетов в полюсах подынтегральной функции. Вычеты в точках $\pm\kappa_0$ дают H_y компоненты прошедшей и отраженной волн. Переходя к компонентам E_z , и вычисляя их отношение к соответствующей компоненте падающей волны, получаем формулы для R, T :

$$R = -\frac{\pi C}{2\omega\mu_a h} J_0\left(\kappa_0 \frac{s}{2}\right), \quad (5.28)$$

$$T = 1 - R.$$

Подстановка (5.27) в (5.28) позволяет окончательно выразить элементы матрицы рассеяния через геометрические параметры структуры:

$$R = \frac{1}{1 + \frac{\kappa_0 h}{j\pi J_0^2\left(\kappa_0 \frac{s}{2}\right)} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} J_0^2\left(\kappa \frac{s}{2}\right) \frac{ctg(qh)}{q} d\kappa}, \quad (5.29)$$

$$T = 1 - R,$$

где символ *V.p.* означает интеграл в смысле главного значения.

Теперь перед нами стоит задача аппроксимации параметра Z_s , входящего в НГУ для элемента связи. Этот параметр связан с коэффициентом отражения следующим соотношением:

$$Z_s = -\frac{2RkW}{\kappa_0(1-R)}. \quad (5.30)$$

Аналогично случаю рассмотренному в разделе 5.2 нам удобно ввести величину B_s' равную $\frac{1}{iZ_s'}$, $Z_s' = \frac{Z_s}{kh}$. Как и раньше нам удастся с помощью

новой переменной x (см. (5.20)) сократить число независимых переменных до двух. Вторая независимая переменная это отношение ширины щели к толщине подложки ϕ :

$$\phi = \frac{s}{h}. \quad (5.31)$$

Таким образом, в отличие от B' (раздел 5.2) B_s' является функцией двух переменных. Последнее обстоятельство несколько затрудняет аппроксимацию, которая теперь становится многомерной, причем вид зависимости от x определен - это мероморфная функция. Оказалось, что очень хорошее приближение дает достаточно простая функция следующего вида:

$$F(x, \phi) = \frac{\alpha(\phi)}{\beta(\phi)} xtg(\beta(\phi)x), \quad (5.32)$$

которая уже использовалась в разделе 5.2 (см. (5.21)). Отличие (5.23) состоит в том, что α и β теперь уже являются функциями ϕ . Величины α и β

выбираются исходя из соображений, описанных в разделе 5.2. Функция (5.32) аппроксимирует B_s' на интервале от 1.55 до $j\infty$ с относительной погрешностью не более 2%. На рис. 5.4 приведены графики зависимости $F(x)$ при разных ϕ .

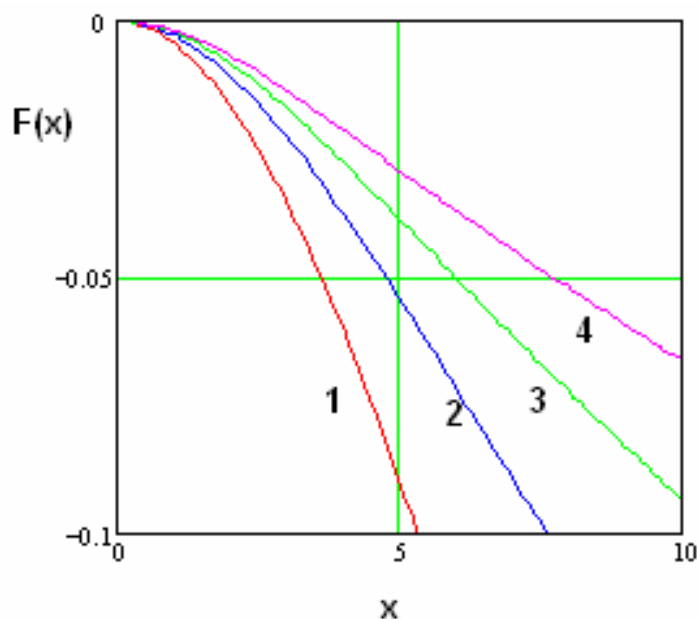


Рис. 5.4

Кривые 1-4 соответствуют ϕ равным 0.01, 0.05, 0.1, 0.15.

6. Численные результаты для полосковых структур

6.1. Численное исследование полосковой линии

В данной главе будут представлены результаты численного анализа ряда структур теоретически рассмотренных ранее. Основное внимание мы уделим их сопоставлению с уже известными данными, а также рассмотрим результаты применения метода НГУ к некоторым структурам относительно редко встречающимся в литературе. Все вместе взятое позволит нам обоснованно судить о возможностях обсуждаемого метода.

Первой такой структурой будет регулярная полосковая линия (рис. 6.1). Для нее будут определены характеристическое сопротивление основной Т-волны и критические частоты высших типов волн.

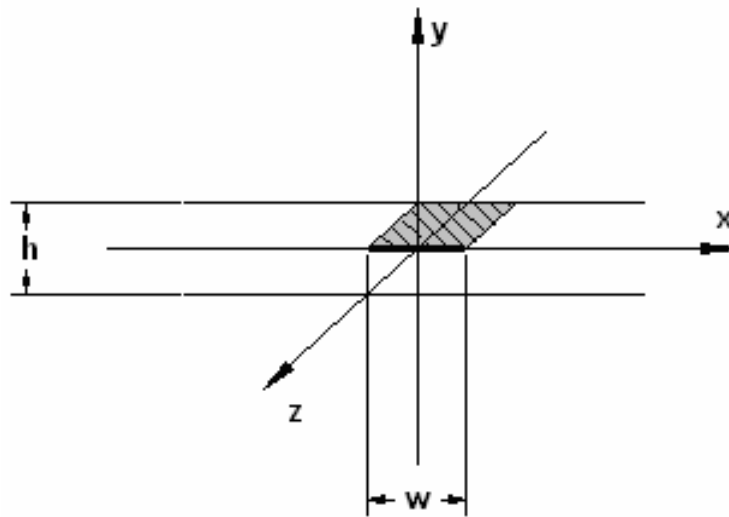


Рис. 6.1

Формулу для характеристического сопротивления можно получить исходя из одного из его энергетических определений /15/, а именно

$$Z = \frac{U^2}{2P}, U = \int_0^h E_y(y) dy, \quad (6.1)$$

где U - это напряжение между центральным проводником и экраном (в нашем случае ось Oy ориентирована перпендикулярно подложке, а ось Oz вдоль оси линии), P - мощность, переносимая волной в сечении линии передачи. В силу статического характера поля основной волны полосковой линии выбор пути интегрирования в (6.1) не имеет значения. Нам удобно интегрировать вдоль оси Oy , расположенной в плоскости симметрии линии. Для определения P воспользуемся соотношением (2.35). Тогда окончательная формула для Z имеет следующий вид:

$$Z = \frac{h}{4 \left(\frac{w\sqrt{\epsilon}}{W_0} - \frac{dB(k\sqrt{\epsilon})}{d\beta} \right)}, \quad (6.2)$$

где h - толщина подложки, w - ширина линии, W_0 - волновое сопротивление свободного пространства, k - волновое число в свободном пространстве, ϵ - диэлектрическая проницаемость подложки, B - параметр из НГУ (реактивная проводимость границы). Производная по β в (6.2) вычисляется в точке $k(\epsilon)^{1/2}$.

С другой стороны, для полосковой линии с бесконечно тонким проводником известно точное решение, выражающее Z через эллиптические интегралы /34/. Поэтому у нас имеется возможность сравнить значения Z ,

определяемые (6.2) с Z_c , взятым из /34/. Результаты расчетов характеристических сопротивлений как функций w представлены на рис. 6.2.

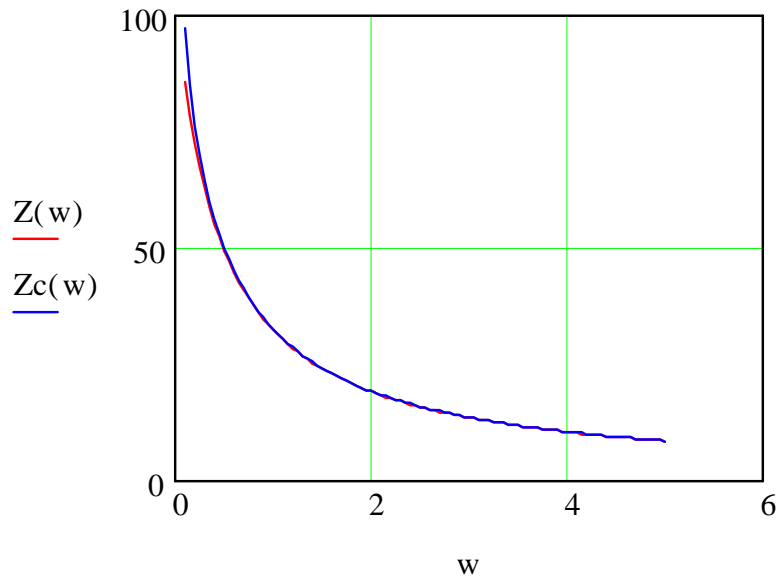


Рис. 6.2

Из рис. 6.2, который получен для $h=1$, $\varepsilon=4$, хорошо видно, что заметные расхождения между данными, полученными двумя путями наблюдаются только при $w/h < 0.1$. Во всем остальном диапазоне изменения w/h имеется практически полное соответствие с точностью не хуже 2%. Последнее обстоятельство позволяет оценить пределы применимости метода НГУ с точки зрения описания малоразмерных элементов (см. также обсуждение из раздела 1.1). Оказывается, что он годится и для описания структур с достаточно близко расположенными границами.

Уравнение, пригодное для определения критических частот может быть получено из дисперсионных уравнений приведенных в разделе 2.2. Оно имеет следующий вид:

$$B(kh\sqrt{\varepsilon})\cos(k\sqrt{\varepsilon}\frac{w}{2}) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{W_0}\sin(k\sqrt{\varepsilon}\frac{w}{2}) = 0 \quad (6.3)$$

для волн, имеющих четное по x распределение E_y компоненты и

$$B(kh\sqrt{\varepsilon})\sin(k\sqrt{\varepsilon}\frac{w}{2}) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{W_0}\cos(k\sqrt{\varepsilon}\frac{w}{2}) = 0 \quad (6.4)$$

для волн с нечетным распределением.

На рис. 6.3 представлены решения (6.3) относительно переменной

$$x = kw\sqrt{\varepsilon}.$$

Индексы на рис. 6.3 соответствуют индексу высшего типа волны, для которого рассчитывается параметр x . Аргументом функций $x(y)$ является $y = k\sqrt{\epsilon h}$.

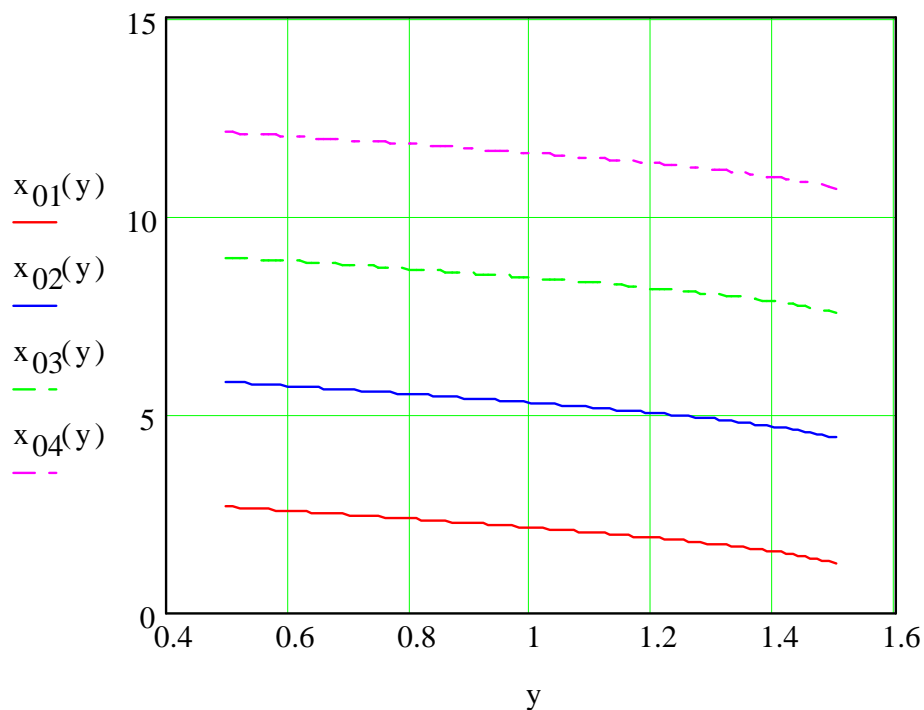


Рис. 6.2

Отметим, что в нашем случае речь идет о вполне конкретных высших типах волн, которые не имеют вариаций поля по оси Oy , но имеют вариации по оси Ox . Характерной их особенностью является то, что они неизлучающие, в отличие от высших типов волн с вариациями поля вдоль оси Oy , которые представляют собой вытекающие волны и в рамках нашего подхода не могут быть описаны. Впрочем самого понятия критической частоты для таких волн просто не существует, так как их постоянная распространения всегда комплексная величина. Рассматриваемые волны являются поперечными электрическими волнами и им целесообразно приписать обозначение TE_{0m} , где индекс 0 показывает отсутствие вариаций поля поперек подложки, а индекс m обозначает число вариаций поля вдоль оси Ox . В таких обозначениях основная волна является TE_{00} волной. Также можно отметить, что уравнение (6.3) дает нам критические частоты TE_{02k} волн, а уравнение (6.4) - TE_{02k-1} волн, $k=1,2,\dots$

6.2 Связанные полосковые линии

Следующей структурой, к которой мы применим метод НГУ будут связанные полосковые линии. Они показаны на рис. 6.3.

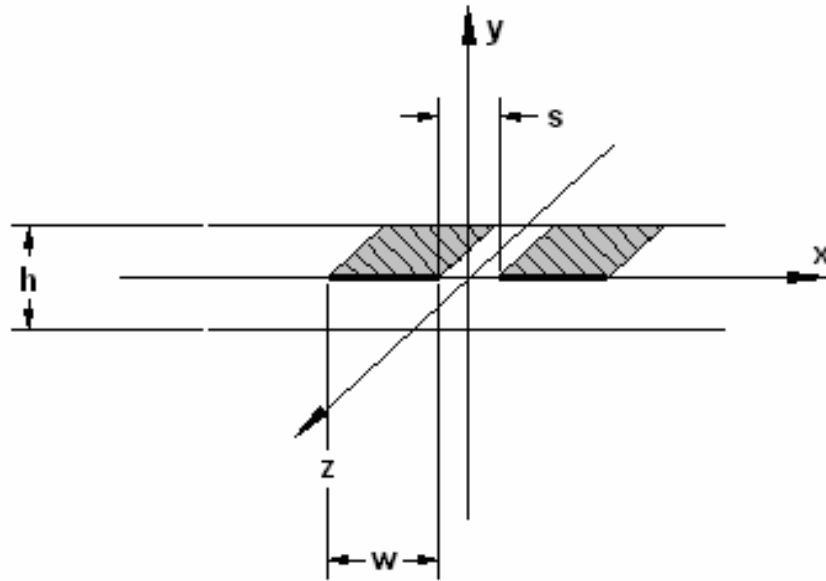


Рис. 6.2

Нашей задачей является определение характеристических сопротивлений четной Z_e и нечетной Z_o волн системы связанных линий. Для расчета этих величин известны строгие статические формулы [34], которые могут быть использованы в качестве эталонов для тестирования результатов, полученных методом НГУ. Последние являются приближенными, так как сами НГУ для элементов связи получены в приближении узких зазоров между полосковыми проводниками. Поэтому представленное ниже сравнение позволяет определить область параметров, в которой корректно использование данных НГУ.

В качестве базы для определения характеристических сопротивлений основных волн системы связанных линий передачи мы используем результаты, полученные в разделе 2.3. Приведем далее без вывода формулы для Z_e, Z_o :

$$Z_e = \frac{h}{2 \left[\frac{\left(w + \frac{s}{2}\right) \sqrt{\epsilon}}{W_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{dB\left(\sqrt{\epsilon k^2 - \beta^2 h}\right)}{d\beta} + 2 \frac{dBs\left(\sqrt{\epsilon k^2 - \beta^2 h}\right)}{d\beta} \right) \right]}, \quad (6.5)$$

$$Z_0 = \frac{h}{2 \left[\frac{\left(w + \frac{s}{2} \right) \sqrt{\varepsilon}}{W_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{dB \left(\sqrt{\varepsilon k^2 - \beta^2 h} \right)}{d\beta} \right) \right]}, \quad (6.6)$$

где B - параметр из НГУ для уединенной границы, а B_s - из НГУ для элементов связи. Далее сравним расчеты по формулам (6.5), (6.6) с расчетами по известным соотношениям [34]. Обозначим характеристические сопротивления, полученные последним путем как Z_{so} и Z_{se} . Результаты сравнения представлены на рис. 6.3 в виде графиков зависимостей характеристических сопротивлений от расстояния между линиями s . Кривые получены для $h=1$, $\varepsilon=4$, $w=1$.

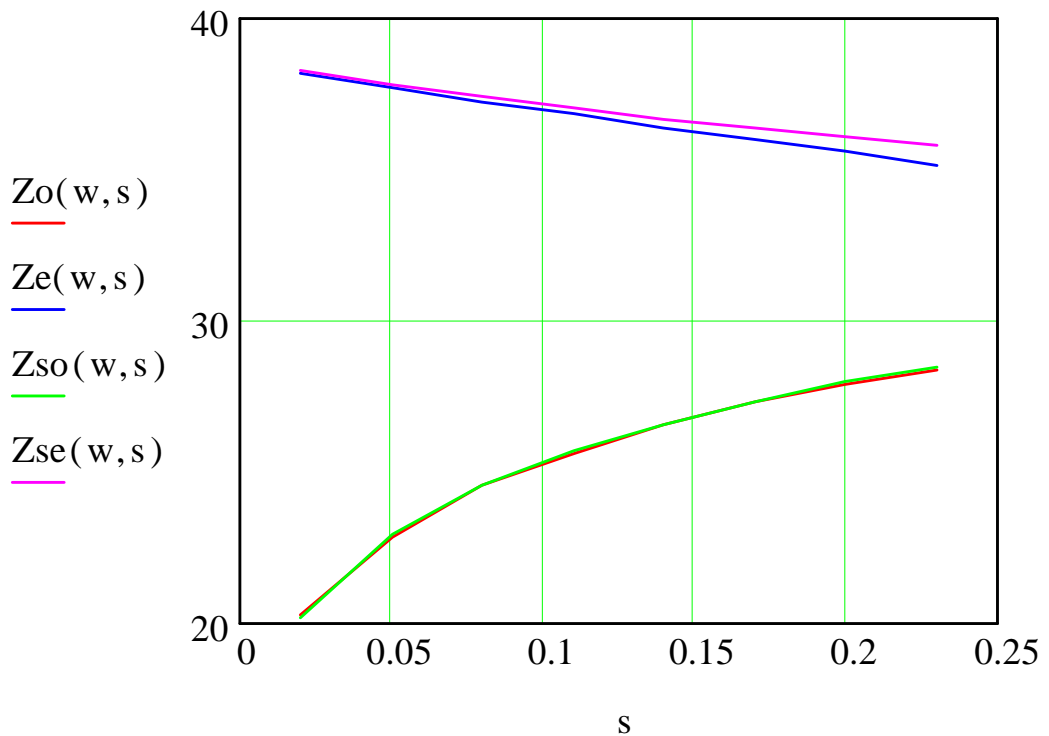


Рис. 6.3

Из рис. 6.3 видно, что вплоть до s/h порядка 0.25 совпадение, решение полученной методом НГУ для нечетной волны совпадает с эталонным с очень хорошей точностью. Для четной волны расхождение несколько больше, но и оно не превышает 3%. При дальнейшем увеличении расстояния между линиями погрешность решения для обоих волн резко увеличивается.

Представляется интересным также сравнить результаты расчета для коэффициента связи между полосковыми линиями C , который определяется следующим образом:

$$C = \frac{Z_e - Z_o}{Z_e + Z_o}. \quad (6.7)$$

Этот параметр широко используется при проектировании направленных ответвителей на связанных линиях. На рис. 6.4 представлены две кривые соответствующие коэффициенту связи, определенному методом НГУ и методом конформного отображения (C и C_s).

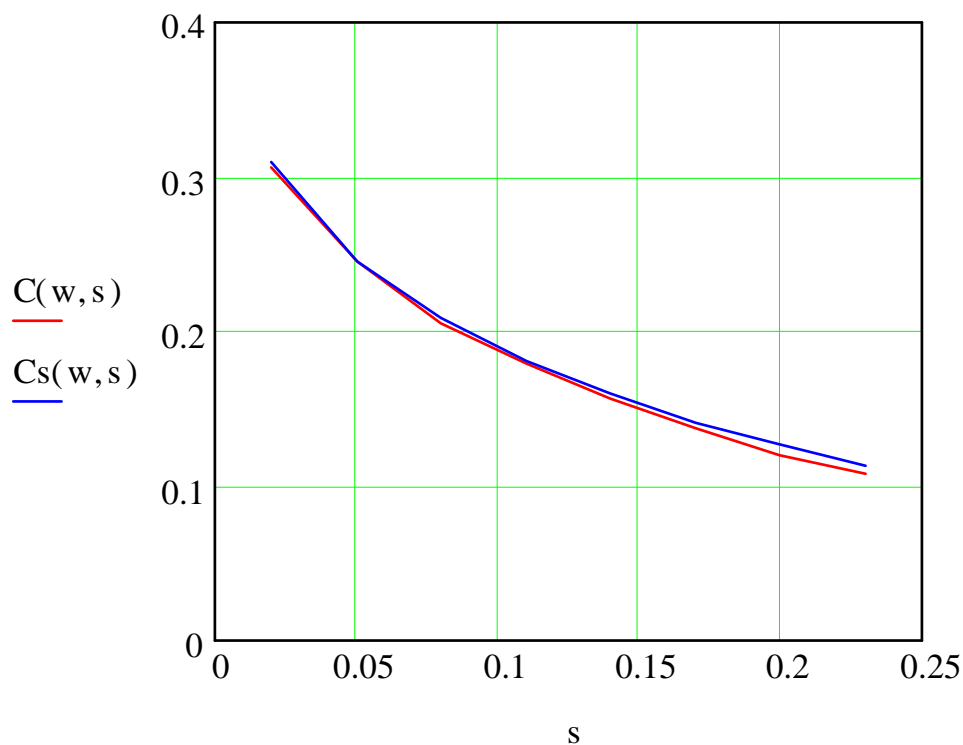


Рис. 6.4

Можно легко убедиться, что коэффициент связи определяется методом НГУ даже точнее, чем сами характеристические сопротивления, что весьма существенно с точки зрения синтеза направленных ответвителей.

6.3 Круглый полосковый резонатор

В этом разделе мы рассмотрим численные результаты, полученные для круглого полоскового резонатора, показанного на рис. 6.5.

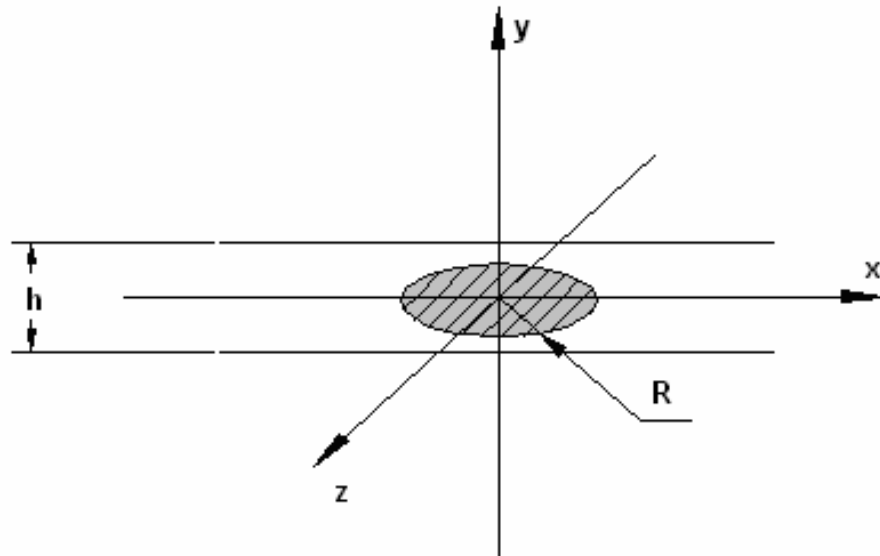


Рис. 6.5

В качестве основы для расчетов мы будем использовать решение граничной задачи для круглой области, полученное в разделе 2.4. В нашем случае оно преобразуется к следующему виду:

$$\frac{B \left(\sqrt{k^2 \varepsilon - \left(\frac{n}{R}\right)^2} h \right) W_0}{\sqrt{\varepsilon}} J_n(k\sqrt{\varepsilon}R) - J'_n(k\sqrt{\varepsilon}R) = 0. \quad (6.8)$$

В (6.8) n - это азимутальный индекс колебания. Радиальный индекс определяется номером корня уравнения (6.8). По оси Oy поля всегда равно нулю и, следовательно, соответствующий индекс колебания всегда нулевой. У рассматриваемых колебаний игровая компонента магнитного поля равна нулю. Поэтому, если считать ось Oy продольной, они относятся к классу TM_{nmk} колебаний. Индекс k у нас нулевой, а индекс m соответствует номеру корня (6.8).

На рис. 6.6 показаны зависимости решения уравнения (6.8) относительно переменной x :

$$x = kR\sqrt{\varepsilon}, \quad (6.9)$$

как функции параметра y :

$$y = kh\sqrt{\varepsilon}.$$

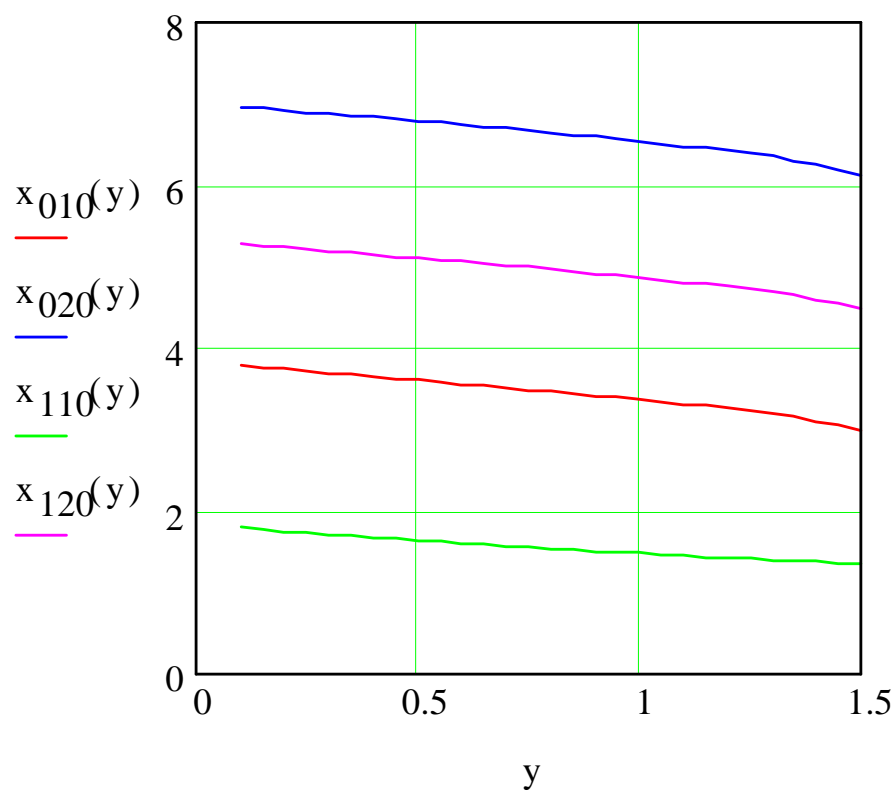


Рис. 6.6

Индекс функций $x(y)$ соответствует индексу колебания.
 На следующем рис. 6.7 показаны кривые, соответствующие колебаниям TM_{010} и TM_{110} . Функции $xm(y)$ получены методом Олинера //.

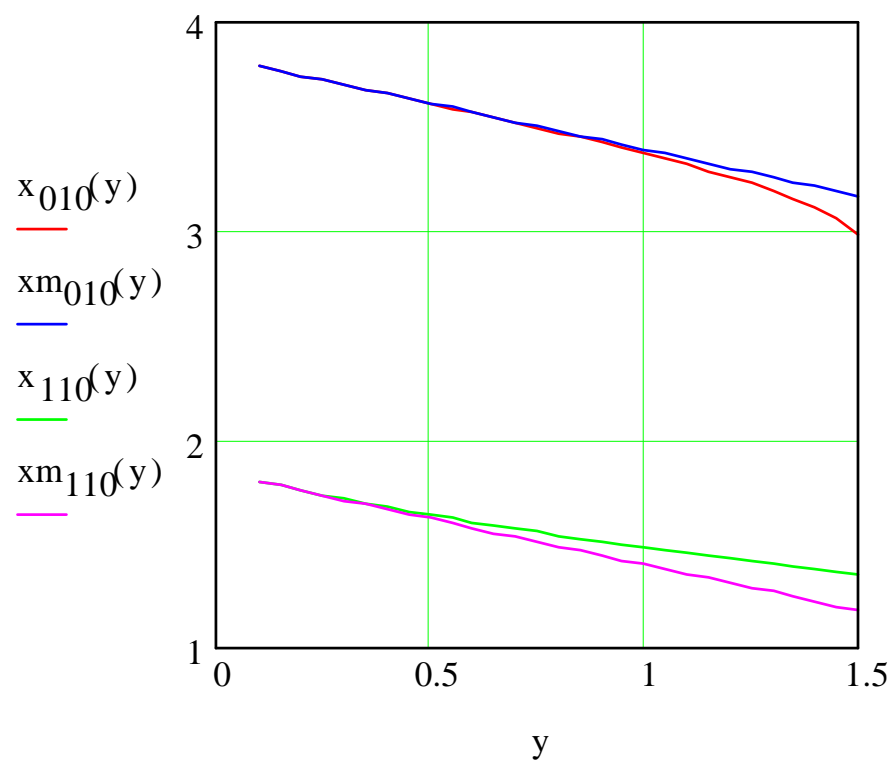


Рис. 6.7

Легко увидеть, что при малых u , то есть на низких частотах кривые ведут себя одинаковым образом. При увеличении u они расходятся.

6.4 Обрыв полоскового проводника

В данном разделе мы рассмотрим численные результаты, относящиеся к анализу нерегулярности - обрыв полоскового проводника. Эта структура показана на рис. 6.8. Она часто используется в технике СВЧ для реализации режима холостого хода. В действительности эквивалентная схема такой нерегулярности содержит краевую емкость, наличие которой делает фазу коэффициента отражения несколько отличной от нуля.



Рис. 6.8

В разделе 2.6 было рассмотрено решение граничной задачи для полубесконечного интегрального волновода, который служит моделью полосковой линии с оборванным центральным проводником. Подробные результаты были приведены для частного случая квадратичной аппроксимации импеданса. Такая элементарная аппроксимация часто бывает недостаточна для точного описания структуры. Поэтому в случае полосковой линии было получено более точное решение, соответствующее $B(x)$ следующего вида:

$$B(\kappa) = a + b\kappa^2 + \frac{c}{\kappa^2 + \kappa_0^2}. \quad (6.10)$$

Система линейных алгебраических уравнений, к которой сводится решение граничной задачи для аппроксимации (6.10) имеет следующий вид:

$$D_0(q_m) + A_m N_m \left(Y(q_m) + \frac{\alpha_m}{j\omega\mu_a} \right) + \sum_{i=1}^3 X_i F_{im} = 0, \quad (6.11)$$

где

$$X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(q_n d), \quad X_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \alpha_n \cos(q_n d)}{\alpha_n^2 - \kappa_0^2}, \quad X_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos(q_n d)}{\alpha_n^2 - \kappa_0^2},$$

$$F_{1m} = -2b \cos(q_m d) j\omega\mu_a (Y(j\alpha_m) + Y(q_m)),$$

$$F_{2m} = 2c \cos(q_m d) \left(\frac{1}{q_m^2 + \kappa_0^2} - \frac{1}{\kappa_0^2 - \alpha_m^2} \right),$$

$$F_{3m} = -2c \cos(q_m d) \left(\frac{Y(j\alpha_m)}{q_m^2 + \kappa_0^2} + \frac{Y(q_m)}{\kappa_0^2 - \alpha_m^2} \right).$$

Решение системы (6.11) может быть получено элементарно. Искомые неизвестные A_m выражаются непосредственно из (6.11).

$$A_m = - \frac{D_0(q_m) + \sum_{i=1}^3 X_i F_{im}}{N_m \left(Y(q_m) + \frac{\alpha_m}{j\omega\mu_a} \right)}. \quad (6.12)$$

Формула (6.12) позволяет отыскать коэффициент отражения падающей волны (A_1) и коэффициенты ее преобразования в другие типы волн ($A_m, m>1$). Наиболее интересным параметром является коэффициент отражения, который мы обозначим буквой R . На рис. 6.9 изображена частотная зависимость фазы коэффициента отражения для волноводов со следующими параметрами: $h=1, \varepsilon=4, d=w/2=0.5; 2.0; \infty$. Волновод с бесконечной шириной соответствует решению задачи об обрыве полоскового проводника методом Олинера.

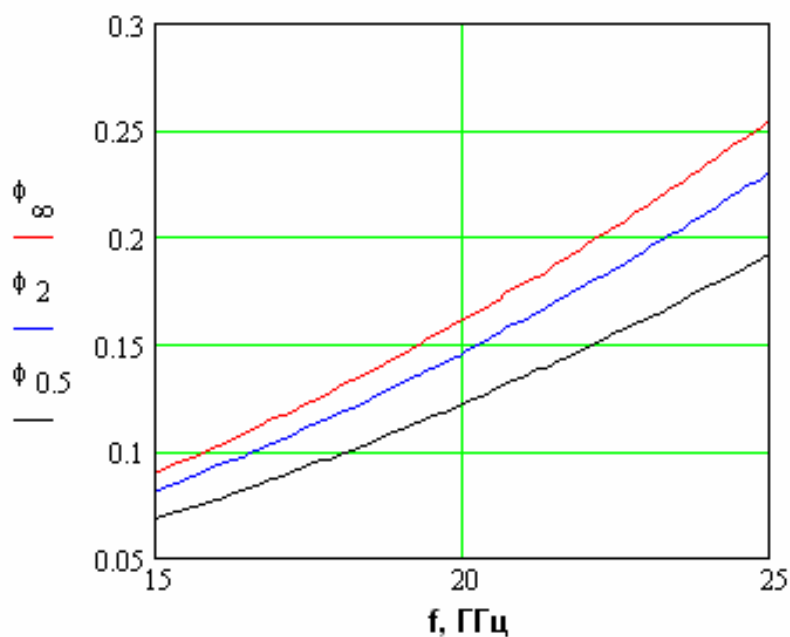


Рис. 6.9

Из рис. 6.9 хорошо видно, что метод НГУ позволяет учесть влияние ширины волновода на фазу коэффициента отражения. Данный эффект никак не описывается в рамках метода Олинера.

Относительно модуля коэффициента отражения следует сказать, что в одноволновом режиме он должен быть равен единице. При увеличении ширины волновода до сверхкритических размеров возможно уменьшение модуля коэффициента отражения за счет преобразования части энергии падающей волны в распространяющиеся волны высших типов. Обычно переход волновода через критические условия сопровождается резкими изломами соответствующих зависимостей. Этот эффект может наблюдаться и в нашем случае (см. рис. 6.10).

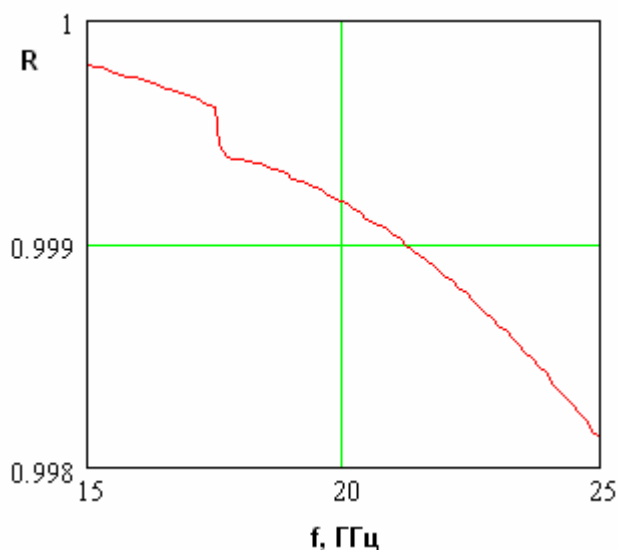


Рис. 6.10

Однако выражен он весьма незначительно, что говорит о том, что преобразование волн в данной структуре не является существенным фактором. Подтверждением этого предположения служит зависимость модуля коэффициента преобразования основной волны в первый высший тип T от частоты, которая показана рис. 6.11.

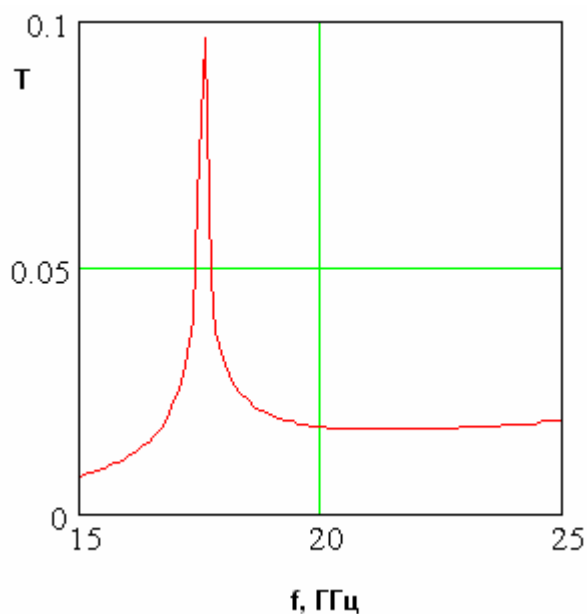


Рис. 6.11

Из последнего рисунка видно, что во всем диапазоне частот за исключением узкой области в окрестности критической частоты величина T не превышает 0.02. Поскольку на коэффициент отражения эффект преобразования влияет пропорционально T^2 , то очевидно, что речь идет о пренебрежимо малых величинах.

Установленные выше количественные соотношения между коэффициентами отражения и преобразования, позволяют очень просто построить теорию прямоугольного полоскового резонатора (см. рис. 6.12). Для этой цели следует применить метод поперечного резонанса [35], в рамках которого колебание в таком резонаторе представляется как результат переотражений резонирующей волны линии шириной $2d$ между обрывами полосковых проводников, расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга. Данный метод дает следующий результат:

$$\phi - 2\gamma a = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.13)$$

где ϕ - фаза коэффициента отражения в волноводе шириной $2d$, а γ - постоянная распространения резонирующей волны.

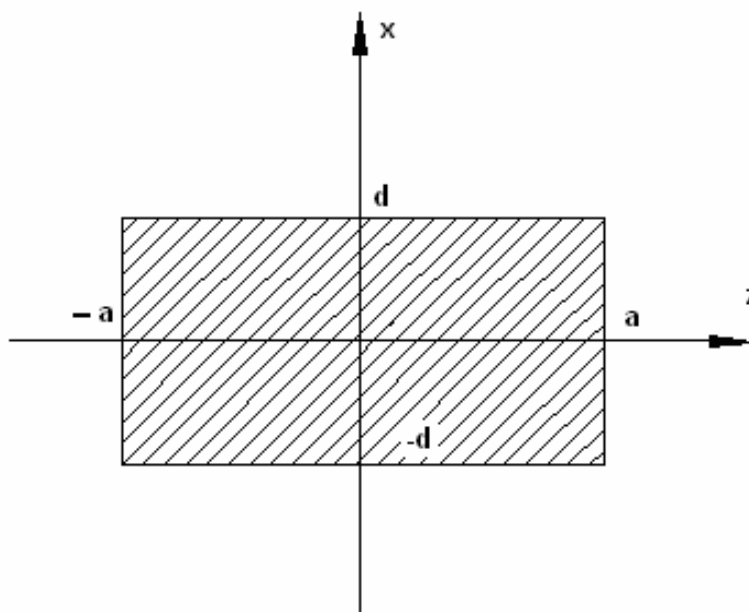


Рис. 6.12

Напомним, что мы имеем дело с колебаниями, у которых компонента H_y равна нулю. Поэтому их следует отнести к числу TM_{0nm} - колебаний, где нулевой индекс указывает на отсутствие вариаций поля вдоль оси Oy , индекс n совпадает с n из (6.13), а индекс m совпадает с индексом резонирующей волны. Выражение (6.13) является характеристическим уравнением прямоугольного полоскового резонатора, которое следует разрешить относительно частоты.

6.5 Полосковые линии, связанные через перемычку

Структура, анализируемая в данном разделе показана на рис. 6.12. Она представляет собой две близко расположенные параллельные полосковые линии, соединенные с помощью узкой перемычки. Такая перемычка служит в качестве сосредоточенного элемента связи двух линий. С помощью таких элементов можно строить направленные ответвители с сонаправленной связью по аналогии с ответвителями на металлических волноводах, связанных через отверстия.

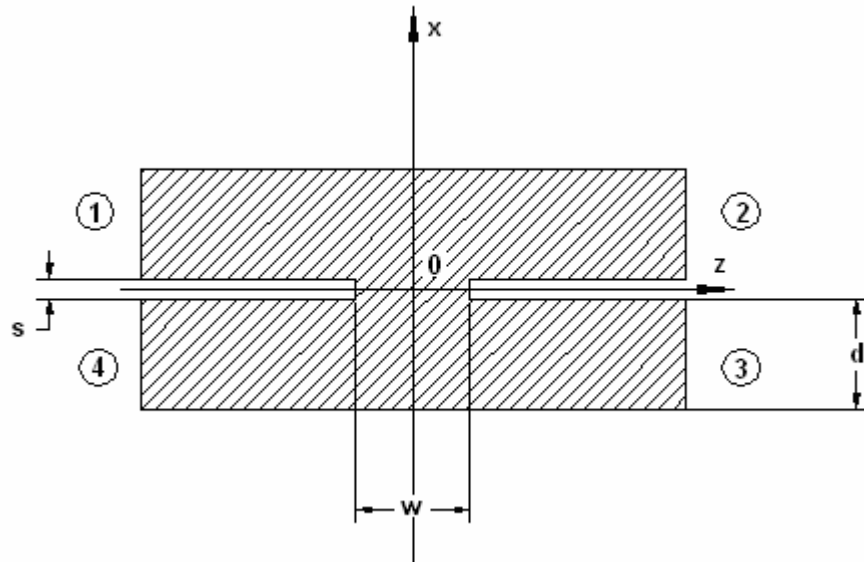


Рис. 6.12

Решение граничной задачи для структуры аналогичной рассматриваемой представлено в разделе 2.9. При формулировке граничной задачи был использован метод симметрии, в соответствии с которым четырехполюсник четного возбуждения представляется в виде отрезка невозмущенного волновода, матрица рассеяния которого находится элементарно:

$$S_{11ч} = 0, S_{21ч} = 1. \quad (6.14)$$

В случае нечетного возбуждения мы имеем дело с нерегулярной структурой. Элементы ее матрицы рассеяния выражаются следующим образом:

$$S_{11н} = -\frac{2\pi i D1(\kappa_0) J_0^2(\kappa_0 w/2)}{D2'(-\kappa_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D1(\kappa)}{D2(\kappa)} J_0^2(\kappa w/2) d\kappa}, \quad \kappa_0 = k\sqrt{\epsilon}, \quad (6.15)$$

Смысл обозначений $D1$ и $D2$ поясняется в разделе 2.9. Анализ решения показывает, что данная нерегулярность при $kw \ll 1$ может быть представлена простейшей эквивалентной схемой, показанной на рис. 6.13.

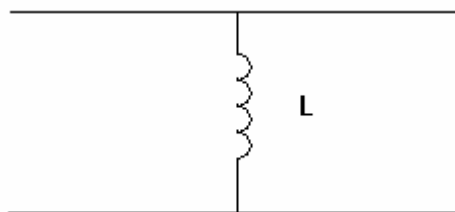


Рис. 6.13

На следующем рисунке 6.14 показаны результаты расчета реактивного сопротивления $X=\omega L$ индуктивности. Расчет проведен для следующих параметров: $h=1$, $w=0.3$, $d=1$, $S=0.1$, $\varepsilon=4$.

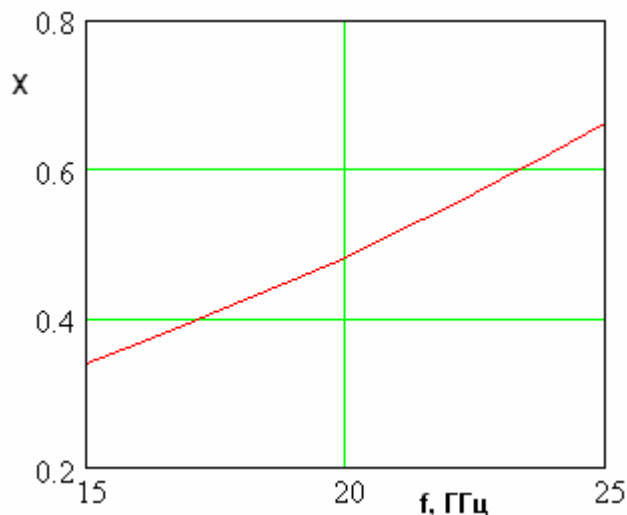


Рис. 6.14

Величина индуктивности зависит от w (при малых w) как $\ln(w)$ и практически не зависит от диэлектрической проницаемости подложки, что полностью совпадает с квазистатическими свойствами индуктивности, которые меняются только в зависимости от магнитной проницаемости.

Матрица рассеяния нерегулярности в рамках принятых приближений имеет следующий вид:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{11} & S_{11} \\ S_{12} & S_{11} & S_{11} & S_{11} \\ S_{11} & S_{11} & S_{11} & S_{12} \\ S_{11} & S_{11} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

На рис. 6.15 показаны частотные зависимости модулей элементов матрицы рассеяния S_{11} , S_{12} .

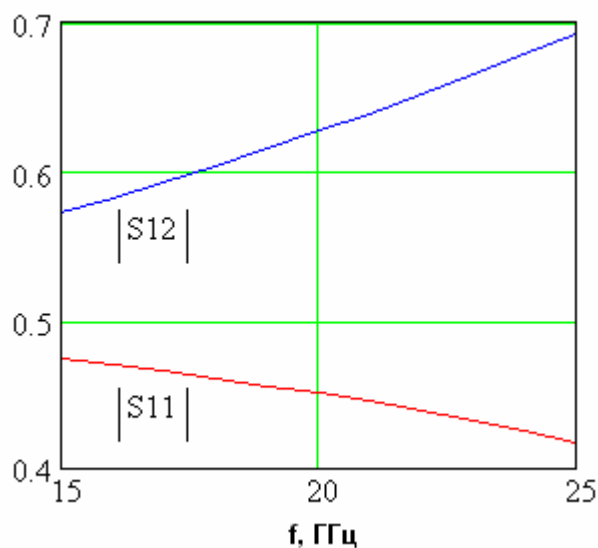


Рис. 6.15

Кривые, показанные на рис. 6.15 получены для тех же параметров, что и ранее. Отсчетная плоскость расположена в начале координат (рис. 6.12).

6.6 Резонансный зазор в центральном проводнике полосковой линии

Последняя из рассматриваемых нерегулярностей - резонансный зазор в центральном проводнике показана на рис. 6.16.

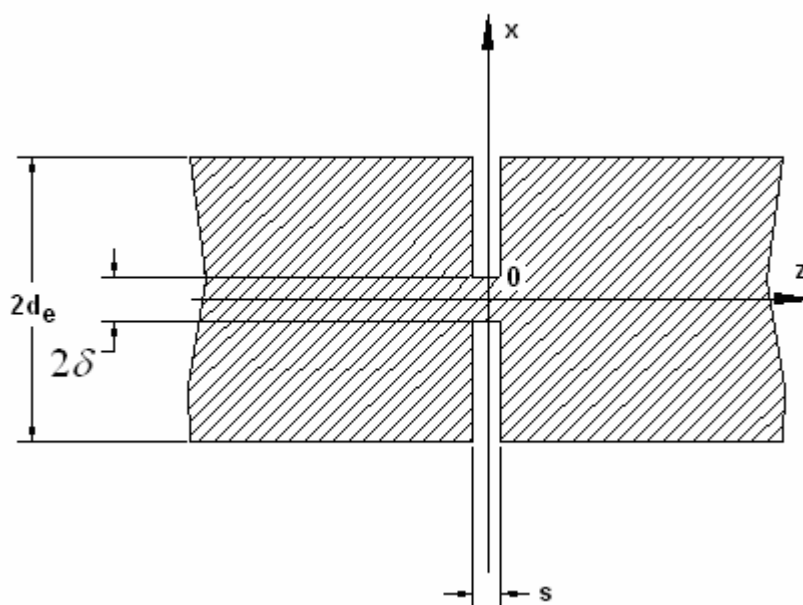


Рис. 6.16

Название нерегулярности связано с ее эквивалентной схемой (рис. 6.17), которая имеет вид параллельного контура (это будет показано ниже).

Емкостная составляющая порождается зазором в полосковом проводнике, а индуктивная - тонкой перемычкой, соединяющей две половинки.

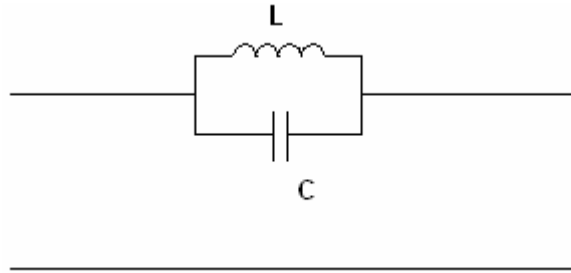


Рис. 6.17

Анализ структуры (рис. 6.16) представлен в разделе 3.3. Он был проведен с помощью метода Олинера, использование которого позволило заменить реальную полосковую линию на эквивалентный волновод, имеющий ширину $2de$. Величина эффективной ширины волновода выбирается из условия равенства характеристических сопротивлений волновода и полосковой линии. Решение для полосковой структуры, рассматриваемой в данном разделе ничем не отличается от решения представленного в разделе 3.3. Приведем ниже окончательную формулу для проводимости эквивалентного резонансного контура:

$$Y = \frac{i\omega\mu_a Y_{s0}}{\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\frac{\pi n \delta}{de}\right)}{\alpha_n + i\omega\mu_a Y_{sn}}}, \quad (6.17)$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{de}\right)^2 - k^2 \epsilon}, \quad Y_{sn} = Y_s\left(\frac{\pi n}{de}\right).$$

Первое слагаемое из (6.17) есть ни что иное, как проводимость емкости, а второе индуктивности.

На рис. 6.18 показаны графики зависимостей нормированных реактивных проводимостей емкости, индуктивности и контура, как функций частоты.

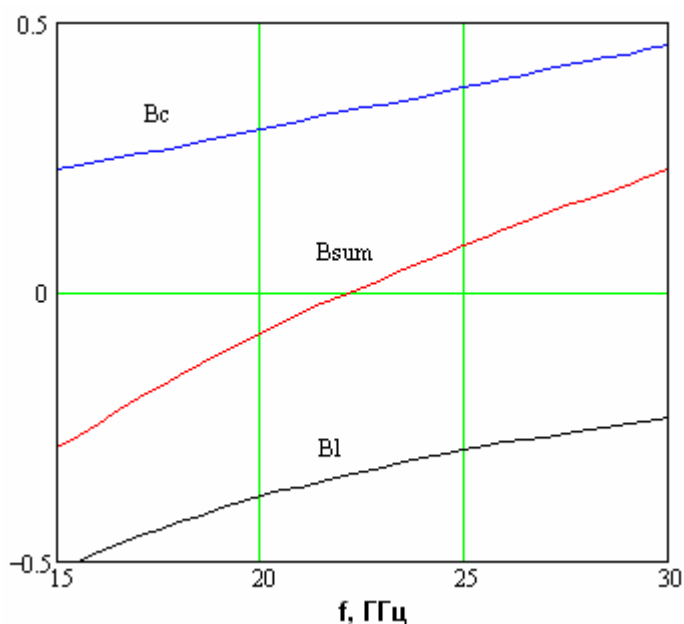


Рис. 6.18

Параметры, при которых посчитаны представленные выше зависимости имеют следующие значения: $h=1$, $w=2$, $S=0.1$, $\varepsilon=6$, $\delta=0.02$. Из рис. 6.18 видно наличие резонанса, при котором B_{sum} обращается в нуль.

Рассматриваемая структура может служить основой для моделирования сосредоточенных элементов, последовательно включенных в полосковую линию, например полупроводниковых диодов. Для этого достаточно последовательно с индуктивностью (рис. 6.17) включить сопротивление, описывающее сосредоточенный элемент. В случае бескорпусного полупроводникового диода это будет его эквивалентная схема /б/, включающая линейный последовательный резистор и цепочку из параллельно соединенных нелинейной емкости и сопротивления. Номиналы всех этих элементов должны быть нормированы к характеристическому сопротивлению полосковой линии.

Заключение

Суммируя результаты, представленные в книге, можно сделать следующие выводы. Первый из них состоит в том, что концепция НГУ значительно расширяет пределы использования ЭГУ импедансного типа, включая в класс анализируемых структур многие новые объекты. Значимость этого расширения существенно увеличивается благодаря появившейся возможности анализа волноводных структур, в том числе таких как полосковые элементы и устройства на основе отражательного диэлектрического волновода.

Одновременно использование НГУ показало, что относится к ним также как к локальным граничным условиям невозможно в силу ряда

принципиальных отличий. Концепция ЭГУ в целом основана на переформулировке граничной задачи таким образом, что из нее удаляется часть поля (ближнее поле). Для оставшегося поля формулируется новая задача, в которой появляются ЭГУ. Оказалось, что важное значение имеет характер поля выведенного за пределы анализа. Конкретно мощность, переносимая им вдоль границы с НГУ. В книге было явно показано, что нелокальность границы однозначно связана с этой мощностью и наоборот. Дальнейшая проблема состоит в том, чтобы, не прибегая к вычислению ближнего поля найти его характеристики через дальнее поле. Алгоритм решения этой задачи для ряда случаев в книге дан.

В книге также представлены решения для большого числа интересных структур. Здесь особенно хотелось бы выделить открытые структуры на диэлектрических волноводах. Метод НГУ предоставляет возможности для их эффективного моделирования и, что особенно важно, дает простые решения трехмерных электродинамических задач. Это достижение ценно потому, что с точки зрения численного анализа, например, методом конечных элементов или FDTD открытые структуры представляют серьезную проблему из-за своих больших электрических размеров и необходимости учитывать излучение из волноводов и резонаторов. Поэтому возможность получить аналитическое и численно – аналитическое решение в такой ситуации представляет особую ценность.

Список литературы

1. Жук Н.П., Третьяков О.А. Двусторонние граничные условия для среднего скалярного поля в случае шероховатой поверхности // Акуст. журн. 1982. Т. 28. №1. С. 51.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
3. Sihvola A. Metamaterials in electromagnetics // Metamaterials. 2007. N1. P. 2.
4. Kurizki G., Haus J.W. // J. Mod. Opt. 1994. V. 41. N 2. P. 171.
5. Mosallaei H., Rahmat-Samii Y. // IEEE Trans. 2003. V. AP-51. №3. P. 549.
6. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1988.
7. Фиалковский А.Т. Теория вищих типив хвиль у несимметричних смужковий линий // ДАН УССР. Сер. А. 1975. №9. С. 838.
8. Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Дисперсионные характеристики микрополоскового волновода // ДАН СССР. 1977. Т. 235. №6. С. 1303.

9. Банков С.Е., Взятыхшев В.Ф., Родионова Е.В. Анализ ключевой структуры для щелевых диэлектрических интегральных схем // РЭ. 1988. Т. 33. №11. С. 2373.
10. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
11. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983.
12. Шестоपालов В.П., Кириленко А.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Т.1 Дифракционные решетки. Киев: Наукова Думка, 1986.
13. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
14. Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Полосковые линии передачи. М.: Наука, 1980.
15. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств // Под ред. Вольмана В.И. М.: Радио и связь, 1982.
16. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь. 1988.
17. Марков Г.Т, Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967.
18. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М. Мир. 1974.
19. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. Физматлит, 1998.
20. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
21. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ // М.: Высшая школа, 1988.
22. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. // М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
- 23 Вайнштейн Л.А. Теория диффракции и метод факторизации. М.: Сов. Радио. 1966.
24. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981.
25. Печатные схемы сантиметрового диапазона / Пер. с англ. М.: Изд-во ИЛ, 1956.

26. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969.
27. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964.
28. Ильченко М.Е., Взятых В.Ф., Гассанов Л.Г. и др. / Под ред. Ильченко М.Е. Диэлектрические резонаторы. М.: Радио и связь, 1989.
29. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
30. Взятых В. Ф., Меркурьев А. Н., Раевский Г. П., Антипова М. Ш. Распределенная связь разных диэлектрических волноводов. // Труды МЭИ. 1974. Вып. 194. С. 59.
31. Взятых В.Ф., Калинин В.И. Собственные и вынужденные колебания открытых резонансных структур на основе дисковых диэлектрических резонаторов // Изв. ВУЗов Радиофизика. 1983. Т. 26. №4. С. 475.
32. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
33. Анго А. Математика для электро- и радио инженеров. М.: Наука, 1965.
34. Ганстон М.А. Справочник по волновым сопротивлениям фидерных линий СВЧ: Пер.с англ. / под ред. А.З. Фрадина. - М.: Связь, 1976.
35. Уолтер К. Антенны бегущей волны. М.: Энергия, 1970.