

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НАД ТРАПЕЦИЕВИДНО ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Е .М. Арсеньева, В. А. Калошин
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

Получена 18 июня 2008 г.

В импедансном приближении получена формула для постоянной распространения поверхностной волны над трапециевидной гофрированной поверхностью. Проведено сопоставление результатов расчетов на основе полученной формулы с результатами численного эксперимента.

Известны работы, посвященные исследованию поверхностных волн в гофрированных структурах с прямоугольной формой гофра [1,2]. Такие гофрированные структуры применяются в электронике, волноводной и антенной технике. Так, например, в круглом волноводе гофрировка стенок с глубиной гофра, равные или несколько больше четверти длины волны позволяет уменьшить потери при работе на основной волне H_{11} или снять нежелательное вырождение (совпадение фазовых скоростей) волн H_{01} и E_{11} в многомодовом волноводе. При глубине гофра меньше, чем четверть длины волны над поверхностью распространяются замедленные электромагнитных волны, которые эффективно взаимодействуют с электронным потоком [2]. Гофрированные структуры используются также для формирования узконаправленного излучения в антеннах поверхностной волны [3].

В данной работе исследуется гофрированная поверхность с трапециевидной формой гофра (рис.1). Цель - исследование влияния на дисперсионную характеристику поверхностной волны формы гофра, его периода и глубины. Для нахождения постоянной распространения поверхностной волны применяются два метода. Одним из них является аналитический подход, основанный на импедансном приближении, другим – численное моделирование на основе метода конечных элементов. В последнем методе весь объем решаемой задачи разбивается на множество малых конечных элементов в виде тетраэдров. В результате задача сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Продольное сечение двумерной трапецевидной гофры изображено на *рис.1*. Период гофры l , ширина открытой части периода равна p при $x = \delta$, высота гофры δ . Обозначим $q = \frac{p}{l}$.

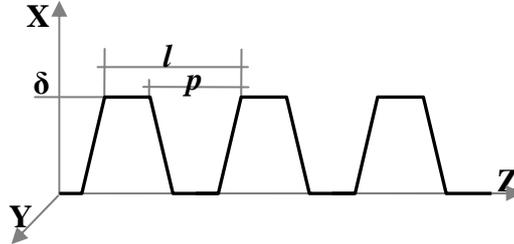


Рис.1 Трапецевидная гофрированная поверхность

Представим поле над гофрой ($x > \delta$) в виде поверхностной волны:

$$\begin{aligned} E_z &= C e^{-i\alpha x} e^{-ihz}, \\ H_y &= -\alpha k C e^{-i\alpha x} e^{-ihz} \end{aligned} \quad (1)$$

$$h^2 + \alpha^2 = k^2,$$

где h, α - продольное и поперечное волновые числа, а k - волновой вектор в свободном пространстве.

Проекция электрического поля на ось z E_z пропорциональна проекции магнитного поля на ось y H_y с коэффициентом пропорциональности w (равным величине импеданса), который не зависит от структуры внешнего поля:

$$w = \frac{E_z}{H_y} = -\frac{1}{\alpha k} \quad (2)$$

Далее будем полагать, что внутри каждого периода гофры (при $0 < x < \delta$) образуется основная стоячая волна секториального рупора, поле которой в цилиндрических координатах можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= C_1 H_1^{(1)}(kr) + C_2 H_1^{(2)}(kr) \\ E_r = E_y = H_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $H_1^{(1)}(kr)$ и $H_1^{(2)}(kr)$ - функции Ханкеля первого и второго порядка, соответственно, r - радиальная компонента в цилиндрической системе координат (*рис.2*). Отношение коэффициентов C_1 к C_2 можно определить из условия равенства нулю тангенциальной компоненты поля E на металлической стенке при $x = 0$, которое мы приближенно

заменим тем же условием (предполагая, что угол раствора рупора φ_{MAX} является малым) на поверхности, образованной дугой окружности $r = r_0$, как показано на *рис.2*.

Рассмотрим один период этой гофры (*рис.2*). Используя граничное условие для тангенциальной компоненты поля: $E_\varphi = 0$ при $r = r_0$, находим связь между постоянными C_1 и C_2 :

$$C_1 H_1^{(1)}(kr_0) + C_2 H_1^{(2)}(kr_0) = 0 \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует:

$$C_2 = -C_1 \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)}$$

И формула (3) с учетом формулы (4) приобретает следующий вид:

$$E_\varphi = C_1 H_1^{(1)}(kr) - C_1 \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} H_1^{(2)}(kr) \quad (5)$$

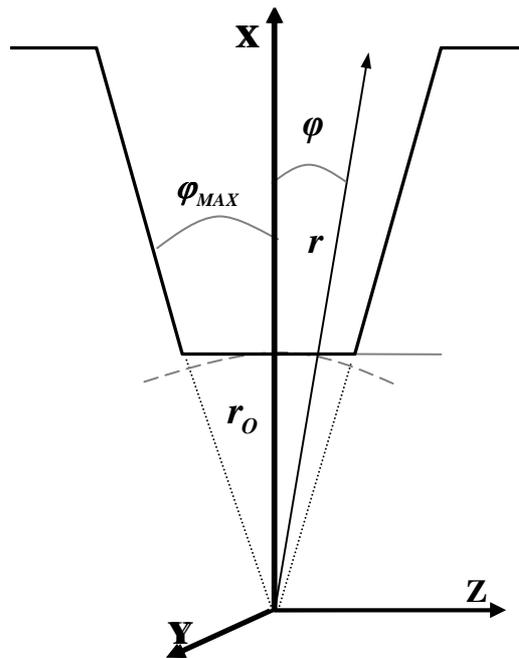


Рис.2 Один период трапецевидной гофры. Цилиндрические координаты r, φ, y .

Запишем компоненты электрического поля $\vec{E}(t)$ в цилиндрических координатах - r, φ, y (*рис.2*) через комплексные амплитуды E_r, E_φ, E_y :

$$\vec{E}(t) = \begin{bmatrix} E_r(t) \\ E_\varphi(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ E_y \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega t} \quad (6)$$

Для нахождения проекции H_y используем уравнение Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\text{rot}\vec{E} = -ik\vec{H} \quad (7)$$

В цилиндрических координатах выражение для ротора электрического поля $\text{rot}\vec{E}$ имеет следующий вид:

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{bmatrix} (\text{rot}\vec{E})_r \\ (\text{rot}\vec{E})_\varphi \\ (\text{rot}\vec{E})_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial(E_y)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(E_\varphi)}{\partial y} \\ \frac{\partial(E_r)}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(E_r)}{\partial\varphi} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Учитывая (7) и (2), для проекции H_y получаем следующее уравнение:

$$H_y = -\frac{1}{ik} (\text{rot}\vec{E})_y = -\frac{1}{ikr} \frac{\partial[rE_\varphi]}{\partial r} + \frac{1}{ikr} \frac{\partial[E_r]}{\partial\varphi} = -\frac{1}{ikr} \frac{\partial[rE_\varphi]}{\partial r}$$

и, следовательно, зависимость импеданса w , который определяется из соотношения (2), от угла φ :

$$w(\varphi) = \frac{ikr \left[H_1^{(1)}(kr) - \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} H_1^{(2)}(kr) \right] \cos\varphi}{r \left[\frac{\partial H_1^{(1)}(kr)}{\partial r} - \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} \frac{\partial H_1^{(2)}(kr)}{\partial r} \right] + \left[H_1^{(1)}(kr) - \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} H_1^{(2)}(kr) \right]} \quad (9)$$

Переходя к пределу $r_0 = 0$ и учитывая, что

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{J_1(kr_0) + N_1(kr_0)}{J_1(kr_0) - N_1(kr_0)} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{N_1(kr_0)}{-N_1(kr_0)} = -1$$

а также соотношение:

$$r \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} + J_1(kr) = kr J_0(kr),$$

получим для зависимости импеданса w от угла φ для треугольной гофры:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} w(\varphi) = \frac{ikr J_1(kr)}{\left[r \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} + J_1(kr) \right]} \cos\varphi = i \frac{J_1(kr)}{J_0(kr)} \cos\varphi$$

В декартовых координатах выражение для импеданса w на поверхности $x = \delta$ выражение для импеданса w будет следующим:

$$w(z) = i \frac{J_1(k\sqrt{\delta^2 + z^2})}{J_0(k\sqrt{\delta^2 + z^2})} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + z^2}}$$

Далее введем понятие среднего импеданса $\langle w \rangle$ на открытой части гофры и понятие среднего импеданса $\langle W \rangle$ на периоде гофры l . Очевидно, что средний импеданс на периоде $\langle W \rangle$ будет отличаться множителем q от среднего импеданса на открытой части гофры $\langle w \rangle$:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p w(z) dz \quad (10)$$

$$\langle W \rangle = q \langle w \rangle \quad (11)$$

Тогда, учитывая уравнение (8) для среднего импеданса на периоде треугольной гофры получим следующее уравнение:

$$\langle W \rangle = iq \int_0^p \frac{J_1(k\sqrt{\delta^2 + z^2})}{J_0(k\sqrt{\delta^2 + z^2})} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + z^2}} dz = iq \int_0^p \frac{J_1(k\delta\sqrt{1 + z^2/\delta^2})}{J_0(k\delta\sqrt{1 + z^2/\delta^2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/\delta^2}} dz \quad (12)$$

Общей формулой для среднего импеданса на периоде трапециевидной гофры будет следующее выражение, согласно формулам (10) и (11):

$$\langle W \rangle = iq \int_0^p \frac{kr \left[H_1^{(1)}(kr) - \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} H_1^{(2)}(kr) \right] \cos \varphi}{r \left[\frac{\partial H_1^{(1)}(kr)}{\partial r} - \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} \frac{\partial H_1^{(2)}(kr)}{\partial r} \right] + \left[H_1^{(1)}(kr) - \frac{H_1^{(1)}(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)} H_1^{(2)}(kr) \right]} dz \quad (13)$$

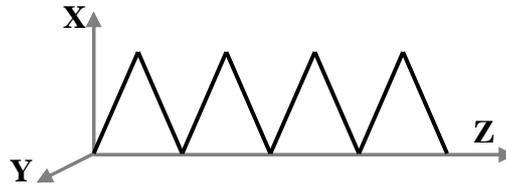


Рис.3 Треугольная гофра при $p = l$

Далее будем рассматривать треугольную гофру при $p = l$ (рис.3).

Приравнивая средний импеданс на периоде внутри гофры (формула (12)) импедансу поля вне гофры (формула (2)) на границе гофры $x = \delta$, получаем для величины α в случае, когда $p = l$:

$$\alpha = -\frac{ik}{l} \int_0^l \frac{J_1(k\sqrt{\delta^2 + z^2})}{J_0(k\sqrt{\delta^2 + z^2})} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + z^2}} dz \quad (14)$$

Тогда коэффициент замедления $U = \frac{h}{k}$ равен:

$$U = \frac{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}{k},$$

или, учитывая (9):

$$U = \sqrt{1 + \frac{1}{l^2} \left(\int_0^l \frac{J_1(k\sqrt{\delta^2 + z^2})}{J_0(k\sqrt{\delta^2 + z^2})} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/\delta^2}} dz \right)^2} \quad (15)$$

В общем виде, когда $p \neq l$:

$$U = \sqrt{1 + \frac{1}{l^2} q^2 \left(\int_0^l \frac{J_1(k\sqrt{\delta^2 + z^2})}{J_0(k\sqrt{\delta^2 + z^2})} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/\delta^2}} dz \right)^2} \quad (16)$$

Рассмотрим узкий треугольный профиль, когда период l мал по сравнению с глубиной гофры δ :

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} w(z) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[i \frac{J_1(k\delta\sqrt{1 + (\frac{z}{\delta})^2})}{J_0(k\delta\sqrt{1 + (\frac{z}{\delta})^2})} \cos \varphi \right] = itg(k\delta - \frac{\pi}{4}) \cos \varphi$$

Для среднего значения импеданса получаем следующую формулу:

$$\langle w \rangle = \frac{\int_{-\varphi_{MAX}}^{\varphi_{MAX}} w(\varphi) d\varphi}{2\varphi_{MAX}} = \frac{itg(k\delta - \frac{\pi}{4}) \int_{-\varphi_{MAX}}^{\varphi_{MAX}} \cos \varphi d\varphi}{2\varphi_{MAX}} = itg(k\delta - \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\sin \varphi_{MAX}}{\varphi_{MAX}} \quad (17)$$

Или, переходя к пределу, $\varphi_{MAX} \rightarrow 0$, и учитывая, что

$$\lim_{\varphi_{MAX} \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi_{MAX}}{\varphi_{MAX}} = 1,$$

получим для среднего импеданса выражение:

$$\langle w \rangle = itg(k\delta - \frac{\pi}{4}) \quad (18)$$

Тогда для коэффициента замедления U в случае треугольной гофры получается следующая упрощенная формула:

$$U = \sqrt{1 + q^2 tg(k\delta - \frac{\pi}{4})^2} \quad (19)$$

Условием существования поверхностной волны является требование $Im \alpha < 0$. Следовательно, при $tg(k\delta - \frac{\pi}{4}) > 0$ вдоль гофры может распространяться замедленная волна.

Для получения характеристик медленной волны в прямоугольной бесконечной гофре на перейдем к пределу $r \rightarrow \infty$, $r_o \rightarrow \infty$ при $r - r_o = \delta$ для импеданса w на поверхности $x = \delta$, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r_o \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty \\ r - r_o = 0}} w(\varphi) &= \frac{E_\varphi \cos \varphi}{H_z} = \\ &= \frac{ikr \left[\exp(ikr) - \frac{\exp(ikr_o)}{\exp(-ikr_o)} \exp(-ikr) \right] \cos \varphi}{\left(r(ik \exp(ikr) + ik \frac{\exp(ikr_o)}{\exp(-ikr_o)} \exp(-ikr)) + (\exp(ikr) - \frac{\exp(ikr_o)}{\exp(-ikr_o)} \exp(-ikr)) \right)} = \\ &= itg(k(r - r_o)) \cos \varphi = itg(k\delta) \cos \varphi \end{aligned}$$

Коэффициент замедления U прямоугольной гофрированной поверхности будет равен:

$$U = \sqrt{1 + q^2 tg(k\delta)^2} \quad (20)$$

Отметим, что формула (20) совпадает с формулой, приведенной в [1].

Из формул (19) и (20) видно, что при одинаковых параметрах глубины δ , параметра q коэффициент замедления U в прямоугольной гофре больше.

Коэффициент замедления U больше 1, т.е. гофра обладает замедляющими свойствами.

Численное моделирование было основано на методе конечных элементов. Далее приведено сравнение численных и аналитических результатов для двумерных треугольной и прямоугольной гофрированных поверхностей.

На *рис.4* и *рис. 5* показано сравнение численных и аналитических значений коэффициента замедления, полученных для треугольной и прямоугольной гофры. Как видно, эти значения хорошо совпадают в большом диапазоне частот. На *рис.4* штриховой линией показаны значения численного эксперимента, полученные для гофрированной поверхности конечной проводимости (медь).

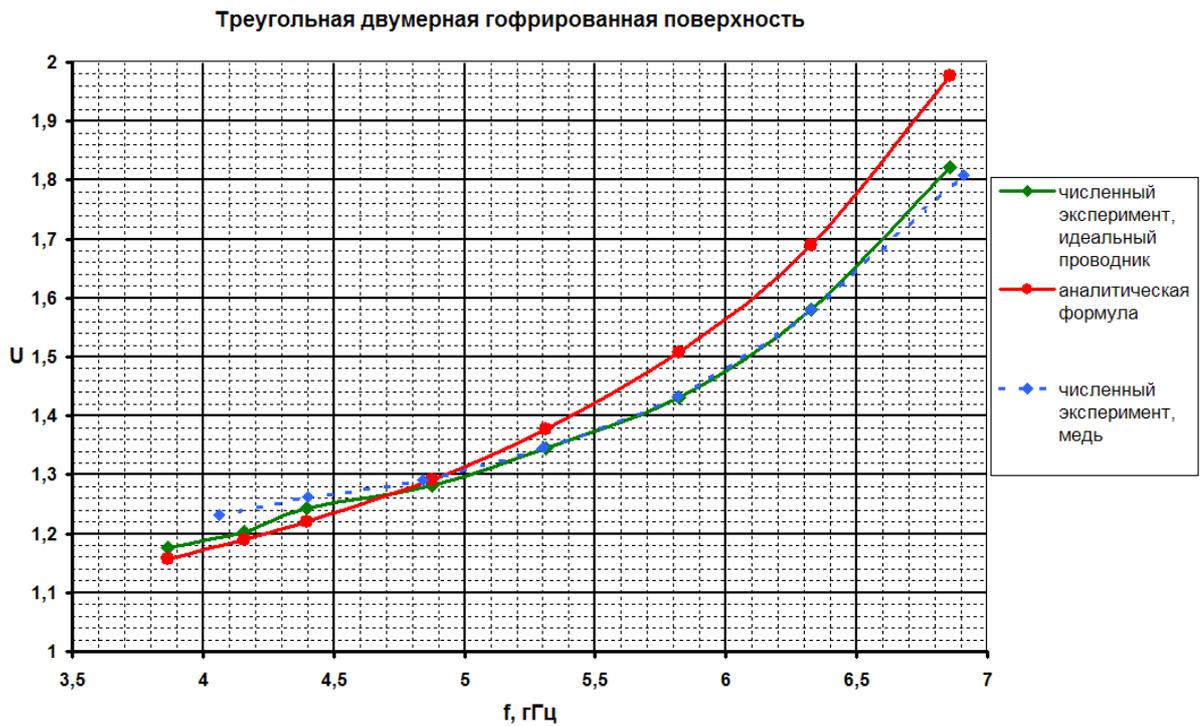


Рис.4 Сравнение результатов, полученных численным экспериментом в программе HFSS 8 и использованием аналитической формулы (17). Глубина гофры $\delta = 12.5$ мм, период $l = 3$ мм, $p = l$.

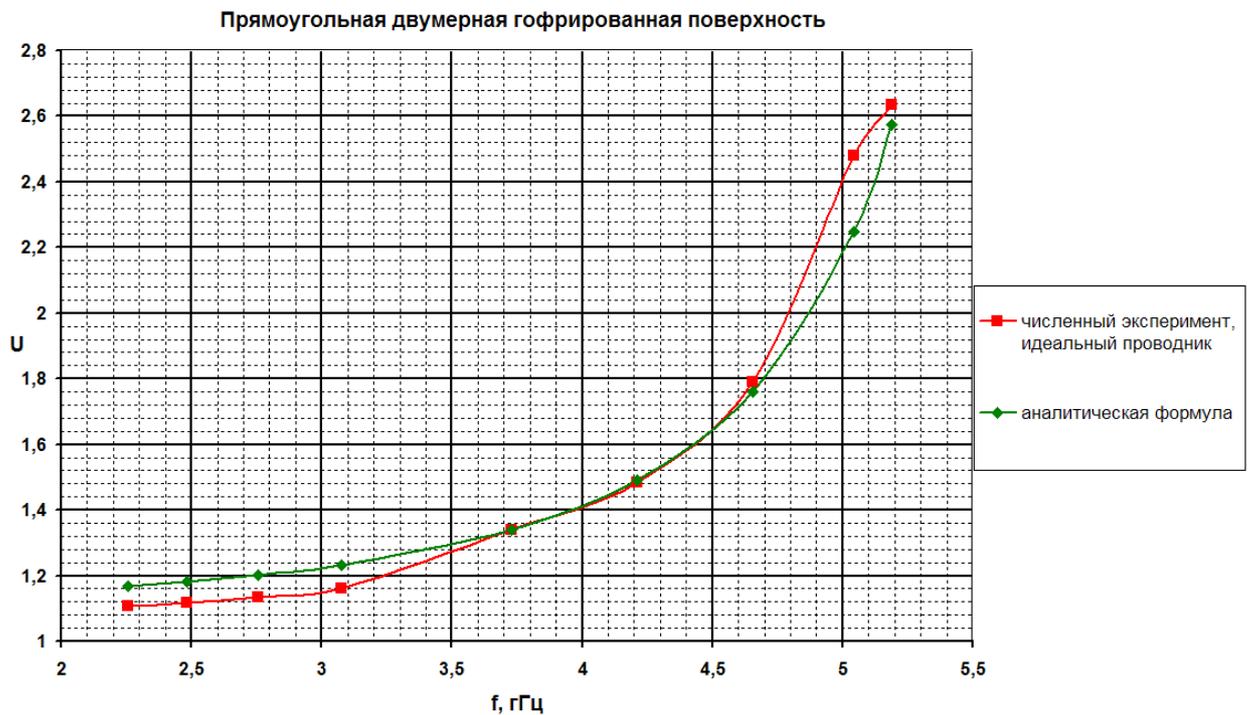


Рис.5 Сравнение результатов, полученных численным экспериментом в программе HFSS 8 и использованием аналитической формулы (22). Глубина гофры $\delta = 12.5$ мм, период $l = 6$ мм, $q = \frac{1}{2}$.

В итоге,

- В работе получены аналитические формулы для расчета коэффициента замедления в трапецевидной гофрированной поверхности. В частном случае- случае

прямоугольной гофрированной поверхности, полученные формулы совпадают с известными формулами, приведенными в литературе.

- Аналитически показано, что коэффициент замедления U для прямоугольного профиля гофра больше, чем для треугольного.
- Показано, что результаты расчета коэффициента замедления для двумерной гофрированной поверхности треугольного и прямоугольного профиля по аналитическим формулам хорошо совпадают с результатами численного исследования в большом диапазоне частот.

Список литературы

- [1.] W. Rotman, "A study of Single-Surface Corrugated Guides," Proc. IRE, 1951, vol. 39, Aug., pp. 952-959.
- [2.] Р.А.Силин, В.П. Сазонов "Замедляющие системы". Издательство "Советское радио", 1966г.
- [3.] Г.З. Айзенберг, В. Г. Ямпольский, О.Н.Терешин "Антенны УКВ". "Связь", 1977 г.