

УДК 621.391

## УТОЧНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ И СТЕПЕНЬЮ СПЕКТРА МОЩНОСТИ СИГНАЛА

С. А. Останин, А. М. Шайдук

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Получена 29 июля 2012 г.

**Аннотация.** Показана возможность уточнить отношение между фрактальной размерностью и степенью спектра мощности сигнала. Для аппроксимации использована функция распределения для нормального закона.

**Ключевые слова:** фрактальная размерность, спектр мощности.

**Abstract.** The possibility to increase the accuracy of the relationship between the fractal dimension and the degree of the power spectrum of the signal is proved. The distribution function for the normal law is used for approximation.

**Keywords:** fractal dimension, the power spectrum.

Фрактальную размерность используют, например, в качестве меры сложности хаотических сигналов или меры статистического самоподобия случайных процессов [1-4]. Один из способов оценки фрактальной размерности  $D$  сигнала  $x(t)$  заключается в использовании соотношения

$$D = \frac{5 - \alpha}{2}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – степень частоты  $f$  спектра мощности сигнала  $S_x(f)$  [5-8]:

$$S_x(f) \propto f^{-\alpha} \quad (2)$$

при

$$1 < \alpha < 3. \quad (3)$$

Этот способ нашел широкое применение при оценке фрактальной размерности радиосигналов [9], шумов различной природы [10], изображений [11-13] геологических поверхностей [14].

Поскольку связь спектра с фрактальной размерностью  $D$  в виде

$$S_x(f) \propto f^{2D-5} \quad (4)$$

носит оценочный характер (она является асимптотическим решением интегрального уравнения [5-8, 10]), а простота способа определения фрактальной размерности сделала этот инструмент измерения популярным, представляет интерес выяснение границ применимости соотношения (4). Во многих работах, например [15-18], в ходе численного моделирования, была обнаружена нелинейная зависимость фрактальной размерности  $D$  от степени  $\alpha$  спектра мощности. Авторы работ [15-18] указывают на существенно нелинейный характер зависимости вблизи границ диапазона значений параметра  $\alpha$ :  $1 < \alpha < 3$ . Однако авторы не приводят выражения пригодного для аппроксимации зависимости размерности  $D$  от степени  $\alpha$  спектра сигнала, что ограничивает возможность использования полученных результатов.

Для решения задачи уточнения связи между фрактальной размерностью и степенью спектра мощности сигнала был выполнен численный эксперимент по генерации сигналов различной фрактальной размерности, определению их спектров мощности, степени  $\alpha$  спектра сигнала, аппроксимации экспериментально полученной зависимости  $D(\alpha)$  различными функциями. Критерием выбора оптимальной функции был минимум среднеквадратичного отклонения значений аппроксимирующей функции от экспериментально полученных значений фрактальной размерности  $D$ .

Поскольку экспериментально зависимости  $D(\alpha)$ , полученные разными авторами, имели S-образный вид, в качестве аппроксимирующих функций для численных экспериментов были выбраны наиболее простые сигмоиды:

функция Ферми (экспоненциальная сигмоида)

$$D_F^*(\alpha) = \frac{1}{1 + \exp(2\alpha - 4)} \quad (5)$$

рациональная сигмоида

$$D_R^*(\alpha) = 1.5 + \frac{2 - \alpha}{|2 - \alpha| + 1.3}. \quad (6)$$

Кроме того, значения фрактальной размерности  $D$ , вычисленные при различных значениях степени  $\alpha$  спектра мощности, были аппроксимированы функцией

$$D^* = 2 - F(\alpha, \mu, \sigma), \quad (7)$$

$F(\alpha, \mu, \sigma)$  имеет вид функции распределения для нормального закона:

$$F(\alpha, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left(-\left[\frac{\alpha^* - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right]^2\right) d\alpha^*, \quad (8)$$

где  $\alpha$  – степень спектра мощности,  $\mu$  – положение центра симметрии функций  $F(\alpha, \mu, \sigma)$  и  $D^*$  на оси  $\alpha$ ,  $\sigma$  – параметр, определяющий максимальное значение производной функции  $D^*$ .

Величина  $\sigma$  определяется из условия равенства производной функции  $D^*$  в точке перегиба ( $\alpha = 2$ )

$$\begin{aligned} \left. \frac{dD^*}{d\alpha} \right|_{\alpha=2} &= \left. \frac{d(2 - F(\alpha, 2, \sigma))}{d\alpha} \right|_{\alpha=2} = - \left. \frac{d(F(\alpha, 2, \sigma))}{d\alpha} \right|_{\alpha=2} = \\ &= - \left. \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left[\frac{\alpha - 2}{\sigma\sqrt{2}}\right]^2\right) \right|_{\alpha=2} = - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (9)$$

производной функции размерности  $D$  по параметру  $\alpha$ :

$$\frac{dD}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{5 - \alpha}{2}\right)}{d\alpha} = -0.5. \quad (10)$$

Приравнявая (9) и (10) получаем параметр  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,79788. \quad (11)$$

При  $\alpha = 2$  фрактальная размерность  $D^* = 1.5$ , что соответствует размерности броуновского движения, поэтому значение  $\mu$  определяется из соотношения

$$D^* \Big|_{\alpha=2} = 2 - F(\alpha, \mu) \Big|_{\alpha=2} = 1.5, \quad (12)$$

$$F(\alpha, \mu) \Big|_{\alpha=2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left(-\pi \cdot \left[\frac{\alpha^* - \mu}{2}\right]^2\right) d\alpha^* = 0.5 \Rightarrow \mu = 2. \quad (13)$$

Таким образом, аппроксимирующая функция имеет вид:

$$D^* = 2 - F(\alpha, 2, \sqrt{2/\pi}) = 2 - 0.5 \int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left(-\pi \cdot \left[\frac{\alpha^* - 2}{2}\right]^2\right) d\alpha^*. \quad (14)$$

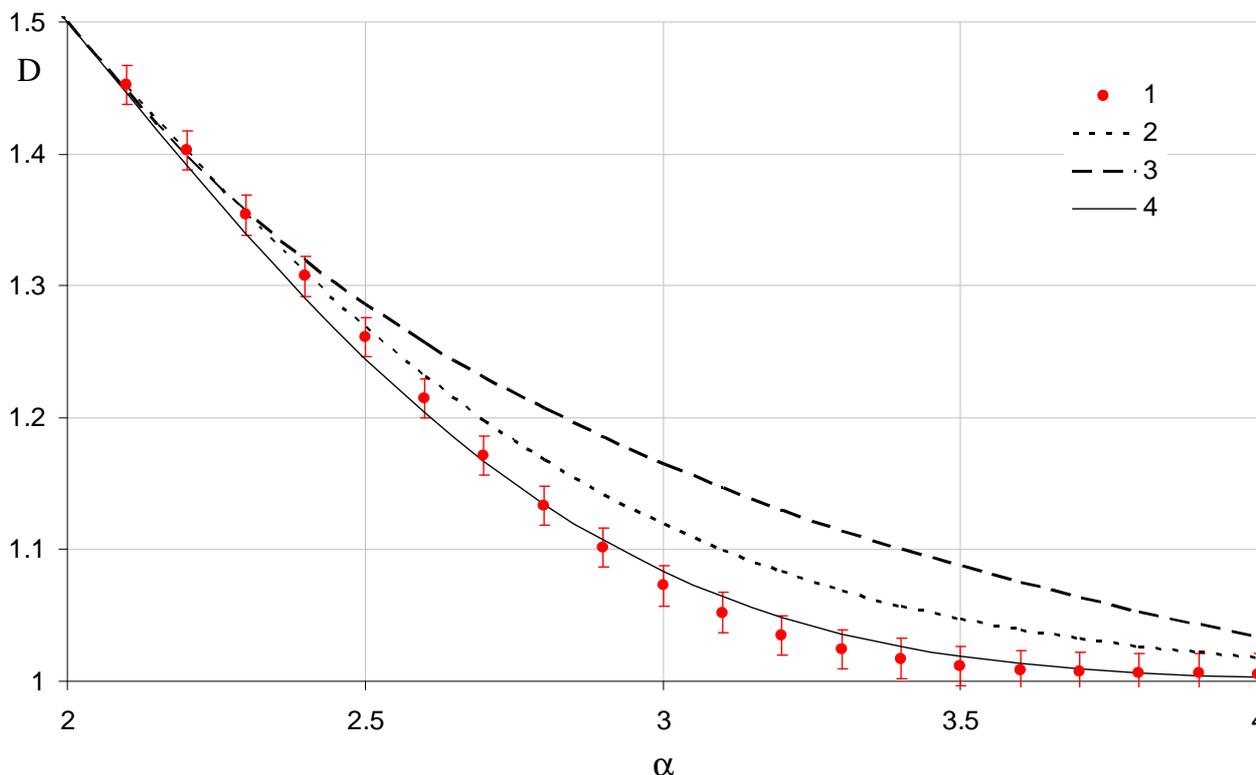


Рис. 1. Зависимость фрактальной размерности от параметра спектра:  
 1 – численный эксперимент  $D$ ; 2 – рациональная сигмоида  $D_R^*(\alpha)$ ;  
 3 – функция Ферми  $D_F^*(\alpha)$ ; 4 – функция  $D^*(\alpha)$ .

В ходе численного эксперимента генерировались сигналы  $x(t)$  различной фрактальной размерности со спектром вида  $S(f) \propto f^{-\alpha}$  с помощью программы, реализованной на LabVIEW. Фрактальная размерность модельных сигналов оценивалась с использованием алгоритма Higuchi [19]. Фрагменты графиков зависимости фрактальной размерности от параметра спектра  $\alpha$

показаны на рисунке 1. Из рисунка видно, что для аппроксимации следует использовать функцию вида (7). Среднеквадратичное отклонение (СКО) значений аппроксимирующей функции  $D^*$  от экспериментально полученных значений фрактальной размерности  $D$  является наименьшим из трех и составило величину около 0.005 (в единицах фрактальной размерности).

Зависимость фрактальной размерности  $D$  модельного сигнала  $x(t)$  от параметра спектра  $\alpha$  и аппроксимирующая функция  $D^*$ , для диапазона значений  $-1 < \alpha < 4$  показана на рисунке 2. Величина погрешности оценки экспериментально полученных значений фрактальной размерности  $D$  составила величину 0.015. Для оценки увеличения точности определения фрактальной размерности сигнала при использовании выражения (7) по сравнению с выражением (1), построим функцию разности  $\Delta D(\alpha)$ :

$$\Delta D(\alpha) = D(\alpha) - D^*(\alpha) = \frac{1-\alpha}{2} - F(\alpha, 2, \sqrt{2/\pi}). \quad (15)$$

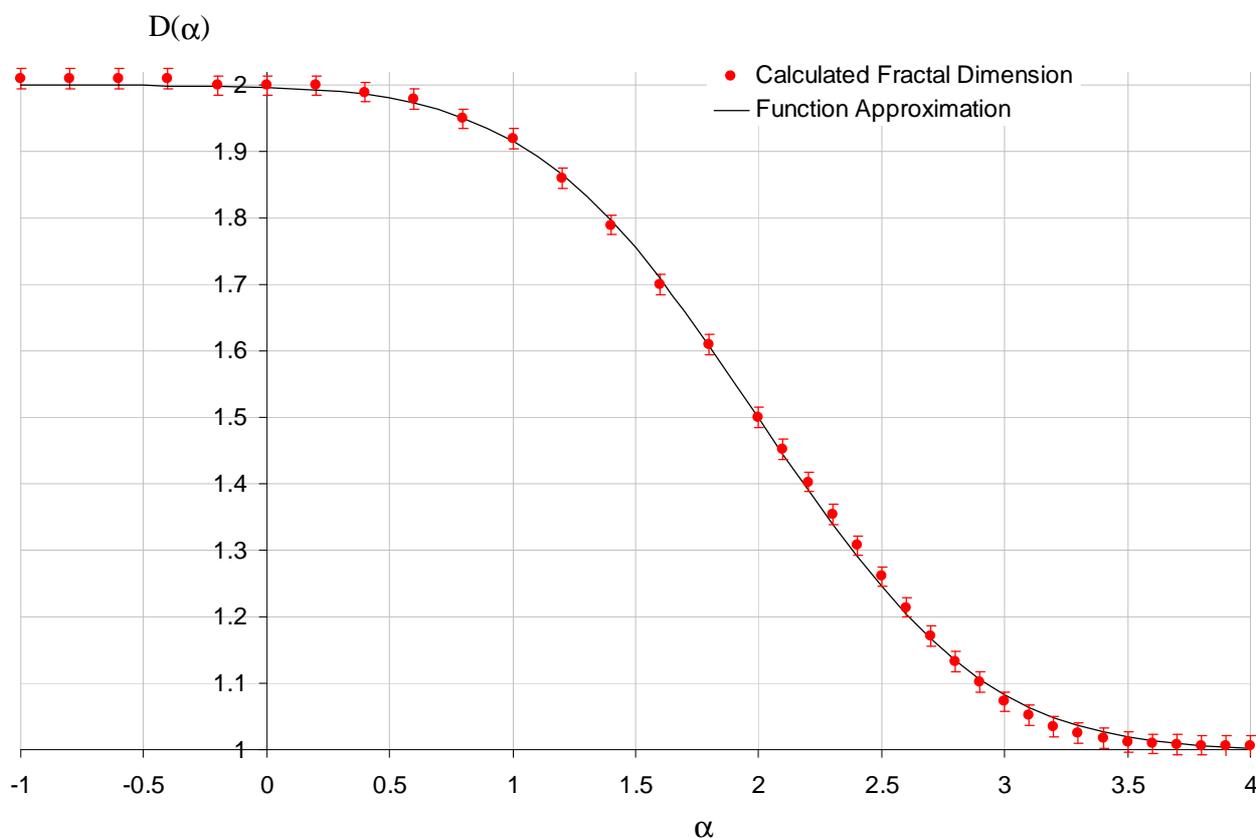


Рис. 2. Зависимость фрактальной размерности от параметра спектра:  
 • численный эксперимент  $D$ ; – аппроксимирующая функция  $D^*(\alpha)$ .

Функция  $\Delta D(\alpha)$  имеет единственный экстремум (минимум) при  $\alpha = 2$  и монотонно возрастает, по модулю, при  $\alpha > 2$  и  $\alpha < 2$ . Поскольку, как правило, значение фрактальной размерности определяют в диапазоне значений  $1 < \alpha < 3$ , определим максимальное значение  $\Delta D(\alpha)$  на границах этого диапазона ( $\alpha = 1$  и  $\alpha = 3$ ):

$$\Delta D(1) \approx 0.083579, \Delta D(3) \approx -0.083579. \quad (16)$$

В относительных единицах, максимальная погрешность  $\delta D$  оценки фрактальной размерности составляет, соответственно

$$\delta D(1) = \frac{\Delta D(1)}{D(1)} \approx 0.04, \delta D(3) = \frac{\Delta D(3)}{D(3)} \approx 0.08. \quad (17)$$

Погрешность оценки размерности величиной 8%, очевидно, не может быть приемлемой для измерительного средства. Среднеквадратичное отклонение значений функции  $D$ , вычисленной по формуле (1), от аппроксимирующей функции фрактальной размерности  $D^*$  составило величину 0.04, что в 20 раз превышает СКО  $D^*$  от экспериментально полученных значений фрактальной размерности (0.005).

Многие популярные среды программирования (Matlab, Maple, LabVIEW) имеют в своем составе средства вычисления функции распределения для нормального закона, поэтому оценка фрактальной размерности с помощью выражения (14) не представляет труда. Для оценки фрактальной размерности микроконтроллерными устройствами ее можно вычислить, используя связь между функцией распределения для нормального закона с функцией ошибок

$$F(\alpha, \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right] \quad (18)$$

и известное приближение в виде полинома [20]:

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^{-4} + \varepsilon(\alpha), \quad (19)$$

где  $x \geq 0$ ,  $a_1 = 0.278393$ ,  $a_2 = 0.230389$ ,  $a_3 = 0.000972$ ,  $a_4 = 0.078108$ ,  $\varepsilon(x) \leq 5 \cdot 10^{-4}$  (0.05% от максимального значения функции ошибок).

Подставим приближенное выражение для функции  $erf$  (19) в функцию распределения (18), а (18) – в выражение для  $D^*$  (7) и получим

$$D_{\alpha \geq 0}^* = 1 + \frac{1}{2} \left[ 1 + 0.278393 \left( \sqrt{\pi} \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right) + 0.230389 \left( \sqrt{\pi} \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + 0.000972 \left( \sqrt{\pi} \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right)^3 + 0.078108 \left( \sqrt{\pi} \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right)^4 \right]^{-4} \quad (20)$$

при  $\alpha \geq 0$ ,

$$D_{\alpha < 0}^* = 2 - \frac{1}{2} \left[ 1 + 0.278393 \left( \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right) + 0.230389 \left( \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + 0.000972 \left( \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^3 + 0.078108 \left( \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^4 \right]^{-4} \quad (21)$$

при  $\alpha < 0$ .

При использовании приближения (19) для  $\alpha < 0$  (21) мы учли нечетность функции ошибок:  $erf(-x) = -erf(x)$ . Формулы функций, аппроксимирующих функцию ошибок с остаточным членом менее  $1.5 \cdot 10^{-7}$ , можно найти в справочниках [21-24].

Таким образом, показана возможность существенно повысить точность оценки отношения между фрактальной размерностью и степенью спектра мощности сигнала, особенно на границах диапазона значений фрактальной размерности ( $D=1$  и  $D=2$ ). При размерностях около 2, использование предложенного варианта функции  $D^*(\alpha)$  (14) позволяет уменьшить погрешность оценки фрактальной размерности в 20 раз, а при размерностях около 1 – в 40 раз.

### Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

2. Федер Е. Фракталы. – М: Мир, 1991.
3. Кронвер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: РХД, 2001.
5. Peitgen H.O., Saupe D. The Science of Fractal Images. – New York, Springer-Verlag, 1988.
6. Flandrin P. On the Spectrum of Fractional Brownian Motions // IEEE Transactions on Information Theory. – 1989, V. 35, № 1, p.197-199.
7. Mandelbrot B.B., van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. // SIAM Review. – 1968, V.10, №4, p.422-437.
8. Berry M.V. Diffractals. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1979, V.12, №6, p.781-797.
9. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005.
10. Voss R.F. Random fractals: self-affinity in noise, music, mountains and clouds // Physica D. – 1989, V.38, № 3, p.362-371.
11. A. Van Put, A. Vertes, D. Wegrzynek, B. Treiger, R. Van Grieken Quantitative characterization of individual particle surfaces by fractal analysis of scanning electron microscope images. // Fresenius Journal of Analytical Chemistry. – 1994, V.350, p.440-447.
12. A. Mannelquist, N. Almquist, S. Fredriksson: Influence of tip geometry on fractal analysis of atomic force microscopy images. // Appl. Phys. A. – 1998, V.66, №6, p.891-895.
13. W. Zahn, A. Zösch: Characterization of thin film surfaces by fractal geometry. // Fresenius J Anal Chem. – 1997, V.358, №1-2, p.119-121.
14. Wilson T.H Some Distinctions Between Self-Similar and Self-Affine Estimates of Fractal Dimension with Case History // Mathematical Geology. – 2000, V.32, №3, p.319-335.

15. Higuchi T. Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: a numerical investigation. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1990, V.46, №2, p.254–264.
16. Лукк А.А., Дещеревский А.В., Сидорин А.Я., Сидорин И.А. Вариации геофизических полей как проявление детерминированного хаоса во фрактальной среде. М., ОИФЗ РАН, 1996.
17. Turcotte D.L. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
18. Wilson, T. H. Fractal strain distribution and its implications for cross-section balancing further discussion. // *Jour. of Structural Geology*. – 1997, V.19, №1, p.129-132.
19. Higuchi T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1988, V.31, №2, p. 277-283.
20. Hastings C.Jn. *Approximations for digital computers*. – N.Y.: Princeton Univ., 1955.
21. Fike C.T. *Computer evaluation of mathematical function*. – New Jersey: Prentice – Hall, 1968.
22. *Computer approximations*. – Ed. by J.F. Hart. New York: Wiley, 1968.
23. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации*. – М.: Мир, 1980.
24. Попов Б.А., Теслер Г.С. *Вычисление функций на ЭВМ: Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1984.