УДК 537.8

ВЕКТОРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

А. С. Ильинский, И. Г. Ефимова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Получена 24 ноября 2010 г.

Аннотация. Векторы напряженностей нестационарного электромагнитного поля в однородной изотропной проводящей среде представлены во временной области в интегральной форме.

Ключевые слова: нестационарное электромагнитное поле, проводящая среда, интегральное представление.

В соответствии с известной теоремой эквивалентности монохроматическое электромагнитное поле в однородной изотропной среде может быть выражено в интегральной форме через значения векторов напряженностей электрического и магнитного полей на замкнутой поверхности [1--4]. Интегральные представления в частотной области для напряженностей электрического и магнитного полей, называемые формулами Стрэттона--Чу и справедливые при любых значениях материальных параметров среды, были получены и подробно проанализированы в [1, 4]. Эти представления широко используются для составления частотных интегральных уравнений, которые применяются для решения разнообразных электродинамических задач [2, 4-7].

Во временной области электромагнитное поле, существующее в непроводящей среде, также может быть представлено в интегральной форме через значения напряженностей электрического и магнитного полей на замкнутой поверхности. В этом случае напряженности полей, входящие в подынтегральные выражения, являются функциями от запаздывающего временного аргумента. Такое представление было получено в скалярной [1] и векторной [2] формах и успешно применяется для составления временных интегральных уравнений, используемых в численных исследованиях рассеяния нестационарного электромагнитного поля на идеально проводящих телах и диэлектрических телах без потерь, расположенных в непроводящей среде [2, 8, 9]. Вопросы существования и единственности решения временных интегральных уравнений для тока, наведенного на поверхности идеально проводящего рассеивателя, рассматривались в [10, 11]. Однако к настоящему времени метод временных интегральных уравнений не был разработан для случая проводящей среды, поскольку не было получено интегральное представление нестационарного электромагнитного поля в такой среде. В книге [1] отмечено, что при применении метода Кирхгофа интегрирования неоднородного волнового уравнения наличие проводимости среды приводит к значительным аналитическим трудностям.

Целью настоящей работы является получение временного интегрального представления нестационарного электромагнитного поля в однородной изотропной среде, обладающей проводимостью.

Будем рассматривать однородную изотропную среду с материальными параметрами, не зависящими ни от времени ни от пространственных координат. В этом случае уравнения Максвелла имеют вид

$$
\begin{aligned}
& rot\vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{j}^{\,mext} - \sigma^m \vec{H} \\
& rot\vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}^{\,eext} + \sigma^e \vec{E} \quad ,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - векторы напряженностей электрического и магнитного полей, соответственно, ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость, σ^e - удельная электрическая проводимость, σ^m - удельная магнитная проводимость, $\vec{j}^{\,eext}$ и $\vec{j}^{\,mext}$ - объемные плотности сторонних электрического и магнитного токов, соответственно. Предполагается, что ε, μ, σ^e и σ^m являются постоянными величинами, а $\vec{E}$ и $\vec{H}$ конечными функциями непрерывными вместе со всеми своими производными во всех обыкновенных точках пространства (в которых нет резких изменений физических свойств среды).

Считаем, что сторонние токи и заряды удовлетворяют уравнениям непрерывности

$$div\vec{j}^{eext} + \frac{\partial \rho^{eext}}{\partial t} = 0,$$

$$div\vec{j}^{mext} + \frac{\partial \rho^{mext}}{\partial t} = 0, \qquad (2)$$

где ρ^{eext} и ρ^{mext} объемные плотности электрического и магнитного зарядов, соответственно. Также мы предполагаем, что все функции времени, рассматриваемые в данной задаче, - напряженности электрического и магнитного полей, объемные плотности сторонних токов и зарядов - равны нулю вместе со своими производными до момента времени $t = 0$ включительно.

Из уравнений Максвелла (1) и уравнений непрерывности (2) можно получить соотношения

$$div\vec{E} = \frac{1}{a^e}\exp(-\frac{b^e}{a^e}t)\int\limits_{t=0}^{t}\frac{\partial \rho^{eext}(t)}{\partial t}\exp(\frac{b^e}{a^e}t)dt,$$

$$div\vec{H} = \frac{1}{a^m}\exp(-\frac{b^m}{a^m}t)\int\limits_{t=0}^{t}\frac{\partial \rho^{mext}(t)}{\partial t}\exp(\frac{b^m}{a^m}t)dt, \qquad (3)$$

где

$$a^e = \varepsilon,\ b^e = \sigma^e,\ a^m = \mu,\ b^m = \sigma^m. \qquad (4)$$

Уравнения (1) и (3) составляют полную систему уравнений, описывающих электромагнитное поле в однородной изотропной среде. Запишем векторные волновые уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Имеем из первого и второго уравнений Максвелла

$$rotrot\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial \vec{j}^{eext}}{\partial t} - \mu\sigma^e\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot\vec{j}^{mext} - \sigma^m rot\vec{H} \qquad (5)$$

и

$$rotrot\vec{H} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\varepsilon \frac{\partial \vec{j}^{\,mext}}{\partial t} - \varepsilon\sigma^m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot\vec{j}^{\,eext} + \sigma^e rot\vec{E}\,, \qquad (6)$$

соответственно. Перепишем волновые уравнения (5) и (6) в виде

$$rotrot\vec{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma^e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma^m (\sigma^e \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) =$$

$$= -\mu \frac{\partial \vec{j}^{\,eext}}{\partial t} - rot\vec{j}^{\,mext} - \sigma^m \vec{j}^{\,eext}, \qquad (7)$$

$$rotrot\vec{H} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \varepsilon\sigma^m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma^e (-\sigma^m \vec{H} - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) =$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \vec{j}^{\,mext}}{\partial t} + rot\vec{j}^{\,eext} - \sigma^e \vec{j}^{\,mext}. \qquad (8)$$

Далее проведем выкладки только для поля $\vec{E}$, а затем перейдем к результату для поля $\vec{H}$ по принципу двойственности [3]. В силу векторного тождества

$$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E}$$

уравнение (7) можно представить в виде

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - (\mu\sigma^e + \varepsilon\sigma^m)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \sigma^m\sigma^e \vec{E} =$$

$$= graddiv\vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{j}^{\,eext}}{\partial t} + \sigma^m j^{eext} + rotj^{mext}, \qquad (9)$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ - скорость света.

Введем обозначения

$$a = \mu\sigma^e + \varepsilon\sigma^m,\ b = \sigma^m\sigma^e. \qquad (10)$$

Тогда волновое уравнение в формах (7) и (9) можно записать в виде

$$rotrot\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + a\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + b\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{j}^{\,eext}}{\partial t} - rot\vec{j}^{\,mext} - \sigma^m \vec{j}^{\,eext}, \qquad (11)$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - a\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - b\vec{E} = graddiv\vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{j}^{\,eext}}{\partial t} + \sigma^m j^{eext} + rotj^{mext}, \qquad (12)$$

соответственно. Волновое уравнение можно упростить, избавившись от первой производной поля по времени с помощью замены

$$\vec{E} = \tilde{\tilde{\vec{E}}} \exp(-ac^2 t/2). \tag{13}$$

Кроме того, в уравнении (7) введем замены

$$\vec{j}^{\,eext} = \exp(-ac^2 t/2)\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{\,eext},$$

$$\vec{j}^{\,mext} = \exp(-ac^2 t/2)\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{\,mext}, \tag{14}$$

Вычислив первую и вторую производные поля по времени
и учитывая замены (13) и (14), преобразуем уравнение (7) к виду

$$rotrot\tilde{\tilde{\vec{E}}} + \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\vec{E}}}}{c^2 \partial t^2} + (b - a^2 c^2/4)\tilde{\tilde{\vec{E}}} = -\mu\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\vec{j}}}^{\,eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{\,eext}\right) - rot\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{\,mext} - \sigma^m \tilde{\tilde{\vec{j}}}^{\,eext}. \tag{15}$$

Для получения интегрального представления напряженности нестационарного электрического поля, удовлетворяющего волновому уравнению (15), мы применим методику из книги [1] и будем использовать векторный аналог теоремы Грина. Пусть V замкнутая область пространства, ограниченная регулярной (удовлетворяющей условиям Ляпунова) поверхностью S, $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ векторные функции точки, непрерывные в области V и на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными. Тогда, как показано в [1], имеет место векторный аналог теоремы Грина

$$\int_V (\vec{Q}rotrot\vec{P} - \vec{P}rotrot\vec{Q})dv = \int_S \left([\vec{P}rot\vec{Q}] - [\vec{Q}rot\vec{P}]\right)\vec{n}ds, \tag{16}$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S. Положим в (16)

$$\vec{Q} = \varphi\vec{a} \text{ и } \vec{P} = \vec{E}, \tag{17}$$

где $\vec{a}$ постоянный единичный вектор произвольного направления. С использованием формул векторного анализа получаем левую часть (16) в виде

$$\int_V \left(\vec{Q}rotrot\vec{P} - \vec{P}rotrot\vec{Q}\right)dv =$$

$$= \int_V \left[\vec{a}\varphi rotrot\vec{E} + \vec{E}\vec{a}\Delta\varphi - div\left[(\vec{a}grad\varphi)\vec{E}\right] + (\vec{a}grad\varphi)div\vec{E}\right]dv. \tag{18}$$

Так как $\vec{a}$ = const и

$$\int\limits_V div\left[(\vec{a}grad\varphi)\vec{E}\right]dv = \int\limits_S (\vec{n}\cdot\vec{E})(\vec{a}grad\varphi)ds = \int\limits_S (\vec{a}grad\varphi)(\vec{n}\cdot\vec{E})ds = \vec{a}\int\limits_S grad\varphi(\vec{n}\cdot\vec{E})ds,$$

имеем

$$\int\limits_V \left[\vec{a}\varphi rotrot\vec{E} + \vec{E}\vec{a}\Delta\varphi - div\left[(\vec{a}grad\varphi)\vec{E}\right] + (\vec{a}grad\varphi)div\vec{E}\right]dv =$$

$$= \vec{a}\int\limits_V \left[\varphi rotrot\vec{E} + \vec{E}\Delta\varphi + grad\varphi div\vec{E}\right]dv - \vec{a}\int\limits_S (\vec{n}\cdot\vec{E})grad\varphi ds. \qquad (19)$$

Здесь постоянный вектор $\vec{a}$ вынесен за знак интеграла как общий множитель подынтегральных слагаемых.

Теперь вычислим правую часть (16) и с помощью формул векторного анализа преобразуем входящие в нее подынтегральные слагаемые так, чтобы вектор $\vec{a}$ являлся их общим множителем. В результате имеем

$$\int\limits_S \left([\vec{P}rot\vec{Q}] - [\vec{Q}rot\vec{P}]\right)\vec{n}ds =$$

$$= \int\limits_S (\vec{a}[grad\varphi\times[\vec{E}\times\vec{n}]] - \varphi\vec{a}[rot\vec{E}\times\vec{n}])ds = \vec{a}\int\limits_S ([grad\varphi\times[\vec{E}\times\vec{n}]] - \varphi[rot\vec{E}\times\vec{n}])ds, \qquad (20)$$

где вектор $\vec{a}$ вынесен за знак интеграла, как постоянный коэффициент, являющийся общим множителем подынтегральных слагаемых.

Приравнивая выражения (19) и (20), получим (16) в виде

$$\int\limits_V \left[\varphi rotrot\vec{E} + \vec{E}\Delta\varphi + grad\varphi div\vec{E}\right]dv - \int\limits_S (\vec{n}\cdot\vec{E})grad\varphi ds =$$

$$= \int\limits_S ([grad\varphi\times[\vec{E}\times\vec{n}]] - \varphi[rot\vec{E}\times\vec{n}])ds. \qquad (21)$$

Вводя замену

$$\vec{H} = \tilde{\vec{H}}\exp(-ac^2 t/2) \qquad (22)$$

и подставляя выражение для $rotrot\tilde{\vec{E}}$ из (15) в (21) с учетом (13) и (14), получим

$$\int\limits_V [-\varphi\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) - \varphi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2} - \varphi(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} - [\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}\times grad\varphi] -$$

$$-\varphi\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}]dv + \int\limits_V \tilde{\tilde{\vec{E}}}\Delta\varphi dv + \int\limits_V grad\varphi div\tilde{\tilde{\vec{E}}}dv) =$$

$$= \int\limits_S (\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi ds +$$

$$+\int\limits_S [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]ds - \int\limits_S \varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}]ds. \qquad (23)$$

Здесь учтены равенства

$$div\vec{E} = \exp(-ac^2t/2)div\tilde{\tilde{\vec{E}}} \qquad (24)$$

и

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = (\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + (-ac^2/2)\tilde{\tilde{\vec{H}}})\exp(-ac^2t/2), \qquad (25)$$

а также тождество

$$\int\limits_V rot\vec{j}\varphi dv = \int\limits_S [\vec{n}\times\vec{j}]\varphi ds + \int\limits_V [\vec{j}\times grad\varphi]dv, \qquad (26)$$

которое следует из формул векторного анализа

$$rot(\vec{j}\varphi) = [grad\varphi\times\vec{j}] + \varphi rot\vec{j} \qquad (27)$$

и

$$\int\limits_V rot(\vec{j}\varphi)dv = \int\limits_S [\vec{n}\times\vec{j}]ds. \qquad (28)$$

В формуле (23) обозначим объемный и поверхностный интегралы I_V и I_S, соответственно, т.е.,

$$I_V = \int\limits_V [-\varphi\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) - \varphi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2} - \varphi(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} - [\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}\times grad\varphi] -$$

$$-\varphi\sigma^m \tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}]dv + \int\limits_V \tilde{\tilde{\vec{E}}}\Delta\varphi dv + \int\limits_V grad\varphi div\tilde{\tilde{\vec{E}}}dv), \tag{29}$$

$$I_S = \int\limits_S (\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi ds + \int\limits_S [grad\varphi \times [\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]ds -$$

$$-\int\limits_S \varphi[(-\sigma^m \tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu ac^2/2\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}]ds. \tag{30}$$

Выберем в качестве φ решение скалярного однородного волнового уравнения для непроводящей среды

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

и вычислим сумму $\Sigma_1 = \tilde{\tilde{\vec{E}}}\Delta\varphi - \varphi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2}$. Имеем

$$\Sigma_1 = \frac{1}{c^2}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2}).$$

Прямая проверка показывает, что

$$\Sigma_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}). \tag{31}$$

С учетом равенства (31) получим выражение для объемного интеграла I_V:

$$I_V = (\int\limits_V [-\varphi\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}) - \varphi(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} -$$

$$-[\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}\times grad\varphi] - \varphi\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext} + grad\varphi div\tilde{\tilde{\vec{E}}}]dv). \tag{32}$$

Следуя методике [1], положим

$$\varphi = \frac{1}{r}D_0 = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\gamma}\exp(-\frac{(t+t')^2}{2\gamma^2}) = \frac{1}{r}D_0(t+t'), \tag{33}$$

где $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$, (x', y', z') - декартовы координаты точки наблюдения, (x, y, z) - декартовы координаты точки интегрирования в формуле (16), $t' = r/c$, а γ - некоторый постоянный малый параметр, который в дальнейшем будет устремлен к нулю.

Мы рассматриваем непрерывные функции [12] такие, для которых

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \int\limits_{V} dv dt = \int\limits_{V} \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} dt dv \tag{34}$$

и

$$\lim_{\gamma \to 0} \int\limits_{V} \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} dv dt = \int\limits_{V} \lim_{\gamma \to 0} \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} dt dv . \tag{35}$$

При $\gamma \to 0$ функция D_0 превращается в δ-функцию. Нормировка D_0 такова, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_0(t) dt = 1 . \tag{36}$$

Для того, чтобы иметь дело с функцией, которая непрерывна со своими производными, пока мы не будем переходить к пределу при $\gamma \to 0$. (В дальнейшем мы проинтегрируем левую и правую части равенства (23) по времени от $t = -\infty$ до $t = \infty$ и перейдем к пределу при $\gamma \to 0$.)

Подставим выражение (33) для φ в объемный интеграл (32), учтем, что

$$grad\varphi = grad(\frac{1}{r} D_0(t + t')) = (-\frac{1}{r^2} D_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial D_0}{\partial r}) gradr = \frac{1}{r}(\frac{1}{r} D_0 - \frac{\partial D_0}{\partial r})\vec{r}_0 , \tag{37}$$

где $\vec{r}_0$ - это единичный вектор, направленный от точки интегрирования (x, y, z) к точке наблюдения (x', y', z'),

$$\frac{\partial D_0(t + r/c)}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_0(t + r/c)}{\partial (t + r/c)} , \tag{38}$$

и проинтегрируем результат по времени от $t = -\infty$ до $t = \infty$. В результате получим

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} I_V dt = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_V [-\frac{1}{r} D_0(t+t')\mu(\frac{\partial \tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) +$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial(\frac{1}{r}D_0(t+t'))}{\partial t} - \frac{1}{r}D_0(t+t')\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}) - \frac{1}{r}D_0(t+t')(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} -$$

$$-[\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext} \times \frac{1}{r}(\frac{1}{r}D_0 - \frac{\partial D_0}{\partial r})\vec{r}_0] - \frac{1}{r}D_0(t+t')\sigma^m \tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext} +$$

$$+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}D_0 - \frac{\partial D_0}{\partial r})\vec{r}_0 div\tilde{\tilde{\vec{E}}}]dvdt. \qquad (39)$$

В силу (34) можно поменять порядок интегрирования в (39). Учитывая, что

$$\int \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t})dt = \frac{1}{c^2}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}),$$

и что, в соответствии с (33), $\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ при $t = -\infty$ и $t = \infty$, имеем

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t})dt = \frac{1}{c^2}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\ . \qquad (40)$$

В (39) перейдем к пределу при $\gamma \to 0$ и учтем (40):

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} I_V dt = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_V [-\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0} D_0(t+t')\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) -$$

$$-\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0} D_0(t+t')(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} - [\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext} \times \frac{1}{r}(\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0} D_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \lim\limits_{\gamma\to 0} D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0] -$$

$$-\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0} D_0(t+t')\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext} + \frac{1}{r}(\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0} D_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \lim\limits_{\gamma\to 0} D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0 div\tilde{\tilde{\vec{E}}}]dvdt. \qquad (41)$$

Так как

$$\lim_{\gamma\to 0} D_0(t+r/c) = \delta(t+r/c), \qquad (42)$$

то с учетом свойств δ-функции [12]

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t+t')dt = f(-t') \qquad (43)$$

и

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\partial\delta(t+t')}{\partial t}dt = -\frac{\partial f}{\partial t}|_{t=-t'}\,, \qquad (44)$$

мы получаем из (41)

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_V\,dt = \int_V [-\frac{1}{r}\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t}|_{t=-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c}) -$$

$$-\frac{1}{r}(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c} - \frac{1}{r}[\frac{1}{r}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{t=-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}}{\partial t}|_{t=-r/c}]\times\vec{r}_0 - \frac{1}{r}\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c} +$$

$$+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c})\vec{r}_0]dvdt\,. \qquad (45)$$

Теперь рассмотрим поверхностный интеграл в (23) с учетом замен (13), (14) и (22):

$$I_S = \int_S ((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi + [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]] - \varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds\,.$$

(46)

Функция φ имеет особенность в точке $r=0$. Следуя методике [1], окружим эту точку сферой S_1 малого радиуса r_1 с центром в точке наблюдения (x', y', z'), исключив тем самым эту точку из области V. Имеем

$$I_V = I_{S_1} + I_{S_2} \qquad (47)$$

где S_2 - это внешняя поверхность, ограничивающая объем V,

$$I_{S_1} = \int_{S_1} ((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi + [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]] -$$

$$-\varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds\,, \qquad (48)$$

$$I_{S_2}=\int\limits_{S_2}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi+[grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]-$$

$$-\varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}}-\mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}+\mu\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds\,. \qquad (49)$$

Рассмотрим первый из поверхностных интегралов и вычислим сумму двух первых слагаемых подынтегрального выражения. Напомним, что $\vec{n}$ - это внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем V, а единичный вектор $\vec{r}/r=\vec{r}_0$ направлен к точке наблюдения (x',y',z'). На поверхности S_1 имеем $\vec{n}=\vec{r}_0$. Представив выражение для $grad\varphi$ (37) в виде

$$grad\varphi=(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\,, \qquad (50)$$

имеем

$$(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi+[grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]=(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0+$$

$$+[(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]=$$

$$=(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})\vec{n}+[\vec{n}\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]])\,. \qquad (51)$$

Так как

$$(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})\vec{n}+[\vec{n}\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]=\tilde{\tilde{\vec{E}}}\,,$$

то

$$(\vec{n}\cdot\vec{E})grad\varphi+[grad\varphi\times[\vec{E}\times\vec{n}]]=\vec{E}(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)}) \qquad (52)$$

и, следовательно,

$$I_{S_1}=\int\limits_{S_1}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})+\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\tilde{\tilde{\vec{H}}}\times\vec{n}]+$$

$$+\frac{1}{r}D_0\mu[(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds\,. \qquad (53)$$

Теперь проинтегрируем выражение (52) от $t=-\infty$ до $t=\infty$ и перейдем к пределу при $\gamma\to 0$, учитывая свойства рассматриваемых функций (34) и (35) и свойства δ-функции (43) и (44):

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_{S_1}\,dt=\int_{S_1}\int_{t=-\infty}^{\infty}\lim_{\gamma\to 0}\tilde{\tilde{\vec{E}}}\Big(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)}\Big)-\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}]-$$

$$-\frac{1}{r}D_0\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})])dtds=\int_{S_1}(\frac{1}{r^2}\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}+\frac{1}{cr}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}-$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c}]-\frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c})])ds. \qquad (54)$$

Далее, устремляя радиус маленькой сферы S_1 к нулю, $r_1\to 0$, получим

$$\lim_{r_1\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_{S_1}\,dt=4\pi\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=0}. \qquad (55)$$

Рассмотрим интеграл по внешней поверхности I_{S_2}, выраженный соотношением (49):

$$I_{S_2}=\int_{S_2}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})(-\frac{1}{r^2}D_0+\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0+[(-\frac{1}{r^2}D_0+\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]-$$

$$-\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}]-\frac{1}{r}D_0\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})])ds. \qquad (56)$$

На поверхности S_2 вектор $\vec{r}_0$ направлен к точке наблюдения, т.е., внутрь S_2.

Далее проинтегрируем выражение (56) от $t=-\infty$ до $t=\infty$ и перейдем к пределу при $\gamma\to 0$, учитывая свойства рассматриваемых функций (34) и (35) и свойства δ-функции (43) и (44):

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_{S_2}\,dt = \int_{S_2}\int_{t=-\infty}^{\infty}\lim_{\gamma\to 0}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})(\frac{1}{r^2}D_0 - \frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0 +$$

$$+[(\frac{1}{r^2}D_0 - \frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]] - \frac{1}{r}D_0\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}] - \frac{1}{r}D_0\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})])dtds =$$

$$= \int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}) + \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}))\vec{r}_0 + [\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}\times\vec{n}]] + \frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}\times\vec{n}]) -$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c}] - \frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{t=-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c})])ds. \qquad (57)$$

Используя равенство

$$\lim_{\gamma\to 0}\lim_{r_1\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_V\,dt = \lim_{\gamma\to 0}\lim_{r_1\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_{S_1}\,dt + \lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_{S_2}\,dt \qquad (58)$$

и соотношения (23), (45), (47), (55), (57) и (58), получим

$$4\pi\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=0} = \int_V[-\frac{1}{r}\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t}|_{t=-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c}) -$$

$$-\frac{1}{r}(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c} - [\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{t=-r/c}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rc}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}}{\partial t}|_{t=-r/c}]\times\vec{r}_0 -$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c} + +\frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c})\vec{r}_0]dvdt -$$

$$-\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}) + \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}))\vec{r}_0 + [\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}\times\vec{n}]] +$$

$$+\frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}\times\vec{n}]) - -\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c}] -$$

$$-\frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{t=-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c})])ds. \qquad (59)$$

Повторяя рассуждение [1] о том, что момент наблюдения $t = 0$ выбран произвольно, можно переписать (59) в виде

$$4\pi\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t} = \int_V [-\frac{1}{r}\mu(\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{eext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{j}}^{eext}|_{\tau=t-r/c}) -$$

$$-\frac{1}{r}(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t-r/c} - [\tilde{\vec{j}}^{mext}|_{\tau=t-r/c}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rc}\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{mext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}]\times\vec{r}_0 -$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m\tilde{\vec{j}}^{eext}|_{\tau=t-r/c} + \frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\vec{E}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c})\vec{r}_0]dvdt -$$

$$-\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t-r/c}) + \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}))\vec{r}_0 + [\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}]] +$$

$$+\frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}]) - \frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t-r/c}] - \frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\vec{H}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c} -$$

$$-\frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t-r/c})])ds. \qquad (60)$$

Формулу (60) можно получить и формально. Для этого нужно везде сделать замену $t \to \tau$ и в формуле (33) положить $t' = r/c - t$.

Применив принцип двойственности [3] к (60), получаем интегральное представление для вектора напряженности нестационарного магнитного поля

$$4\pi\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t} = \int_V [-\frac{1}{r}\varepsilon(\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{mext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{j}}^{mext}|_{\tau=t-r/c}) -$$

$$-\frac{1}{r}(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t-r/c} + [\tilde{\vec{j}}^{eext}|_{\tau=t-r/c}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rc}\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{eext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}]\times\vec{r}_0 -$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^e\tilde{\vec{j}}^{mext}|_{\tau=t-r/c} + \frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\vec{H}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c})\vec{r}_0]dvdt -$$

$$-\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t-r/c}) + \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\vec{H}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}))\vec{r}_0 +$$

$$+[\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\vec{H}}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}]] + \frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\vec{H}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}]) -$$

$$+\frac{1}{r}\sigma^e[\vec{n}\times\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t-r/c}] + \frac{1}{r}\varepsilon[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{E}}|_{\tau=t-r/c})])ds. \qquad (61)$$

В случае, когда все функции зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$ и $\sigma^e = \sigma^m = 0$, формулы (60) и (61) переходят в интегральные представления [1, раздел 8.14, с. 410, формулы (19), (20)] известные как формулы Стрэттона-Чу.

Таким образом, получены интегральные представления для векторов напряженностей нестационарных электрического и магнитного полей в однородной изотропной проводящей среде. В соответствии с полученными соотношениями, поле в любой момент времени в произвольной точке внутри некоторого объема выражается через интеграл по поверхности, ограничивающей данный объем, и интеграл по объему. Подынтегральные функции содержат значения напряженностей полей, сторонних токов и зарядов, а также производных этих величин по времени в моменты, предшествующие моменту наблюдения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

2. Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977.

3. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М: Радио и связь, 1983.

4. *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Издательство Московского университета, 1987.

5. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

6. *Васильев Е. Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.

7. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Издательство Московского университета, 1983.

8. Transient Electromagnetic Fields/ Ed. by L. B. Felsen (Topics in Applied Physics, V. 10). New York: Springer--Verlag, 1977.

9. *Васильев Е. Н., Ефимова, И.Г.*// Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. №1. С.87--95.

10. *Кравцов В. В.*// Вычислительные методы и программированию. Сб. работ Вычислительного центра МГУ. Вып. 5. 1966. С. 260.

11. *Ефимова И. Г.*// Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. №12. С. 1486-1488.

12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.