

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ СРЕДЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ ПО ФАЗОВОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОШЕДШЕЙ ВОЛНЫ НА ОСНОВЕ СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ

А. С. Венецкий, В. А. Калошин
Институт радиотехники и электроники РАН

Получена 5 мая 2008 г.

Рассматривается задача нахождения коэффициента преломления неоднородной среды с центральной симметрией по известному фазовому распределению прошедшей через среду волны. Предложена рекуррентная методика получения решения для слоистой среды, основанная на приближении геометрической оптики, при этом внутри каждого слоя коэффициент преломления считается постоянным. В процессе решения используются одновременно эйконал (фаза) луча на выходе и угол выхода луча. В случае фокусирующей среды для получения решения вводятся виртуальные лучи, скользящие вдоль границ слоев. Исследована сходимость рекуррентных процедур при увеличении числа слоев.

Введение

Решение задачи нахождения коэффициента преломления градиентной среды с центральной симметрией по известному фазовому распределению прошедшей через среду волны в приближении геометрической оптики может быть получено аналитически, путем ее сведения к уравнению Абеля [1]. Решение выражается в параметрической форме через несобственные интегралы. В данной работе предложена альтернативная методика получения решения этой задачи, основанная на замене градиентной среды радиально-слоистой с постоянным значением коэффициента преломления внутри каждого слоя. Для среды с цилиндрической симметрией, где коэффициент преломления зависит от радиуса, такая методика, как для задачи синтеза

фазового фронта, так и восстановления коэффициента преломления была предложена в работах [2,3]. Целью данной работы является исследование возможности использования этой методики для других сред на примере среды с центральной симметрией. Рассмотрены два вида центрально-симметричных сред – фокусирующие и расфокусирующие. Для каждой из них описаны алгоритмы получения решения поставленной задачи и исследована сходимость рекуррентных процедур при увеличении числа слоев.

1. Расфокусирующая среда

Рассмотрим сначала случай расфокусирующей среды с центральной симметрией, коэффициент преломления которой зависит только от радиуса и монотонно растет от центра к периферии.

Пусть на неоднородную диэлектрическую сферу радиуса R_1 падает волна со сферическим фронтом с центром в точке F (рис.1). Предположим, что для каждого луча, прошедшего через среду, мы знаем значение эйконала $E(\varphi)$ в точке B_1 его выхода из среды и угол наклона выходящего луча $\Omega > 0$. Вообще говоря, эти величины не являются независимыми, т.е. достаточно знать одну из них, чтобы определить другую. Требуется найти закон изменения коэффициента преломления $n(r)$, где r – радиус в сферической системе координат при условии, что $n(r)$ монотонно растет при увеличении r до границы среды.

Непрерывный закон изменения коэффициента преломления заменим ступенчатым, т.е. представим среду в виде системы сферических слоев в общем случае разной толщины и постоянным значением коэффициента преломления в каждом слое. Зададим общее число слоев N и опишем рекуррентную процедуру для определения коэффициента преломления n_i и радиусов внешней и внутренней границ слоя R_i и R_{i+1} , $i=1, \dots, N$, где R_1 – внешний радиус среды, при этом без ограничения общности можно положить $R_1=1$.

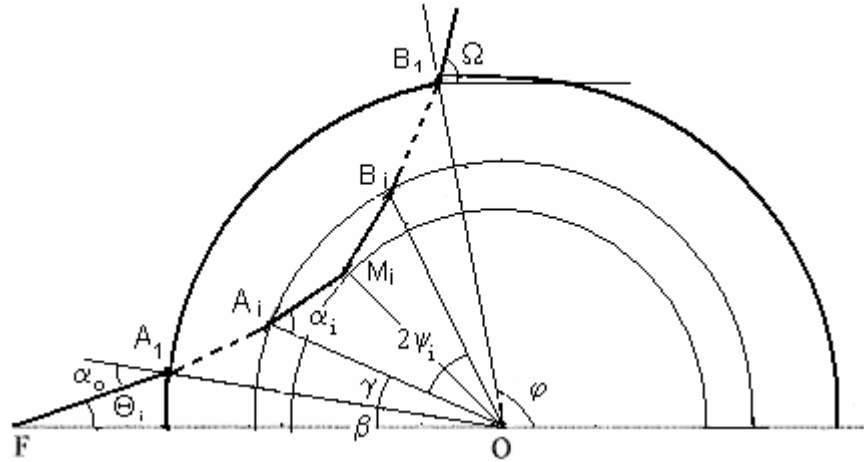


Рис.1. Ход луча в расфокусирующей среде.

Предположим, следуя методу математической индукции, что мы уже знаем коэффициенты преломления и толщины первых $i-1$ слоев и опишем алгоритм нахождения этих параметров в i -ом слое. Рассмотрим луч, выходящий из источника под углом $\Theta_i = \Theta_0 - i \frac{\Theta_0}{N}$, где $\Theta_0 = \arcsin \frac{R_1}{F}$, R_1 – внешний радиус среды, F -расстояние от источника до центра среды. В силу центральной симметрии среды ход лучей достаточно рассмотреть в одном сечении. Угол α_0 , образованный падающим лучом с нормалью в точке падения на среду A_1 находится из теоремы синусов для треугольника FA_1O :

$$\alpha_0 = \arcsin \left(\frac{F}{R_1} \sin \Theta_i \right) \quad (1)$$

Вычислим эйконал рассматриваемого луча в точке выхода B_1 из среды. В силу центральной симметрии среды луч состоит из двух симметричных частей, поэтому достаточно вычислить эйконал первой части луча. Пусть A_j - точка входа луча в j -й слой, а A_{j+1} – точка выхода. Эти точки находятся решением прямой задачи о прохождении луча через известные однородные слои. Приращение эйконала от точки A_1 до точки входа в искомый слой A_i можно представить в виде суммы:

$$\Phi(A_1, A_i) = \sum_{j=1}^{i-1} n_j |A_j A_{j+1}| \quad (2)$$

Приращение угловой координаты луча за тот же отрезок пути также выражается как сумма приращений на каждом слое:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{i-1} \arcsin \left(\frac{|A_j A_{j+1}|}{R_{j+1}} \sin \alpha_j \right), \quad (3)$$

где α_j – угол между лучом и радиус-вектором в точке A_j .

Рассмотрим путь луча в i -ом (искомом) слое. Его траектория будет состоять из двух равных прямолинейных отрезков $A_i M_i$ и $M_i B_i$. Пусть n_i – неизвестное пока значение коэффициента преломления в искомом слое. Задав n_i , можно найти угол α_i из соотношения

$$\alpha_i = \arcsin \left(\frac{h}{n_i R_i} \right), \quad \text{где } h \text{ – инвариант луча.} \quad (4)$$

Неизвестная пока длина отрезка $A_i M_i$ связана с приращением угловой координаты ψ_i луча в i -ом слое соотношением:

$$|A_i M_i| = \frac{\sin \psi_i}{\sin(\psi_i + \alpha_i)} R_i \quad (5)$$

Из условия равенства угла выхода луча в точке B_1 заданному значению на выходном фронте и учитывая симметрию траектории луча можно получить

$$\alpha_0 + \Omega(\varphi) = \varphi \quad (6)$$

Это уравнение является в общем случае трансцендентным относительно φ и может быть решено любым численным методом, например методом итераций Ньютона. В качестве начального приближения может быть выбрано $\varphi_0 = \pi/2$.

Запишем условие равенства оптического пути луча заданному значению на фазовом фронте:

$$|FA_1| + 2\Phi(A_1, A_i) + 2|A_i M_i| n_i = E(\varphi) \quad (7)$$

Используя соотношение (5) и выражая ψ_i из очевидного равенства:

$$\beta + 2\gamma + 2\psi_i + \varphi = \pi \quad (8)$$

а n_i выражая из закона преломления (4), равенство (7) можно привести к виду:

$$|FA_1| + 2\Phi(A_1, A_i) + \frac{2h \sin \psi_i}{\sin \alpha_i \sin(\alpha_i + \psi_i)} = E(\varphi) \quad (9)$$

Приведенное уравнение может быть решено явно относительно α_i :

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{4h \sin \psi_i}{E(\varphi) - |FA_1| - 2\Phi(A_1, A_i)} \right) - \frac{\psi_i}{2} \quad (10)$$

После находим:

$$n_i = \frac{h}{R_i \sin \alpha_i}, \quad R_{i+1} = R_i \frac{\sin \alpha_i}{\sin(\alpha_i + \psi_i)}$$

и переходим к определению $i+1$ слоя и т.д.

Численные результаты

Проиллюстрируем применимость изложенной методики на примере восстановления коэффициента преломления центрально-симметричной среды с коэффициентом преломления $n^2(R) = n_0^2 + cR^2$, $n(1)=1$, $c = 1 - n_0^2$, $n_0=0.6$ при $F=5$ и $F=1.5$. На рис.2,3 приведены графики ошибки восстановления Δn , равной модулю разности найденного по изложенной методике коэффициента преломления и заданного в зависимости от радиуса. Кривыми 1,2,3 на рис.2 показаны зависимости $\Delta n(r)$ для $F = 5$ и числа слоев-50,100 и 200 соответственно. Для получения примерно такой же величины ошибки для $F = 1.5$ потребовалось в два раза большее число слоев (100,200 и 400, соответственно, см. рис.3).

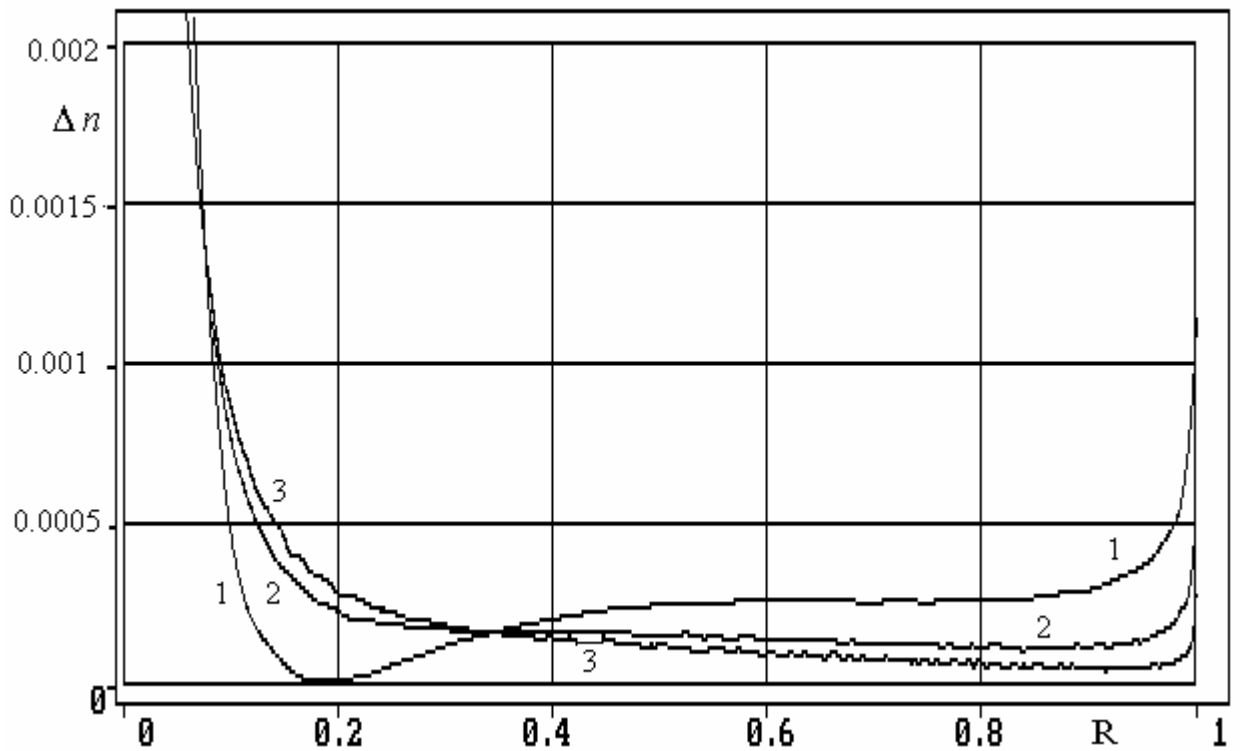


Рис.2 Ошибка восстановления $\Delta n(R)$; $F=5, n_0=0.6$

Из рисунков видна сходимость алгоритма восстановления при увеличении числа слоев везде, кроме области вблизи центра симметрии ($r < 0.1$). Отметим также увеличения ошибки в несколько раз вблизи границы сферы.

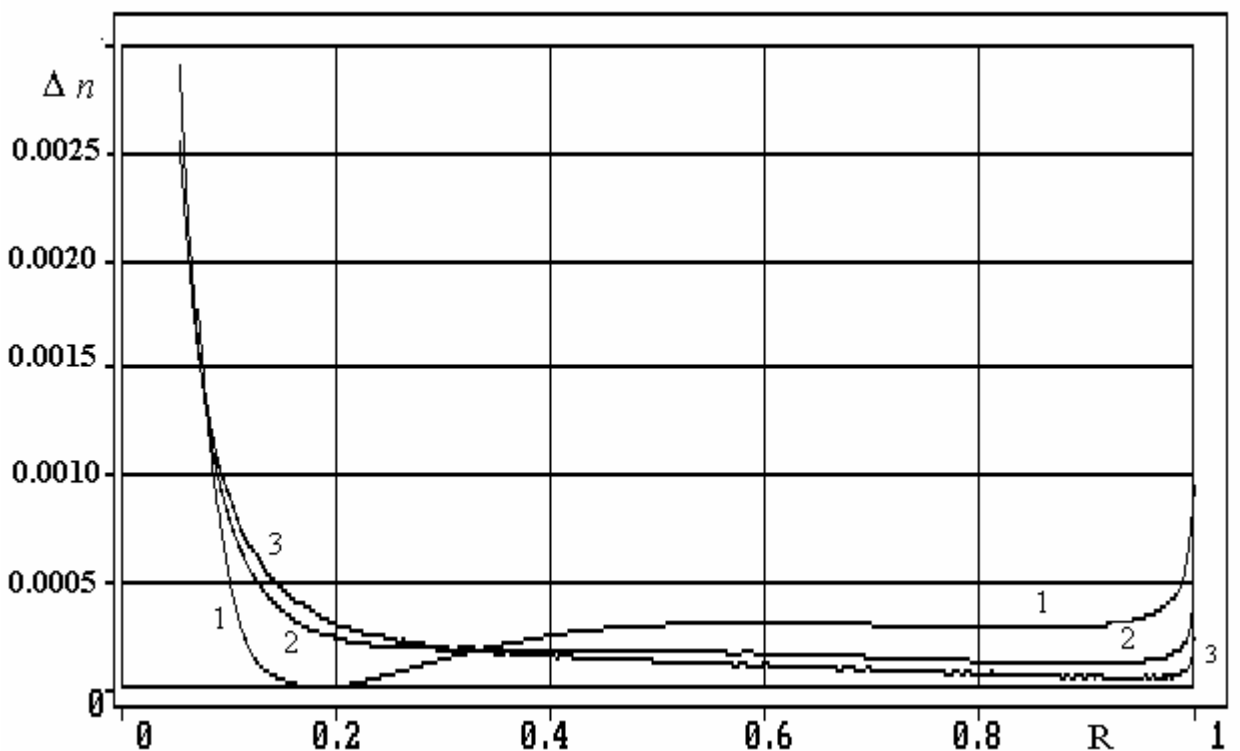


Рис.3 Ошибка восстановления $\Delta n(R)$; $F=1.5, n_0=0.6$

2. Фокусирующая среда

Перейдем к рассмотрению случая фокусирующей среды с центральной симметрией, коэффициент преломления которой зависит только от радиуса и монотонно убывает от центра к периферии. Постановка задачи аналогична рассмотренной выше для случая расфокусирующей среды.

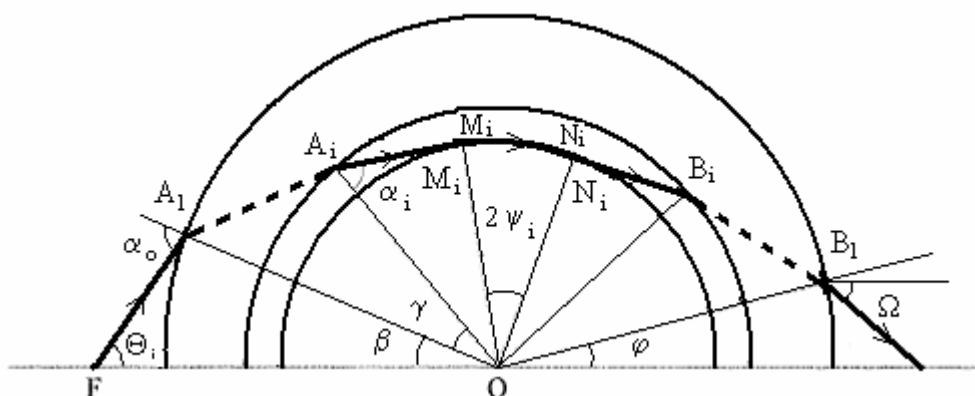


Рис.4. Ход луча в фокусирующей среде.

Аналогично предыдущему случаю непрерывный закон изменения коэффициента преломления заменим ступенчатым, т.е. представим среду в виде системы сферических слоев переменной толщины и постоянным значением коэффициента преломления в каждом слое. Зададим общее число слоев N и опишем рекуррентную процедуру для определения коэффициента преломления n_i и радиусов внешней и внутренней границ слоя R_i и R_{i+1} , $i=1, \dots, N$ (R_1 - внешний радиус среды).

Предположим, следуя методу математической индукции, что мы уже знаем коэффициенты преломления и толщины первых $i-1$ слоев и опишем алгоритм нахождения этих параметров в i -ом слое.

Рассмотрим луч, выходящий из источника под углом $\Theta_i = \Theta_0 - i \frac{\Theta_0}{N}$,

где $\Theta_0 = \arcsin \frac{R_1}{F}$, R_1 - внешний радиус среды, F -расстояние от источника до центра среды. В силу центральной симметрии среды ход лучей достаточно

рассматривать в плоском сечении. Угол α_0 , образованный падающим лучом с нормалью в точке падения на среду A_1 находится из теоремы синусов для треугольника FA_1O :

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{F}{R_1} \sin \Theta_i\right) \quad (11)$$

Вычислим эйконал рассматриваемого луча в точке выхода B_1 из среды. В силу центральной симметрии среды луч состоит из двух симметричных частей, поэтому достаточно вычислить эйконал первой части луча. Пусть A_j – точка входа луча в j -й слой, а A_{j+1} – точка выхода. Эти точки находятся решением прямой задачи прохождения луча через известные однородные слои. Приращение эйконала от точки A_1 до точки входа в искомый слой A_i можно представить в виде суммы:

$$\Phi(A_1, A_i) = \sum_{j=1}^{i-1} n_j |A_j A_{j+1}| \quad (12)$$

Приращение угловой координаты луча за тот же отрезок пути также выражается как сумма приращений на каждом слое:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{i-1} \arcsin\left(\frac{|A_j A_{j+1}|}{R_{j+1}} \sin \alpha_j\right), \quad (13)$$

где α_j – угол между лучом и радиус-вектором в точке A_j .

Рассмотрим путь луча в i -ом (искомом) слое. Если описать его траекторию прямолинейным отрезком, то параметров для одновременного удовлетворения двум условиям (заданному значению эйконала и угла выхода луча) не хватает, а если удовлетворить лишь одному из них – нет сходимости рекуррентной процедуры [4]. Для удовлетворения обоим упомянутым выше условиям дополнительно к прямолинейным отрезкам $A_i M_i$ и $N_i B_i$ (рис. 4) введем виртуальный луч в виде дуги $M_i N_i$. Опишем детальнее, как получаются все эти отрезки. Пусть n_i -неизвестное пока значение коэффициента преломления в искомом слое. Задав n_i можно найти угол α_i (см. рис. 4)

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{h}{n_i R_i}\right), \text{ где } h - \text{инвариант луча.} \quad (14)$$

Опустим перпендикуляр из точки O на прямолинейный отрезок луча в i -том слое. Пусть это будет точка M_i . Отрезок OM_i примем за внутренний радиус R_{i+1} определяемого слоя (пока неизвестный, т.к. он зависит от n_i , который еще предстоит найти). Предположим, что луч, дойдя до внутренней границы искомого слоя (точка M_i), далее скользит вдоль этой границы и сходит с нее в точке N_i , пройдя дугу $2\psi_i$. Для определения неизвестных величин n_i и ψ_i на данном шаге рекуррентной процедуры используем информацию о распределении эйконала и лучевом фронте на выходе из среды.

Так, используя первое условие и вычисляя полный оптический путь луча от источника до выхода из среды можно получить уравнение:

$$|FA_1| + 2\Phi(A_1, A_i) + 2R_i \cos \alpha_i n_i + 2R_i \sin \alpha_i \psi_i n_i = E(\varphi) \quad (15)$$

Второе уравнение можно получить, используя центральную симметрию среды и условие равенства угла выхода луча заданному значению

$$\alpha_0 + \Omega(\varphi) = \varphi \quad (16)$$

Последнее уравнение является в общем случае трансцендентным относительно φ , и может быть решено, например, методом итераций Ньютона. В качестве начального значения можно взять $\varphi_0=0$.

Используя очевидное геометрическое соотношение:

$$\beta + 2\gamma + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) + 2\psi_i + \varphi = \pi \quad (17)$$

и закон преломления:

$$h = R_1 \sin \alpha_0 = R_1 n_1 \sin \alpha_1 = \dots = R_i n_i \sin \alpha_i \quad (18)$$

можно выразить из двух последних соотношений n_i и ψ_i через α_i и, подставляя в уравнение (15), получить трансцендентное уравнение относительно α_i :

$$|FA_1| + 2\Phi(A_1, A_i) + 2h(\operatorname{ctg} \alpha_i + \alpha_i - \gamma - \frac{\varphi}{2} - \frac{\beta}{2}) = E(\varphi) \quad (19)$$

Решая его относительно α_i методом итераций Ньютона, задавая в качестве начального значения $\alpha_{i0} = \alpha_{i-1}$, находим:

$$n_i = \frac{h}{R_i \sin \alpha_i}, \quad R_{i+1} = R_i \sin \alpha_i$$

и переходим к определению $i+1$ слоя и т.д.

Численные результаты

Проиллюстрируем применимость изложенной методики на примере восстановления коэффициента преломления центрально-симметричной фокусирующей среды с коэффициентом преломления $n^2(R) = n_0^2 + cR^2$, $n(1)=1$, $c = 1 - n_0^2$, $n_0=1.4$ при $F=5$ и $F=1.5$. Кривыми 1,2,3 на рис. 5,6 показаны зависимости $\Delta n(r)$ для числа слоев-50,100 и 200 соответственно. Как и в предыдущем случае расфокусирующей среды на рисунках видна сходимость алгоритма восстановления при увеличении числа слоев везде, кроме области вблизи центра симметрии ($r < 0.1$). Отметим также увеличение ошибки в несколько раз вблизи границы сферы. Отличие заключается лишь в меньшей зависимости ошибки восстановления от величины F .

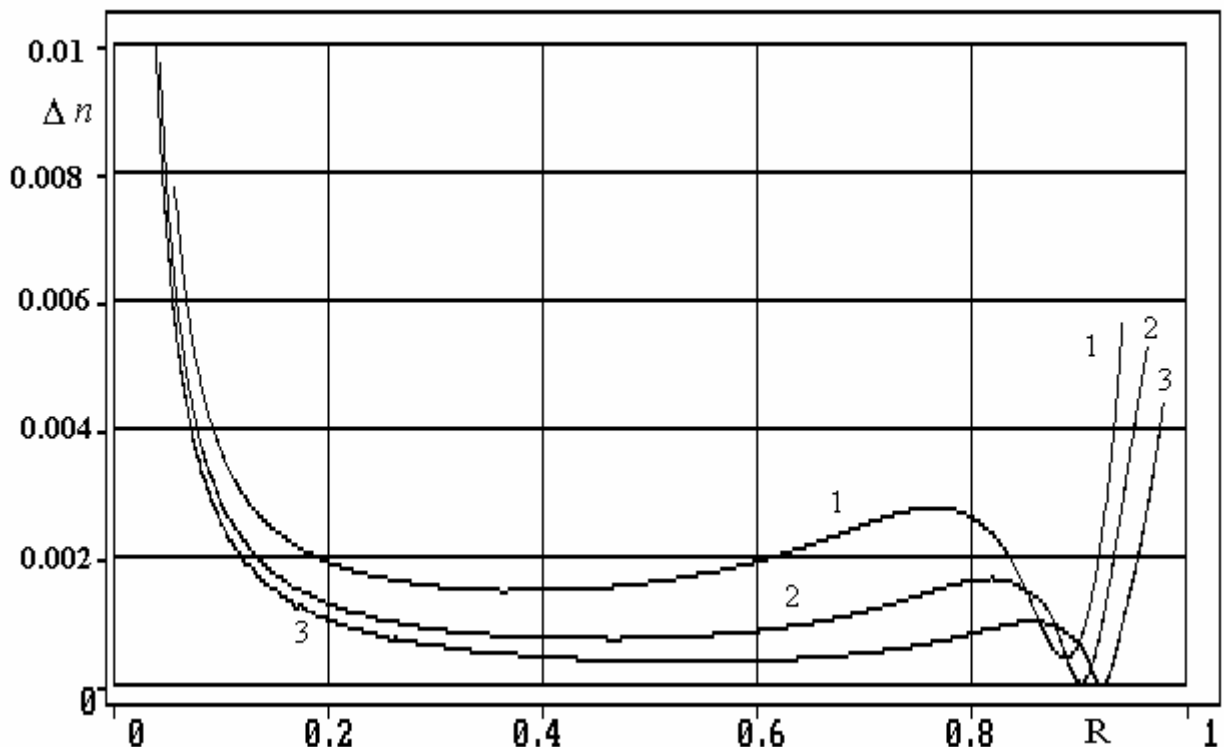


Рис.5 Ошибка восстановления $\Delta n(R)$; $F=5, n_0=1.4$

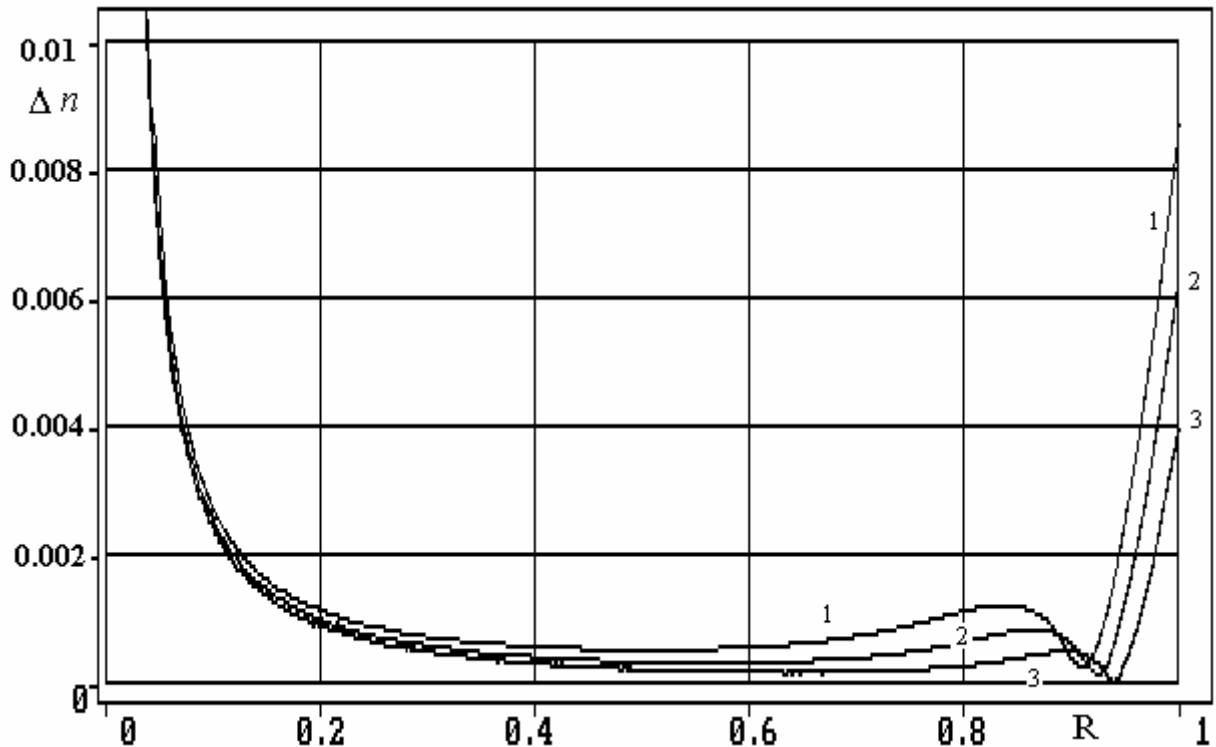


Рис.6 Ошибка восстановления $\Delta n(R)$; $F=1.5, n_0=1.4$

Выводы

1. Методика, основанная на использовании слоистой модели среды обеспечивает сходимость рекуррентной процедуры при увеличении числа слоев везде, кроме области вблизи центра симметрии.

2. Для обеспечения равномерной по радиусу сходимости рекуррентной процедуры необходима модификация методики.

Литература

1. Зелкин Е.Г., Петрова Р.А. Линзовые антенны. – М.: - Сов. Радио. 1974. – 280 с.
2. Венецкий А.С., Калошин В.А. Синтез неоднородной диэлектрической линзы с осевой симметрией // Письма в ЖТФ – 2006, Т.32, №7, С.74-79.

3. Венецкий А.С., Калошин В.А. Восстановление коэффициента преломления осесимметричной неоднородной среды по фазовой характеристике прошедшего поля // Журнал радиоэлектроники – 2005, №9,

<http://jre.cplire.ru/jre/sep05/3/text.html>

4. Kaloshin V., Venetsky A. The Numerical Technique for Inverse Problems of Geometry Optics of Inhomogeneous Media // Proceedings of Int. Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, June 2-5, 1998, P.157-159.